**Fisica 1 modulo 1 per informatica. 19 Novembre 1999 Primo compito di esonero (cinematica). Risposte.**

## Esercizio 1

**1.1** La velocità media fra il tempo $t_1$ ed il tempo $t_2$ è definita come il rapporto fra lo spazio percorso e la lunghezza dell'intervallo di tempo considerato:

$$\overline{v}\,(t_1,t_2) \equiv \frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1} \ .$$

Allora se $t_2 = 4s$ e $t_1 = 2s$ si ha che $\Delta t \equiv t_2 - t_1 = 2s$, e le tre componenti cartesiane della velocità media valgono

$$\begin{cases} \overline{v_x} = \frac{8-4}{2}\ \frac{m}{s} = 2\ \frac{m}{s}\ , \\ \overline{v_y} = \frac{3(16-4)}{2}\ \frac{m}{s} = 18\ \frac{m}{s}\ , \\ \overline{v_z} = \frac{64-8}{2}\ \frac{m}{s} = 28\ \frac{m}{s}\ . \end{cases}$$

**1.2** La velocità e l'accelerazione istantanee del punto materiale vengono ricavate derivando rispettivamente una e due volte le equazioni del moto del punto. Si ha quindi che

$$\begin{cases} v_x(t) = 2\ , \\ v_y(t) = 6t\ , \\ v_z(t) = 3t^2\ , \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} a_x(t) = 0\ , \\ a_y(t) = 6\ , \\ a_z(t) = 6t\ . \end{cases}$$

I moduli di velocità ed accelerazione valgono rispettivamente

$$v(t) \equiv |\vec{v}(t)| = \sqrt{4+36t^2+9t^4}\ \frac{m}{s}\ ,$$

e

$$a(t) \equiv |\vec{a}(t)| = \sqrt{36+36t^2}\ \frac{m}{s^2} = 6\sqrt{1+t^2}\ \frac{m}{s^2}\ .$$

**1.3** Al tempo $t = 3s$ quindi $v(t) \simeq 32.51 \ \frac{m}{s}$ e $a(t) \simeq 18.97 \ \frac{m}{s^2}$.

## Esercizio 2

**2.1** Deriviamo le equazioni del moto del sasso. La sola accelerazione nel problema ̀quella dovuta alla forza di gravità, diretta verso il basso (direzione negativa dell'asse $y$). Il moto è bidimensionale dato che non ha componenti nella direzione $z$ (che quindi non indichiamo esplicitamente). Abbiamo cioè che

$$\begin{cases} a_x(t) = 0 \ , \\ a_y(t) = -g \ . \end{cases}$$

La velocità si ottiene integrando le componenti cartesiane dell'accelerazione rispetto al tempo. Dato che la velocità iniziale ha modulo $v_0$ e forma un angolo $\theta_0$ con l'orizzontale (lungo la quale poniamo l'asse $x$) si ha che

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos(\theta_0) \quad (= v_x^0) \ , \\ v_y(t) = v_0 \sin(\theta_0) - gt \ . \end{cases}$$

Integrando ancora una volta rispetto al tempo possiamo determinare le equazioni del moto del punto. La coordinata $x$ al tempo zero è zero, mentre la $y(t = 0)$ è proprio $h_6$ (altezza del sesto piano). Si ha quindi che

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\theta_0) t + x_0 \ = \ v_0 \cos(\theta_0) t \ , \\ y(t) = v_0 \sin(\theta_0) t - \frac{gt^2}{2} + y_0 = h_6 + v_0 \sin(\theta_0) t - \frac{gt^2}{2} \ . \end{cases}$$

**2.2, 2.3** Il tempo dopo il quale il sasso passa ad una distanza $d$ nella direzione $x$ dal palazzo è dato da

$$t_d = \frac{d}{v_0 \cos(\theta_0)} \ .$$

Sappiamo che in quel momento $y(t_d) = h_2$, cioè

$$h_2 = h_6 + (v_0 \sin(\theta_0)) \frac{d}{v_0 \cos(\theta_0)} - g \frac{d^2}{v_0^2 \cos^2(\theta_0)} \ ,$$

e definendo $\Delta h \equiv h_6 - h_2$ si ha che

$$v_0^2 = \frac{gd^2}{2\cos(\theta_0)} \frac{1}{\Delta h \cos(\theta_0) + d\sin(\theta_0)} \ .$$

La soluzione fisicamente rilevante per $v_0$ ha il segno positivo (è un modulo), quindi:

$$v_0 = +d\sqrt{\frac{g}{2\cos(\theta_0)} \frac{1}{\Delta h \cos(\theta_0) + d\sin(\theta_0)}} \ .$$

Sostituendo quest'espressione nella formula per $t_d$ abbiamo che

$$t_d = \frac{1}{\cos(\theta_0)} \left( \frac{g}{2\cos(\theta_0)} \frac{1}{\Delta h \cos(\theta_0) + d\sin(\theta_0)} \right)^{-\frac{1}{2}} \ .$$

Nel nostro caso $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, e quindi $\cos(\theta_0) = \sin(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Quindi (usiamo $g \simeq 9.81 \ \frac{m}{s^2}$)

$$v_0 = d\sqrt{\frac{g}{\Delta h + d}} \simeq 11.07 \ \frac{m}{s} \ ,$$

e

$$t_d \simeq 2.55 s \ ,$$

che conclude il nostro calcolo.

## Esercizio 3

**3.1** In un moto circolare uniforme il modulo della velocità è costante ed è dato da $\omega R$, che nel nostro caso ha il valore numerico di 15 $\frac{m}{s}$ (nel tempo cambia solo la direzione del vettore velocità). Cioè

$$v(t_1) \equiv |\vec{v}(t_1)| = v = \omega R = 15 \ \frac{m}{s} \ .$$

**3.2** Dato che $v$ non dipende dal tempo

$$v(t_3) \equiv |\vec{v}(t_3)| = v = \omega R = 15 \ \frac{m}{s} \ .$$

**3.3** In un moto circolare uniforme il vettore velocità è sempre ortogonale al vettore raggio, quindi il loro prodotto scalare è nullo (la velocità è puramente tangenziale):

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0 \text{ per ogni } t \ .$$

**3.4** In un moto circolare uniforme il modulo dell'accelerazione vale

$$|\vec{a}(t)| = R\omega^2 = 45 \ \frac{m}{s^2} \ .$$

**3.5** In un moto circolare uniforme il vettore accelerazione e' sempre parallelo al vettore raggio (ed opposto in verso). Quindi

$$|\vec{r}(t) \cdot \vec{a}(t)| = R^2\omega^2 = 225 \ \frac{m^2}{s^2} \ .$$