

# Divergenza Superficiale

Nicola Cabibbo

18 Aprile 1999

La rinormalizzabilità di una teoria dei campi dipende dalla natura delle divergenze che si incontrano nello sviluppo perturbativo. Vedremo che lo studio delle divergenze in teoria dei campi si può in larga misura ridurre a una analisi dimensionale. Nelle unità naturali in cui  $\hbar = c = 1$  possiamo scegliere come unità di misura una unità di energia (o di massa). Qualsiasi altra grandezza  $G$  ha dimensioni  $D$ ,  $[G] = [E^D]$ , ad esempio una lunghezza  $L$  ha dimensioni  $D = -1$ , mentre una densità di energia (o di lagrangiano) ha dimensioni 4.

Supponiamo che la densità di lagrangiano di interazione sia una somma di termini:

$$(1) \quad \mathcal{L}' = \sum_k \mathcal{L}_k,$$

dove ogni termine è il prodotto di una costante  $G_k$  e di un operatore costruito come prodotto di campi fermionici e bosonici e delle loro derivate. Per l'argomento che viene sviluppato in questa sezione, non importa in che modo i campi e le loro derivate siano combinati, quindi possiamo omettere indici spinoriali e vettoriali, matrici  $\gamma$ , etc. e scrivere semplicemente:

$$(2) \quad \mathcal{L}_k = G_k \partial^{C_k} \psi^{A_k} \phi^{B_k}$$

Dove  $\phi$  sta per qualsiasi campo bosonico,  $\psi$  per un campo fermionico e  $\partial$  per un operatore di derivata che può agire su uno degli  $\psi$  o dei  $\phi$ . L'operatore (2) ha una dimensionalità  $4 + d_k$ , dove<sup>1</sup>:

$$(3) \quad d_k = \frac{3}{2}A_k + B_k + C_k - 4$$

e quindi, dato che una densità di lagrangiano deve avere dimensione 4, la costante di accoppiamento  $G_k$  ha la dimensionalità di  $E^{-d_k}$ . Ad esempio per la Lagrangiana di Fermi delle interazioni deboli,  $G(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\psi)$ , ho  $[G] = [E^{-2}]$ .

Nella discussione che segue useremo il termine *diagramma* per indicare un singolo grafico di Feynman, ed il termine *processo* per indicare una grandezza descritta da una somma di diagrammi. Quindi un processo potrebbe essere l'ampiezza per la diffusione elettrone-positrone o il vertice elettrone-fotone. Con-

---

<sup>1</sup>La densità di lagrangiano per un fermione contiene un termine  $\bar{\psi}(\gamma \cdot \partial)\psi$ , e quella per un bosone contiene termini del tipo  $(\partial\phi)(\partial\phi)$ . Quindi i campi fermionici hanno dimensione  $\frac{3}{2}$  ed i bosoni dimensione 1.

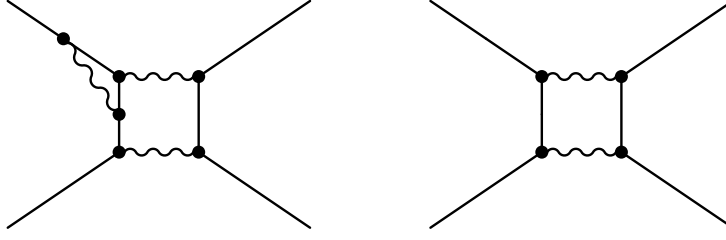


Figura 1: In QED, questi diagrammi sono ambedue *superficialmente* convergenti. Quello di sinistra è però divergente a causa di una *inserzione* vertice.

sideriamo ora il grado di divergenza superficiale di un diagramma che contiene:

$$(4) \quad \begin{cases} f_e \text{ linee fermioniche esterne} \\ b_e \text{ linee bosoniche esterne} \\ f_i \text{ linee fermioniche interne} \\ b_i \text{ linee bosoniche interne} \\ V_k \text{ vertici del tipo } \mathcal{L}_k \end{cases}$$

L'espressione del diagramma può essere schematicamente scritta come:

$$(5) \quad \int dK^{4L} \frac{K^C}{(K+m)^{f_i} (K^2+m^2)^{b_i}}$$

In questa espressione  $L$  è il numero di cicli (in inglese *loop*), cioè di integrazioni da eseguire, e il numeratore  $K^C$  proviene dalle derivate — equivalenti a impulsi — nei vertici. I  $K$  che appaiono al numeratore o nei propagatori sono combinazioni lineari delle variabili di loop e degli impulsi delle linee esterne. Abbiamo trascurato indici vettoriali, matrici gamma, spinori, etc. L'integrale sarà superficialmente convergente o divergente nel limite  $K \rightarrow \infty$  a seconda del valore di:

$$(6) \quad \begin{aligned} D &= 4L - f_i - 2b_i + C, \quad \text{ed esplicitando } C : \\ D &= 4L - f_i - 2b_i + \sum_k V_k C_k \end{aligned}$$

$D$  rappresenta il grado di divergenza superficiale:  $D = 0$  corrisponde a una divergenza logaritmica,  $D = 2$  a divergenza quadratica, e così via. Se  $D < 0$  il diagramma è detto *superficialmente convergente*. Notiamo che valori dispari di  $D$  vengono degradati di una unità, perché possiamo assumere che l'integrale di una funzione che è una potenza dispari di  $K$  sia identicamente nullo. Quindi  $D = 1$  corrisponde in realtà a una divergenza logaritmica, e così via.

Perché superficialmente? Perché è ancora possibile incontrare divergenze dovute alla presenza di sottodiagrammi divergenti. In elettrodinamica, ad esempio, un diagramma superficialmente convergente può contenere un sottodia-

gramma divergente sotto la forma di una correzione ad un vertice — vedi Fig. 1 — o una self-energia in una linea elettronica o fotonica<sup>2</sup>.

Si può dimostrare che, in una teoria rinormalizzabile, le divergenze derivanti dai sottodiagrammi sono cancellate interamente dal processo di rinormalizzazione. Quindi le divergenze di un diagramma dovute a una parte vertice sono cancellate se al diagramma stesso sommiamo il diagramma in cui la parte vertice è sostituita dal controtermine corrispondente.

Se un diagramma ha  $D \geq 0$ , non è detto che esso sia effettivamente divergente o che abbia il grado di divergenza indicata dal valore di  $D$ . Può infatti accadere una cancellazione esatta dei termini divergenti, una volta che l'espressione del diagramma sia scritta in forma più completa di quella della eq. (5). Oppure può capitare che la divergenza di un diagramma sia esattamente cancellata da quella di un altro. La QED offre esempi di questi tipi di cancellazioni, e come vedremo essi nascono da simmetrie della teoria. Ci aspettiamo che questo sia vero in generale, e che in assenza di simmetrie che garantiscono una cancellazione dei termini divergenti, un valore  $D \geq 0$  corrisponda a una divergenza effettiva.

Se  $D \geq 0$ , e non si hanno cancellazioni, il diagramma è divergente e richiede un controtermine. In questo caso il diagramma è detto *primitivamente divergente*: la sua divergenza non è dovuta a quella di un sottodiagramma. Perché una teoria sia rinormalizzabile occorre che il numero di controtermini sia finito.

Notiamo che ad ogni controtermine corrisponde in generale una grandezza fisica arbitraria, sulla quale la teoria non fa previsioni, ma che deve essere determinata dall'esperimento. Nella QED sia la massa dell'elettrone che la sua carica elettrica sono grandezze arbitrarie, non determinate dalla teoria. Fissato il loro valore, qualsiasi altra grandezza fisica può in linea di principio essere calcolata.

Se la teoria non è rinormalizzabile il numero delle costanti arbitrarie è infinito, e la teoria non può predire nulla. Una teoria non rinormalizzabile non è una teoria utile, o almeno non è una teoria cui si possa dare un senso con lo sviluppo perturbativo.

Possiamo ridurre la (6) in una forma più utile sfruttando alcune relazioni tra i vari parametri. Notiamo anzitutto su ogni vertice di tipo  $k$  terminano  $A_k$  linee fermioniche, e che ogni linea fermionica esterna ha una "terminazione", mentre ogni linea fermionica interna ne ha due; ne segue che

$$(7) \quad f_e + 2f_i = \sum_k V_k A_k \quad \text{e, con argomento analogo,}$$

$$(8) \quad b_e + 2b_i = \sum_k V_k B_k$$

Una relazione analoga esiste per il numero dei loop,  $L$ . Per ottenerla ricordiamo che nel costruire l'espressione per il nostro diagramma, ad ogni propagatore corrisponde un  $\int d^4k$ , e ad ogni vertice una funzione  $\delta(\sum K)$ . Ogni  $\delta$  elimina una integrazione, se si esclude una  $\delta$  residua che esprime la conservazione dell'impulso-energia e che dipende solamente dagli impulsi delle linee esterne.

---

<sup>2</sup>In questi casi l'integrando in eq. (5) non ha lo stesso comportamento in tutte le direzioni nello spazio a  $4L$  dimensioni su cui si estende la integrazione; in particolare esso si annulla più lentamente lungo le direzioni che corrispondono agli impulsi dei sottodiagrammi divergenti.

Il numero degli integrali da eseguire, cioè il numero dei loop, è quindi dato da:

$$(9) \quad L = b_i + f_i - \left( \sum_k V_k - 1 \right)$$

Se adesso sostituiamo la (9) nella (6), ed usiamo le (7) e (8) per eliminare  $f_i$  e  $b_i$  dalla espressione risultante, otteniamo, tenendo conto della (3):

$$(10) \quad D = 4 - \frac{3}{2}f_e - b_e + \sum_k V_k d_k$$

Questa equazione è molto espressiva: ci permette di distinguere le teorie di campo in due classi:

**I** Teorie in cui tutti i termini di interazione  $\mathcal{L}_k$  nel lagrangiano hanno dimensione minore o eguale a 4, e cioè  $d_k \leq 0$

**II** Teorie in cui uno (o più) degli  $\mathcal{L}_k$  ha  $d_k > 0$

Per le teorie di I classe, possiamo trasformare la (10) in una diseuguaglianza:

$$(11) \quad D \leq D_P = 4 - \frac{3}{2}f_e - b_e \quad (\text{teorie di I classe})$$

Quindi nelle teorie di I classe il valore della divergenza superficiale di un *diagramma*,  $D$ , è maggiorata da una grandezza,  $D_P$ , che è solo funzione della quantità e tipo delle linee esterne, cioè del *processo*. Solo alcuni processi possono avere diagrammi “primitivamente divergenti”, quelli con:

$$\begin{cases} f_e = 2, b_e = 0 & D_P = 1 & \text{self-energia di un fermione} \\ f_e = 2, b_e = 1 & D_P = 0 & \text{vertice fermione-bosone} \\ f_e = 0, b_e = 2 & D_P = 2 & \text{self-energia di un bosone} \\ f_e = 0, b_e = 3 & D_P = 1 & \text{vertice a tre bosoni} \\ f_e = 0, b_e = 4 & D_P = 0 & \text{vertice a quattro bosoni} \end{cases}$$

Quindi una teoria di I classe è una ottima candidata per essere rinormalizzabile. Non basta che una teoria sia di prima classe per essere sicuri della sua rinormalizzabilità, occorre dimostrare che i controtermini necessari a dare un valore finito ai diagrammi primitivamente divergenti “curano” anche quei diagrammi che sono superficialmente convergenti, ma che divergono a causa di un sottodiagramma. Questo è in generale vero, ma la dimostrazione può essere complessa.

Nelle teorie di seconda classe, al contrario, per qualsiasi processo esistono diagrammi con divergenza superficiale arbitrariamente alta. Quindi ci aspettiamo che teorie di II classe non siano rinormalizzabili. Un esempio di teoria di II classe, che non è infatti rinormalizzabile, è dato dalla teoria di Fermi delle interazioni deboli, che ha un lagrangiano di interazione con dimensione 6,  $d = 2$ .

## Elettrodinamica Quantistica

Tutti i termini della lagrangiana QED sono operatori con dimensione minore o eguale a 4, quindi questa teoria ha tutte le caratteristiche per essere rinormalizzabile. In effetti la rinormalizzabilità della QED è stata dimostrata. Inoltre

le simmetrie della teoria riducono o eliminano la divergenza di alcuni processi primitivamente divergenti: il vertice a tre fotoni è vietato dalla coniugazione di carica (teorema di Furry), mentre la invarianza di gauge riduce la divergenza del vertice a quattro fotoni, rendendolo in effetti convergente, e quella della self-energia del fotone, che è degradata da quadratica — come ci si aspetterebbe da  $D = 2$  — a logaritmica. Se aggiungessimo al lagrangiano “minimale” della QED un termine di momento magnetico:

$$\mathcal{L}' = \mu(\bar{\psi}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\psi)$$

la teoria diverrebbe non rinormalizzabile, dato che il nuovo termine ha dimensione 5,  $d = 1$ .

## Bosoni vettoriali con massa

Nella equazione (6) abbiamo assunto che ogni linea bosonica interna porti un fattore di convergenza  $K^{-2}$ . Questo non è vero nel caso di un bosone vettoriale con massa  $M \neq 0$ , il cui propagatore:

$$(12) \quad D_{\mu\nu}(K) = \frac{g_{\mu\nu} - \frac{K_\mu K_\nu}{M^2}}{K^2 - M^2 + i\epsilon}$$

tende a costante nel limite  $K \rightarrow \infty$ . Quindi questo caso va trattato a parte, ad esempio riscrivendo la eq (2) come:

$$(13) \quad \mathcal{L}_k = G_k \partial^{C_k} \psi^{A_k} \phi^{B_k} W^{W_k}$$

dove  $W$  indica un bosone vettoriale con massa,  $\phi$  qualsiasi altro bosone il cui propagatore si comporta come  $K^{-2}$  per  $K \rightarrow \infty$ . Lasciamo come esercizio la dimostrazione che in questo caso la eq. (10) diviene:

$$(14) \quad D = 4 - \frac{3}{2}f_e - b_e - 2W_e + \sum_k V_k(d_k + W_k)$$

dove  $W_e$  è il numero dei bosoni vettoriali “esterni” (entranti o uscenti)  $b_e$  il numero di bosoni esterni che non sono vettoriali con massa diversa da zero (fotoni, etc.) e  $d_k$  è definito come:

$$(15) \quad d_k = \frac{3}{2}A_k + B_k + C_k + W_k - 4$$

Notiamo che, come nel caso della eq. (3),  $4 + d_k$  rappresenta la dimensionalità dell'operatore  $\mathcal{L}_k$ .

Per teorie con bosoni vettoriali con massa  $M \neq 0$ , la distinzione tra I e II classe va ridefinita sulla base del valore di  $(d_k + W_k)$  nei termini del lagrangiano di interazione. Vediamo allora che una teoria con bosoni vettoriali con massa  $M \neq 0$  è necessariamente di II classe. Infatti i termini di interazione con minima

dimensione sono<sup>3</sup> del tipo:

$$\begin{cases} \partial W^3 & (d+W) = 3 & \text{Interazione tra W} \\ \partial W \phi^2 & (d+W) = 1 & \text{Interazione tra W e altri bosoni} \\ W^2 \phi & (d+W) = 1 & \text{Interazione tra W e altri bosoni} \\ W \psi^2 & (d+W) = 1 & \text{Interazione tra W e fermioni} \end{cases}$$

Quindi una teoria con bosoni vettoriali con massa diversa da zero non è in generale rinormalizzabile. Per recuperare la rinormalizzabilità occorre garantirsi che i termini  $k^\mu k^\nu / M^2$  nel propagatore non contribuiscano ad aumentare il grado di divergenza. Questo “miracolo si realizza nelle teorie di gauge, in cui i bosoni vettoriali nascono senza massa, ma possono acquistare una massa con il meccanismo di Higgs; teorie di questo tipo sono rinormalizzabili.

## Le divergenze e i controtermini

L'integrale (5) può essere riscritto

$$(16) \quad F(P) = \int dK^{4L} I(K, P)$$

Dove l'integrando  $I(K, P)$  è una funzione razionale degli impulsi interni  $K$  e degli impulsi esterni  $P$ , di grado  $C - f_i - 2b_i$ . Il risultato dell'integrale,  $F(P)$ , è solamente funzione degli impulsi esterni,  $P_1, \dots, P_n$  con  $n = f_e + b_e$ .

Se  $D \geq 0$  (eq. (6)) la funzione  $F(P_1^\mu, \dots, P_n^\mu)$ , superficialmente divergente, può essere espressa come

$$(17) \quad F(P_1^\mu, \dots, P_n^\mu) = Q(P_1^\mu, \dots, P_n^\mu) + F_C(P_1^\mu, \dots, P_n^\mu)$$

dove  $Q$  è un polinomio di ordine  $D$  negli impulsi esterni con coefficienti potenzialmente divergenti, mentre  $F_C$  è superficialmente convergente. Possiamo infatti scrivere

$$\begin{aligned} I(K, P) = & I(K, 0) + \sum_l P_l^\mu \frac{\partial I}{\partial P_l^\mu} \Big|_{P=0} \\ & + \dots + 1/D! \sum_{l_1 \dots l_D} P_{l_1}^{\mu_1} P_{l_D}^{\mu_D} \frac{\partial^D I}{\partial P_{l_1}^{\mu_1} \dots \partial P_{l_D}^{\mu_D}} \Big|_{P=0} + I_C(K, P) \end{aligned}$$

Dove  $I_C(K, P)$  è una funzione razionale di grado  $C - f_i - 2b_i - D - 1$ , il cui integrale è superficialmente convergente.

Ogni derivata sottrae una unità al grado di divergenza. Infatti, nel limite

---

<sup>3</sup>Ogni termine del lagrangiano d'interazione deve contenere tre o più campi (termini con due campi fanno parte della lagrangiana libera), ed essere uno scalare. Uno scalare si può costruire dal prodotto di campi saturando gli indici vettoriali con i tensori invarianti  $g^{\mu\nu}$  o  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ , operazioni che cambiano di due o di quattro il numero degli indici tensoriali liberi. Quindi non è possibile costruire uno scalare a partire da un prodotto di campi che contenga un numero dispari di indici vettoriali, e questo esclude termini del tipo  $W^3$  o  $W\phi^2$ .

$K \rightarrow \infty$  abbiamo

$$\begin{aligned}
 I(K, 0) &\approx K^{C-f_i-2b_i} \\
 \left. \frac{\partial I}{\partial P_l^\mu} \right|_{P=0} &\approx K^{C-f_i-2b_i-1} \\
 \left. \frac{\partial^2 I}{\partial P_l^\mu \partial P_k^\nu} \right|_{P=0} &\approx K^{C-f_i-2b_i-2} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

In una teoria rinormalizzabile il numero dei processi superficialmente divergenti è finito, e a ciascuno di questi corrisponde un numero finito di costanti potenzialmente divergenti, i coefficienti del corrispondente polinomio  $Q$  - vedi eq. (17). Insistiamo come al solito sul *potenzialmente*, dato che alcune di queste costanti si annullano per ragioni di simmetria, ad esempio si annullano gli integrali di una funzione dispari in  $K$ , mentre altre costanti risultano connesse tra loro, come accade nella QED in conseguenza della identità di Ward.