COMPENDIO DI TEORIA DEI GRUPPI E DELLE LORO RAPPRESENTAZIONI

Lez. 2, 2a ora, (MARZO, 2004

RIFERIMENTI:
[1] G. De Franceschi, L. Maiani, Fortschritte der Physik **18** (1965) 279
[2] S. Coleman, Erice 1966, in: Aspects of Symmetry.

1. GRUPPO

1.1. Insieme G di elementi dotato di
- legge di moltiplicazione, associativa: s(ht)=(sh)t
- esiste l' identita' per moltiplicazioni da sinistra: se=s, per ogni s

Nota 1: e e' l' identita' anche per moltiplicazioni da destra: dall' equazione precedente segue:

$$s^{-1}(se)s = s^{-1}(s)s \qquad (1)$$

quindi:

$$es=s \text{ per ogni } s \qquad (2)$$

Nota 2: esiste un naturale gruppo di trasformazioni di G in G definito dall' operazione di coniugazione:

$$g'=T_f(g) = fgf^{-1} \qquad (3)$$

1. 2. Noi consideriamo gruppi che formano una **varieta' continua, differenziabile e compatta.** Perche'? Le prime due condizioni sono evidenti e naturali: siamo interessati a simmetrie sotto trasformazioni continue sulle variabili di campo, l' estensione delle rotazioni a trasformazioni interne tipo Spin Isotopico. In Meccanica Quantistica, siamo inoltre interessati a rappresentazioni di queste simmetrie con operatori unitari, che preservano la metrica nello spazio di Hilbert degli stati quantistici. Ora, come vedremo, le rappresentazioni irriducibili dei gruppi compatti sono unitarie (a meno di equivalenze) e finito-dimensionali (dando luogo a multipletti finiti).

2. ALGEBRA

2.1 Gli elementi dei gruppi continui si possono parametrizzare con un certo numero di variabili $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n$ (in certi casi sono necessarie piu' carte per parametrizzare tutta la varieta'). In particolare possiamo parametrizzare l' intorno di e in modo che g(0, 0, …0) = e, con i parametri $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n$ infinitesimi.
Questo intorno puo' essere considerato uno spazio vettoriale (lo spazio tangente alla varieta') e su esso la struttura delle trasformazioni (3) si riflette nella struttura di un' algebra di commutatori, i generatori delle trasformazioni infinitesime:

$$f\leftrightarrow 1+i\sum\alpha_i T^i,\ g \leftrightarrow 1+i\sum\beta_i T^i$$

$$g \rightarrow g' = fgf^{-1} \leftrightarrow 1 + i\,(\alpha_i + \beta_i)\,T^i - (\alpha_i\beta_j)\,[T^i, T^j]$$

$$[T^i, T^j] = T^iT^i - T^jT^i$$

Poiche' g' deve appartenere allo spazio tangente, il commutatore deve ridare una combinazione dei generatori, da cui:

$$[T^i, T^j] = i\, f^{ijk}T^k \qquad (4)$$

(somma sugli indici ripetuti). Le costanti f^{ijk} sono caratteristiche dell' algebra (costanti di struttura) e possono essere scelte in modo da essere completamente antisimmetriche nei loro tre indici. Per i gruppi continui, la struttura delle trasformazioni (3) nell' infinitesimo e' quella di un' algebra di Lie. Il *rango* dell' algebra di Lie e' il numero massimo di generatori che commutano tra loro e che quindi possono essere diagonalizzati simultaneamente. Evidentemente il rango e' ≥ 1.

2.2 Le costanti di struttura in (4) non sono completamente arbitrarie. Il fatto di dover rappresentare un commutatore implica che esse devono soddisfare delle relazioni algebriche, come conseguenza dell' identita' di Jacobi, valida per matrici arbitrarie:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X] + [Z, [X, Y]] = 0 \qquad (5)$$

L' eq. (5) puo' essere verificata scrivendo esplicitamente i commutatori.
Sostituendo la (4) nella (5), si trova:

$$\sum_s (f^{ijs}f^{ksm} + f^{jks}f^{ism} + f^{kis}f^{jsm}) = 0 \qquad (6)$$

L'analisi delle possibili realizzazioni di costanti di struttura che soddisfino le (4) e (6) porta alla classificazione di Cartan delle algebre di Lie semplici.
2.3 Nel caso delle rotazioni, la struttura dell' algebra di Lie e' fornita dalle regole di commutazione:

$$[J^i, J^j] = \varepsilon_{ijk}\, J^k \ (i, j, k = 1, 2, 3) \qquad (7)$$

ε_{ijk} e' il tensore completamente antisimmetrico in 3 dimensioni. I tre generatori del momento angolare non commutano tra loro, quindi l' algebra caratterizzata dalla (7) ha rango 1.
2.4 Dai generatori infinitesimi si puo' raggiungere qualsiasi elemento del gruppo: l' algebra determina il gruppo, a meno di problemi che nascono se il gruppo G non e' semplicemente connesso. Infatti, ogni elemento del gruppo puo' essere approssimato dal prodotto di elementi che sono tutti in un intorno dato di e. Il problema e' che questa espressione non e' unica. In genere, possiamo "deformare" con continuita' la catena e quindi mostrare che il risultato non dipende dalla catena scelta. Tuttavia, questo non e' vero se, al variare di g nel gruppo, giriamo intorno ad una singolarita' (come avviene se il gruppo non e' semplicemente connesso), Data un' algebra di Lie, L, tuttavia, e' sempre possibile trovare un gruppo semplicemente connesso, $\overline{G}$ (universal covering group) di cui

L e' l' algebra di Lie dei generatori infinitesimi. Ci puo' essere un altro gruppo non semplicemente connesso, G, che ha la stessa L come algebra infinitesima. In questo caso, esiste un omorfismo di $\overline{G}$ in G che si riduce ad un vero e proprio isomorfismo in un intorno abbastanza piccolo dell' identita'. Le rappresentazioni ad un valore di $\overline{G}$ possono essere rappresentazioni a piu' valori di G. Questo e' il caso di SU(2) (matrici U, 2x2, unitarie, det(U)=1) che e' il covering group dell' algebra (7) e di O(3), il gruppo delle rotazioni di uno spazio eucildeo 3-dimensionale. O(3) ha la stessa algebra di SU(2) ma non e' semplicemente connesso. In meccanica quantistica siamo interessati alle rappresentazioni univoche a meno di una fase (se una rotazione di 2π applicata al ket |a> ci porta in -|a> piuttosto che in |a>, l'effetto e' sempre quello di riportarci nello stesso stato fisico di partenza). Nel caso delle rotazioni, questo corrisponde a prendere le rappresentazioni del covering group, SU(2), piuttosto che restringerci alle sole rappresentazioni di O(3) che escluderebbero gli spin semi-interi.

3. RAPPRESENTAZIONI DEL GRUPPO

3.1. Una rappresentazione del gruppo G e' una corrispondenza tra elementi del gruppo e operatori lineari in uno spazio vettoriale, L, che preserva la legge di moltiplicazione di G:

$$g \rightarrow T(g)$$
$$gh \rightarrow T(gh) = T(g)\,T(h)$$

(da qui segue T(e)=1). Gli operatori T devono essere non singolari, visto che:

$$g \rightarrow T(g),\ g^{-1} \rightarrow T(g^{-1})$$

$$T(g)\,T(g^{-1}) = T(gg^{-1}) = T(e) = 1$$

Da cui:

$$T(g^{-1}) = T^{-1}(g)$$

3.2 Alcune definizioni:

1. Due rappresentazioni: $T_1(g)$ in L_1, $T_2(g)$ in L_2, sono equivalenti se esiste un operatore non singolare A che trasforma L_1 in L_2 tale che:
$$A\,T_1(g) = T_2(g)\,A, \text{ per tutti i g di G.}$$
Rappresentazioni equivalenti sono la stessa cosa a tutti gli effetti. All' interno di una data classe di equivalenza possiamo scegliere quella che meglio ci conviene.
2. Rappresentazione unitaria: le matrici T(g) sono unitarie, per cui
$$T(g^{-1}) = T^{-1}(g) = [T(g)]^{*T} = T(g)^{\dagger}$$
(* = coniugazione complessa, T=trasposizione, † hermitiano coniugato)

3. Rappresentazione riducibile: le matrici T(g) ammettono un sottospazio invariante $V \neq L$, 0:
$$T(g)x \in V \text{ se } x \in V, \text{ per ogni g}$$
4. Rappresentazione completamente riducibile: le matrici T(g) sono "a blocchi". Piu' precisamente:

$$L = \oplus_{i,\alpha} L_{i,\alpha}$$
$$T(g) = \oplus_{i,\alpha} T^{(i,\alpha)}(g)$$

Il simbolo $\oplus_{i,\alpha}$ indica la somma diretta degli spazi vettoriali irriducibili, $L_{i,\alpha}$, e la somma diretta di matrici, ciascuna che agisce sui vettori di $L_{i,\alpha}$. Le matrici T(g) sono quindi costituite dai blocchi diagonali, $T^{(i,\alpha)}(g)$. L' indice i caratterizza le varie rappresentazioni irriducibili che compaiono nella riduzione di T(g), l' indice α distingue tra rappresentazioni riducibili equivalenti, ed e' necessario se ci sono degenerazioni nella riduzione di T(g). Ad esempio, nel caso del gruppo delle rotazioni, le rappresentazioni irruducibili sono quelle di momento angolare definito, j (quindi i=j), e l' indice α serve a distinguere eventuali componenti di T con lo stesso valore di j.
Dobbiamo sottolineare che, in genere, una rappresentazione puo' essere riducibile (avere un sottospazio invariante non triviale) ma non completamente riducibile (essere a blocchi, cfr. [1] per esempi e maggiori dettagli). La condizione necessaria e sufficiente perche' cio' avvenga e' che il sottospazio $V\perp$, ortogonale allo spazio invariante V, sia anch' esso invariante. Tuttavia

5. Le rappresentazioni unitarie riducibili sono sempre completamente riducibili.
   Dim. Scegliamo $x\in V$, $y\in V\perp$, e quindi (x,y)=0.
   Poiche' V e' invariante, per ogni g:
   $$0 = (T(g^{-1})x, y) = (T(g)^{\dagger}x, y) = (x, T(g)y)$$
   Quindi, se $y\in V\perp$, $T(g)y \in V\perp$ e la matrice T e' a blocchi diagonali in $L = V \oplus V\perp$.

4. RAPPRESENTAZIONI DELL' ALGEBRA DEI GENERATORI INFINITESIMI

4.1. Una rappresentazione dell' algebra e' una corrispondenza:

$$T^i \rightarrow K(T^i) = K^i$$

Dove K^i sono operatori lineari su uno spazio vettoriale L, tali da fornire una realizzazione delle regole di commutazione dell' algebra:

$$[K^i, K^j] = i\, f^{ijk} K^k \qquad (8)$$

Tramite gli operatori K^i possiamo ottenere una rappresentazione degli elementi del gruppo in un intorno infinitesimo dell' identita':

$$g \leftrightarrow 1 + i\sum\alpha_i T^i$$
$$T(g) = 1 + i\sum\alpha_i K^i$$

E' possibile, inoltre, scrivere un' equazione differenziale nelle variabili α, le cui soluzioni ci danno gli elementi finiti della rappresentazione T(g) (cfr. [1]). Nel caso di gruppi semplicemente connessi, e quindi nel caso del suo covering group, le rappresentazioni dell' algebra di Lie determinano completamente le rappresentazioni del gruppo.

Il viceversa e' ovvio, gli operatori K^i si ottengono sviluppando le matrici $T(g(\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n))$ intorno all' origine. Nota che una rappresentazione unitaria di G da luogo ad una rappresentazione dell' algebra con operatori hermitiani (questo e' il motivo della comparsa dell' unita' immaginaria, i, nelle equazioni precedenti).

4.2. Possiamo considerare i generatori infinitesimi come una base dello spazio vettoriale generato dalle loro combinazioni lineari:

$$x= \sum_i \zeta_i T^i$$

L' operazione di commutazione agisce come una trasformazione lineare su questo spazio e fornisce essa stessa una rappresentazione del' algebra di Lie sottostante:

$$x\rightarrow x' = F(T^j)x=[T^j, \sum_i \zeta_i T^i]= \sum_i \zeta_i(i f^{jik} T^k)= \sum_k \zeta'_k T^k$$

$$\zeta'_k = (K^j{}_{reg})_{ki} \zeta_i$$

$$(K^j{}_{reg})_{ki}= -i f^{kji}$$

Evidentemente, dobbiamo verificare che le matrici $K^j{}_{reg}$ obbediscano alle giuste regole di commutazione, eq. (8):

$$[K^l{}_{reg}, K^s{}_{reg}] = i f^{lsi} K^i{}_{reg}$$

Lasciamo al lettore la cura di verificare che queste relazioni, scritte esplicitamente, coincidono con le identita' di Jacobi, eq. (6). Questo completa la dimostrazione che effettivamente le trasformazioni $x\rightarrow x'$ date sopra costituiscono una rappresentazione dell' algebra, indicata col nome di Rappresentazione Regolare o Aggiunta (Adjoint Representation). La dimensione della rappresentazione regolare coincide, evdentemente con la dimensione dell' algebra di Lie.

5. RAPPRESENTAZIONI DEI GRUPPI COMPATTI O FINITI

La situazione e' stata completamente chiarita dai classici lavori di Peter e Weyl, e puo' essere riassunta nel modo seguente (cfr. [1]). Assumendo, nel caso continuo, che T(g) sia continua:

$$\|T(g')x - T(g)x\| \rightarrow 0, \text{ se } g'\rightarrow g, \text{ per ogni } x \text{ di } L$$

si dimostra che:

a. in ogni classe di rappresentazioni equivalenti esiste una rappresentazione unitaria (RU);
b. ogni rappresentazione irriducibile e' di dimensione finita;
c. ogni rappresentazione unitaria e' completamente riducibile.

Alla luce di questi risultati, possiamo restringerci allo studio delle rappresentazioni finito-dimensionali ed unitarie. Similmente, possiamo restringerci a rappresentazioni finito-dimensionali dell' algebra di Lie corrispondente, con generatori infinitesimi K^i che sono hermitiani.

6. IL CASO DI SU(2)

Nel caso di SU(2) le rappresentazioni dell' algebra del momento angolare (cfr. ad esempio: Landau e Lifshtz, Meccanica Quantistica) sono caratterizzate ciascuna da un numero quantico j (il momento angolare) che puo' assumere valori interi o seminteri j= 0, 1/2, 1, 3/2, 2, ... La dimensione della rappresentazione e' Dim(j)= 2j+1 ed i vettori di una base completa sono distinti dagli autovalori di j_3 , la componente diagonale del momento angolare:

$$|j, j_3 >; \qquad j_3 = -j, -j+1, ..., +j$$

(talvolta j_3 si indica col nome di numero quantico magnetico). L' operatore j^2 commuta con i tre operatori del momento angolare e:

$$j^2|j, j_3 >= j(j+1)\, |j, j_3 >.$$

Non e' difficile trovare gli elementi di matrice dei generatori non diagonali (cfr. ancora Landau e Lifshtz, Meccanica Quantistica). Diamo per comodita' gli elementi di matrice degli operatori di innalzamento e di abbassamento:

$$j^{(\pm)}= (j_1 \pm i\, j_2)$$
$$<j, j_3 +1|\, j^{(+)}|j, j_3> = [j(j+1) - j_3(j_3 +1)]^{1/2}$$
$$<j, j_3 - 1|\, j^{(-)}|j, j_3> = [j(j+1) - j_3(j_3 - 1)]^{1/2}.$$

Le matrici $K^{(j)1,2,3}$ che rappresentano gli elementi dell' algebra $J^{1,2,3}$ sono hermitiane e la corrispondente rapprentantazione del gruppo SU(2) e' unitaria. Per ricostruire le corrispondenti matrici occorre estendere la parametrizzazione agli elementi finiti. Possiamo caratterizzare ogni rotazione dello spazio a 3 dimensioni con un vettore di lughezza 1 (n^i, i=1,2,3) ed un angolo di rotazione α, $0\leq \alpha \leq 2\pi$. Consideriamo esplicitamente le matrici della rappresentazione di spin 1/2, la rappresentazione fondamentale di SU(2) –tutte le altre si ottengono componendo n volte questa rappresentazione con se stessa.

$$D^{(1/2)}(\alpha,\vec{n}) = \exp[-i\frac{\alpha}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}] = \cos(\frac{\alpha}{2}) - i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\sin(\frac{\alpha}{2})$$

$\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ ed abbiamo introdotto le 3 matrici di Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le matrici $D^{(1/2)}$sono anche gli elementi di SU(2), quindi la parametrizzazione di cui sopra caratterizza la corrispondente varieta' differenziale.

4. PRODOTTO TENSORIALE DI RAPPRESENTAZIONI E LA SERIE DI CLEBSCH-GORDAN

4.1. Dati due spazi vettoriali, L_1 ed L_2, possiamo definire un nuovo spazio che e' il prodotto tensoriale dei due. Nella notazione di Dirac:

$$|v, w> = |v>|w>; \; v \in L_1 , \; w \in L_2 ,$$

Date le rappresentazion T_1 (g) in L_1 , e T_2 (g) in L_2, si definisce il prodotto tensoriale:

$$T(g) = T_1 (g) \otimes T_2 (g)$$

$$T(g) |v, w> = T_1 (g) |v>|T_2 (g)|w>$$

(si verifica che T(g) e' una rappresentazione di G ed e' unitaria, se lo sono $T_{1,2}$ (g)). L' algebra dei generatori infinitesimi e' data da:

$$K^i = (K_1)^i \otimes 1 + 1 \otimes (K_2)^i$$

In genere la rappresentazione T non e' irriducibile. Per i gruppi compatti, tuttavia, la rappresentazione puo' essere completamente ridotta in blocchi diagonali irriducibili. In analogia col momento angolare, caratterizziamo i vettori di una RU irriducibile, con un complesso di numeri quantici j, che caratterizzano la rappresentazione, ed un complesso di numeri quantici "magnetici", *m*, che caratterizzano il vettore all' interno della rappresentazione j (per un' algebra di rango R, ci saranno esattamente R numeri quantici magnetici, gli autovalori degli operatori che si possono diagonalizzare simultaneamente, usiamo i caratteri italici per i numeri magnetici per ricordarci che sono un complesso di numeri quantici). In termini dei vettori delle basi in L_1, L_2, una base in L e' data dai prodotti tensoriali:

$$|j_1, m_1; j_2, m_2> = |j_1, m_1>| j_2, m_2>$$

D' altro canto, dopo la completa riduzione della rappresentazione T, dobbiamo poter scrivere lo spazio L e le matrici T nella forma data in 3.2:

$$L = \oplus_{j, \alpha} L_{j, \alpha}$$
$$T(g) = \oplus_{j, \alpha} T^{(j, \alpha)} (g)$$

con lo stesso significato dei simboli (ricordiamo che α distingue le rappresentazioni equivalenti che eventualmente compaiano nello sviluppo). In ciascun sottospazio $L_{j,\alpha}$ scegliamo una base di vettori:

$$|j, m, \alpha>$$

L' unione di queste basi forma evidentemente una base completa in L, in alternativa a quella data prima. Deve quindi esistere una matrice *unitaria* che effettua il cambiamento di base. In formule:

$$|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle = \sum_{j, m, \alpha} C(j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m, \alpha) \, |j, m, \alpha\rangle \qquad (9)$$

$$|j, m, \alpha\rangle = \sum_{m1, m2} C^*(j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m, \alpha) \, |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \qquad (10)$$

I coefficienti C sono noti come i coefficienti di Clebsch- Gordan e soddisfano alle relazioni di ortonormalita':

$$\sum_{j, m, \alpha} C(j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m, \alpha) \, C^*(j_1, m'_1; j_2, m'_2 | j, m, \alpha) = \delta_{m1,m'1} \, \delta_{m2,m'2} \qquad (11)$$

$$\sum_{m1, m2} C(j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m, \alpha) \, C^*(j_1, m_1; j_2, m_2 | j', m', \beta) = \delta_{j,j'} \, \delta_{m,m'} \, \delta_{\alpha,\beta} \qquad (12)$$

Con l' aiuto delle formule precedenti possiamo esprimere gli elementi dell matrici che rappresentano il gruppo sotto la forma di prodotto tensoriale in termini delle matrici irriducibili. Si trova:

$$(T^{(j1)}(g))_{m1, m'1} (T^{(j2)}(g))_{m2, m'2} =$$

$$= \sum_{j, m, \alpha} C(j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m, \alpha) (T^{(j)}(g))_{m, m'} \, C^*(j_1, m'_1; j_2, m'_2 | j, m', \alpha) \qquad (13)$$

4.2. Nel caso di rappresentazioni di SU(2) quanto sopra si riduce alla ben nota composizione di due momenti angolari. In questo caso j, il momento risultante, e' compreso nell' intervallo:

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq |j_1 + j_2|$$

j varia a passi di un' unita', ogni j compare una sola volta (l' indice α non serve).
I coefficienti di Clebsch- Gordan per i casi piu' semplici (es. $1/2 \otimes 1$) sono tabulati nel Particle Data Book. Coefficienti di Clebsch-Gordan di SU(3), per i casi piu' usati, sono stati pubblicati da De Swart (Rev. Mod. Phys.).
Come si vede, il caso generale di un gruppo compatto non introduce complicazioni in piu' rispetto ad SU(2), se non il fatto che una stessa rappresentazione puo' comparire piu' volte nella serie di Clebsch-Gordan.

5. IL LEMMA DI SCHUR

Questo lemma ci permette di caratterizzare gli elementi di matrici di operatori che sono ***invarianti sotto le trasformazioni del gruppo***, operatori cioe' che commutano con le matrici della rappresentazione. Affrontiamo per primo il caso di rappresentazioni irruducibili. Dobbiamo considerare due casi.
1) Siano date due rappresentazioni irriducibili ed inequivalenti, $T_1(g)$ in L_1 e $T_2(g)$ in L_2. Ogni operatore A che trasforma i vettori di L_1 in vettori di L_2 in modo tale che:

$$AT_1(g) = T_2(g)A, \text{ per ogni } g \qquad (14)$$

e' l' operatore nullo, A=0.
Dim. Consideriamo in L_1 il nucleo di A, cioe' l' insieme N dei vettori di L_1 tali che Ax=0. N e' evidentemente un sottospazio invariante per T_1:

$$AT_1(g)x = T_2(g)Ax = 0, \text{ per ogni } g.$$

Poiche' $T_1(g)$ e' irriducibile, A= L_1 oppure A=0. nel primo caso il lemma e' dimostrato. Nel secondo caso, cosnideriamo in L_2 l' immagine J della trasformazione A. J e' un sottospazio invariante di T_2, dato che, se y = Ax:

$$T_2(g)y = T_2(g)Ax = AT_1(g)x = Ax' \text{ che} \in J$$

Ma T_2 e' irriducibile, quindi J = 0 oppure J = L_2. Il secondo caso e' escluso poiche' T_1 e T_2 sono inequivalenti, quindi J = 0, CDD.

2) Siano $T_1(g)$ e $T_2(g)$ sono irriducibili ed equivalenti. Esiste quindi una matrice unitaria U che trasforma L_1 in L_2 , tale che:

$$T_1(g) = U^{\dagger}T_2(g)U, \text{ per ogni } g. \qquad (15)$$

Ogni operatore A che soddisfa la relazione (14) e' un multiplo di U, A= λU. In via preliminare, notiamo che sostituendo la (15) nella (14), troviamo:

$$B\, T_2(g)= T_2(g)B \qquad (16)$$

Con B=A $U^{\dagger}$.

Ovviamente, se A= λU, vale anche $AU^{\dagger}$=B=λ **1** e una forma equivalente del lemma e' la seguente: ogni matrice B che commuta con le matrici T_2 (g) di una rappresentazione irruducibile e' un multiplo dell' identita'.
Dim. La matrice B ammette almeno un autovettore x:

$$Bx= \lambda x, \; x\neq 0.$$

Se V e' lo spazio vettoriale dei vettori che appartengono all' autovalore λ, V e' uno spazio invariante per $T_2(g)$, visto che:

$$B[T_2(g)x]= T_2(g)Bx=\lambda\, [T_2(g)x]$$

Poiche' T_2 e' irriducibile, V=0 oppure V= L_2. Il primo caso e' escluso dall' esistenza di almeno un autovettore. Quindi V=L_2 e B=λ **1**, CDD.

6. ELEMENTI DI MATRICE DI OPERATORI INVARIANTI

Un operatore Φ nello spazio di Hilbert H degli stati di un sistema quantistico (atomo, campo…) che sia invariante sotto le trasformazioni del gruppo, soddisfa la condizione:

$$U^{\dagger}(g)\, \Phi\, U(g) = \Phi\,, \qquad (17)$$

dove U(g) sono gli operatori unitari che rappresentano l' azione delle trasformazioni di g sugli stati del sistema. Per un gruppo compatto, U(g) e' completamente riducibile in blocchi finito-dimensionali,

$$\mathsf{H} = \oplus_{j,\alpha}\, \mathsf{H}_{j,\alpha}$$
$$U(g) = \oplus_{j,\alpha}\, U^{(j,\alpha)}(g) \qquad (18)$$

Consideriamo gli elementi di matrice tra vettori che appartengono a due blocchi irriducibili:

$$\langle j, \alpha, m | \Phi | j', \beta, m' \rangle = (\Phi^{(j\alpha, j'\beta)})_{m,m'}$$

Dalla (17) si trova:

$$(\Phi^{(j\alpha, j'\beta)})_{m,m'} = \langle j, \alpha, m | \Phi | j', \beta, m' \rangle =$$

$$= \langle j, \alpha, m | \square^{\dagger} \square U(g) \Phi \square^{\dagger} \square U(g) | j', \beta, m' \rangle = \langle j, \alpha, m | \square^{\dagger} \square \Phi U(g) | j', \beta, m' \rangle =$$

$$= (T^{(j',\beta)})_{m',n'} (T^{(j,\alpha)})^{*}_{m,n} (\Phi^{(j\alpha, j'\beta)})_{n,n'} = (T^{(j,\alpha)})^{*}\, \Phi^{(j\alpha, j'\beta)} (T^{(j',\beta)})^{T}$$

La matrice finito-dimensionale $\Phi^{(j\alpha, j'\beta)}$ soddisfa alle condizioni del lemma di Schur:

$$\Phi^{(j\alpha, j'\beta)} (T^{(j',\beta)})^{T} = (T^{(j',\beta)})^{T} (\Phi^{(j\alpha, j'\beta)})$$

Di qui segue:

1. $\Phi^{(j\alpha, j'\beta)} = 0$, se $j \neq j'$; (19)

2. $(\Phi^{(j\alpha, j'\beta)})_{n,n'} = \lambda(j, \alpha; j', \beta)\, \delta_{n,n}$. (20)

In parole, un operatore invariante ha elementi di matrice solo tra rappresentazioni equivalenti, questi elementi di matrice sono diagonali nei, e indipendenti dai, numeri quantici magnetici. Ci sono tanti coefficienti indipendenti, $\lambda(j, \alpha; j', \beta)$, quanti sono i modi di associare tra loro coppie di rappresentazioni equivalenti.

7. MISURA INVARIANTE SUL GRUPPO E RELAZIONI DI ORTONORMALITA' PER LE MATRICI DELLE RAPPRESENTAZIONI DI UN GRUPPO COMPATTO

7.1 Per gruppi finiti, la somma sugli elementi del gruppo e' invariante sotto l' operazione che "trasla" gli elementi del gruppo, moltiplicandoli per un elemento fisso:

$$\sum_g f(g) = \sum_g f(hg)$$

per qualsiasi funzione degli elemnti del gruppo. E' ragionevole pensare di introdurre una simile misura nel caso di un gruppo compatto, trasportando la misura $d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$ dall' intorno dell' identita' all' intorno di un elemento generico, mediante la moltiplicazione del gruppo. In effetti (cfr. H. Weyl, Group Theory and Quantum Mechanics, XXX, pag. e seguenti) per i gruppi compatti si puo' definire una misura invariante per moltiplicazione a sinistra:

$$\int dg\, f(hg) = \int dg\, f(g)$$

(la misura risulta invariante anche per moltiplicazione a destra). La misura e' definita univocamente a meno di una costante moltiplicativa, che scegliamo in modo tale che sia:

$$\int dg = 1.$$

7.1 Consideriamo due rappresentazioni irriducibili, $T_1(g)$ e $T_2(g)$, e costruiamo la matrice $B_{q,a}$:

$$B_{q,a} = \int dg\, (T_1(g))_{q,r}\, (T_2(g))^*_{a,b} = \\ = \int dg\, (T_1(g))_{q,r}\, (T_2(g))^\dagger_{b,a}$$

B dipende anche dai due indici r e b che per il momento teniamo fissi e quindi possiamo non scrivere.
B e' invariante, nel senso che:

$$T_1(h)\, B\, T_2(h)^\dagger = B$$

In effetti:

$$T_1(h) \int dg\, (T_1(g))\, (T_2(g))^\dagger\, T_2(h)^\dagger =$$

$$= \int dg\, (T_1(hg))\, (T_2(hg))^\dagger = \int dg\, (T_1(g))\, (T_2(g))^\dagger = B$$

Sulla base del lemma di Schur, possiamo concludere quanto segue:

- se T_1 e T_2 sono inequivalenti, B=0
- se $T_1=T_2$, $B_{a,q} = \lambda(r, b, j)\, \delta_{a,q}$, dove j caratterizza la rapresentazione scelta

Nel secondo caso, possiamo porre a=q e sommare, ottenendo:

$$\lambda(r, b, j) \; \int dg\, (T_2(g))^\dagger_{b,a}\, (T_1(g))_{a,r} = \int dg\, \delta_{b,r} = \delta_{b,r}$$

In conclusione, mettendo tutto insieme, otteniamo le relazioni di ortonormalita':

$$\int dg\, (T^{(j)}(g))_{q,r}\, (T^{(j')}(g))^*_{a,b} = 1/\mathrm{Dim}(j)\, \delta_{j,j'}\, \delta_{q,a}\, \delta_{r,b}$$

Con la parametrizzazione data in Sez. 3, la misura invariante di SU(2) si scrive:

$$dg = (\cos t)\, \sin^2(\alpha/2)\, d\alpha\, d\cos\theta\, d\phi$$

($0\le\alpha\le 2\pi$, $0\le\theta\le\pi$, $0\le\phi\le 2\pi$). È semplice verificare le relazioni di ortonormalita' sugli elementi della matrice $D^{(1/2)}$ data nella Sez. 3.

8. IL TEOREMA DI WIGNER ECKART

Un caso molto importante e' quello di set di operatori $\Phi^{\square}_{\square}$ nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ degli stati di un sistema quantistico che trasformano secondo una rappresentazione irriducibile del gruppo:

$$U(g)\, \Phi^{\square}_{\square} U^{\dagger}(g) = (T^{\square}_{\square})_{\square, m'}\, \Phi^{\square}_{\square'}\,, \qquad (17)$$

dove U(g) sono gli operatori unitari che rappresentano l' azione delle trasformazioni di g sugli stati del sistema. Come nella Sez. 6, assumiamo che U(g) sia completamente riducibile in blocchi finito-dimensionali, eq. (18). Consideriamo l' elemento di matrice di $\Phi^{\square}_{\square}$ tra stati che appartengono alle rappresentazioni k ed l nella riduzione di U(g) (queste rappresentazioni sono fissate e quindi non e' necessario indicare i valori degli altri numeri quantici, α , β... che le individuano all' interno della decomposizione di U(g)). Procediamo come nella Sez. 6 (sempre somma sugli indici ripetuti):

$$\langle l, s|\Phi^{\square}_{\square}|k, n\rangle = \langle l, s|\, U^{\dagger}(g)\, U(g)\, \Phi^{\square}_{\square} U^{\dagger}(g)\, U(g)|\, k, n\rangle =$$

$$= (T^{(l)})^*_{s,s'} \langle l, s'|\Phi^{\square}_{\square}|k, n'\rangle\, (T^{(k)})_{n,n'}\, (T^{(j)})_{m,m'}$$

Usiamo ora l' espressione che da' il prodotto di due matrici in termini delle componenti irriducibili, tramite i coefficienti di Clebsh-Gordan, eq. (13). Troviamo:

$$\langle l, s|\Phi^{\square}_{\square}|k, n\rangle =$$
$$= \sum_{s',m',n'} (T^{(l)}(g))^*_{s,s'} \langle l, s'|\Phi^{\square}_{\square}|k, n'\rangle \sum_{J,\alpha,M} (T^{(J)}(g))_{M,M'}\, C(k, n; j, m|J, M, \alpha)\, C^*(k, n'; j,$$

$$m'|J, M', \alpha)$$

Possiamo ora integrare entrambi i membri in dg ed usare le relazioni di ortonormalita' trovate nella Sez. precedente. Questo seleziona la rappresentazione con J=l e fissa M=s, M'=s' nella serie di Clebsch-Gordan. Troviamo:

$$\langle l, s|\Phi^{\square}_{\square}|k, n\rangle =$$

$$= \sum_{m',n',\alpha,s'} \langle l, s'|\Phi^{\square}_{\square}|k, n'\rangle\, C(k, n; j, m|l, s, \alpha)\, C^*(k, n'; j, m'|l, s', \alpha) =$$

$= \sum_{\alpha} C(k, n; j, m|l, s, \alpha) \sum_{m', n', s'} C^*(k, n'; j, m'|l, s', \alpha) \langle l, s'|\Phi^{\square}_{\square'}|k, n'\rangle =$

$$= \sum_{\alpha} C(k, n; j, m|l, s, \alpha) \langle l \| \Phi^{\square} \| k\rangle_{\alpha} \qquad (18)$$

$\langle l \| \Phi^{\square} \| k\rangle_{\alpha} =$
$$= \sum_{n', m', s'} C^*(k, n'; j, m'|l, s', \alpha) \langle l, s'|\Phi^{\square}_{\square'}|k, n'\rangle \qquad (19)$$

L' ultima linea dell' eq. (18) rappresenta risultato desiderato - il teorema di Wigner-Eckart.
L' elemento di matrice puo' essere diverso da zero solo se la rappresentazione $T^{(l)}$ e' presente nel prodotto tensoriale $T^{(j)} \otimes T^{(k)}$. La dipendenza dell' elemento di matrice dai numeri quantici magnetici e' fornita dei relativi coefficienti di Clebsch-Gordan moltiplicati per dei numeri, gli "elementi matrice ridotti" , che dipendono esclusivamente dalle rappresentazioni j, k ed l. Gli elementi di matrice ridotta sono in numero uguale al numero di volte che la rappresentazione l compare nella riduzione di $T^{(j)} \otimes T^{(k)}$.