

MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA
SOLUZIONI DEL COMPITO DEL 5/9/2008

Soluzione del Problema 1

- La forma infinitesima si ottiene dallo sviluppo in serie

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} + O(\alpha^2) = \mathbb{1} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + O(\alpha^2) ,$$

dove $\mathbb{1}$ è la matrice unità in due dimensioni. Di conseguenza, a meno di termini $O(\alpha^2)$

$$\Phi' = U\Phi = \left[\mathbb{1} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 - \alpha\phi_2 \\ \phi_2 + \alpha\phi_1 \end{pmatrix} .$$

- Dalle

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \Phi')^\dagger (\partial^\mu \Phi') &= (\partial_\mu U\Phi)^\dagger (\partial^\mu U\Phi) = (\partial_\mu \Phi^\dagger) U^\dagger U (\partial^\mu \Phi) , \\ \Phi'^\dagger \Phi' &= \Phi^\dagger U^\dagger U \Phi , \end{aligned}$$

usando la

$$U^\dagger U = \mathbb{1} + O(\alpha^2) ,$$

si ottiene immediatamente che, nel caso di trasformazioni infinitesime

$$\mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi') = \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) + O(\alpha^2) .$$

Per trasformazioni finite

$$U^\dagger U = \mathbb{1}$$

e

$$\mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi') = \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$$

- La corrente di Nöther è data dalla

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_1)} \delta \phi_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_2)} \delta \phi_2$$

con

$$\delta \phi_1 = -\alpha \phi_2 \quad , \quad \delta \phi_2 = \alpha \phi_1 .$$

Si ottiene quindi

$$J^\mu = -\alpha [(\partial^\mu \phi_1)\phi_2 - (\partial^\mu \phi_2)\phi_1]$$

Soluzione del Problema 2

- Usando la definizione $\bar{u} = u^\dagger \gamma_0$ e la proprietà $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ si ottiene facilmente

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{r,s} |\bar{u}_s(\mathbf{p}') \gamma^0 u_r(\mathbf{p})|^2 = \sum_{r,s} [\bar{u}_s(\mathbf{p}') \gamma^0 u_r(\mathbf{p})] [\bar{u}_s(\mathbf{p}') \gamma^0 u_r(\mathbf{p})]^* \\
 &= \sum_{r,s} \bar{u}_s(\mathbf{p}') \gamma^0 u_r(\mathbf{p}) \bar{u}_r(\mathbf{p}) \gamma^0 u_s(\mathbf{p}') \\
 &= \sum_{r,s} \bar{u}_{s\alpha}(\mathbf{p}') \gamma_{\alpha\beta}^0 u_{r\beta}(\mathbf{p}) \bar{u}_{r\rho}(\mathbf{p}) \gamma_{\rho\sigma}^0 u_{s\sigma}(\mathbf{p}') ,
 \end{aligned}$$

dove la somma sugli indici spinoriali α, β, ρ e σ è sottintesa.

Sostituendo nell'espressione ottenuta le relazioni

$$\sum_r u_{r\beta}(\mathbf{p}) \bar{u}_{r\rho}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m} (\not{p} + m)_{\beta\rho} , \quad \sum_s u_{s\sigma}(\mathbf{p}') \bar{u}_{s\alpha}(\mathbf{p}') = \frac{1}{2m} (\not{p}' + m)_{\sigma\alpha} ,$$

dove $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ e $\not{p}' = \gamma^\mu p'_\mu$, troviamo quindi

$$A = \frac{1}{4m^2} (\not{p}' + m)_{\sigma\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^0 (\not{p} + m)_{\beta\rho} \gamma_{\rho\sigma}^0 = \frac{1}{4m^2} \text{Tr}[(\not{p}' + m) \gamma^0 (\not{p} + m) \gamma^0] .$$

Ricordando che la traccia del prodotto di qualunque numero dispari di matrici γ è nulla, che

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) ,$$

e che $(\gamma^0)^2 = 1$, si ottiene il risultato

$$A = \frac{1}{4m^2} [\text{Tr}(\not{p}' \gamma^0 \not{p}) + m^2 \text{Tr}(\gamma^0 \gamma^0)] = \frac{1}{m^2} [2p_0 p'_0 - (\not{p} \not{p}') + m^2] .$$