UNIVERSITÀ DI ROMA "LA SAPIENZA"
Dipartimento di Fisica

INTERAZIONI ELETTRODEBOLI

Anno Accademico 2011-2012

L. Maiani

Dipartimento di Fisica

Università di Roma "La Sapienza

e-mail: luciano.maiani@roma1.infn.it

Ringraziamenti. Queste note devono molto alla collaborazione piú che ventennale con Nicola Cabibbo e alle osservazioni che, nei molti anni di insegnamento, sono venute dai miei studenti. Tra i colleghi piú giovani del Dipartimento, un ringraziamento particolare a Omar Benhar, Gino Isidori, Antonello Polosa e Veronica Riquer.

Indice

6

1 IL QUADRO GENERALE **7**

2 SPIN ISOTOPICO E STRANEZZA **15**

2.1 Le ampiezze pione-nucleone 21

2.2 Correnti di isospin e correnti deboli 23

2.3 La simmetria SU(3) 27

2.4 Le matrici di Gell-Mann 28

3 LA TEORIA DI YANG-MILLS **29**

3.1 Simmetrie locali non commutative. 30

3.2 La lagrangiana minimale. 33

4 UNIFICAZIONE ELETTRODEBOLE I **37**

4.1 Simmetrie del doppietto (ν_e, e) 38

4.2 Il gruppo di gauge minimale, $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 40

4.3 La teoria di Glashow 41

5 ROTTURA SPONTANEA DI SIMMETRIA **45**

5.1 Il Modello di Goldstone 45

5.2 Lo spettro delle fluttuazioni per $\mu^2 < 0$ 48

5.3 Il Teorema di Goldstone 51
5.4 Il Meccanismo di Higgs-Brout-Englert 55
5.5 Masse delle particelle vettoriali nel gauge unitario 56
5.6 Il campo vettoriale con massa 58

6 UNIFICAZIONE ELETTRODEBOLE II 61

6.1 la teoria di Weiberg e Salam 61
6.2 Il doppietto scalare 61
6.3 Le masse dei campi vettoriali 63
6.4 La massa dell' elettrone 65
6.5 La massa del neutrino. 66

7 QUARKS IN TRE COLORI 67

8 TEORIA DEL QUARK-MIXING 69

8.1 La teoria di Cabibbo 69
8.2 Il meccanismo di Glashow, Iliopoulos e Maiani 70
8.3 Violazione di CP e teoria di Kobayashi-Maskawa. 72

9 INTERAZIONI ELETTRODEBOLI DEI QUARK 75

9.1 Masse e mixing dei quark 76
9.2 La matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. 79

10 DETERMINAZIONE DELLA CORRENTE NEUTRA LEPTONICA 83

10.1 Sezione d' urto dei processi $\nu_\mu - e$, $\bar{\nu}_\mu - e$ 83
10.2 Larghezze leptoniche dello Z 87
10.3 Formula di Breit-Wigner relativistica 88
10.4 Fisica dello Z nelle reazioni $e^+ e^-$ 89

11 DIGRESSIONE: LA VIOLAZIONE DELLO SPIN ISOTOPICO 97

11.1 Bosoni di Goldstone in $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ 97

11.2 Pioni e Kappa come 'quasi' bosoni di Goldstone 98

11.3 La violazione dello spin isotopico 101

12 MIXING E VIOLAZIONE DI CP NEI MESONI K, B E D NEUTRI 103

12.1 Mixing e violazione di CP nel sistema $K^0 - \bar{K}^0$. 103

12.2 Mixing nei mesoni B e D neutri 108

13 CORRENTI NEUTRE CON CAMBIAMENTO DI SAPORE 109

13.1 L'ampiezza $\bar{K}^0 \to K^0$ 110

13.2 Lagrangiana effettiva, fattore di colore, saturazione del vuoto. 114

13.3 Le ampiezze $\bar{B}^0_d \to B^0_d$, $\bar{B}^0_s - B^0_s$ e $\bar{D}^0 \to D^0$ 118

13.4 Analisi numerica e confronto con i dati 118

14 SEGNATURE SPERIMENTALI DEL BOSONE DI HIGGS 123

APPENDICI 123

A Rappresentazione di Kallen-Lehman per la funzione a due punti 125

A.1 Operatori di creazione e di distruzione nella normalizzazione del continuo . 125

A.2 La rappresentazione di Kallen-Lehman 127

B Una decomposizione utile per matrici finito-dimensionali 133

C Richiami sulla teoria dei Gruppi Continui e delle loro Rappresentazioni 135

C.1 GRUPPO 135

C.2 ALGEBRA DI LIE 136

C.3 RAPPRESENTAZIONI DEL GRUPPO 137

C.4 RAPPRESENTAZIONI DELL′ ALGEBRA DEI GENERATORI INFINITESIMI 139
C.5 RAPPRESENTAZIONI DEI GRUPPI COMPATTI O FINITI 140
C.6 IL CASO DI SU(2) 140
C.7 PRODOTTO TENSORIALE DI RAPPRESENTAZIONI, LA SERIE DI CLEBSCH-GORDAN 141
C.8 IL LEMMA DI SCHUR 143
C.9 ELEMENTI DI MATRICE DI OPERATORI INVARIANTI 144
C.10 MISURA INVARIANTE SUL GRUPPO E RELAZIONI DI ORTONORMALITÁ 145
C.11 IL TEOREMA DI WIGNER-ECKART 146

BIBLIOGRAFIA **147**

Capitolo 1

IL QUADRO GENERALE

La ricerca di una teoria che unisca i principi della Meccanica Quantistica al Principio di Relatività Speciale ci ha condotto [1] [2] alla Teoria Quantistica dei Campi (Quantum Field Theory, QFT in breve). Le variabili dinamiche della teoria sono i *campi quantizzati*, operatori lineari sullo spazio di Hilbert, $\mathcal{H}$, degli stati:

$$\psi(x), A^\mu(x), \phi(x), \ldots$$

operatori che dipendono dal punto dello spazio-tempo e che hanno proprietà di trasformazione definite per cambiamenti di sistema di riferimento (spinori, 4-vettori, scalari, etc.):

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x), \quad \text{etc.}$$

dove Λ appartiene al gruppo di Lorentz proprio.

Casi patologici a parte, la teoria contiene uno stato di energia minima, invariante per traslazioni, che interpretiamo come lo *stato di vuoto*. Questo stato è unico[1].

Microcausalità. A partire dai campi si costruiscono le *osservabili* locali, $\mathcal{O}(x)$, ad esempio la densità di energia, la densità di carica, etc.. La condizione di *Microcausalità* impone che osservabili diverse in punti diversi debbano commutare tra loro per separazioni di tipo spazio:

$$\left[\mathcal{O}(x), \mathcal{O}'(y)\right] = 0 \ \text{ se } \ (x-y)^2 < 0 \tag{1.1}$$

A sua volta, la (1.1) impone che i campi commutino o anticommutino tra loro per separazioni spaziali:

$$[\psi(x), \psi(y)]_\pm = 0 \ \text{ se } \ (x-y)^2 < 0 \tag{1.2}$$

dove il segno $-$ $(+)$ indica il commutatore (anticommutatore) e si applica ai campi di spin intero (semintero).

[1] anche nel caso di una simmetria esatta con rottura spontanea, che condurrebbe a stati di vuoto degeneri, possiamo riportarci a questa situazione introducendo una piccola perturbazione esterna in modo da preferire un unico stato, e far tendere a zero la perturbazione alla fine dei calcoli

La relazione spin-statistica. In certe circostanze i campi si possono sviluppare in onde piane quantizzate. I corrispondenti operatori di creazione, applicati allo stato di vuoto, danno luogo a stati di una particella relativistica, con data massa e con spin determinato dalle proprietà di trasformazione del campo. I quanti di un dato campo sono particelle identiche che obbediscono alla statistica individuata dalle regole commutazione o anticommutazione rispettate dal campo corrispondente (Bose-Einstein o Fermi-Dirac, rispettivamente).

Antiparticelle. La relazione relativistica tra energia e momento di una particella:

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \tag{1.3}$$

possiede soluzioni con energia di entrambi i segni. In QFT queste soluzioni corrispondono a campi che evolvono nel tempo con frequenza positiva o negativa. Per campi elettricamente carichi, i corrispondenti operatori di creazione producono, dal vuoto, particelle con cariche elettriche opposte tra loro ed uguale massa e spin: i quanti del campo sono le particelle e le corrispondenti *antiparticelle*. Particelle neutre, ma dotate di una carica conservata possiedono anche la loro un' antiparticella con valore opposto della carica (un esempio è l' antineutrone, che ha numero barionico -1). Particelle come il fotone o il mesone π^0 che coincidono con la propria antiparticella si dicono intrinsecamente neutre.

Particelle e antiparticelle sono collegate dalla trasformazione CPT, (combinazione di coniugazione di carica, parità e inversione del tempo). Il *Teorema CPT* garantisce che massa, spin ed eventualmente vita media di particella e antiparticella sono esattamente uguali.

La relazione tra spin e statistica e il teorema CPT sono tra le indicazioni piú forti a favore della QFT. Di fatto, non sono mai state osservate violazioni di questi teoremi entro precisioni molto stringenti.

Le masse di protone e antiprotone coincidono entro una parte su 100 milioni [4], mentre per la differenza di massa tra K^0 e la sua antiparticella $\bar{K}^0$ abbiamo un limite dell' ordine di $10^{-16} m_K$ [5].

Gradi di libertà fondamentali. La corrispondenza tra un tipo di particelle e un campo quantistico è una questione molto delicata, il primo tra i problemi centrali di ogni QFT. Un nucleo dell' atomo di Ossigeno si comporta come una particella puntiforme in certe condizioni, tuttavia non pensiamo di associare un campo indipendente ad ogni nucleo atomico. Come decidere, dunque, a quali particelle dobbiamo attribuire un campo fondamentale? La risposta è legata all$'$ intervallo di energie alle quali siamo in grado di osservare le particelle in questione. L$'$ evidenza che possediamo oggi è che i leptoni: l$'$ elettrone, il muone, la particella τ e i corrispondenti neutrini sono elementari, insieme al fotone ed ai mediatori delle altre forze fondamentali. è ragionevole introdurre un campo per ciascuna di queste particelle. Al contrario, protone, neutrone e le altre particelle sensibili alle interazioni nucleari si rivelano, già alle energie oggi disponibili, stati composti di particelle piú fondamentali di spin 1/2, i quark, e di spin 1, i gluoni.

La presente QFT delle interazioni fondamentali, la cosiddetta *Teoria Standard* è basata su quark, leptoni e mediatori delle forze, Fig. 1.1. Ad ognuna di queste particelle è associato un campo quantizzato.

La situazione potrebbe, naturalmente, cambiare se, a scale di energia piú elevata, qualcuna di queste particelle si rivelasse a sua volta composta di costituenti piú fondamentali, come ipotizzato da alcuni autori (i *preoni* ipotizzati da Y. Pati e A. Salam, o i *rishons* introdotti da H. Harari).

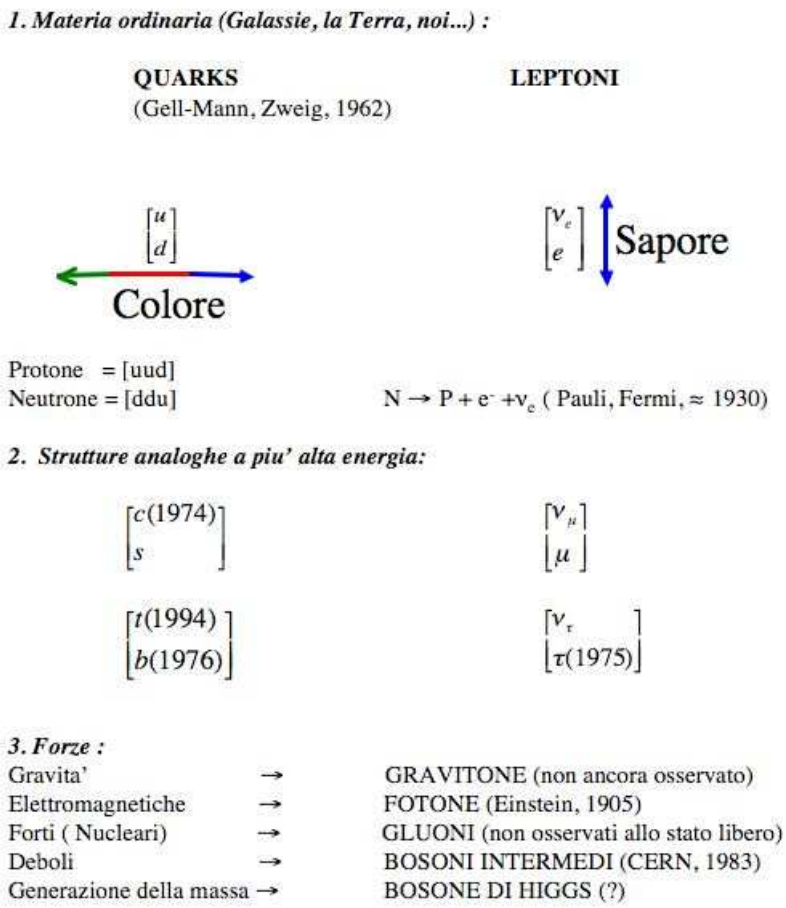

Figura 1.1: Costituenti fondamentali della materia e delle forze. Nella Teoria Standard, ad ognuna di queste particelle è associato un campo quantizzato. Tra parentesi l'anno in cui i costituenti pi recenti sono stati osservati

Dinamica. la dinamica dei campi è generata dalla densità di Lagrangiana, $\mathcal{L}(x)$, funzione locale dei campi e delle loro derivate. In Meccanica classica, le equazioni del moto dei campi si

derivano da $\mathcal{L}(x)$, attraverso un *Principio di Minima Azione*:

$$\delta\left(\int d^4x\ \mathcal{L}(x)\right) = 0; \quad \text{da cui :} \tag{1.4}$$

$$\partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \tag{1.5}$$

Quantisticamente, i campi sono operatori la cui evoluzione nel tempo è data dalle equazioni di Heisenberg:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = [\mathbf{H}, \psi(x)] \tag{1.6}$$

dove $\mathbf{H}$ è l' Hamiltoniana derivata da $\mathcal{L}$. Unita alle relazioni canoniche di (anti)-commutazione tra campi e momenti coniugati, la (1.6) ci da di nuovo le equazioni del moto di Eulero-Lagrange (1.5).

In presenza di campi di gauge, è piú vantaggioso rimpiazzare la quantizzazione canonica con l' integrale sui cammini, che verrà introdotto nella III Parte delle lezioni. Punto di partenza sono le funzioni di Green dei campi:

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) =< 0|T\left(\phi(x_1)\phi(x_2)\ldots\phi(x_n)\right)|0> \tag{1.7}$$

Dalle funzioni di Green si ottengono, con le formule di riduzione, gli elementi di Matrice S, le vite medie delle particelle instabili etc..

In generale, la lagrangiana si scrive come la somma di una parte libera, determinata dalle proprietà delle particelle fondamentali, massa e spin, ed una parte di interazione:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \tag{1.8}$$

L' equazione (1.8) ci presenta i due problemi cruciali di una QFT. Come scrivere la lagrangiana di interazione? e come calcolare le ampiezze fisiche a partire da $\mathcal{L}$?

In un certo senso i due problemi sono collegati. La forma di $\mathcal{L}_I$ deve essere modellata sui dati sperimentali, ma questo richiede di poter passare da $\mathcal{L}_I$ ai dati e viceversa, per confrontare questi ultimi con le predizioni risultanti dalle ipotesi di lavoro che abbiamo fatto su $\mathcal{L}_I$.

Al momento, predizioni affidabili si ottengono con la *teoria delle perturbazioni*, assumendo che $\mathcal{L}_I$ sia proporzionale ad un parametro piccolo, λ, e sviluppando le ampiezze in serie di potenze di λ. Il prototipo del metodo è l' Elettrodinamica Quantistica (Quantum ElectroDynamics, QED), evoluta successivamente nella teoria unificata delle interazioni elettrodeboli. Il successo predittivo della QED è ancora senza confronto.

L' alternativa, per trattare i casi in cui l' interazione non puó essere considerata piccola in alcun senso, è il calcolo numerico delle ampiezze quantistiche in uno spazio-tempo discretizzato in un reticolo finito di punti. I due metodi sono al momento su piani diversi, la simulazione su reticolo non ha raggiunto ancora la precisione straordinaria delle predizioni della QED e neanche quella piú limitata ma comunque considerevole della teoria elettrodebole.

Fortunatamente, anche per le interazioni forti o nucleari, è possibile individuare un regime di energie in cui la teoria delle perturbazioni puó essere applicata, dovuto alla cosiddetta *libertà*

asintotica, e in cui le predizioni derivate dalla lagrangiana fondamentale possono essere significativemente confrontate con i dati sperimentali. Questo insieme di confronti è tuttora alla base della nostra confidenza nella Teoria Standard, anche per quanto riguarda le interazioni forti.

Concludiamo questo capitolo con la caratterizzazione delle differenti componenti di $\mathcal{L}_I$. In Natura sono state osservate quattro grandi classi di interazioni molto ben separate tra loro, ciascuna con caratteristiche proprie.

Interazioni Elettromagnetiche. La loro intensitá è caratterizzata dalla *costante di struttura fina*:

$$(\frac{e^2}{\hbar c}) \simeq \frac{1}{137} \tag{1.9}$$

dove e^2 è la carica dell' elettrone. La piccolezza di α rende significativo usare la teoria delle perturbazioni. Se ci limitiamo ai leptoni carichi, la lagrangiana di interazione è determinata dalla sostituzione minimale [1] ed otteniamo la QED [1]. Le interazioni elettromagnetiche delle particelle nucleari sono piú complicate, data la natura non elementare degli adroni.

Le forze elettromagnetiche sono a *lunga portata*:

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} \tag{1.10}$$

data l' annullarsi della massa del fotone, e sono dominanti su distanze di tipo atomico. Per distanze superiori, l' intensità delle forze elettrostatiche è tale che le cariche tendono a neutralizzarsi e prevalgono forze di tipo forze di Van der Waals, dovute alla polarizzabilità delle molecole.

Interazioni Forti o Nucleari. sono le forze che tengono insieme protoni e neutroni nei nuclei atomici, superando la repulsione elettrostatica dei protoni. Le forze nucleari hanno un raggio di azione limitato dell' ordine del raggio dei nuclei:

$$\begin{aligned} V(r) &\simeq \frac{e^{-r/R}}{r} \\ R &\simeq 10^{-13} \text{ cm} = 1 \text{ fermi} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Una prima teoria delle Interazioni Nucleari, proposta da H. Yukawa, le descrive come dovute allo scambio di una particella simile al fotone ma dotata di massa, il mesone π. In questo caso, il raggio di azione è determinato dalla massa della particella intermedia:

$$R \simeq \frac{\hbar}{m_\pi c} \tag{1.12}$$

Confrontando la (1.12) con (1.11) si trova[2] $m_\pi c^2 \simeq 100 - 200$ MeV, che è in accordo con la massa osservata del mesone π scoperto nei raggi cosmici nell' immediato dopoguerra: $m_\pi c^2 \simeq 140$ MeV. L' accoppiamento pione-nucleone è caratterizzato da una costante adimensionale analoga alla costante di struttura fina, ma circa 1000 volte piú grande: le interazioni nucleari dominano sulla repulsione elettrostatica dei protoni nei nuclei. Per distanze atomiche, tuttavia, le forze nucleari sono del tutto irrilevanti, dovuto al loro calo esponenziale (1.11).

[2] il risultato numerico si ottiene ricordando che: $\hbar \cdot c \simeq 200$ MeV $\cdot$ fermi.

Interazioni Deboli. Sono le interazioni responsabili del decadimento del neutrone, discusso in [1]. L' interazione è caratterizzata dalla costante adimensionale:

$$G_F m_p^2 \simeq 10^{-5} \tag{1.13}$$

dove G_F è la costante di Fermi, ottenuta dalla vita media del neutrone [1]. L' intensità delle forze deboli è tipicamente $(G_F m_p^2)^2/\alpha \simeq 10^{-7}$ volte meno intensa delle forze elettromagnetiche. Gli effetti delle interazioni deboli di particelle cariche sono osservabili solo nel caso di decadimenti di particelle che sarebbero altrimenti stabili (ad es. il neutrone) o nelle interazioni dei neutrini (che non sono sensibili alle forze elettromagnetiche e nucleari).

Vite medie di particelle instabili. Le Interazioni Forti permettono la formazione di *risonanze*: stati instabili che si disintegrano in particelle finali a causa della stessa interazione. I tempi tipici di decadimento sono dell' ordine del tempo impiegato dalla luce per attraversare la risonanza, che ha una dimensione lineare di ordine R, quindi:

$$\tau \simeq \frac{R}{c} \simeq 10^{-23} \text{ sec} \simeq \frac{\hbar}{m_\pi c^2} \tag{1.14}$$

Tempi di questo ordine di grandezza si misurano dalla *larghezza* della risonanza, l' indeterminazione in energia, collegata alla vita media (1.14) dalla relazione di incertezza:

$$\Gamma \cdot \tau = \hbar \tag{1.15}$$

da cui si ottiene una larghezza tipica:

$$\Gamma \simeq m_\pi c^2 \simeq 100 - 200 \text{ MeV} \tag{1.16}$$

Per confronto, le tipiche vite medie per decadimenti dovuti alle interazioni elettromagnetiche (ad es. $\pi^0 \to \gamma\gamma$) sono dell' ordine:

$$\tau_{e.m.} \simeq 10^{-16} - 10^{-18} \text{ sec} \tag{1.17}$$

La velocità di decadimento del neutrone è una funzione molto sensibile della differenza di massa $n - p$:

$$\Gamma_n = \frac{\hbar}{\tau_n} = Cost \cdot (G_F)^2 (\Delta m)^5 \tag{1.18}$$

La potenza con cui appare Δm è dettata da motivi dimensionali, visto che G_F, nel sistema di unità naturali, ha dimensioni $[massa]^{-2}$. Quindi per tutti i decadimenti deboli possiamo porre, almeno come ordine di grandezza:

$$\tau_X = \tau_n (\frac{\Delta m_{n-p}}{\Delta m_X})^5 \tag{1.19}$$

dove Δm_X è la differenza di massa tra la particella X e le particelle dello stato finale. Troviamo in questo modo vite medie che vanno dal microsecondo (per il muone, $\Delta m_\mu \simeq m_\mu = 110$ MeV) a 10^{-12} sec (per le particelle con il quark charm, $\Delta m_c \simeq m_c \simeq 1.5$ GeV).

In ogni caso, la separazione tra gli ordini di grandezza delle vite medie è consistente: la vita media di una particella instabile è un buon indicatore del tipo di interazione che induce il decadimento stesso.

In conclusione, le considerazioni precedenti indicano una lagrangiana di interazione della forma:

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_{strong} + \mathcal{L}_{e.m.} + \mathcal{L}_{weak} \tag{1.20}$$

La forma dei diversi termini è determinata dalle simmetrie delle diverse interazioni. Nella teoria Standard che considereremo nel seguito, queste simmetrie sono tutte simmetrie sotto *trasformazioni di gauge non abeliane*, generalizzazioni della familiare simmetria per trasformazioni di gauge di secondo tipo dell' Elettrodinamica Classica e Quantistica.

Questo denominatore comune di interazioni cosí differenti da un punto di vista fenomenologico ci incoraggia a pensare che la Teoria Standard sia la manifestazione di una struttura ancora piú simmetrica e unificata.

Capitolo 2

SPIN ISOTOPICO E STRANEZZA

Il punto di partenza è la constatazione che protone e neutrone hanno masse molto prossime tra loro:

$$\frac{m_n - m_p}{m_p} \simeq 0.15 \cdot 10^{-2} \tag{2.1}$$

W. Heisenberg ha interpretato questo fatto come conseguenza dell' invarianza dell' Hamiltoniana dele Interazioni Forti sotto trasformazioni che cambiano gli stati di protone e neutrone in loro arbitrarie sovrapposizioni complesse:

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \to U \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

dove U è una matrice unitaria, per preservare la normalizzazione $|p|^2 + |n|^2$. Ogni matrice di questo tipo si puó scrivere come prodotto di un fattore di fase per una matrice *speciale*, con determinante cioè pari all' unità:

$$U = e^{i\phi} U_{spec}$$

L' invarianza della Hamiltoniana sotto trasformazioni dei campi del protone e del neutrone per un fattore di fase comune conduce (teorema di Noether), alla conservazione della *corrente barionica* e del *numero barionico*[1]:

$$\begin{aligned} &J_B^\mu = \bar{p}\gamma^\mu p + \bar{n}\gamma^\mu n + \ldots; \;\; \partial_\mu J_B^\mu = 0 \\ &N_B = \int d^3x \; J_B^0 = N_p - N_{\bar{p}} + N_n - N_{\bar{n}} + \ldots; \;\; \frac{dN_B}{dt} = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

La conservazione del numero barionico si puó considerare separatamente, quindi d' ora in avanti ci restringeremo a trasformazioni del tipo (2.2) con:

$$det(U) = 1 \tag{2.4}$$

[1] i punti di sospensione indicano che, in genere, è necessario aggiungere alla (2.3) i contributi di altre particelle che decadono in mesoni piú p/n e quindi si devono trasformare anche loro per rispettare al conservazione della corrente.

Matematicamente, le trasformazioni (2.2) con la condizione (2.4) determinano il gruppo SU(2) delle matrici unitarie e speciali in 2 dimensioni. Questo gruppo è localmente isomorfo, in un intorno infinitesimo dell' unità, al gruppo delle rotazioni di uno spazio euclideo a 3 dimensioni, O(3). SU(2) è il gruppo che rappresenta le rotazioni spaziali sugli stati quantistici, permettendo di includere stati di momento angolare semintero (cfr. [1]).

Lo Spin Isotopico. Da un punto di vista fisico, data la simmetria sotto le (2.2) (2.4), possiamo considerare protone e neutrone come i due stati di carica di un' unica particella, il *nucleone*. è evidente l' analogia con i due stati di spin di una particella di spin 1/2, di qui il nome di *Spin Isotopico* (isospin, in breve) dato alla simmetria sotto le trasformazioni (2.2).

Come abbiamo sottolineato nel Capitolo presedente, protone e neutrone non hanno un ruolo speciale nel panorama degli adroni. Conviene interpretare la simmetria (2.2) in modo diverso. Immaginiamo che esista un gruppo G di trasformazioni sui gradi di libertà fondamentali delle Interazioni Forti (i quark) che lascino invariata l' Hamiltoniana. Data una trasformazione $g \epsilon G$, l' effetto di g sugli stati p ed n è proprio della forma (2.2), con U ovviamente funzione di g:

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \rightarrow U(g) \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Se eseguiamo due trasformazioni in sequenza, prima g_1 e poi g_2, l' effetto sarà di ottenere la trasformazione prodotto delle due: $g = g_2 \cdot g_1$. In corrispondenza, ci aspettiamo:

$$U(g_2) \cdot U(g_1) = U(g_2 \cdot g_1) \tag{2.6}$$

Le matrici $U(g)$ forniscono una *rappresentazione* delle trasformazioni del gruppo G, nel senso matematico del termine: la legge di moltiplicazione del gruppo è rappresentata dal prodotto delle matrici U (abbiamo già incontrato questo concetto a proposito delle trasformazioni di Lorentz[1], cfr. Appendice C per una breve compendio di Teoria dei gruppi e delle loro rappresentazioni). Le matrici $U(g)$ formane esse stesse un gruppo non commutativo. Poichè il piú semplice gruppo non commutativo è proprio SU(2), concludiamo che il gruppo di invarianza fondamentale G deve contenere almeno un sottogruppo SU(2) che si rappresenta nelle (2.5).

Dalla teoria del momento angolare, sappiamo che i vettori di una rappresentazione irriducibile di SU(2) sono caratterizzati dal momento angolare totale e dall' autovalore della sua terza componente. Nel caso dello spin isotopico, indichiamo con I e I_3 le quantità corrispondenti. La dimensione della rappresentazione con spin isotopico I è pari a $2I + 1$. I nucleoni hanno quindi spin isotopico 1/2 .

La trasformazione (2.5) puó essere estesa adesso a tutti gli altri stati adronici, che si trasformeranno secondo rappresentazioni, eventualmente diverse da quella dei nucleoni. Il primo esempio è fornito dai mesoni di Yukawa. I portatori delle forze nucleari si presentano in un un *tripletto* di stati quasi degeneri, π^+, π^0, π^-, che intepretiamo come i tre stati di carica di un' unica particella, il pione o mesone π, che ha dunque $I = 1$.

Che gli adroni si presentino in multipletti di carica approssimativamente degeneri in massa è una delle predizioni meglio rispettate nella Fisica delle Particelle (cfr. la Fig.2.1 e seguenti).

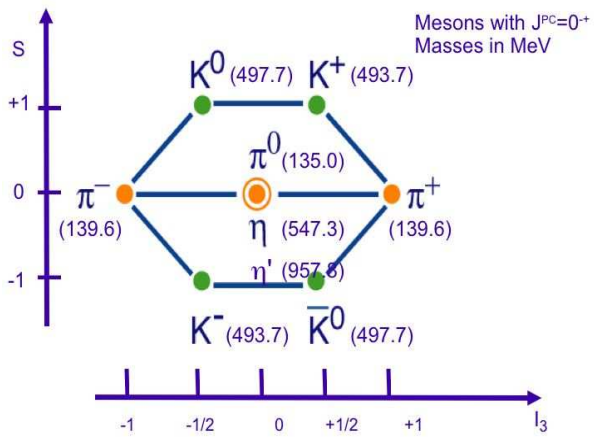

Figura 2.1: I mesoni pseudoscalari leggeri

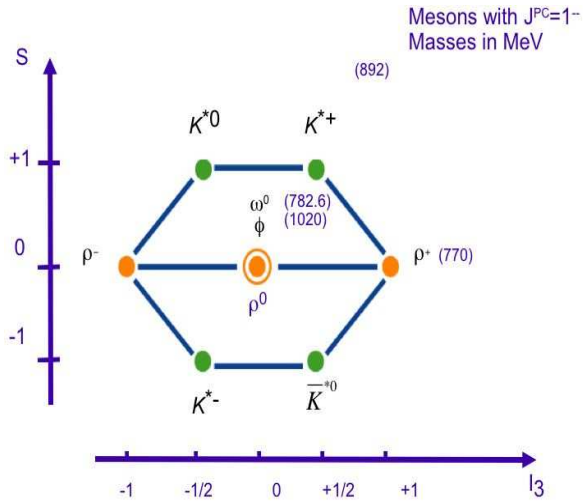

Figura 2.2: Mesoni vettoriali leggeri.

La Stranezza. Le particelle adroniche possiedono un ulteriore numero quantico conservato, la *Stranezza*[2], S. La conservazione di S nelle interazioni forti spiega la lunga vita media di alcuni adroni (ad es. i mesoni K o i barioni Λ e Σ), che, essendo le particelle piú leggere con $S \neq 0$, possono decadere solo attraverso le Interazioni Deboli, con vite medie dell' ordine di $10^{-8} - 10^{-12}$ *sec.* Possiamo assegnare al nucleone ed al pione stranezza zero, e ad ogni altro adrone un appropriato valore della stranezza in modo tale che S sia conservata in reazioni e decadimenti prodotti dalle Interazioni Forti, ed eventualmente violata nei decadimenti deboli. Insieme ai numeri quantici legati alle trasformazioni di Lorentz, massa e spin, *spin isotopico, stranezza e numero barionico* formano un sistema completo di numeri quantici, atti a caratterizzare ciascun adrone leggero (masse inferiori a circa 2 GeV). La carica elettrica puó essere ottenuta dalla relazione scoperta empiricamente da M. Gell-Mann e K. Nishijma:

$$Q = I_3 + \frac{B+S}{2} \tag{2.7}$$

Vediamo dalla (2.7) che le cariche elettriche all' interno di un multipletto di isospin variano a passi di 1, come I_3 ed inoltre che la stranezza è conservata anche nelle Interazioni Elettromagnetiche, che conservano I_3. è conveniente introdurre al posto di S la cosiddetta *ipercarica*, Y, pari a due volte la carica elettrica media del multipletto, $< Q >$. Dalla (2.7) troviamo:

$$< Q >= \frac{S+B}{2} \tag{2.8}$$

poichè $< I_3 >= 0$, quindi possiamo anche scrivere:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y; \;\; Y = S + B \tag{2.9}$$

[2]introdotta da M. Gell-Mann negli anni '50.

Tabella 2.1: Decadimenti dei mesoni pseudoscalari leggeri. Notare la differenza di vita media tra decadimenti elettromagnetici e deboli.

	S	Decad. dom.	ΔI	$\lvert\Delta S$	τ(s)	Int.
$\pi^{\pm}$	0	$\mu\ \nu_\mu$	1	0	$2.6 \cdot 10^{-8}$	debole
π^0	0	$\gamma\ \gamma$	1	0	$8.4 \cdot 10^{-17}$	e.m.
$K^{\pm}$	±1	$\pi^{\pm}\ \pi^0$ $\mu\ \nu_\mu$ $\pi\ l\ \nu_l$	3/2 1/2 1/2	1	$1.2 \cdot 10^{-8}$	debole
K_L	±1	3π $\pi\ l\ \nu_l$	$1/2 - 3/2$ 1/2	1	$5.2 \cdot 10^{-8}$	debole
K_S	±1	2π	3/2	1	$0.89 \cdot 10^{-10}$	debole
η	0	3π $\gamma\ \gamma$	≥1	0	$0.55 \cdot 10^{-18}$	e.m.

Le Figg. 2.1 e seguenti riportano gli adroni piú leggeri par dati valori dello spin, del numero barionico e della parità intrinseca. Ogni adrone è rappresentato da un punto nel piano dei due numeri quantici che lo caratterizzano, I_3, S. Sono indicate le masse delle diverse particelle: la quasi degenerazione dei multipletti di isospin è evidente.

Nella Tabella 2.1 e seguenti sono riportati vite medie e principali modi di decadimento delle stesse particelle. le regole di selezione rispettate dalle diverse interazioni si riflettono chiaramente nei valori delle vite medie.

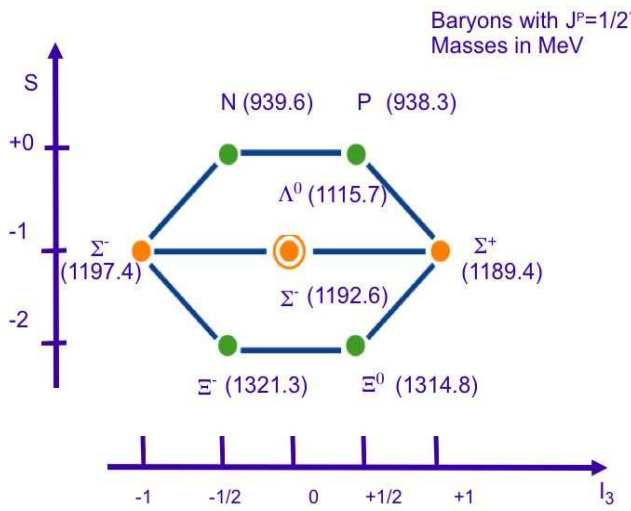

Figura 2.3: Barioni di spin 1/2

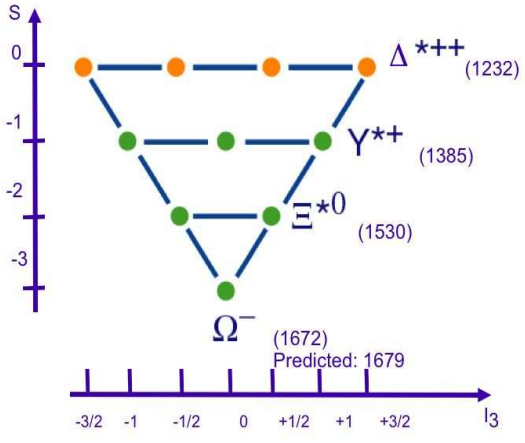

Figura 2.4: Barioni di spin 3/2.

I generatori dello spin isotopico. Nello spazio di Hilbert degli stati quantistici, le trasformazioni di isospin sono rappresentati da operatori unitari infinito-dimensionali. Per ogni $g \epsilon$ SU(2):

$$g \rightarrow \mathcal{U}(g); \;\; \mathcal{U}(g)^{\dagger}\mathcal{U}(g) = 1 \tag{2.10}$$

e per ogni stato $|A> \; \epsilon \, \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} &|A> \rightarrow \mathcal{U}(g)|A> \\ &\mathcal{U}(g) \; \mathbf{H}_{strong} \; \mathcal{U}(g)^{\dagger} = \mathbf{H}_{strong} \end{aligned} \tag{2.11}$$

In un intorno infinitesimo dell' identità:

$$\mathcal{U}(g) = 1 + \sum_{i=1,3} \alpha_i \mathcal{I}^i \tag{2.12}$$

con $\mathcal{I}^i$ operatori hermitiani che commutano con l' Hamiltoniana forte, nel limite in cui trascuriamo differenze di massa come Δm_{p-n}, e che soddisfano alle relazioni di commutazione dell' algebra di SU(2):

$$[\mathcal{I}^i, \mathcal{I}^j] = i \; \epsilon^{ijk} \; \mathcal{I}^k \tag{2.13}$$

La rappresentazione di SU(2) fornita dalle $\mathcal{U}$, e per esse dalle $\mathcal{I}^i$, è *completamente riducibile* in rappresentazioni finito dimensionali (cfr. l' Appendice C), è costituita cioè da matrici diagonali a blocchi finito-dimensionali, che corrispondono ai multipletti di isospin. Limitiamoci agli stati di singola particella, che scriviamo come:

$$|\mathbf{p}, s, h, i, i_3, \alpha > \tag{2.14}$$

con $\mathbf{p}$ la quantità di moto, s ed h spin ed elicità[3], ed α gli altri numeri quantici (B ed S). Poichè SU(2) commuta con l' Hamiltoniana, le trasformazioni g trasformano lo stato (2.14) negli stati dello stesso multipletto e abbiamo quindi:

$$\mathcal{U}(g)|\mathbf{p}, s, h, i, i_3, \alpha >= \sum_{i_3'} \; U^{(i)}(g)_{i_3, i_3'} |\mathbf{p}, s, h, i, i_3', \alpha > \tag{2.15}$$

dove le $U^{(i)}(g)$ sono le matrici della rappresentazione con isospin i. Corrispondentemente:

$$\mathcal{I}^k|\mathbf{p}, s, h, i, i_3, \alpha >= \sum_{i_3'} \; (I^{(i)})^k_{i_3, i_3'} |\mathbf{p}, s, h, i, i_3', \alpha > \tag{2.16}$$

dove le matrici $I^{(i)}_{i_3, i_3'}$ hanno la stessa forma delle matrici corrispondenti al momento angolare i, cfr. [6].

[3] la componente dello spin nella direzione di $\mathbf{p}$.

Tabella 2.2: Decadimenti dei barioni stabili per le Interazioni Forti.

	S	Decad. dom.	ΔI	$\|\Delta S\|$	τ(s)	Int.
p	0	non conosciuto			$\geq 10^{31-33}$ anni	??
n	0	$p\ e^-\ \bar{\nu}_e$	1	0	885.7 ± 0.8	debole
Σ^+	-1	$p\ \pi^0$ (0.52) $n\ \pi^+$(0.48) $\Lambda\ e^+\nu_e$ ($2.0 \pm 0.5\ 10^{-5}$)	1/2 1/2 1	1 1 0	$0.802 \pm 0.003 \cdot 10^{-10}$	debole
Σ^-	-1	$n\ \pi^-$ (0.998) $n\ e^+\bar{\nu}_e$ ($1.017 \pm 0.034 \cdot 10^{-3}$) $\Lambda\ e^-\bar{\nu}_e$ ($5.73 \pm 0.27 \cdot 10^{-3}$)	1/2 1/2 1	1 1 0	$1.479 \pm 0.011 \cdot 10^{-10}$	debole
Σ^0	-1	$\Lambda\ \gamma$ (1.00)	1	0	$7.4 \pm 0.7 \cdot 10^{-20}$	e.m.
Λ	-1	$p\ \pi^-$ (0.639 ± 0.5) $n\ \pi^0$ (0.358 ± 0.5) $p\ e^-\bar{\nu}_e$ ($8.32 \pm 0.14 \cdot 10^{-4}$)	1/2	1	$2.632 \pm 0.020 \cdot 10^{-10}$	debole
Ξ^0	-1	$\Lambda\ \pi^0$ (0.99522 ± 0.00032) $\Sigma^+e^-\bar{\nu}_e$ ($2.7 \pm 0.4 \cdot 10^{-4}$)	1/2	1	$2.90 \pm 0.009 \cdot 10^{-10}$	debole
Ξ^-	-1	$\Lambda\ \pi^-$ (0.998777 ± 0.00035) $\Sigma^0e^-\bar{\nu}_e$ ($8.7 \pm 1.7 \cdot 10^{-5}$) $\Lambda\ e^-\bar{n}u_e$ ($5.63 \pm 0.3 \cdot 10^{-4}$)	1/2	1	$1.639 \pm 0.015 \cdot 10^{-10}$	debole

2.1 Le ampiezze pione-nucleone

Oltre che nelle masse, la simmetria di isospin ha come conseguenza l' esistenza di relazioni misurabili tra ampiezze di diffusione. Consideriamo il caso piú semplice: la diffussione pione nucleone.

Caratterizziamo gli stati pione-nucleone con il prodotto tensoriale:

$$|\pi, m > |N, l >= |\pi, m; N, l > \tag{2.17}$$

dove $m = \pm 1, 0$ e $l = \pm 1/2$ ed abbiamo omesso la dipendenza dalle quantità di moto delle particelle, che restano fissate in tutto il calcolo. Le ampiezze di diffusione sono gli elementi della matrice S:

$$< \pi, m'; N, l'|S|\pi, m; N, l > \tag{2.18}$$

Possiamo esprimere gli stati (2.17) in termini degli autostati dell' isospin totale e della sua terza componente, usando i familiari coefficienti di Clebsch-Gordon relativi alla composizione dei momenti angolari, in questo caso $1 \otimes 1/2$:

$$|\pi, m; N, l >= \sum_{I=1/2,3/2} C(1, m; 1/2, l \mid I, m + l)|\pi, N; I, m + l > \tag{2.19}$$

In luogo degli elementi di matrice (2.18) possiamo, naturalmente, esprimere le grandezze osservabili in termini di:

$$< \pi, N; I', I'_3|S|\pi, N; I, I_3 >= \delta_{I,I'}\delta_{I_3,I'_3}S(I, I_3) \tag{2.20}$$

In questa relazione, abbiamo già parzialmente tenuto conto della simmetria di isospin: poichè commuta con I e con I_3, S deve essere diagonale nella base in cui questi numeri quantici sono diagonali. Tuttavia, la simmetria implica che S commuti con *tutte le componenti* dello spin isotopico, cioè anche con I_1 e I_2. Un operatore che soddisfa queste condizioni in una rappresentazione irriducibile deve essere un multiplo della matrice identità (è il contenuto del cosiddetto *Lemma di Schur*, cfr. Appendice C). Quindi:

$$S(I, I_3) = \text{indipendente da } I_3 \ = S(I) \tag{2.21}$$

Le ampiezze di diffusione pione-nucleone sono determinate da due sole ampiezze invarianti, $S(1/2)$ e $S(3/2)$.

Le reazioni sperimentalmente piú accessibili sono la diffusione di $\pi^{\pm}$ su protone:

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + p; \tag{2.22}$$

$$\pi^- + p \to \pi^- + p; \text{(diffusione elastica)} \tag{2.23}$$

$$\pi^- + p \to \pi^0 + n \ \text{ (scambio carica)} \tag{2.24}$$

Usando i valori numerici dei coefficienti di Clebsch-Gordon [21], si trova:

$$|\pi^+ p >= |3/2, +3/2 >; \tag{2.25}$$

Tabella 2.3: Decadimenti delle prime risonanze adroniche. Notare la conservazione della stranezza in tutti i decadimeni tranne l' ultimo, per il quale la vita media indica un decadimento debole.

	Decad. dom.	Γ (MeV)	Interaz.
ρ	2π	149	forte
K^*	$K\ \pi$	51	forte
ω	3π	8.4	forte
ϕ	K K	4.3	forte
Δ	N π	120	forte
Y^*	$\Lambda\ \pi$ $\Sigma\ \pi$	3.6	forte
Ξ^*	$\Xi\ \pi$	9	forte
Ω	$\Lambda\ K$ $\Xi\ \pi$	$0.8 \cdot 10^{-10}$ sec	debole

$$
\begin{aligned}
|\pi^0 p> &= \sqrt{\frac{2}{3}}|3/2,+1/2> - \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2,+1/2>; \\
|\pi^+ n> &= \sqrt{\frac{1}{3}}|3/2,+1/2> + \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2,+1/2>;
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

$$
\begin{aligned}
|\pi^- p> &= \sqrt{\frac{1}{3}}|3/2,-1/2> - \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2,-1/2>; \\
|\pi^0 n> &= \sqrt{\frac{2}{3}}|3/2,-1/2> + \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2,-1/2>;
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

da cui troviamo facilmente:

$$
\begin{aligned}
A(\pi^+ p \to \pi^+ p) &= S(3/2) \\
A(\pi^- p \to \pi^- p) &= \frac{1}{3}S(3/2) + \frac{2}{3}S(1/2) \\
A(\pi^- p \to \pi^0 n) &= \frac{\sqrt{2}}{3}[S(3/2) - S(1/2)]
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

Per momenti del pione superiori a 200 MeV, la sezione d' urto sale rapidamente, Fig. 2.5. L' effetto è dovuto ad una risonanza molto prominente. L' effetto è presente nella diffusione di pioni positivi su protone, quindi la risonanza deve avere spin isotopico 3/2[4]. Al picco della risonanza possiamo trascurare $S(1/2)$ nelle relazioni (2.28). Prendendo il quadrato delle ampiezze,

[4]L' analisi della distribuzione angiolare mostra che la risonanza ha momento angolare $J = 3/2$, ed è quindi indicata con la notazione $\Delta(3/2, 3/2)$. La prima osservazione della $\Delta(3/2, 3/2)$ è dovuta ad E. Fermi, al ciclotrone di Chicago, una delle prime macchine acceleratrici per lo studio delle particelle elementari.

troviamo che le sezioni d' urto sono nei rapporti:

$$\sigma(\pi^+ p) : \sigma(\pi^- p)_{el} : \sigma(\pi^- p)_{sc.carica} = 9 : 1 : 2 \tag{2.29}$$

Le relazioni (2.29) sono ben soddisfatte dai valori sperimentali[5] al picco, cfr. Fig. 2.5):

$$\sigma(\pi^+ p) \simeq 200 \text{ mb}; \;\; \sigma(\pi^- p)_{tot} = \sigma(\pi^- p)_{el} + \sigma(\pi^- p)_{sc.carica} \simeq 70 \text{ mb} \tag{2.30}$$

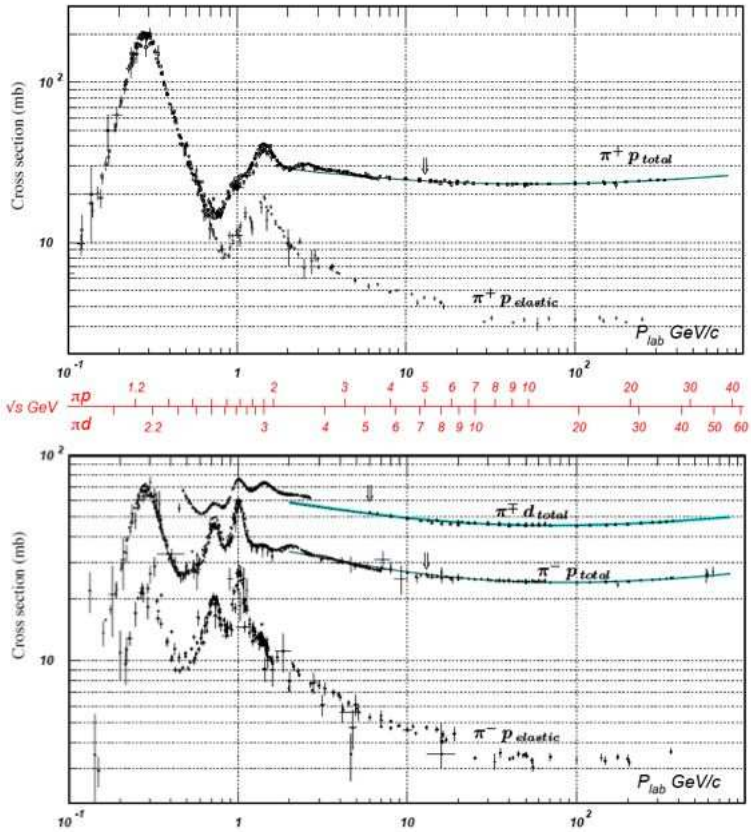

Figura 2.5: Sezioni d' urto della diffusone di pioni su nucleoni [21].

2.2 Correnti di isospin e correnti deboli

Ad energie non troppo grandi (indicativamente, $E \leq 1$ GeV) una buona approssimazione delle fisica adronica si puóttenere da una lagrangiana basata sui campi del nucleone, del pione

[5] le sezioni d' urto sono date in *millibarn*, 1 $mb = 10^{-27}$ cm^2.

e delle altre particelle discusse nelle precedenti Sezioni[6]. Naturalmente, la lagrangiana delle interazioni forti deve essere invariante per trasformazioni di spin isotopico e possiamo scriverla come:

$$\mathcal{L} = \bar{N}(i\partial\!\!\!/ - M)N + \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^i \partial^\mu \pi^i - m^2\ \pi^i \pi^i) + g_\pi \bar{N} i\gamma_5 \sigma^i N \cdot \pi^i + \dots \tag{2.31}$$

N e π^i indicano i campi del nucleone e del pione, rispettivamente, M e m le loro masse, i punti di sospensione indicano i contributi degli altri campi, somma su tutti gli indici ripetuti. Abbiamo introdotto un termine di interazione nella forma piú semplice (interazione di Yukawa) tenendo conto della parità negativa del pione (da cui la matrice γ_5).

Le trasformazioni infinitesime di SU(2) per nucleoni e pioni si scrivono esplicitamente come (cfr. Appendice C):

$$\begin{aligned} \delta N &= -i\alpha_i \cdot (I^{(1/2)})^i\ N = -i\alpha_i \cdot \frac{\sigma^i}{2} N; \\ \delta \pi^k &= -i\ \alpha_i [(I^{(1)})^i\ \pi]^k = \alpha_i \epsilon^{kij} \pi^j; \quad (i,j,k = 1,2,3) \end{aligned} \tag{2.32}$$

σ^i sono le matrici di Pauli, il pione trasforma come la rapprsentazione regolare di SU(2), i cui generatori sono fissati dalle costanti di struttura di SU(2) Per il pione, abbiamo usato campi reali, $\pi^{1,2,3}$ (rappresentazione cartesiana), collegati ai campi con carica definita da:

$$\pi^0 = \pi^3; \quad \pi = \frac{\pi^1 + i\pi^2}{\sqrt{2}} \tag{2.33}$$

il campo π *crea* un π^+ e *distrugge* la sua antiparticella, π^-.

L' invarianza per spin isotopico dà luogo a tre correnti conservate che, secondo il teorema di Noether, si scrivono al modo seguente:

$$J^k_\mu = -i \sum_{campi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\ \partial^\mu \psi_\alpha} (I^k)_{\alpha,\beta} \psi_\beta \tag{2.34}$$

dove la somma si estende a tutti i campi nella lagrangiana, α, β sono indici che individuano le componenti di isospin del generico campo ψ e $(I^k)_{\alpha,\beta}$ le matrici dei generatori dell' isospin nel multipletto di ψ. Calcolando esplicitamente con le (2.32), si trova:

$$J^k_\mu = \bar{N}\gamma_\mu \frac{\sigma^k}{2} N\ +\ (\partial_\mu \pi)^l\ \epsilon^{lks}\ \pi^s\ +\ \dots \tag{2.35}$$

I generatori di SU(2), definiti nelle (2.12) e (2.13) si ottengono dalle correnti al solito modo:

$$\mathcal{I}^k = \int d^3x\ J^k_0 = \int d^3x\ [N^\dagger \frac{\sigma^k}{2} N + (\partial_0 \pi)^l\ \epsilon^{lks}\ \pi^s]\ +\ \dots \tag{2.36}$$

Lasciamo la lettore la dimostrazione che gli operatori (2.36) soddisfano le regole di commutazione dell' algebra, eq. (2.13) in virtú delle regole di commutazione e anticommutazione canoniche dei campi π e N.

[6] a queste energie i gradi di libertà fondamentali sono *congelati* all' interno degli adroni, che si comportano come se fossero particelle elementari.

Calcoliamo adesso la corrente che corrisponde all' operatore di *innalzamento* dello spin isotopico:

$$\begin{aligned}
&J_\mu^{(+)} = J_\mu^1 + iJ_\mu^2 = \bar{p}\gamma_\mu n + \\
&+(\partial_\mu\pi^3)\pi^2 - (\partial_\mu\pi^2)\pi^3 + i[(\partial_\mu\pi^1)\pi^3 - (\partial_\mu\pi^3)\pi^1] = \bar{p}\gamma_\mu n + \\
&+[(\partial_\mu\pi^3)(\pi^2 - i\pi^1) - \pi^3\partial_\mu(\pi^2 - \pi^1)] = \bar{p}\gamma_\mu n + \\
&-i\sqrt{2}[(\partial_\mu\pi^3)\frac{(\pi^1 + i\pi^2)}{\sqrt{2}} - \pi^3\partial_\mu\frac{(\pi^1 + i\pi^2)}{\sqrt{2}}] = \\
&= \bar{p}\gamma_\mu n - i\sqrt{2}(\partial_\mu\pi^3\pi - \pi^3\partial_\mu\pi)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

I due termini della corrente corrispondono alle transizioni: $n \to p$ e $\pi^- \to \pi^0$, rispettivamente. Il primo termine è proprio la corrente vettoriale che interviene nel decadimento β del neutrone, che dunque coincide con la corrente di spin isotopico del nucleone.

Con Feynman e Gell-Mann, possiamo avanzare l' ipotesi che la corrente vettoriale adronica che interviene nella lagrangiana debole *coincida con la corrente di spin isotopico* richiesta dal teorema di Noether e conservata in virtú della simmetria stessa. Questa ipotesi, indicata col nome di ipotesi della corrente vettoriale conservata (CVC, per *conserved vector current*) riproduce la teoria di Fermi per il neutrone, ma ci dà anche la esatta normalizzazione relativa tra quest' ultima e la corrente debole che descrive il decadimento β del pione:

$$\pi^- \to \pi^0 \; e^- \; \bar{\nu} \tag{2.38}$$

Scriviamo la lagrangiana debole relativa al decadimento del neutrone come (cfr. [1]):

$$\mathcal{L}_{weak}^{(n)} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[\bar{p}\gamma_m u(1 + \frac{g_A}{g_V}\gamma_5)n\right][\bar{e}\gamma_m u(1 - \gamma_5)\nu_e] \tag{2.39}$$

Allora, secondo l' ipotesi CVC, la lagrangiana debole che descrive il decadimento (2.38) deve essere:

$$\mathcal{L}_{weak}^{(\pi)} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\left\{-i\sqrt{2}[(\partial_\mu\pi^0)\pi^\dagger - \pi^0(\partial_\mu\pi^\dagger)][\bar{e}\gamma_m u(1 - \gamma_5)\nu_e]\right\} \tag{2.40}$$

dove G_F è la stessa costante di Fermi nei due decadimenti.

Si noti che in (2.40) non ci sono costanti arbitrarie: la normalizzazione relativa tra la corrente vettoriale del neutrone e quella del π^- è fissata dalla normalizzazione dei rispettivi generatori, vedi la (2.37). Possiamo usare la (2.40) per *calcolare* la velocità del decadimento β del π^-. Il risultato è in ottimo accordo con il valore osservato.

Problema 1. Calcolare la velocità di decadimento del pione in (2.38) a partire dalla lagrangiana (2.40).

Soluzione. Indichiamo con $p^{\mu}_{i,f} = (E_{i,f}, \mathbf{p}_{i,f})$ i momenti del pione iniziale e finale.

$$
\begin{aligned}
&S_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_{out} - P_{in})(\sqrt{\frac{1}{V^2 4E_i E_f}}\sqrt{\frac{m_e m_\nu}{V^2 E_e E_\nu}})\ M_{fi};\\
&M_{fi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\ < f|J^{\pi}_{\mu}|i > l_\mu;\\
&< f|J^{(\pi)}_{\mu}|i >= \frac{(p_i + p_f)_\mu}{2\sqrt{E_i E_f}} < I^{(+)} >;\ \ < I^{(+)} >= \sqrt{2}\\
&l_\mu = \bar{u}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_\nu.
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

$$
\begin{aligned}
&d\Gamma = \frac{1}{2}\Sigma_{spin}\frac{|S_{fi}|^2}{T}\frac{V d^3 p_f}{(2\pi)^3}\frac{V d^3 p_e}{(2\pi)^3}\frac{V d^3 p_\nu}{(2\pi)^3} =\\
&= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_{out} - P_{in})\ (\frac{G_F}{\sqrt{2}})^2 | < I^{(+)} > |^2 \frac{(p_i + p_f)_\mu}{2\sqrt{E_i E_f}}\frac{(p_i + p_f)_\nu}{2\sqrt{E_i E_f}} \times\\
&\times (\frac{m_e m_\nu}{E_e E_\nu})\ Tr[\frac{\not{p}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\not{p}\gamma^\nu(1-\gamma_5)}{4 m_e m_\nu}]\ \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3}\frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3}\frac{d^3 p_\nu}{(2\pi)^3}
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

Alcune osservazioni.

- C'è un fattore 2 che viene dalla relazione:

$$
(1 - \gamma_5)^2 = 2(1 - \gamma_5) \tag{2.43}
$$

  questo fattore cancella esattamente il fattore $(1/\sqrt{2})^2$ che viene dalla lagrangiana: la costante di Fermi nella teoria V-A è definita in modo da ottenere lo stesso valore numerico di quello ottenuto nella semplice teoria di Fermi, in cui la coppia di leptoni era creata con la sola interazione V.

- Dopo aver usato la (2.43) nella traccia leptonica, il termine residuo in γ_5 produce un tensore antisimmetrico in μ e ν, che si satura a zero sulla parte adronica.

- in linea con il decadimento del neutrone, possiamo approssimare il momento del pione finale nel limite non-relativistico, ponendo:

$$
\frac{(p_i + p_f)_\mu}{2\sqrt{E_i E_f}} = g_{\mu 0} \tag{2.44}
$$

Otteniamo quindi:

$$
\begin{aligned}
&d\Gamma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_{out} - P_{in})\ (\frac{G_F}{\sqrt{2}})^2 | < I^{(+)} > |^2 \times\\
&\times 2\ (\frac{1}{E_e E_\nu})\ [2E_e E_\nu - (e\nu)]\ \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3}\frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3}\frac{d^3 p_\nu}{(2\pi)^3}
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

I calcoli si eseguono facilmente nel limite non-relativistico per il pione finale.

- nel sistema di riposo del π^-, la funzione $\delta^{(3)}(\sum \mathbf{P}_{out})$ si integra sul momento del π^0;
- la conservazione dell' energia non dipende dagli angoli e si legge:

$$E_e + E_\nu = Q == m(\pi^+) - m(\pi^0) = 4.59 \text{ MeV} \tag{2.46}$$

- si puó integrare indipendentemente sugli angoli dell' elettrone e del neutrino; notare che $\int (e \cdot \nu) d\cos\theta_\nu = 2E_e E_\nu$;
- si integra sull' energia del neutrino utilizzando la funzione δ della conservazione dell' energia, e ponendo: $E_\nu = Q - E_e$

.

Il risultato finale è:

$$\Gamma = \frac{G_F^2}{\pi^3} \int_{m_e}^{Q} dE \sqrt{E^2 - m_e^2} E (Q - E)^2 \simeq (\frac{G_F^2 Q^5}{30\pi^3}) 0.941 \simeq 0.41 s^{-1} \tag{2.47}$$

dove abbiamo usato:

$$G_F^{(n)} = 0.9740\ G^\mu = 1.136\ 10^{-5}\ \text{GeV}^{-2}. \tag{2.48}$$

Al risultato (2.47) vanno aggiunte delle piccole correzioni elettromagnetiche, ma comunque si confronta già molto bene con il valore sperimentale:

$$\Gamma_{expt} = B(\pi^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e)\ \tau_\pi = 0.39 s^{-1} \tag{2.49}$$

2.3 La simmetria SU(3)

$SU(3)$ è il gruppo delle matrici U, unitarie e 3×3. Il gruppo $SU(3)$ è stato considerato per la prima volta da S. Sakata che ha generalizzato le trasformazioni di spin isotopico sul doppietto dei nucleoni per includere la stranezza.

Aggiungendo ai nucleoni il barione Λ, Sakata considera il *tripletto* di campi:

$$\begin{pmatrix} p \\ n \\ \Lambda \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

ed estende le (2.2) a trasformazioni del tripletto:

$$\begin{pmatrix} p \\ n \\ \Lambda \end{pmatrix} \to U \begin{pmatrix} p \\ n \\ \Lambda \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

con U unitaria e 3×3.

La simmetria sotto $SU(3)$ è ridotta ad $SU(2) \otimes U(1)_S$ dalla differenza di massa tra il barione Λ ($M_\Lambda = 1115.7$ MeV) e la massa dei nucleoni, un effetto del 30% circa: la simmetria $SU(3)$ è rotta

da una componente delle stesse interazioni forti, spesso indicata come interazione medio-forte (*medium strong interaction*). Ci dobbiamo aspettare che le relazioni derivate dalla simmetria siano conseguentemente molto meno precise di quelle dello spin isotopico.

Nella Teoria Standard il tripletto fondamentale è il tripletto dei quark up, down e strano e la rottura della simmetria $SU(3)$ è dovuta alla differenza tra la massa del quark strano e la massa media dei quark up e down.

2.4 Le matrici di Gell-Mann

Ogni matrice unitaria si puó scrivere come l'esponenziale di una matrice hermitiana:

$$U = e^{iT} \tag{2.52}$$

Se inoltre U ha determinante pari all'unità, deve essere:

$$Tr(T) = 0 \tag{2.53}$$

Possiamo sviluppare ogni matrice hermitiana 3×3 in una base di matrici hermitiane standard, in analogia allo sviluppo di una matrice hermitiana 2×2 nella base delle matrici di Pauli piú l'identità.

Nel caso di $SU(3)$, ci sono 8 matrici hermitiane e senza traccia. Una base conveniente è stata individuata da M. Gell-Mann nelle matrici λ_i, $(i = 1, \cdots, 8)$:

- i=1,2,3 (σ_i sono le tre matrici di Pauli 2×2):

$$\lambda_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

- i=4,5:

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \ \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

- i=6,7:

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \ \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.56}$$

- i=8

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

Capitolo 3

LA TEORIA DI YANG-MILLS

L' elettrodinamica è invariante per le cosiddette trasformazioni di gauge di seconda specie:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{iq\phi(x)}\psi(x); \quad A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\phi(x) \tag{3.1}$$

dove ϕ è una funzione arbitraria dello spazio tempo, $\psi(x)$ è un generico campo di materia, q la sua carica elettrica in unità della carica elementare (per il campo dell' elettrone, $q = -1$) ed A_μ è proporzionale al campo elettromagnetico.

Le derivate $\partial_\mu\psi$ non si trasformano come ψ quindi, mentre la lagrangiana libera di ψ è invariante sotto trasformazioni di fase *globali*, $\phi(x) =$ costante, la stessa lagrangiana non è invariante per le (3.1).

Tuttavia, possiamo definire una *derivata covariante* attraverso la sostituzione minimale:

$$\partial_\mu\psi(x) \to D_\mu\psi(x) = [\partial_\mu \ + iqA_\mu(x)]\psi(x) \tag{3.2}$$

ed allora il campo $D_\mu\psi$ trasforma esattamente come ψ:

$$\begin{aligned}(D_\mu\psi)' &= [\partial_\mu \ + iqA_\mu(x) - iq\partial_\mu\phi(x)][e^{iq\phi(x)}\psi(x)] = \\ &= e^{iq\phi(x)}[\partial_\mu \ + iqA_\mu(x)]\psi(x) = e^{iq\phi(x)}D_\mu\psi(x).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Anche A_μ si trasforma in modo complicato, ma il tensore di Maxwell $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$, che contiene i campi osservabili elettrico e magnetico, è invariante:

$$(F_{\mu\nu})' = F_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu\phi + \partial_\mu\partial_\nu\phi = F_{\mu\nu} \tag{3.4}$$

In conclusione (W. Pauli [7], cfr. [1]):

- se la lagrangiana della materia $\mathcal{L}_0(\psi, \partial_\mu\psi)$, ad es. la lagrangiana libera, è invariante per trasformazioni di fase globali, la nuova lagrangiana:

  $$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\psi, D_\mu\psi) \tag{3.5}$$

  è invariante per le trasformazioni di seconda specie, (3.1).

- si ottiene una teoria dinamica completa del campo di materia ψ in interazione con il campo elettromagnetico aggiungendo alla (3.5) la lagrangiana invariante ottenuta dal tensore di Maxwell:
$$\mathcal{L}_{min} = \mathcal{L}_0(\psi, D_\mu\psi) - \frac{1}{4e^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{3.6}$$
- e è una costante, l' unica grandezza nella (3.6), a parte la massa delle particelle associate a ψ, che non sia determinata dalla simmetria. Riscalando $A \to eA$, A diventa proprio il potenziale vettore del campo elettromagnetico, mentre e caratterizza l' intensità dell' interazione tra ψ e il campo elettromagnetico stesso.

La sostituzione minimale applicata alla lagrangiana di Dirac dei leptoni carichi, elettrone, μ e τ ci dà la cosiddetta elettrodinamica spinoriale (QED in breve [1, 3]):

$$\begin{aligned} &\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\psi_e, D_\mu\psi_e) + (e \to \mu) + (e \to \tau) \\ &\mathcal{L}_0(\psi, D_\mu\psi) = \bar{\psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi \ + \ e\bar{\psi}A_\mu\gamma^\mu\psi \end{aligned} \tag{3.7}$$

La simmetria di gauge locale (3.1), determina completamente la forma dell' interazione (ad esempio predice per il rapporto giromagnetico dell' elettrone il valore della teoria di Dirac: $g = 2$).

3.1 Simmetrie locali non commutative.

Consideriamo un campo ψ che si trasforma sotto un gruppo G non abeliano secondo l' equazione:
$$\psi(x) \to U\psi(x) \tag{3.8}$$
con U costante, indipendente dal punto nello spazio-tempo.

Seguendo C. N. Yang e R. Mills [8], possiamo argomentare che una simmetria globale come la (3.8) è altamente innaturale in una teoria di campo locale. La simmetria ci dice che la scelta delle componenti di ψ nello spazio dei numeri quantici interni (ad es. la distinzione tra protone e neutrone) è puramente convenzionale: la fisica non deve dipendere da quali combinazioni lineari di p ed n scegliamo per definire il *protone fisico*. Per una simmetria globale, tuttavia, dobbiamo fissare la stessa convenzione in tutto lo spazio-tempo e possiamo cambiarla solo mettendo d' accordo, rigidamente, tutti gli osservatori distribuiti nelle diverse regioni dell' Universo. Ma, in una teoria di campo locale, ogni osservatore è influenzato dai campi quali essi sono nel suo immediato intorno (*qui ed ora*) e non dovrebbe risentire delle scelte fatte da osservatori lontani, fuori del suo cono di luce passato.

In questo modo di vedere sembra naturale richiedere che la simmetria sotto G debba essere una simmetria *locale*: la fisica deve essere invarianti per trasformazioni:

$$\psi(x) \to U(x)\psi(x) \tag{3.9}$$

con $U(x)$ un elemento di G *variabile in modo arbitrario* con il punto dello spazio-tempo.

Il problema da risolvere, per una simmetria di tipo (3.9) è lo stesso che in elettrodinamica: come trattare le derivate di ψ, ovvero come confrontare campi in punti diversi dello spazio tempo,

visto che ciascuno di essi puó essere cambiato, secondo la (3.9)), per trasformazioni del gruppo arbitrariamente diverse tra loro. La soluzione ripete quella trovata per l' elettrodinamica: la costruzione di una derivata covariante.

Per arrivare a questo risultato, dobbiamo introdurre la nozione di *trasporto parallelo*[1].

Partendo da $\psi(x)$ vogliamo definire un nuovo campo, $\psi(x, dx)_{TP}$ che sia il campo $\psi(x)$ trasportato parallelamente in $x + dx$, nel senso che si trasforma come farebbe $\psi(x + dx)$:

$$\psi(x, dx)_{TP} \to \psi(x, dx)'_{TP} = U(x + dx)\psi(x, dx)_{TP} \tag{3.10}$$

$\psi(x, dx)_{TP}$ deve essere lineare in $\psi(x)$ e coincidere con esso per $dx = 0$. Al primo ordine in dx possiamo scrivere:

$$\psi(x, dx)_{TP} = (1 - i\Gamma_\mu(x)dx^\mu)\psi(x) \tag{3.11}$$

Richiediamo adesso che valga la (3.10). Il secondo membro vale:

$$U(x + dx)\psi(x, dx)_{TP} = U(x)\psi(x) - iU(x)\Gamma_\mu dx^\mu + dU(x)\psi(x) \tag{3.12}$$

che deve essere eguale a:

$$\psi(x, dx)'_{TP} = (1 - i\Gamma'_\mu dx^\mu)U(x)\psi(x) = U(x)\psi(x) - i\Gamma'_\mu U(x)dx^\mu\psi(x) \tag{3.13}$$

Eguagliando i termini del primo ordine, si ha quindi:

$$\Gamma'_\mu = U(x)\Gamma_\mu U^{-1}(x) + i[\partial_\mu U(x)]U^{-1}(x) \tag{3.14}$$

Una volta costruito $\psi(x, dx)_{TP}$, possiamo formare il differenziale:

$$\psi(x + dx) - \psi(x, dx)_{TP} = (\partial + i\Gamma_\mu)\psi(x)dx^\mu = D_\mu\psi(x)dx^\mu \tag{3.15}$$

che evidentemente si trasforma come $\psi(x)$ per trasformazioni di gauge:

$$D_\mu\psi(x) \to D'_\mu\psi(x)' = U(x)D_\mu\psi(x) \tag{3.16}$$

Una volta in possesso della derivata covariante, possiamo passare da una lagrangiana invariante per trasformazioni globali ad una invariante per trasformazioni locali mediante la *sostituzione minimale*, esattamente come per l' elettrodinamica:

$$\mathcal{L}_0(\psi, \partial_\mu\psi) \to \mathcal{L}_0(\psi, D_\mu\psi) \tag{3.17}$$

Le matrici $\Gamma_\mu(x)$, le *connessioni* del campo tra x e $x + dx$, definiscono a loro volta dei nuovi campi analoghi al campo elettromagnetico nella (3.1), i *campi di gauge*.

Per una pura trasformazione di fase (corrispondente ad un gruppo G abeliano):

$$\begin{aligned} &U = e^{iq\phi}; \;\; i[\partial_\mu U(x)]U^{-1}(x) = -q\phi(x) \\ &\Gamma_\mu = qA_\mu \end{aligned} \tag{3.18}$$

[1] questo argomento segue il ragionamento che si fa nella teoria della Relatività Generale, in cui si presenta un problema analogo per quanto riguarda le componenti di grandezze non invarianti, ad esempio i 4-vettori.

In generale, poniamo:

$$\Gamma_\mu(x) = A^i_\mu T^i; \tag{3.19}$$

$$U = 1 + i\alpha_i T^i \tag{3.20}$$

con T^i i generatori delle trasformazioni infinitesime di G e α_i i parametri della trasformazione stessa. Nel caso infinitesimo, le (3.14) si scrivono:

$$(A^i_\mu)' T^i = A^i_\mu T^i - i A^i_\mu \alpha_j [T^i, T^j] - \partial_\mu \alpha_i T^i \tag{3.21}$$

tenendo conto delle regole di commutazione del gruppo:

$$[T^i, T^j] = i f^{ijk} T^k \tag{3.22}$$

troviamo infine:

$$(A^i_\mu)' = A^i_\mu \ - f^{ils} \alpha_l A^s_\mu - \partial_\mu \alpha_i \tag{3.23}$$

Sotto trasformazioni globali, $\alpha_i = cost$, vediamo dalla (3.23) che le connessioni si trasformano come la *rappresentazione regolare* o aggiunta del gruppo (cfr. Appendice C):

$$\begin{aligned}(A^i_\mu)' &= A^i_\mu \ - f^{ils} \alpha_l A^s_\mu = A^i_\mu - i\alpha_l(-i f^{ils}) A^s_\mu = \\ &= A^i_\mu - i\alpha_l (K^l_{reg})_{is} A^s_\mu; \ \ (\alpha_i = \text{costante}).\end{aligned} \tag{3.24}$$

Nota. Il risultato (3.23) ci dice che la legge di trasformazione dei campi di gauge è *universale*, indipendente cioè dalla particolare rappresentazione del gruppo G realizzata dalle matrici U sui campi ψ. In effetti, in presenza di diversi campi di materia, dobbiamo considerare il caso in cui la legge di trasformazione (3.9) sia realizzata diversamente sui diversi campi:

$$\psi^{(A)}(x) \to (\psi^{(A)}(x))' = U^{(A)}(g(x)) \psi^{(A)}(x); \ \ A = 1, 2, \ldots, N; \tag{3.25}$$

dove le $U^{(A)}(g)$ sono rappresentazioni irriducibili del gruppo G. In questo caso la trasformazione di simmetria locala è individuata da un elemento del gruppo[2], $g(x)$, e realizzata dalle rappresentazioni $U^{(A)}(g)$ sui campi $\psi^{(A)}$.

Il tensore di Yang Mills. Per costruire una lagrangiana invariante per i campi di gauge, dobbiamo costruire dei campi con proprietà di trasformazione definite. A partire dalle connessioni Γ_μ introduciamo[3] il *tensore di Yang-Mills*:

$$G_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_\mu - \partial_\mu \Gamma_\nu + i[\Gamma_\nu, \Gamma_\mu] \tag{3.26}$$

Analogamente a quanto posto nella (3.19), introduciamo i campi $G^i_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}G_{\mu\nu} &= G^i_{\mu\nu} T^i \\ G^i_{\mu\nu} &= \partial_\nu A^i_\mu - \partial_\mu A^i_\nu + f^{ijk} \ A^j_\mu A^k_\nu\end{aligned} \tag{3.27}$$

[2]nel linguaggio della Sezione precedente possiamo pensare che la trasformazione g agisca sui gradi di libertà fondamentali della lagrangiana, mentre le $U^{(A)}(g)$ rappresentano l' azione della stessa trasformazione sui campi N, π, etc..

[3]notare che l' ordine in cui compaiono μ e ν nei due membri è opposto, come in QED.

Non è difficile mostrare che:

$$G'_{\mu\nu} = \partial_\nu A'_\mu - \partial_\mu A'_\nu + i[A'_\nu, A'_\mu] = U G_{\mu\nu} U^{-1} \tag{3.28}$$

e che quindi la lagrangiana di Yang-Mills:

$$L_{Y-M} = -\frac{1}{8g^2} Tr(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) \tag{3.29}$$

é invariante.

Come per i campi di gauge le proprietà del tensore di Yang-Mills sono indipendenti dalla rappresentazione che abbiamo scelto per le matrici U. Limitandoci a trasformazioni infinitesime, la (3.28) conduce a:

$$(G^i_{\mu\nu})' = G^i_{\mu\nu} - f^{ils} \alpha_l G^s_{\mu\nu} \tag{3.30}$$

Il tensore di Yang-Mills trasforma come la rappresentazione regolare, anche per trasformazioni locali. La lagrangiana (3.29) assume la forma:

$$\begin{aligned} L_{Y-M} &= -\frac{1}{8g^2} G^i_{\mu\nu} (G^j)^{\mu\nu} Tr(T^i T^j) = \\ &= -\frac{1}{4g^2} G^i_{\mu\nu} (G^i)^{\mu\nu}; \end{aligned} \tag{3.31}$$

con la normalizzazione:

$$Tr(T^i T^j) = 2\delta^{ij}. \tag{3.32}$$

3.2 La lagrangiana minimale.

L' estensione di una simmetria globale a trasformazioni di gauge locali non abeliane porta, in conclusione, alla lagrangiana minimale:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\psi, D_\mu \psi) - \frac{1}{4g^2} G^i_{\mu\nu} (G^i)^{\mu\nu} \tag{3.33}$$

L' analogia con la QED è evidente, ma ci sono anche differenze importanti che descriveremo nel seguito.

Se il gruppo G è un *gruppo semplice*, non fattorizzabile cioè in sottogruppi di trasformazioni mutuamente commutanti, la costante g è l' unica costante arbitraria, oltre alle eventuali masse contenute in $\mathcal{L}_0$. In caso contrario, il gruppo si dice *semisemplice* e ci sono tante costanti indipendenti quanti sono i fattori commutanti del gruppo. Ad esempio, il gruppo $SU(2)_I \otimes U(1)_Y$ avrebbe due costanti, g e g'.

Riscalando $A \to gA$, vediamo che g è una costante di accoppiamento. Diamo la forma dei vari termini riscalati.

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu + igA^i_\mu T^i)\psi \ \text{ (derivata covariante);} \tag{3.34}$$

$$G^i_{\mu\nu} = \partial_\nu A^i_\mu - \partial_\mu A^i_\nu + g f^{ijk} \ A^j_\mu A^k_\nu \ \text{ (tensore di Yang} - \text{Mills).} \tag{3.35}$$

In corrispondenza, l' azione di Yang-Mills si scrive esplicitamente come:

$$\mathcal{L}_{Y-M} = -\frac{1}{4}G^i_{\mu\nu}(G^i)^{\mu\nu} = \frac{1}{2}A^i_\mu(g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu)A^i_\nu) + \\ +g\ f^{ijk}[\partial^\nu(A^i)^\mu]A^j_\nu A^k_\mu + g^2 f^{ilm} f^{isk} A^l_\nu A^m_\mu (A^s)^\nu (A^s)^\mu \tag{3.36}$$

mentre, per le lagrangiane di Dirac e di Klein-Gordan abbiamo:

$$\mathcal{L}_D = \bar\psi(i\not{D} - M)\psi = \bar\psi(i\not\partial - M)\psi + \\ - gA^i_\mu\ \bar\psi\gamma^\mu T^i\psi; \tag{3.37}$$

$$\mathcal{L}_{KG} = \phi^\dagger(-D_\mu D^\nu - \mu^2)\phi = \phi^\dagger(-\Box - \mu^2)\phi + \\ -gA^i_\mu(\phi^\dagger T^i i\partial^\mu\phi - i\partial^\mu\phi^\dagger T^i\phi)\ +\ \frac{1}{2}g^2 A^i_\mu (A^j)^\mu \phi^\dagger\{T^i, T^j\}\phi \tag{3.38}$$

Il fatto notevole è che la forma di interazione tra materia e campi di gauge è fissata dalla simmetria. I campi di gauge interagiscono tra loro, in quanto portano essi stessi una carica (cioè trasformano in modo non triviale per trasformazioni globali). Questà è una differenza importante rispetto alla QED, che rende la teoria di Yang-Mills simile piuttosto alla gravità. Anche in assenza di materia, la teoria di Yang-Mills è una teoria non triviale, di fatto una versione semplificata della teoria di Einstein della gravità pura.

Nel limite $g = 0$, la lagrangiana di Yang-Mills, (3.31) e (3.36), descrive particelle libere, tante quanti sono i generatori del gruppo, ciascuna caratterizzata da una lagrangiana identica alla lagrangiana di Maxwell del campo elettromagnetico libero:

- *Per $g = 0$, i quanti dei campi di gauge sono particelle di massa zero e spin 1.*

Equazioni del moto. Sono le equazioni di Eulero-Lagrange derivate a partire dalla (3.33). Assumendo per $\mathcal{L}_0$ una lagrangiana di Dirac, otteniamo le derivate:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu A^i_\alpha} = -G^i_{\alpha\mu} \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^i_\alpha} = -\bar\psi\gamma_\alpha T^i\psi\ - g\ f^{ijk}(A^j)^\sigma\ G^k_{\alpha\sigma} \tag{3.40}$$

e le equazioni del moto:

$$[iD_\mu\gamma^\mu + m]\psi = 0\ \ \text{(campo fermionico)}; \tag{3.41}$$

$$\partial^\mu G^i_{\alpha\mu} = \bar\psi\gamma_\alpha T^i\psi\ + g\ f^{ijk}(A^j)^\sigma\ G^k_{\alpha\sigma}\ \ \text{(campi di gauge)}; \tag{3.42}$$

Riportando a primo membro della (3.42) i termini che contengono i campi di gauge, si ricostruisce la derivata covariante del tensore di Yang-Mills:

$$(D_\rho)^{ik}G^k_{\mu\nu} = (\partial_\rho\delta^{ij} - gfijkA^j_\rho)G^k_{\mu\nu} \tag{3.43}$$

e otteniamo la forma esplicitamente covariante della (3.42) (cos' altro ci potevamo aspettare?):

$$(D^\mu\ G_{\alpha\mu})^i = \bar\psi\gamma_\alpha T^i\psi \tag{3.44}$$

La (3.44) *non* conduce ad una equazione di continuità per la corrente della materia, in quanto le derivate covarianti *non commutano tra loro.* Per ottenere una corrente conservata dobbiamo ritornare alla (3.42). Derivando la (3.42) troviamo infatti, in virtú dell' antisimmetria di $G_{\alpha\mu}$, un' equazione di continuità per la corrente:

$$\mathcal{J}^i_\mu = \bar{\psi}\gamma_\alpha T^i \psi \ + g \ f^{ijk}(A^j)^\sigma \ G^k_{\alpha\sigma} \tag{3.45}$$

$$\partial^\alpha \partial^\mu G^i_{\alpha\mu} = \partial^\alpha \mathcal{J}^i_\alpha = 0 \tag{3.46}$$

Si riconosce facilmente che $\mathcal{J}$ è la corrente di Noether totale, incluso il contributo dei campi di gauge. Solo la corrente totale è conservata, in quanto la carica puó fluire dalla materia ai campi di gauge. Questo risultato è analogo a quanto avviene nella Teoria della Relatività Generale per il tensore energia-impulso: si conservano solo l' energia e la quantità di moto del complesso materia+campo gravitazionale.

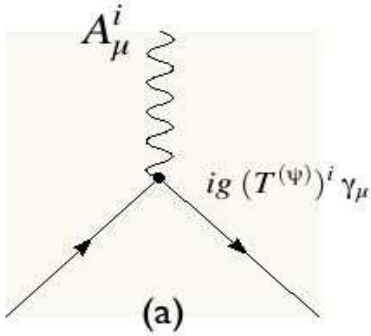

Figura 3.1: Vertice spin 1/2

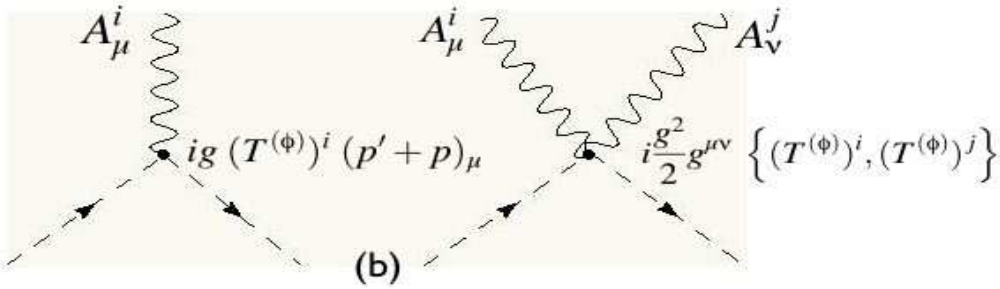

Figura 3.2: Vertici spin 0

Vertici. Consideriamo campi di materia di spin 1/2 e spin 0 (ad esempio il nucleone e il pione) in interazione con i campi di gauge. In una trattazione perturbativa, la parte di interazione nelle (3.31) e (3.36) determinano i *vertici* dei corrispondenti grafici di Feynman [3]. Dalla (3.36) vediamo che abbiamo vertici del primo ordine e, per i campi scalari, del secondo ordine in g. I vertici del primo ordine sono determinati dalla corrente di Noether della materia:

$$\mathcal{L}_{int}^{(1)} = gA_\mu^i (J^i)^\mu$$

$$J_\mu^i = \bar{\psi}\gamma_\mu (T^{(N)})^i \psi \; + \; i[\phi^\dagger (T^{(\pi)})^i \partial_\mu \phi - \partial_\mu \phi^\dagger (T^{(\pi)})^i \phi] \tag{3.47}$$

$$\tag{3.48}$$

I grafici corrispondenti ai due tipi di vertice sono riportati nelle Fig. 3.1 e 3.2. Per il campo di spin 0, oltre all' interazione mediata dalla corrente di Noether, la lagrangiana di interazione contiene un termine quadratico nei campi di gauge[4]. Il grafico corrispondente è indicato in Fig. 3.2.

Problema1. Partendo dalla lagrangiana (3.33), derivare la corrente (3.45) dal teorema di Noether relativo alle trasformazioni globali (3.8) e (3.24).

Problema2. Mostrare che in una espressione invariante anche le derivate covarianti si possono *integrare per parti*:

$$(D_\mu \phi)^\dagger \ldots \phi = -\phi^\dagger D_\mu (\ldots \phi) + \partial_\mu (\phi^\dagger \ldots \phi) \tag{3.49}$$

[4]il vertice corrispondente viene comunemente indicato col nome di *seagull*, dalla forma del grafico che ricorda un gabbiano in volo.

Capitolo 4

UNIFICAZIONE ELETTRODEBOLE I

Pubblicata nel 1954, la teoria di Yang e Mills è rimasta a lungo un' idea in cerca di applicazione.

Il successo della simmetria di spin isotopico ha fatto pensare che la teoria delle Interazioni Forti fosse il suo campo di applicazione naturale. I mesoni di spin 1 della Fig. 2.2, sono stati a lungo identificati come i campi di gauge delle Interazioni Forti. Tuttavia, la teoria della *dominanza dei mesoni vettoriali* (vector meson dominance) non è mai andata al di là di qualche successo fenomenologico e di un potere predittivo limitato.

Una seconda linea di pensiero, iniziata da J. Schwinger, indicava le interazioni deboli ed elettromagnetiche come il campo naturale di applicazione delle idee di Yang e Mills.

Il successo della teoria V-A rafforza l' idea che le interazioni deboli di Fermi siano mediate da campi vettoriali (di gauge), i *bosoni vettoriali intermedi* (cfr. [1]), Inoltre, secondo l' ipotesi CVC di Feynman e Gell-Mann, i bosoni vettoriali sarebbero accoppiati, almeno per la parte V, alle correnti di Noether dello spin isotopico *proprio come vuole una teoria di gauge.*

Si puó anche ipotizzare l' unificazione delle interazioni deboli ed elettromagnetiche in una teoria di Yang-Mills che includa nella stessa simmetria il fotone e i bosoni intermedi. La simmetria di spin isotopico, cosí prominente nei fenomeni nucleari, sarebbe dunque la base per una teoria di gauge delle interazioni deboli ed elettromagnetiche!

L' ostacolo principale su questa linea è rappresentato dalla massa dei bosoni intermedi. Come abbiamo visto, la teoria prevede che i campi di gauge abbiano massa nulla, almeno nel limite $g = 0$, come il fotone. Al contrario, la massa dei bosoni intermedi deve essere abbastanza grande affinchè queste particelle non diano effetti visibili nei decadimenti deboli di neutrone, pione etc.[1]. É rimasto a lungo misterioso come si potesse *dare una massa* ai bosoni vettori in una teoria con accoppiamento debole ($g \simeq e$). Il problema è stato risolto in modo soddisfacente solo verso la metà degli anni '60, con la scoperta del cosiddetto *meccanismo di Higgs*, legato alla rottura spontanea della simmetria di gauge.

Una soluzione provvisoria ma efficace è stata di inserire nella lagrangiana dei termini di massa *ad hoc* per i bosoni vettori, assumendo che la simmetria di gauge potesse essere violata esplicitamente da queste masse (come la simmetria di spin isotopico è violata dalla differenza di

massa protone-neutrone) senza per questo perdere le sue proprietà principali. Anche se questa speranza si è rivelata infondata (la teoria è risultata a posteriori non-rinormalizzabile e quindi matematicamente inconsistente) la teoria di Y-M con masse ad hoc è stata uno strumento importante per esplorare le proprietà fenomenologiche dell' unificazione elettrodebole. La teoria di Glashow del 1961 [10] identificava per la prima volta il gruppo di gauge appropriato per descrivere le interazioni elettro-deboli, il gruppo $SU(2) \otimes U(1)$, con la conseguente necessità di un bosone intermedio neutro, lo Z^0, oltre ai bosoni carichi $W^{\pm}$ e il fotone.

La formulazione di una teoria rinormalizzabile unificata delle interazioni deboli ed elettromagnetiche è stata possibile solo dopo la scoperta del meccanismo di Higgs, nella seconda metà degli anni sessanta.

In questo Capitolo ci limiteremo alle interazioni dei leptoni, e descriveremo prima la teoria di Glashow, per motivi essenzialmente pedagogici, e successivamente la teoria unificata proposta da S. Weinberg e A. Salam [11].

4.1 Simmetrie del doppietto (ν_e, e)

In questa Sezione consideriamo il doppietto elettrone-neutrino elettronico. Vogliamo identificare le simmetrie di questo sistema, che (i) commutino con il gruppo di Lorentz (siano cioè simmetrie *interne*), (ii) che contengano, tra le correnti determinate dal teorema di Noether, la corrente debole e la corrente elettromagnetica:

$$\begin{aligned} J_\mu^W &= \bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e; \\ J_\mu^{e.m.} &= \bar{e}\gamma_\mu e \end{aligned} \tag{4.1}$$

Per analogia con il formalismo dello spin isotopico, raccogliamo i campi e e ν_e in un doppietto:

$$\psi = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$$

Le trasformazioni che operano sulle componenti del doppietto si scrivono:

$$\psi \to e^{i\alpha\cdot\frac{\tau}{2}}\psi \tag{4.2}$$

Per quanto riguarda lo spazio di Dirac, le trasformazioni (4.2) contengono solo la matrice identità che ovviamente commuta con i generatori del gruppo di Lorentz, le matrici $\sigma^{\mu\nu}$. Quindi le (4.2) definiscono una simmetria interna.

Tuttavia, c' è un' altra matrice di Dirac, la matrice γ_5, che è pure invariante se ci restringiamo alle trasformazioni di Lorentz *proprie*[1]. Possiamo quindi definire un secondo complesso di trasformazioni interne del doppietto, le trasformazioni *chirali*:

$$\psi \to e^{i\beta\cdot\frac{\tau}{2}\gamma_5}\psi$$

[1] le trasformazioni di Lorentz proprie sono il vero gruppo di simmetria spazio-temporale, visto che la parità non si conserva nelle interazioni deboli (cfr. [1]); quindi il fatto che la matrice γ_5 si trasformi sotto parità come uno *pseudoscalare* non la esclude.

Per trasformazioni infinitesime:

$$\psi' = \psi + i\alpha \cdot \frac{\tau}{2}\psi$$
$$\psi' = \psi + i\beta \cdot \frac{\tau}{2}\gamma_5\psi \tag{4.3}$$

Per semplificare la notazione, introduciamo i proiettori sui campi chirali (ricordiamo che $\gamma_5^2 = 1$):

$$a^{(\pm)} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2};$$
$$(a^{(\pm)})^2 = a^{(\pm)}; \;\; a^{(+)}a^{(-)} = 0 \tag{4.4}$$

Indichiamo inoltre con $\psi_{L,R}$ i corrispondenti campi chirali[2]:

$$\psi_L = a^{(-)}\psi; \;\; \psi_R = a^{(+)}\psi \tag{4.5}$$

Raggruppiamo infine i generatori delle trasformazioni (4.2) e (4.3) costruendo i cosiddetti *generatori chirali*:

$$(\mathcal{I}^{(\pm)})^i = a^{(\pm)}\frac{\tau^i}{2} \tag{4.6}$$

Si trovano subito le relazioni di commutazione:

$$[(\mathcal{I}^{(\pm)})^i, (\mathcal{I}^{(\pm)})^j] = i\epsilon^{ijk}(\mathcal{I}^{(\pm)})^i;$$
$$[(\mathcal{I}^{(+)})^i, (\mathcal{I}^{(-)})^j] = 0 \tag{4.7}$$

Le trasformazioni (4.3) caratterizzano un' algebra $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{SU}(2)_R$ (gli indici R e L indicano che il primo SU(2) agisce solo sui campi ψ_L e il secondo solo sui campi ψ_R).

Le rappresentazioni di $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{SU}(2)_R$ sono caratterizzate da due numeri quantici, I_1 e I_2, interi o seminteri, l' isospin associato a ciascuno dei due fattori SU(2). In particolare, per ψ_L e ψ_R abbiamo:

$$\psi_L \simeq (1/2, 0); \;\; \psi_R \simeq (0, 1/2). \tag{4.8}$$

Alle trasformazioni (4.3) possiamo aggiungere trasformazioni abeliane per un fattore di fase costante (su ν_e ed e) moltiplicato per l' unità o per γ_5. In termini di trasformazioni infinitesime:

$$\psi' = \psi + i\alpha_0\psi; \;\; \psi' = \psi + i\beta_0\gamma_5\psi \tag{4.9}$$

Le trasformazioni (4.9) aggiungono due fattori abeliani al gruppo di simmetria, il primo dei quali corresponde alla conservazione del numero elettronico $L_e = N(e) - N(\bar{e}) + N(\nu_e) - N(\bar{\nu}_e)$ (cfr.[1]).

In conclusione, le trasformazioni che possiamo effettuare sul doppietto di campi di Dirac (ν_e,e) formano l' algebra: $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{SU}(2)_R \otimes \mathrm{U}(1)_{L_e} \otimes \mathrm{U}(1)_A$.

[2]gli indici L, R stanno per left-handed e right-handed rispettivamente. Nel limite di massa nulla, il campo ψ_L distrugge un fermione con elicitá negativa (lo spin equivale ad una rotazione sinistrorsa intorno alla direzione del moto) e crea un antifermione con elicità positiva, mentre ψ_R distrugge un fermione con elicità positiva (rotazione destrorsa) e crea un antifermione con elicità negativa, cfr.[1].

4.2 Il gruppo di gauge minimale, $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$

Le correnti di Noether associate alle trasformazioni di $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{SU}(2)_R \otimes \mathrm{U}(1)_{l_e} \otimes \mathrm{U}(1)_A$ si ottengono dalla lagrangiana libera di e e ν_e.

Assumendo un neutrino di massa nulla, scriviamo[3]:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{00} + \mathcal{L}_m; \\
&\mathcal{L}_{00} = \bar{e} i \partial\!\!\!/ e + \bar{\nu} i \partial\!\!\!/ \nu = \bar{e}_L i \partial\!\!\!/ e_L + \bar{\nu}_L i \partial\!\!\!/ \nu_L + \bar{e}_R i \partial\!\!\!/ e_R + \bar{\nu}_R i \partial\!\!\!/ \nu_R = \\
&= \bar{\psi}_L i \partial\!\!\!/ \psi_L + \bar{\psi}_R i \partial\!\!\!/ \psi_R; \\
&\mathcal{L}_m = m_e \bar{e} e = m_e (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

e troviamo le otto correnti:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_\mu &= -i \frac{\partial \mathcal{L}_{00}}{\partial \partial_\mu \psi} a^{(-)} \frac{\tau}{2} \psi = \bar{\psi}_L \gamma_\mu \frac{\tau}{2} \psi_L; \quad L^0_\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}_{00}}{\partial \partial_\mu \psi} a^{(-)} \psi = \bar{\psi}_L \gamma_\mu \psi_L \\
\mathbf{R}_\mu &= -i \frac{\partial \mathcal{L}_{00}}{\partial \partial_\mu \psi} a^{(+)} \frac{\tau}{2} \psi = \bar{\psi}_R \gamma_\mu \frac{\tau}{2} \psi_R; \quad R^0_\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}_{00}}{\partial \partial_\mu \psi} a^{(+)} \psi = \bar{\psi}_R \gamma_\mu \psi_R.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

La forma della corrente debole in (4.1) suggerisce di identificarla con la corrente corrispondente all' operatore di innalzamento di $\mathrm{SU}(2)_L$:

$$L^1_\mu + i L^2_\mu = \bar{e}_L \gamma_\mu \nu_L = \frac{1}{2} \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu \tag{4.12}$$

Tuttavia, la corrente neutra di $\mathrm{SU}(2)_L$, L^3_μ, non coincide con la corrente elettromagnetica. Piuttosto si ha:

$$\begin{aligned}
&J^{e.m.}_\mu - L^3_\mu = -(\bar{e}_L \gamma_\mu e_L + \bar{e}_R \gamma_\mu e_R) - \frac{1}{2} (\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L - \bar{e}_L \gamma_\mu e_L) = \\
&= -\bar{e}_R \gamma_\mu e_R - \frac{1}{2} (\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L + \bar{e}_L \gamma_\mu e_L) = \frac{1}{2} Y_\mu
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Il secondo membro della (4.13) definisce la corrente dell' *ipercarica debole*, che ha la proprietà di *commutare con l' intera algebra* $\mathrm{SU}(2)_L$.

Da notare che, delle quattro correnti di $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)_Y$, solo la corrente elettromagnetica è conservata. Per le altre, l' equazione di continuità non è soddisfatta a causa del termine di massa dell' elettrone, $\mathcal{L}_m$ in (4.10). Ad esempio, per le correnti di $\mathrm{SU}(2)_L$troviamo:

$$\begin{aligned}
&\partial^\mu (L^1_\mu + i L^2_\mu) = \partial^\mu (\bar{e}_L \gamma_\mu \nu_L) = i m_e \bar{e}_R \nu_L; \\
&\partial^\mu L^3_\mu = i \frac{m_e}{2} (\bar{e}_L e_R - \bar{e}_R e_L) = -i m_e \bar{e} \gamma_5 e.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

(dove abbiamo usato l' equazione di Dirac per ν ed e).

In conclusione, $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)_Y$ é la minima algebra che contiene le correnti deboli ed elettromagnetiche. L' algebra contiene *due* generatori neutri. In corrispondenza, siamo condotti ad

[3] in questa Sezione, omettiamo per brevità l' indice e nel campo del neutrino e ricordiamo che $\psi = \psi_L + \psi_R$, $\bar{\psi}_L \gamma_\mu \psi_R = \bar{\psi}_R \gamma_\mu \psi_L = 0$.

introdurre un nuovo campo vettoriale neutro, in aggiunta al fotone, che dovrà mediare interazioni di un nuovo tipo rispetto alle interazioni di Fermi ed a quelle elettromagnetiche.

Per completezza, riportiamo lo schema dei campi classificati secondo i numeri quantici di $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)_Y$:

$$l^e = \begin{pmatrix} (\nu_e)_L \\ e_L \end{pmatrix}_{-1} ; \quad (e_R)_{-2} \tag{4.15}$$

Per ogni multipletto di $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)_Y$ abbiamo indicato il valore dell' ipercarica debole. Il campo $(\nu_e)_R$ è completamente neutro sotto le trasformazioni di $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)_Y$. Quindi, in una teoria di Yang-Mills esso non possiede alcuna interazione elettrodebole e possiamo ometterlo del tutto dalla Lagrangiana elettrodebole.

Dallo schema (4.15) possiamo ottenere le derivate covarianti dei campi di materia e quindi la loro interazione con i campi di gauge di $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)_Y$, che indichiamo rispettivamente con W^i_μ, $(i = 1, 2, 3)$ e B_μ. Troviamo:

$$\begin{aligned} D_\mu l^e &= [\partial_\mu + ig\mathbf{W}_\mu \cdot \frac{\tau}{2} + ig'(-\frac{1}{2})B_\mu]l^e \\ D_\mu e_R &= [\partial_\mu + ig'(-1)B_\mu]e_R \end{aligned} \tag{4.16}$$

e la lagrangiana di interazione:

$$\mathcal{L}^{\nu,e}_{int} = -\bar{l}^e[g\mathbf{W}_\mu \cdot \frac{\tau}{2} + g'B_\mu(-\frac{1}{2})]\gamma^\mu l^e \ + \ g'\bar{e}_R\gamma^\mu e_R B_\mu \tag{4.17}$$

Lo schema (4.15) si ripete per i multipletti del muone, (ν_μ, μ) e del leptone τ, (ν_τ, τ).

Commento. Il problema dell' esistenza dei campi ν_R é tuttora aperto, questi campi potrebbero essere assenti del tutto, o essere sensibili solo ad interazioni molto piú deboli, inclusa la gravità, e quindi, al momento almeno, essere in pratica inosservabili. Le possibilità di inserire il campo ν_R in uno schema più ampio sono discusse in [1], Cap. 9.

Problema. Partendo dalle cariche associate alle correnti chirali (4.11), $L^i = \int d^3x L^i_0$, $R^i = \int d^3x R^i_0$, etc., ottenete le regole di commutazione dell' algebra di $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{SU}(2)_R \otimes \mathrm{U}(1)_{l_e} \otimes \mathrm{U}(1)_A$, eq. (4.7) a partire dalle regole di anticommutazione canoniche dei campi (cfr. [1]).

4.3 La teoria di Glashow

Come abbiamo visto nel Cap. 3, la lagrangiana di Yang-Mills si riduce, nel limite di costante di accoppiamento nulla, ad una lagrangiana di Maxwell per ciascun campo di guage. Nel nostro caso, cfr. l' eq. (3.36), abbiamo:

$$\mathcal{L}^{(g=0)}_{YM} = -\frac{1}{4}W^i_{\mu\nu}W^i_{\mu\nu} - \frac{1}{4}B^i_{\mu\nu}B^i_{\mu\nu} \tag{4.18}$$

Per evitare la presenza di bosoni di massa nulla non desiderati, possiamo, pragmaticamente, aggiungere un termine di massa che, seguendo Glashow [10], prendiamo della forma:

$$\mathcal{L}_{gauge,mass} = \frac{1}{2}[M^2 \mathbf{W}_\mu \cdot \mathbf{W}^\mu + M_0^2 B_\mu B^\mu + 2M_{03}^2 W_\mu^3 B^\mu] \tag{4.19}$$

Nel caso dei campi carichi ($i = 1, 2$), definiamo:

$$W_\mu = \frac{W_\mu^1 + iW_\mu^2}{\sqrt{2}}; \quad W_\mu^\dagger = \frac{W_\mu^1 - iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \tag{4.20}$$

e troviamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{gauge} &= -\frac{1}{2} W_{\mu\nu}^\dagger W^{\mu\nu} + M^2 W_\mu^\dagger \cdot W^\mu + \\ &-\frac{1}{4}[W_{\mu\nu}^3 (W^3)^{\mu\nu} + B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}] + \\ &+\frac{1}{2}[M^2 W_\mu^3 (W^3)^\mu + M_0^2 B_\mu B^\mu + M_{03} W_\mu^3 B^\mu] \end{aligned} \tag{4.21}$$

Spettro di massa dei campi vettoriali. La prima linea della (4.21) definisce due bosoni di spin 1, con carica elettrica ± 1 e massa M (cfr. la Sez. 5.6).

Per quanto riguarda i campi neutri, seconda e terza linea, i campi fisici (con massa definita) sono individuati dagli autovettori della *matrice di massa* che, nalle base (W^3, B) si scrive come:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M^2 & M_{03}^2 \\ M_{03}^2 & M_0^2 \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

Questa matrice non è completamente arbitraria perchè deve avere un autovalore nullo, corrispondente alla massa nulla del fotone. Dobbiamo imporre, quindi:

$$\det\mathcal{M} = 0; \Rightarrow (M_{03}^2)^2 = M^2 M_0^2$$

Scriviamo gli autovettori della matrice (4.22) come:

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \cos\theta W_\mu^3 - \sin\theta B_\mu \\ A_\mu &= \sin\theta W_\mu^3 + \cos\theta B_\mu \end{aligned} \tag{4.23}$$

dove A_μ è il campo elettromagnetico e Z_μ un nuovo campo vettoriale elettricamente neutro. L' autovalore non nullo della matrice di massa è dato semplicemente dalla sua traccia:

$$M_Z^2 = M^2 + M_0^2 = \tag{4.24}$$

D'a altro canto, il campo A_μ nella (4.23) deve corrispondere all' autovalore nullo, ovvero si deve avere:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \sin\theta, & \cos\theta \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \\ &= \sin^2\theta M^2 + 2\cos\theta\sin\theta M M_0 + \cos^2\theta M_0^2 = M^2 \left(\sin\theta + \cos\theta \frac{M_0}{M}\right)^2 = 0 \end{aligned}$$

da cui troviamo:

$$\frac{M_0^2}{M^2} = \tan^2\theta \tag{4.25}$$

e quindi:

$$M_Z^2 = \frac{M^2}{\cos^2\theta}. \tag{4.26}$$

Interazioni con i campi fisici. Le formule inverse delle (4.23) si scrivono:

$$\begin{aligned} W_\mu^3 &= \cos\theta Z_\mu + \sin\theta A_\mu \\ B_\mu &= -\sin\theta Z_\mu + \cos\theta A_\mu \end{aligned} \tag{4.27}$$

Possiamo esprimere gli accoppiamenti della lagrangiana di interazione nell' eq. (4.17) al modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= -\bar{l}^e[g\frac{\tau^3}{2}W_\mu^3 + g'(-\frac{1}{2})B_\mu]\gamma^\mu l^e \ + \ g'\bar{e}_R\gamma^\mu e_R B_\mu = \\ &= -A_\mu[g\sin\theta(\frac{1}{2}\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L - \frac{1}{2}\bar{e}_L\gamma^\mu e_L) + g'\cos\theta(\frac{1}{2}\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L - \frac{1}{2}\bar{e}_L\gamma^\mu e_L - \bar{e}_R\gamma^\mu e_R)] + \\ &-Z_\mu[g\cos\theta(\frac{1}{2}\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L - \frac{1}{2}\bar{e}_L\gamma^\mu e_L) - g'\sin\theta(-\frac{1}{2}\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L - \frac{1}{2}\bar{e}_L\gamma^\mu e_L - \bar{e}_R\gamma^\mu e_R)] \end{aligned} \tag{4.28}$$

Affinchè il campo elettromagnetico sia accoppiato proprio alla corrente elettromagnetica, deve essere:

$$g\sin\theta = g'\cos\theta = e; \tag{4.29}$$

in particolare:

$$\frac{g'}{g} = \tan\theta \tag{4.30}$$

Dalla (4.29) troviamo:

$$\mathcal{L}_{int} = -eA^\mu J_\mu^{e.m.} - \frac{g}{2\cos\theta}Z^\mu J_\mu^Z - \frac{g}{2\sqrt{2}}[W_\mu(J^W)^\dagger\mu + \text{h.c.}] \tag{4.31}$$

dove abbiamo reinserito l' accoppiamento con il bosone carico attraverso la corrente debole in (4.1) e abbiamo posto:

$$\begin{aligned} J_\mu^{e.m.} &= -(\bar{e}_L\gamma^\mu e_L + \bar{e}_R\gamma^\mu e_R); \\ J_\mu^Z &= (\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L - \bar{e}_L\gamma^\mu e_L) + 2\sin^2\theta(\bar{e}_L\gamma^\mu e_L + \bar{e}_R\gamma^\mu e_R) = \\ &= 2L_\mu^3 - 2\sin^2\theta J_\mu^{e.m.} \end{aligned} \tag{4.32}$$

Le ampiezze dei decadimenti beta di bassa energia ($M_{fin} - M_{in} = Q << M$) si ottengono al secondo ordine della (4.31) e si possono classificare come segue:

- Processi di *corrente carica*, dovuti allo scambio del bosone carico che dà luogo alle ampiezze di Fermi:

$$A_{cc}(in \to fin) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int d^4x < fin|J^W_\mu(x)(J^W)^\dagger_\mu(x)|in >$$
$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M^2} = \frac{e^2}{8\sin^2\theta M^2} \tag{4.33}$$

- Processi di *corrente neutra*, dovuti allo scambio del bosone Z, che dà luogo ad ampiezze della forma:

$$A_{nc}(in \to fin) = \frac{g^2}{8M_Z^2} \int d^4x < fin|(J^Z_\mu(x)J^Z)_\mu(x)|in > \tag{4.34}$$

se poniamo

$$\frac{G_F^{nc}}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8\cos^2\theta M_Z^2} \tag{4.35}$$

vediamo che, in virtú della (4.26):

$$G_F^{nc} = G_F \tag{4.36}$$

La (4.36) è una conseguenza notevole della relazione (4.26), che a sua volta discende dalla forma (4.19). La scala delle interazioni di corrente neutra è determinata dalla stessa costante di Fermi che fissa l' intensità delle interazioni beta: l' esistenza di processi di corrente neutra con intensità comparabile alle interazioni di Fermi è una conseguenza sorprendente ma inevitabile della forma che abbiamo scelto per rompere la simmetria di gauge con le masse dei bosoni intermedi.

Capitolo 5

ROTTURA SPONTANEA DI SIMMETRIA

Nella prima parte di Capitolo consideriamo una simmetria continua globale. Il caso piú semplice è quello di una simmetria globale sotto il gruppo $O(2)$ considerata da J. Goldstone. L'estensione ad una simmetria di gauge sará considerato nella seconda parte.

5.1 Il Modello di Goldstone

Consideriamo un campo scalare complesso con una interazione quartica. La lagrangiana ha la forma:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger - \mu^2 \phi \phi^\dagger - \lambda \left(\phi \phi^\dagger \right)^2 \tag{5.1}$$

da cui l' equazione del moto:

$$(\Box + \mu^2)\phi + 2\lambda \phi (\phi \phi^\dagger) = 0 \tag{5.2}$$

Il modello possiede una simmetria esatta per cambiamenti di fase globali del campo ϕ:

$$\phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x); \quad (\phi^\dagger)'(x) = e^{-i\alpha}\phi^\dagger(x) \tag{5.3}$$

dove α è una fase reale e arbitraria, la stessa in ogni punto dello spazio-tempo. La corrispondente corrente conservata si calcola dal teorema di Noether:

$$J^\mu = i \left[(\partial^\mu \phi)\phi^\dagger - \phi(\partial^\mu \phi^\dagger) \right] \tag{5.4}$$

È facile verificare, sulla base delle equazioni del moto (5.2) che la corrente è conservata:

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \tag{5.5}$$

In molti casi, conviene descrivere la teoria con campi reali, $\phi_{1,2}$ definiti da:

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}; \ \phi^\dagger = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}} \tag{5.6}$$

Lagrangiana e corrente prendono la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2\right) - V \\ V &= \frac{\mu^2}{2}\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) + \frac{\lambda}{4}\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2 \\ J^\mu &= \left[(\partial^\mu\phi_1)\phi_2 - \phi_1(\partial^\mu\phi_2)\right] \end{aligned} \tag{5.7}$$

Per i campi reali, la legge di trasformazione (5.3) prende la forma infinitesima:

$$\delta\phi_i = -\alpha\epsilon_{ij}\phi_j \ \ \text{i, j} = 1,\ 2 \tag{5.8}$$

dove ϵ_{ij} è il tensore completamente antisimmetrico in due dimensioni con $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$ e le altre componenti nulle. Dalla (5.8) riconosciamo che la simmetria della teoria coincide con le rotazioni intorno all' origine del piano cartesiano con assi ϕ_1 e ϕ_2, simmetria peraltro evidente nelle (5.7).

La densità di energia corrispondente alla lagrangiana (5.1) si scrive:

$$\theta^{00} = \partial_0\phi\partial_0\phi^\dagger + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\phi^\dagger) + V \tag{5.9}$$

I termini con le derivate, in θ^{00}, sono definiti positivi. La stabilità della teoria richiede quindi che V sia una funzione *limitata inferiormente*. Per la teoria libera, $\lambda = 0$, questo richiede che sia $\mu^2 > 0$. Tuttavia, se $\lambda \neq 0$ il termine quartico nei campi è quello dominante all' infinito e la condizione che la densità di hamiltoniana abbia un limite inferiore finito è soddisfatta, purchè sia:

$$\lambda > 0 \quad \text{(condizione di stabilita}') \tag{5.10}$$

Abbiamo cosí due teorie possibili a seconda del segno del coefficiente di $\phi\phi^\dagger$, che continueremo ad indicare con μ^2.

La configurazione di campo classico che rende minima l' Hamltoniana (5.9) deve essere costante nello spazio-tempo (per annullare i termini con le derivate) e corrispondere al minimo assoluto di $V(\phi)$. La configurazione di minima energia è invariante per traslazioni spazio-temporali. Il suo corrispondente quantistico è lo *stato di vuoto*, lo stato che non contiene alcuna particella, l' unico stato invariante per traslazioni nello spazio-tempo. Nel seguito, indicheremo questo stato con:

$$|0\rangle : \ \text{stato di vuoto, ovvero stato fondamentale} \tag{5.11}$$

Consideriamo separatamente i due casi corrispondenti al segno di μ^2.

1. $\mu^2 > 0$**:** Il potenziale è una funzione concava di ϕ_1 e ϕ_2 con un minimo assoluto nell' origine:

$$V(\phi) = \text{minimo} = 0 \text{ per } \phi_1 = \phi_2 = 0 \tag{5.12}$$

Nel limite $\lambda \to 0$ la lagrangiana (5.1) si riduce alla lagrangiana di un campo di Klein-Gordon complesso, ϕ è una combinazione di operatori di annichilazione (della particella di massa μ) e di creazione (dell' antiparticella con la stessa massa). In ogni caso, si ha quindi:

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \langle 0|\phi(0)|0\rangle = 0 \tag{5.13}$$

che è la condizione quantistica corrispondente alla (5.12).

Lo stato di minima energia del campo è unico ed è simmetrico sotto le trasformazioni (5.8). Similmente simmetrico è lo spettro delle particelle: la simmetria (5.3) è realizzata esattamente.

Non sappiamo risolvere la teoria per $\lambda > 0$. Nel limite di λ piccolo, la teoria delle perturbazioni ci produce una teoria con particelle scalari cariche con interazioni anch' esse simmetriche per le trasformazioni (5.3). Se possiamo usare questa indicazione, concludiamo che il caso $\mu^2 > 0$ corrisponde alla teoria con *simmetria esatta*:

$$\mu^2 > 0: \quad \langle 0|\phi(0)|0\rangle = 0; \quad \text{simmetria esatta} \tag{5.14}$$

2. $\mu^2 < 0$**:** La forma del potenziale $V(\phi)$, in questo caso, è ilustrata nella fig. 5.1.

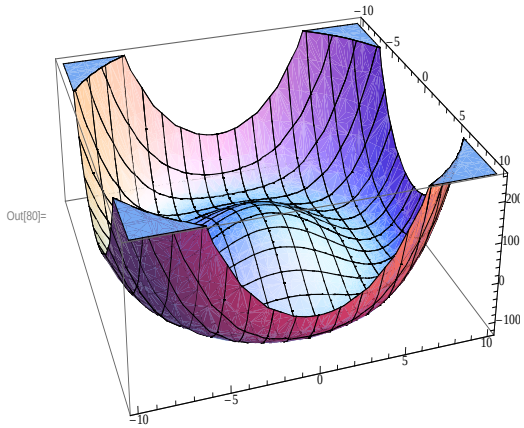

Figura 5.1: Potenziale in funzione dei campi reali ϕ_1 e ϕ_2, per valori di $\mu^2 < 0$.

La configurazione con $\phi = 0$ è ancora un estremo del potenziale, ma non è la configurazione che minimizza il potenziale. Corrisponde, come mostrato in figura, ad un massimo locale. Il minimo del potenziale è raggiunto in tutti i punti del cerchio centrato nell' origine che appare come il fondo della valle nella fig. (5.1). Nessuno dei punti di minimo è simmetrico, la simmetria della teoria si riflette nella simmetria del luogo dei minimi, che corrispondono tutti allo stesso valore del potenziale.

Per risolvere la degenerazione dei minimi del potenziale, si usa introdurre un piccolo termine aggiuntivo nella lagrangiana (5.1), un *driving term* caratterizzato da un parametro ϵ, in genere complesso, che alla fine faremo tendere a zero. Consideriamo quindi la nuova lagrangiana:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\epsilon &= \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^\dagger - \mu^2\phi\phi^\dagger - \lambda\left(\phi\phi^\dagger\right)^2 + \epsilon^*\phi + \epsilon\phi^\dagger = \\ &= \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^\dagger - \left[V(\phi) - \epsilon^*\phi - \epsilon\phi^\dagger\right]\end{aligned} \tag{5.15}$$

I minimi dell' energia si trovano annullando le derivate del potenziale rispetto a ϕ e a $\phi^\dagger$. Il valore di ϕ al minimo, che indichiamo con η_ϵ, si ottiene dunque dall' equazione:

$$\eta_\epsilon\left[\mu^2 + 2\lambda(\eta_\epsilon\eta_\epsilon^\dagger)\right] = \epsilon \tag{5.16}$$

(la derivata rispetto a ϕ fornisce l' equazione complessa coniugata). Per piccoli valori di ϵ, l' equazione ha due radici, una prossima all' origine, $\eta_\epsilon = \mathcal{O}(\epsilon)$, che pero' corrisponde ad un massimo, l' altra con η_ϵ vicino al cerchio dei minimi di $V(\phi)$, che corrisponde al vero minimo. Notiamo che, in ogni caso, il primo membro della (5.16) ha la forma: $\eta_\epsilon\times$ (numero reale), quindi η_ϵ deve avere la stessa fase di ϵ. Il driving term forza il potenziale ad avere un solo minimo nel piano $\phi_1 - \phi_2$, guidandolo nella direzione da esso stesso determinata. Prendendo per semplicità ϵ reale, al primo ordine in ϵ abbiamo:

$$\begin{aligned}\eta_\epsilon &= \eta + \delta \\ \eta &= \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \\ \delta &= -\frac{\epsilon}{2\mu^2}\end{aligned} \tag{5.17}$$

Da notare che il segno negativo di μ^2 rende reale la radice quadrata. Nel limite $\epsilon \to 0$, $\delta \to 0$ ed il minimo si pone esattamente sul cerchio dei minimi di $V(\phi)$, nel punto $\phi_1 = \eta$, $\phi_2 = 0$.

Nello stato fondamentale quantistico, per la usuale corrispondenza tra valori classici e valori di aspettazione quantistici, il campo ϕ deve avere un valore di aspettazione non nullo, pari a:

$$\langle 0|\phi(0)|0\rangle = \eta \tag{5.18}$$

La configurazione di minima energia non è simmetrica, la simmetria è *rotta spontaneamente* dallo stato fondamentale:

$$\mu^2 < 0: \quad \langle 0|\phi(0)|0\rangle = \eta \neq 0; \quad \text{simmetria rotta spontaneamente} \tag{5.19}$$

5.2 Lo spettro delle fluttuazioni per $\mu^2 < 0$

Le piccole fluttuazioni intorno allo stato fondamentale sono descritte dalle oscillazioni di ϕ intorno al suo valore nel vuoto. Poniamo:

$$\phi(x) = \eta + \frac{\sigma_1(x) + i\sigma_2(x)}{\sqrt{2}} \tag{5.20}$$

le funzioni $\sigma_i(x)$ sono adesso i campi da quantizzare.

Per determinare lo spettro delle particelle associate alle piccole fluttuazioni, dobbiamo sostituire l' espressione (5.20) nella Lagrangiana data dalla (5.1) e sviluppare in potenze della σ_i. Le masse sono date dai termini quadratici nei campi, mentre i termini di ordine superiore descrivono le interazioni tra le particelle. Per trovare le masse, dunque possiamo fermarci al termine del secondo ordine nello sviluppo, che in forma generale è dato dall' espressione:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)} &= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left[\frac{\partial^2 V(\bar{\phi}_1,\bar{\phi}_2)}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\right]\sigma_i\sigma_j = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} M^2_{ij}\sigma_i\sigma_j \end{aligned} \tag{5.21}$$

dove la barra indica che i campi vanno valutati nel punto di minimo,:

$$\bar{\phi}_1 = \sqrt{2}\eta, \quad \bar{\phi}_2 = 0 \tag{5.22}$$

Usando la forma esplicita in (5.7), troviamo:

$$\begin{aligned} M^2_{11} &= \mu^2 + 6\lambda\eta^2 = -2\mu^2 = 4\lambda\eta^2 \\ M^2_{12} &= M^2_{21} = 0 \\ M^2_{22} &= \mu^2 + 2\lambda\eta^2 = 0 \end{aligned} \tag{5.23}$$

I due gradi di libertà originariamente associati con il campo complesso ϕ (ovvero con i campi reali ϕ_1 e ϕ_2 sono adesso rappresentati da due particelle con masse $4\lambda\eta^2$ e 0, rispettivamente.

La comparsa di una particella esattamente a massa zero è l' aspetto piú sorprendente del risultato in (5.23). Questo risultato è noto come *Teorema di Goldstone* e la particella di massa nulla come il *bosone di Goldstone* .

Possiamo facilmente convincerci che la presenza di una particella di massa nulla è conseguenza generale ed inevitabile della rottura spontana della simmetria. Per questo, notiamo che la matrice di massa nella (12.2) non è altro che la matrice di curvatuta del potenziale, calcolata nel punto di minimo. Ora, tutte le volte che il minimo è fuori dall' origine, in un punto non simmetrico, la simmetria richiede che esso debba giacere su un luogo di punti equipotenziali, nel nostro caso il cerchio $\phi_1^2 + \phi_2^2 = \eta^2 \neq 0$. Ma allora c'è una direzione piatta, la direzione lungo la curva di minimo, in cui la derivata seconda è necessariamente nulla. La particella che corrisponde alle oscillazioni del campo in quella direzione, σ_2 nel nostro caso, ha dunque massa nulla.

Commento 1. Il fenomeno della rottura spontanea di una simmetria è alla base del ferromagnetismo. In questo caso, la simmetria in questione è la simmetria per rotazioni spaziali. Lo stato fondamentale di un ferromagnete rompe la simmetria in quanto determina una direzione privilegiata nello spazio, la direzione verso cui punta la magnetizzazione spontanea (proprio da questo aggettivo deriva la dizione rottura spontanea). Le oscillazioni ortogonali alla magnetizzazione spontanea hanno la caratteristica di avere energia che tende a zero nel limite grandi

lunghezze d' onda, ovvero per frequenze che tendono a zero: energia = Cost$\times\nu$ per $\nu \to 0$. Questa relazione è l' equivalente del teorema di Goldstone. Per una particella relativistica, infatti, energia=$\sqrt{m^2+\nu^2}$ e l' energia puo' essere proporzionale alla frequenza solo per massa nulla.

Se raffreddiamo un ferromagnete sotto la temperatura di Curie in assenza di un campo magnetico esterno, non osserviamo alcuna magnetizzazione spontanea. Questo è legato al fatto che i differenti domini magnetici, che pure esistono, sono magnetizzati in direzioni distribuite a caso e la magnetizzazione spontanea si media a zero. Il fenomeno è dovuto al fatto che le diverse direzioni spaziali sono equivalenti tra loro. Per avere una magnetizzazione spontanea occorre raffreddare il ferromagnete in presenza di un campo magnetico, anche debole, che orienti tutti i domini nella stessa direzione.

Il modello di Goldstone presenta molte analogie con il ferromagnete. Nel modello, il valore del campo di minima energia, $< 0|\phi|0 >$ prende il ruolo della magnetizzazione spontanea del ferromagnete. In assenza di un *driving term* i punti del cerchio di minima energia nella fig. 5.1 sono tutti equivalenti, come le direzioni dei domini magnetici. Il *driving term* forza il vuoto, lo stato fondamentale, ad avere una direzione fissata in tutto lo spazio-tempo.

Commento 2. La rottura spontanea di una simmetria si può avere solo in sistemi con un numero infinito di gradi di libertà, ad esempio un ferromagnete di volume infinito o un campo in un volume infinito, come il modello di Goldstone. Per illustrare questo importante fatto, consideriamo, all' estremo opposto, un sistema con un solo grado di libertà: una particella confinata in un potenziale a doppia buca [9] perfettamente simmetrica. In questo caso abbiamo due candidati per lo stato fondamentale: gli stati con la particelle localizzata nella buca di destra (ψ_1) o in quella di sinistra (ψ_2). Abbiamo un caso di degenerazione simile a quello incontrato nella fig. 5.1. La simmetria richiede che sia:

$$< \psi_1|H|\psi_1 >= H_{11} =< \psi_2|H|\psi_2 >= H_{22} = H \tag{5.24}$$

Se introduciamo un *driving term* che riduce l' energia di una della due buche, diciamo la numero 1, lo stato ψ_1 diventa lo stato fondamentale e la simmetria è rotta.

Tuttavia, per avere rottura spontanea la dissimetria si deve mantenere nel limite in cui il driving term tende a zero. Questo non è il caso. In effetti, la matrice hamiltoniana tra i due stati contiene anche un termine non-diagonale dovuto alla possibilità che la particella passi per effetto tunnel da una buca all' altra:

$$\begin{pmatrix} H & \delta \\ \delta & H \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

Poichè i due termini sulla diagonale sono uguali, purchè sia $\delta \neq 0$, non importa quanto piccolo, l' autostato di energia minima della (5.25) avrà la forma:

$$\psi_0 = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\sqrt{2}} \tag{5.26}$$

e la simmetria dello stato fondamentale è ristabilita nel limite di driving term nullo. Lo stesso vale, naturalmente, per sistemi con un numero finito di gradi di libertà.

Quello che succede per sistemi con infiniti gradi di libertà è che l' ampiezza di tunneling da uno stato di minima energia ad un altro *puó* essere esattamente zero (o meglio, tendere a zero nel limite di volume infinito). In questo caso, una volta che un driving term di intensità ϵ abbia portato il sistema in uno dei minimi dell' energia, questo resta tale, come stato fondamentale quantistico, anche nel limite $\epsilon \to 0$: la simmetria è rotta spontaneamente. Abbiamo sottolineato la parola *può*. In effetti si conoscono sistemi con infiniti gradi di liberà di entrambi i casi. Ad esempio, nel modello di Ising in tre o più dimensioni si ha rottura spontanea, ma in due dimensioni no.

Per un magnete di dimensioni finite, l' ampiezza di tunneling dell' orientamento della magnetizzazione tra una direzione e l' altra non è strettamente zero. In queste condizioni, il magnete posto in una direzione fissata dovrebbe iniziare a precedere finchè, dopo un tempo adeguato, non si porti in un autostato simmetrico per rotazioni. Per un ferromagnete di dimensioni macroscopiche, tuttavia, il periodo di precessione può superare facilmente l' età dell' Universo. L' approsimazione di considerare fissato l' orientamento della magnetizzazione è, in questo caso, piú che adeguata a descrivere la reale situazione fisica.

5.3 Il Teorema di Goldstone

L' importanza del teorema di Goldstone giustifica una dimostrazione più generale di quanto siano le considerazioni fatte in precedenza, che riportiamo in questa Sezione.

Il quadro in cui ci muoviamo è quello di una teoria lagrangiana di campi quantistici, di cui il modello di Goldstone della Sez. precedente è un caso particolare, in cui valgano le condizioni seguenti.

- La Lagrangiana possiede una simmetria esatta, continua e globale (non estesa a simmetria locale attraverso campi di gauge); in base al terema di Noether, esiste quindi una corrente conservata:

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \tag{5.27}$$

  da cui:

$$\frac{dQ}{dt} = 0; \quad Q(t) = \int d^3x \; J^0(\mathbf{x}, t) \tag{5.28}$$

- Esistono dei campi scalari, $\phi_i(x)$, che non sono invarianti sotto le trasformazioni della simmetria, cfr. (5.3).

- uno dei campi ϕ_i, diciamo ϕ_1, ha un valore di aspettazione sul vuoto diverso da zero:

$$< 0|\phi_1(0)|0 >= \sqrt{2}\eta \neq 0 \tag{5.29}$$

Sotto queste condizioni la simmetria è rotta spontaneamente e possiamo dimostrare quanto segue.

Teorema di Goldstone. Esiste una particella scalare di massa esattamente nulla, il bosone di Goldstone[1]. La particella è creata dal vuoto dal campo scalare e dalla corrente. Se indichiamo con $|p>$ lo stato di questa particella con momento p^μ, si ha:

$$< p|\phi(0)|0 >= \frac{\sqrt{Z}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(p)}}; \tag{5.30}$$

$$< 0|J^\mu(0)|p >= \frac{ip^\mu\ F}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(p)}}; \tag{5.31}$$

$$Z,\ F \neq 0 \tag{5.32}$$

La forma dell' elemento di matrice del campo è la stessa impiegata nel Cap. 4. Per quanto riguarda la forma dell'elemento di matrice della corrente, si argomenta come segue. L' elemento di matrice $< 0|J^\mu(0)|p >$ deve essere proporzionale ad un quadrivettore. D' altra parte la particella creata da ϕ_2 sul vuoto ha spin zero, quindi lo stato $|p>$ dipende dal solo p^μ e l' unico quadrivettore che può comparire è p^μ. Di qui segue la forma indicata in (5.31).

Preliminari Per le trasformazioni di simmetria, senza perdere in generalità, possiamo prendere quelle indicate nella (5.8). Nella teoria quantistica, le trasformazioni sono rappresentate da operatori unitari della forma $exp(i\alpha Q)$ dove la carica Q della eq. (5.28) agisce da generatore infinitesimo. Considerando la trasformazione di ϕ_2 per α infinitesimo, abbiamo:

$$(\phi_2)' = e^{-iQ\alpha}\phi_2 e^{iQ\alpha} = \phi_2 - i\alpha\,[Q, \phi_2] + \mathcal{O}(\alpha^2) \tag{5.33}$$

Confrontando con la variazione (5.8) troviamo la relazione di commutazione:

$$i\frac{\delta\phi_2}{\delta\alpha} = [Q, \phi_2(x)] = \int d^3y\,\left[J^0(\mathbf{y}, t), \phi_2(\mathbf{x}, t)\right] = i\phi_1(\mathbf{x}, t) \tag{5.34}$$

Per la conservazione di Q, il tempo y^0 in cui valutiamo J^0 è irrilevante e abbiamo scelto $y^0 = x^0 = t$.

L' elemento centrale nella dimostrazione del teorema di Goldstone è la trasformata di Fourier della funzione di correlazione corrente-campo:

$$F^\mu(q) = \int d^4x\ e^{iqx}\ \ < 0|T\left[J^\mu(x)\phi_2(0)\right]|0 > \tag{5.35}$$

Possiamo ripetere le considerazioni fatte nel Cap. 4 a proposito della funzione di Green a due punti, ed ottenere per questa funzione di correlazione una rappresentazione analoga alla rappresentazione di Kallen-Lehman. A questo fine, separiamo, in F^μ, i contributi degli stati intermedi ad una particella, quella eventualmente creata dal vuoto con l' applicazione di ϕ_2, da quelli con due o più particelle:

$$F^\mu(q) = F^\mu(q)_1 + F^\mu(q)_{>1} \tag{5.36}$$

[1] il bosone di Goldstone ha spin zero ed è una particella scalare sotto trasformazioni di Lorentz proprie; dal punto di vista della parità il bosone di Goldstone è uno pseudoscalare se J^μ è una corrente assiale.

Consideriamo dapprima F_1^μ. Per $x^0 > 0$, abbiamo:

$$< 0|T\left[J^\mu(x)\phi_2(0)\right]|0 >_1 = \int d^3p\ e^{-ipx}\ < 0|J^\mu(0)|p >< p|\phi_2(0)|0 >=$$
$$= F\ \sqrt{Z}\ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega(p)}\ e^{-ipx}\ ip^\mu \tag{5.37}$$

dove abbiamo usato le definizioni (5.30) e (5.31) per gli elementi di matrice.

Ragionando come abbiamo fatto nel caso della funzione di Green, si vede facilmente che, con la definizione dei fattori aggiuntivi data in (5.32), la quantità F è invariante di Lorentz, quindi dipende solo da p^2, cioè dalla massa della particella in $|p >$ ed è dunque una costante.

Dalla (5.37), aggiungendo il caso $x^0 < 0$, si ottiene direttamente:

$$F^\mu(q)_1 = F\ \sqrt{Z}\ iq^\mu \tilde{D}_F(q, m) \tag{5.38}$$

dove $\tilde{D}$ è la trasformata di Fourier del propagatore della particella intermedia, cui attribuiamo una massa m, per il momento non determinata.

Lasciamo al lettore la cura di dimostrare che il contributo degli stati a due o più particelle è della forma:

$$F^\mu(q)_{>1} = q^\mu\ \int_{M_0^2}^{+\infty}\ \rho(M^2)\ \frac{dM^2}{q^2 - M^2} \tag{5.39}$$

dove M_0 è il valore minimo della massa invariante di questi stati.

Dimostrazione. Il risultato desiderato si ottiene imponendo che $F^\mu(q)$ soddisfi le condizioni richieste dalla conservazione della corrente, eq. (5.27), e dal valore non nullo del campo nello stato fondamentale, eq. (5.29).

Moltiplicando per q_μ ambo i membri della (5.35) otteniamo:

$$q_\mu F^\mu(q) = q_\mu \int d^4x\ e^{iqx}\ < 0|T\left[J^\mu(x)\phi_2(0)\right]|0 >=$$
$$= \int d^4x\ \left(-i\partial_\mu e^{iqx}\right)\ < 0|T\left[J^\mu(x)\phi_2(0)\right]|0 >= i\int d^4x\ e^{iqx}\ \partial_\mu < 0|T\left[J^\mu(x)\phi_2(0)\right]|0 >=$$
$$= i\int d^4x\ e^{iqx} < 0|T\left[\partial_\mu J^\mu(x)\phi_2(0)\right]|0 > + i\int d^4x\ e^{iqx}\ \delta(x^0)\ < 0|\left[J^0(\mathbf{x}, 0)\phi_2(0)\right]|0 >=$$
$$= i\int d^3x\ e^{-i\mathbf{qx}}\ < 0|\left[J^0(\mathbf{x}, 0)\phi_2(0)\right]|0 > \tag{5.40}$$

Se adesso passiamo al limite $q_\mu \to 0$ e usiamo le (5.34) e (5.29), otteniamo la relazione[2]:

$$\lim_{q\to 0} q_\mu F^\mu(q) = i\ < 0|\left[Q, \phi_2(0)\right]|0 >= - < 0|\phi_1(0)|0 >= -\sqrt{2}\eta \neq 0 \tag{5.41}$$

[2]nella letteratura, equazioni di questo tipo, che derivano dalla conservazione della corrente prendono il nome di *identità di Ward*.

Se trascuriamo il contributo al primo membro degli stati intermedi con due o più particelle (vedremo tra un momento che questo termine si annulla nel limite), otteniamo:

$$\lim_{q\to 0} q_\mu F^\mu(q)_1 = \sqrt{Z}F \lim_{q\to 0} q^2 \tilde{D}_F(q,m) = -\sqrt{2}\eta \tag{5.42}$$

Questo richiede che, nei dintorni di $q^2 = 0$, si abbia:

$$\tilde{D}_F(q,m) = \frac{-\sqrt{2}\eta}{\sqrt{Z}F}\,\frac{1}{q^2} \quad (\text{q}^2 \text{ prossimo a } 0) \tag{5.43}$$

Questa equazione, per essere soddisfatta, richiede:

- $m = 0$, valore per cui:

$$\tilde{D}_F(q,m) = \frac{1}{q^2} \tag{5.44}$$

- $$\sqrt{Z}F = -\sqrt{2}\eta \tag{5.45}$$

In parole: ϕ_2 deve creare dal vuoto una particella di massa nulla, il bosone di Goldstone, ed entrambe Z ed F devono essere non nulle.

Per completare la dimostrazione, dobbiamo considerare il contributo di $F^\mu(q)_{>1}$ alla (5.41). Dalla (5.39), otteniamo:

$$q_\mu F^\mu(q)_{>1} = q^2 \int_{M_0^2}^{+\infty} \rho(M^2)\,\frac{dM^2}{q^2 - M^2} \tag{5.46}$$

Nel limite $q^2 \to 0$ conta solo la parte singolare dell' integrale a secondo membro, che potrebbe esistere se $M_0 = 0$. Per separare la singolarità, poniamo:

$$\int_0^{+\infty} \rho(M^2)\,\frac{dM^2}{q^2 - M^2} = \int_0^{\bar{M}^2} \rho(M^2)\,\frac{dM^2}{q^2 - M^2} + \int_{\bar{M}^2}^{+\infty} \rho(M^2)\,\frac{dM^2}{q^2 - M^2} \tag{5.47}$$

e scegliamo $\bar{M} > 0$ ma abbastanza piccolo da poter ignorare la variazione di $\rho(M^2)$ nell' intervallo $(0,\, \bar{M}^2)$. Il primo termine si calcola esplicitamente[3] :

$$\int_0^{\bar{M}^2} \rho(M^2)\,\frac{dM^2}{q^2 - M^2} = \rho(0)\int_0^{\bar{M}^2} \frac{dM^2}{q^2 - M^2} = \rho(0)\,\log\left(\frac{q^2}{q^2 - \bar{M}^2}\right) \tag{5.48}$$

Come si vede, la singolarità in $q^2 = 0$ è solo logaritmica, quindi:

$$\lim_{q^2\to 0} q_\mu F^\mu(q)_{>1} = 0 \tag{5.49}$$

come anticipato.

[3]per mantenerci nella regione di analiticità della $F_{>1}$ dobbiamo far tendere $q^2 \to 0$ da valori negativi, per i quali il logaritmo che compare nella (5.48) è ben definito.

Nota 1. In virtù delle condizioni (5.32), il bosone di Goldstone, è pienamente osservabile nelle reazioni previste dalla teoria. D' altro canto, nella fisica subnucleare non sono mai state osservate particelle relativistiche scalari e di massa nulla. Il teorema di Goldstone ha costituito per lungo tempo il maggior ostacolo alla interpretazione come rottura spontanea delle violazioni di simmetria osservate, ad esempio per quanto riguarda la simmetria di spin isotopico.

Nota 2. Non abbiamo usato il fatto che ϕ_i siano dei campi elementari canonici, come avviene nel modello di Goldstone. Il teorema segue anche nel caso in cui il campo scalare che prende valore di aspettazione nel vuoto sia un generico operatore locale, ad esempio il prodotto di campi fondamentali. Questa situazione si incontra nella Cromodinamica Quantistica, la teoria di quark e gluoni, a proposito della rottura spontanea della simmetria chirale.

5.4 Il Meccanismo di Higgs-Brout-Englert

Riprendiamo il modello del Capitolo precedente ma promuoviamo la simmetria per trasformazioni di fase globale ad una simmetria per trasformazioni di fase dipendenti dal punto. Questo richiede, oltre al campo scalare complesso di partenza, l' introduzione di un campo vettoriale A^μ analogo al campo elettromagntico, come discusso nel Cap. 3. La lagrangiana risultante è:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi - V(\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&V(\phi) = \mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 - \epsilon\phi^\dagger - \epsilon^*\phi \\
&D^\mu = \partial^\mu - ieA^\mu \\
&F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Nel limite $\epsilon \to 0$, $\mathcal{L}$ è invariante sotto le trasformazioni di gauge:

$$\phi(x) \to e^{i\alpha(x)}\phi(x); \quad \phi(x)^\dagger \to e^{-i\alpha(x)}\phi(x)^\dagger; \tag{5.51}$$

$$A^\mu \to A^\mu + \frac{1}{e}\partial^\mu\alpha(x) \tag{5.52}$$

dove $\alpha(x)$ è una funzione reale arbitraria di x ed e una nuova costante di accoppiamento, che coincide con la carica elettrica se identifichiamo A^μ con il campo elettromagnetico. Come prima deve essere $\lambda > 0$, per ottenere una teoria stabile, ma μ^2 può avere entrambi i segni.

1. $\mu^2 > 0$**.** La configurazione di minima energia corrisponde a $\phi = 0$, $A^\mu = 0$. Se quantizziamo ϕ ed A^μ otteniamo una teoria con:

- una particella carica e la sua antiparticella, entrambe con massa $\mu \neq 0$;
- una particella di spin 1 e massa nulla (due stati di polarizzazione) in tutto simile al fotone;

Per λ ed e sufficientemente piccoli, la lagrangiana descrive le interazioni di particelle scalari con il campo elettromagnetico (elettrodinamica scalare, costante di accoppiamento e) e le loro autointerazioni (costante di accoppiamento λ).

2. $\mu^2 < 0$**.** La configurazione di minima energia si ottiene per $A^\mu = 0$, per minimizzare l' energia elettrostatica, quindi ricadiamo nel caso del modello di Goldstone, per cui (con $\epsilon \to 0$, reale):

$$V(\bar{\phi}) = \min : \quad \bar{\phi} = \eta = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{5.53}$$

Per studiare le fluttuazioni intorno alla configurazione di minimo, poniamo di nuovo:

$$\phi = \eta + \frac{\sigma_1(x) + i\sigma_2(x)}{\sqrt{2}} \tag{5.54}$$

e sviluppiamo la lagrangiana in (5.50). Lo spettro di massa delle particelle associate si ottiene come prima dai termini quadratici nei campi σ_i e A^μ. Prima di considerare questi termini, tuttavia, notiamo che sotto le trasformazioni (5.52) con α infinitesimo, il campo ϕ trasforma come:

$$\phi \to \phi + i\alpha\phi = \eta + \frac{\sigma_1(x) + i\sigma_2(x)}{\sqrt{2}} + i\eta\alpha(x) \tag{5.55}$$

ovvero:

$$\sigma_1(x) \to \sigma_1'(x) = \sigma_1(x); \quad \sigma_2(x) \to \sigma_2'(x) = \sigma_2(x) + \sqrt{2}\eta\alpha(x) \tag{5.56}$$

dove abbiamo trattato sia le σ_i sia α come grandezze del primo ordine ed abbiamo trascurato termini che sono almeno del secondo ordine. Naturalmente, allo stesso tempo dobbiamo trasformare A^μ secondo la (5.52).

Il campo σ_2 si trasforma in modo non omogeneo per l' aggiunta di un termine proporzionale ad α ma, a differenza del caso globale, il termine aggiuntivo è una *funzione di* x di cui possiamo disporre a nostro piacimento. In particolare, dati i campi $\sigma_i(x)$ ed $A^\mu(x)$, possiamo scegliere:

$$\alpha(x) = -\frac{\sigma_2(x)}{\sqrt{2}\eta} \tag{5.57}$$

in modo tale da avere:

$$\sigma_2'(x) = 0 \quad \text{(gauge unitaria)} \tag{5.58}$$

Il campo σ_2, che nel modello con simmetria globale corrispondeva al bosone di Goldstone, può essere completamente eliminato nel caso di simmetria di gauge e non corrisponde quindi ad alcun grado di libertà fisico. La gauge identificata dalla condizione (5.58) è comunemente indicata col nome di *gauge unitaria*.

5.5 Masse delle particelle vettoriali nel gauge unitario

Nella gauge unitaria, in cui:

$$\phi = \eta + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} = \rho(x) = \text{reale} \tag{5.59}$$

la lagrangiana assume la forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + e^2\rho(x)^2 A_\mu A^\mu - V(\rho) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{5.60}$$

ed è immediato estrarre i termini quadratici nei campi. Ricordando la prima delle (5.23), troviamo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}M_H^2\sigma^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M_A^2 A_\mu A^\mu \tag{5.61}$$

con:

$$\begin{aligned} M_H^2 &= -2\mu^2 = 4\lambda\eta^2; \\ M_A^2 &= 2e^2\eta^2 \end{aligned} \tag{5.62}$$

La lagrangiana descrive una particella scalare neutra di massa M_H e, come mostriamo esplicitamente più avanti, Sect. 5.6, una particella di spin 1 con massa pari a M_A. Possiamo sintetizzare i risultati trovati al modo seguente.

- In presenza di una simmetria locale (di gauge), la rottura spontanea della simmetria implica che il corrispondente campo di gauge acquisti una massa non nulla.

Scompare il campo corrispondente al bosone di Goldstone della teoria globale (che può essere eliminato da una trasformazione di gauge). Al suo posto appare il grado di libertà mancante al campo vettoriale per farne il campo di una particella di spin 1 con massa. È importante notare che nel passaggio dalla simmetria esatta alla simmetria rotta ($\mu^2 < 0$) lo spettro di massa cambia drasticamente ma il numero di gradi di libertà si conserva, come indicato in Tab. 5.1.

–	σ_1	σ_2	A^μ	n. gradi di libertà
$\mu^2 > 0$	μ	μ	0	4=2+2
$\mu^2 < 0$	M_H	—	M_A	4=1+3

Tabella 5.1: Spettro di massa delle particelle nel modello di Higgs.

Da un punto di vista fisico, il *Meccanismo di Higgs-Brout-Englert* elimina le difficoltà connesse alla cospicua assenza di particelle di massa nulla nella fisica subnucleare, sia scalari, in relazione al teorema di Gloldstone, sia vettoriali, in relazione alla teoria di Yang-Mills. Questo risultato apre la strada ad una teoria delle forze deboli mediate da bosoni vettoriali intermedi dotati di massa.

L' unica particella osservata con massa nulla è il fotone, in corrispondenza alla simmetria di gauge delle interazioni elettromagnetiche che, entro limiti di straordinaria precisione, è l' unica simmetria di gauge rispettata in Natura.

5.6 Il campo vettoriale con massa

A completamento degli argomenti della Sezione precedente, mostriamo che la lagrangiana del campo vettoriale nell' eq. (5.61) corrisponde ad una particella con massa non nulla e spin 1.

Partiamo dalla lagrangiana:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 A_\mu A^\mu \tag{5.63}$$

Il modo più diretto di ottenere il risultato è di calcolare la funzione di Green classica che, con la prescrizione di Feynman sul cammino di integrazione, fornisce il propagatore quantistico.

Determiniamo innanzi tutto l' equazione del moto. Dalla (5.63) troviamo facilmente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\alpha A_\beta} &= F_{\alpha\beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} &= M^2 A_\beta \end{aligned} \tag{5.64}$$

da cui si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\partial^\alpha F_{\alpha\beta} = M^2 A_\beta \tag{5.65}$$

ovvero:

$$-\Box A_\beta + \partial_\beta \left(\partial^\alpha A_\alpha\right) - M^2 A_\beta = 0 \tag{5.66}$$

La funzione di Green corrispondente, $G_{\mu\nu}$, è la soluzione dell' equazione:

$$\left[\left(-\Box - M^2\right)\delta^\rho_\mu + \partial^\rho \partial_\mu\right] G_{\rho\nu}(x) = -g_{\mu\nu}\delta^{(4)}(x) \tag{5.67}$$

Passando alla trasformata di Fourier, otteniamo l' equazione per $\tilde{G}$:

$$\begin{aligned} &K^\rho_\mu(k)\tilde{G}_{\rho\nu}(k) = \\ &= \left[\left(k^2 - M^2\right)\delta^\rho_\mu - k^\rho k_\mu\right]\tilde{G}_{\rho\nu}(k) = -g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{5.68}$$

Rispetto alla analoga equazione per il campo elettromagnetico, l' eq. (5.68) ha in più il termine di massa, che rende la matrice $K(k)$ invertibile[4]. La soluzione della (5.68) si trova appunto costruendo l' inverso di K, che deve essere della forma:

$$(K^{-1})^\nu_\rho(k) = A(k^2)\delta^\nu_\rho + B(k^2)k^\nu k_\rho$$

con A e B funzioni Lorentz-invarianti di k^μ, quindi funzioni di k^2. Imponendo:

$$K^\rho_\mu(k)(K^{-1})^\nu_\rho(k) = \delta^\nu_\mu \tag{5.69}$$

[4]nel caso elettromagnetico, la matrice K è sostituita da $H^\rho_\mu(k) = k^2\delta^\rho_\mu - k^\rho k_\mu$. H non è invertibile, come risulta dal fatto che possiede un autovettore con autovalore nullo: $k^\mu H^\rho_\mu(k) = 0$.

troviamo:

$$A(k^2) = \frac{1}{k^2 - M^2}$$
$$B(k^2 - M^2) - Bk^2 - A = 0 \tag{5.70}$$

da cui, infine:

$$\tilde{G}^{\mu\nu}(k) = -(K^{-1})^{\mu\nu} = \frac{-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M^2}}{k^2 - M^2} \tag{5.71}$$

Il polo per $k^2 = M^2$ indica che il campo corrisponde a particelle di massa M. Se ci poniamo sul polo e nel sistema di quiete della particella, $k^0 = M$ e $\vec{k} = 0$, le componenti non nulle del numeratore nella (5.71) sono quelle con indici spaziali, e otteniamo:

$$-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M^2} \to \delta_{ij} = P_{ij} \tag{5.72}$$

Sul polo, il numeratore del propagatore è, in generale, l' operatore di proiezione sugli stati della particella e la sua traccia dà direttamente il numero di stati disponibili, pari a $2S+1$, dove S è lo spin. Poichè $TrP = 3$, segue $S = 1$.

Capitolo 6

UNIFICAZIONE ELETTRODEBOLE II

6.1 la teoria di Weiberg e Salam

Il punto di partenza è la teoria basata sulla simmetria $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ illustrata in precedenza, Sez. 4.3, nella sua versione esattamente simmetrica, ovvero senza termini di massa *ad hoc* per i campi vettoriali e per il campo dell' elettrone. La lagrangiana segue dalla classificazione sotto $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ dei campi leptonici data nella (4.15) che ripetiamo per convenienza:

$$l = \begin{pmatrix} (\nu_e)_L \\ e_L \end{pmatrix}_{Y=-1} \; ; \; (e_R)_{Y=-2} \tag{6.1}$$

La lagrangiana di Yang-Mills corrispondente è dunque:

$$\mathcal{L}_{eW} = \bar{l} i\gamma^\mu D_\mu l \; + \; \bar{e}_R i\gamma^\mu D_\mu e_R \; - \; \frac{1}{4}\left[\mathbf{W}_{\mu\nu}\mathbf{W}^{\mu\nu} + B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}\right] \tag{6.2}$$

Derivate covarianti e tensori dei campi sono dati da:

$$\begin{aligned} &D_\mu l = [\partial_\mu + ig\mathbf{W}_\mu \cdot \frac{\tau}{2} + ig'(-\frac{1}{2})B_\mu]l \\ &D_\mu e_R = [\partial_\mu + ig'(-1)B_\mu]e_R \\ &\mathbf{W}_{\mu\nu} = \partial_\nu \mathbf{W}_\mu - \partial_\mu \mathbf{W}_\nu \;\; \text{(stesso per B}_{\mu\nu}\text{)} \end{aligned} \tag{6.3}$$

La teoria a questo stadio descrive fermioni e campi vettoriali, *tutti di massa nulla.*

6.2 Il doppietto scalare

Introduciamo adesso un campo scalare che possa innescare la rottura della simmetria, lasciando conservata la simmetria di gauge dell' elettromagnetismo, secondo lo schema:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em} \tag{6.4}$$

Sul campo scalare abbiamo poche informazioni e diverse possibilità. La scelta di Weinberg e Salam permette al meccanismo di rottura spontanea di generare anche la massa dell' elettrone e dei quark, nella estensione della teoria alle particelle adroniche, cfr. Cap. 8, in modo da portarci ad una teoria completamente realistica. La scelta in questione consiste nell' introdurre un doppietto di $SU(2)_L$ con $Y = +1$:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}_{Y=+1}$$
$$D_\mu \phi = [\partial_\mu + ig\mathbf{W}_\mu \cdot \frac{\tau}{2} + ig'(+\frac{1}{2})B_\mu]\phi \tag{6.5}$$

Alla lagrangiana in (6.2) dobbiamo aggiungere la parte del doppietto di Higgs, anch' essa perfettamente simmetrica:

$$\mathcal{L}_{tot} = \mathcal{L}_{eW} + \mathcal{L}_{\phi W} \tag{6.6}$$

con

$$\mathcal{L}_{\phi W} = (D_\mu \phi)^\dagger \, ({}^\mu\phi) - V(\phi);$$
$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 \tag{6.7}$$

Possiamo adesso supporre, come nella Sez. 5.4, che ϕ prenda un valore di aspettazione nel vuoto, rompendo cosí la simmetria. A meno di ridefinizioni, possiamo sempre supporre che sia la componente in basso ad essere diversa da zero:

$$\bar{\phi} =< 0|\phi|0 >= \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$
$$\eta = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \tag{6.8}$$

Sul doppietto (6.5) la carica elettrica è rappresentata dalla matrice:

$$Q = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

per cui il campo di minimo è invariante sotto le trasformazioni di fase associate al gruppo $U(1)_{em}$:

$$e^{i\alpha Q}\bar{\phi} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \bar{\phi} \tag{6.10}$$

La rottura di simmetria indotta da $\bar{\phi} \neq 0$ realizza lo schema (6.4).

Per identificare correttamente le particelle fisiche previste dalla teoria dobbiamo identificare le condizioni per la gauge unitaria. Per fare questo, notiamo che ogni spinore a due dimensioni può essere ridotto ad uno spinore della forma *giú* e *reale* con una trasformazione del gruppo di simmetria, dipendente dal punto. In formule, un qualsiasi $\phi(x)$ della forma (6.5) si puó mettere nella forma standard:

$$\phi(x) = U(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \rho(x) \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

con $\rho(x)$ reale e $U(x)$ una matrice di $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

Dim. Consideriamo uno spinore generico:

$$\phi = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

con $z_{1,2}$ complessi. Moltiplicando lo spinore per la matrice diagonale :

$$e^{i(\alpha I_3 + \beta Y)} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha}e^{i\beta} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha}e^{i\beta} \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

possiamo eliminare le fasi di z_1 e z_2 e ridurre lo spinore ad essere puramente reale. A questo punto, applichiamo una matrice di $SU(2)_L$ corrispondente ad una rotazione intorno all' asse 2:

$$U_2(\gamma) = e^{i\gamma\frac{\tau_2}{2}} \tag{6.13}$$

Per γ appropriato, possiamo eliminare la componente *su* dello spinore, mantenendo reale la componente *giú*, e otteniamo la forma standard, con:

$$U = U_2(\gamma)e^{i(\alpha I_3 + \beta Y)} \quad \text{(U appartiene a } \mathrm{SU(2)_L} \otimes \mathrm{U(1)_Y}) \tag{6.14}$$

Sottoponiamo tutti i campi alla trasformazione di gauge corrispondente a $U(x)^{-1}$. La lagrangiana resta invariante e il campo di Higgs prende la forma reale che caratterizza, nel caso in questione, la gauge unitaria:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho(x) \end{pmatrix} \quad (\rho(\mathrm{x}) \text{ reale}) \tag{6.15}$$

In genere, in questa gauge, scriveremo:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{(gauge unitaria)} \tag{6.16}$$

Nel doppietto di Higgs rimane un solo campo fisico, $\sigma(x)$, e quindi una particella scalare neutra, il *bosone di Higgs*.

6.3 Le masse dei campi vettoriali

Come nel modello di Higgs, la massa dei campi vettoriali ha origine dal termine con le derivate covarianti in $\mathcal{L}_{\phi W}$. Nella gauge (6.15), la lagrangiana si riduce a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\phi W} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - V\left[\eta + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}}\right] + \\ &+ g^2 W^i_\mu (W^j)^\mu \left[\bar{\phi}\frac{\tau_i\tau_j}{4}\bar{\phi}\right] + (g')^2\frac{1}{4}\eta^2 B_\mu B^\mu + 2gg' W^3_\mu B^\mu \left[\bar{\phi}\frac{\tau_3}{4}\bar{\phi}\right] \end{aligned} \tag{6.17}$$

(somma su tutti gli indici ripetuti). Usando la (6.8) e le proprietà delle matrici di Pauli, troviamo:

$$\begin{aligned} W^i_\mu (W^j)^\mu \left[\bar{\phi}\frac{\tau_i\tau_j}{4}\bar{\phi}\right] &= \frac{1}{4}\eta^2 \mathbf{W}_\mu \mathbf{W}^\mu \\ W^3_\mu B^\mu \left[\bar{\phi}\frac{\tau_3}{4}\bar{\phi}\right] &= -\frac{1}{4}\eta^2 W^3_\mu B^\mu \end{aligned} \tag{6.18}$$

Confrontando con la Sez. 4.3 vediamo che abbiamo riottenuto l' eq. (4.19) con:

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{1}{2}g^2\eta^2; \\ M_0^2 &= \frac{1}{2}(g')^2\eta^2; \\ M_{03}^2 &= -\frac{1}{2}gg'\eta^2 \end{aligned} \tag{6.19}$$

ovvero:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2}\eta^2 \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & (g')^2 \end{pmatrix} \tag{6.20}$$

Confrontando con il Cap. 4 vediamo che M è la massa del bosone intermedio carico. Dalla (6.19) e dalla (4.33) possiamo collegare η direttamente alla costante di Fermi:

$$\eta^{-2} = \frac{g^2}{2M^2} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}G_F \tag{6.21}$$

$$\eta \simeq 188 \text{ GeV} \tag{6.22}$$

Come abbiamo visto, la configurazione di vuoto è invariante per trasformazioni di gauge associate alla carica elettrica. Non è sorprendente, quindi, constatare che la matrice (6.20) soddisfa automaticamente la condizione di avere determinante nullo, $det\mathcal{M} = 0$, quindi di ammettere un fotone di massa nulla.

Come in Sez. 4.3, indichiamo con Z^μ e A^μ il campo massivo e il campo elettromagnetico che diagonalizzano la (6.20) e usiamo la stessa convenzione per l' angolo di mixing elettrodebole, θ:

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \cos\theta W_\mu^3 - \sin\theta B_\mu \\ A_\mu &= \sin\theta W_\mu^3 + \cos\theta B_\mu \end{aligned} \tag{6.23}$$

La condizione che il campo A^μ sia proprio l' autovettore della (6.20) con autovalore nullo si scrive:

$$0 = \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & (g')^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^2\sin\theta - gg'\cos\theta \\ -gg'\sin\theta + (g')^2\cos\theta \end{pmatrix} \tag{6.24}$$

L' annullarsi del secondo membro richiede:

$$\tan\theta = \frac{g'}{g} \tag{6.25}$$

che è proprio la condizione per cui il campo A^μ definito in (6.23) si accoppia all' elettrone attraverso la corrente elettromagnetica con:

$$g\sin\theta = g'\cos\theta = e; \tag{6.26}$$

come si vede dalle eq. (4.30) e (4.29).

In conclusione, la rottura spontanea nella teoria di Weiberg e Salam, basata su una lagrangiana esattamente simmetrica, riproduce esattamento lo spettro di massa e gli accoppiamenti dei campi vettoriali ottenuti nella teoria di Glashow, in particolare i risultati riassunti nelle (4.26), (4.36) e nella forma della corrente neutra accoppiata a Z^μ, (4.32), risultati che, come vedremo, sono molto ben soddisfatte dai dati sperimentali.

6.4 La massa dell' elettrone

Per completare la teoria elettro-debole dobbiamo rendere conto della massa dell' elettrone, che nella teoria di Glashow era descritta dal termine $\mathcal{L}_m$ che rompe esplicitamente la simmetria, cfr. la (4.10):

$$\mathcal{L}_m = m_e \bar{e} e = m_e(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \tag{6.27}$$

Il motivo della non invarianza di $\mathcal{L}_m$ sotto trasformazioni di $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ è chiarito dalla forma del secondo membro della (6.27): il campo $\bar{e}_L$ ha isospin debole 1/2 mentre e_R ha isospin zero, vedi la (6.1), e quindi $\mathcal{L}_m$ nel complesso ha isospin debole 1/2. Possiamo ottenere una lagrangiana invariante combinando $\mathcal{L}_m$ con il campo di Higgs, che pure ha isospin debole 1/2. A seguito della rottura spontanea, ϕ acquista una componente costante, che riproduce la lagrangiana $\mathcal{L}_m$, mentre la componente quantistica di ϕ dà luogo ad una nuova interazione tra ϕ e l' elettrone.

In formule, scriviamo la lagrangiana invariante:

$$\mathcal{L}_{e\phi} = g_e \left(\bar{l}\phi e_R + \bar{e}_R \phi^\dagger l \right) \tag{6.28}$$

Lo sviluppo esplicito del termine invariante $\bar{l}\phi$, in presenza di rottura spontanea di simmetria, nella gauge unitaria, eq. (6.16), è:

$$\bar{l}\phi = \bar{\nu}_L \phi^+ + \bar{e}_L \phi^0 = \bar{e}_L(\eta + \frac{\sigma}{\sqrt{2}}) \tag{6.29}$$

da cui otteniamo:

$$\mathcal{L}_{e\phi} = g_e \eta \bar{e} e + g_e \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \bar{e} e = \mathcal{L}_m + \text{interazione} \tag{6.30}$$

Abbiamo ottenuto un termine di massa dell' elettrone con:

$$m_e = g_e \eta \tag{6.31}$$

Si può osservare che, anche dopo la rottura spontanea, la simmetria non è andata persa. Rimane una relazione tra la massa dell' elettrone e la costante dell' interazione tra l' elettrone e il bosone di Higgs che possiamo riscrivere:

$$g_e = \frac{m_e}{\eta} = \left(2\sqrt{2} G_F \right)^{1/2} m_e \tag{6.32}$$

L' interazione è determinata dalla costante di Fermi e dalla massa dell' elettrone. La relazione (6.32) caratterizza completamente l' interazione del bosone di Higgs con l' elettrone e fornisce una segnatura caratteristica per la sua identificazione.

6.5 La massa del neutrino.

La combinazione che appare nella(6.29) non è l' unico invariante che possiamo costruire con i campi dell' elettrone *left-handed* e del doppietto di Higgs. Usando il tensore antisimmetrico invariante in due dimensioni[1] si ottiene la combinazione invariante:

$$\left(l^i\phi^j\right)\epsilon_{ij} = \nu_L\phi^0 - e_L\phi^+ \qquad (\mathrm{Y} = -2) \tag{6.33}$$

In presenza di un campo ν_R, possiamo ottenere una lagrangiana che, dopo rottura spontanea, genera una massa per il neutrino:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\nu\phi} &= g_D\left[\bar{\nu}_R\left(l^i\phi^j\right)\epsilon_{ij} \ + \ \mathrm{h.c.}\right] = \\ &= g_D\eta\left(\bar{\nu}_R\nu_L \ + \ \bar{\nu}_L\nu_R\right)\end{aligned} \tag{6.34}$$

I possibili termini di massa per il neutrino sono stati caratterizzati in [1], Cap. 9. Secondo la terminologia ivi adottata, il termine in (6.34) è una *massa di Dirac*.

Commento: il meccanismo see-saw. Il problema della (6.34) è che è difficile attribuire allo stesso meccanismo, la rottura spontanea di $SU(2)_L\otimes U(1)_Y$, la generazione di masse talmente diverse come quella dell' elettrone ($m_e \simeq 0.5$ MeV) e quella del ν_e (dove si potrebbe avere $m_{\nu_e} \simeq 10^{-4}$ eV, inferiore di dieci ordini di grandezza).

Tuttavia, con il campo ν_R possiamo anche costrure una *massa di Majorana* che è direttamente invariante sotto $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, della forma:

$$\mathcal{L}_{nu-M} = M\left(\nu_R\gamma^0\nu_R \ + \ \mathrm{h.c.}\right) \tag{6.35}$$

La massa del neutrino deriva dalla combinazione di questi due termini:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\nu-tot} &= \mathcal{L}_{\nu\phi} \ + \ \mathcal{L}_{nu-M} = \\ &= M\left(\nu_R\gamma^0\nu_R \ \mathrm{h.c.}\right) \ + \ m_D\left(\bar{\nu}_R\nu_L \ + \ \bar{\nu}_L\nu_R\right)\end{aligned} \tag{6.36}$$

ll problema di diagonalizare la matrice di massa ottenuta dalla (6.36) è discusso in [1], Sez. 9.3.

Riassumiamo i risultati ottenuti nel limite $M >> m_D$.

Gli autovettori della matrice di massa sono due campi di Majorana[2], ν' e ν'' , di massa m' ed $m'' >> m'$, rispettivamente. Il neutrino leggero coincide approssimativamente con il neutrino emesso nei decadimenti beta insieme all' elettrone:

$$\frac{1-\gamma_5}{2}\nu' \simeq \nu_L; \quad m' \simeq \frac{m_D^2}{M} \tag{6.37}$$

mentre il neutrino pesante coincide approssimativamente con ν_R:

$$\frac{1+\gamma_5}{2}\nu'' \simeq \nu_L; \quad m'' \simeq M \tag{6.38}$$

Poichè non ci sono restrizioni su M, la (6.37) permette una soppressione della massa del neutrino leggero anche per valori di m_D dell' ordine della scala naturale delle masse elettrodeboli, fissata dal valore di η, eq. (6.22).

[1] $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$, $\epsilon_{12} = +1$.

[2] sono cioè, campi reali: $(\nu')^\dagger = \nu'$, $(\nu'')^\dagger = \nu''$, cfr. [1], Cap. 9

Capitolo 7

QUARKS IN TRE COLORI

Capitolo 8

TEORIA DEL QUARK-MIXING

L' idea di un mixing dei quark come effetto della rottura di simmetria è stato introdotto da N. Cabibbo nel 1963 [14], nel contesto della teoria dei quark introdotta da M. Gell-Mann negli stessi anni[15], che prevedeva tre sapori di quark, i quark *up*, *down* e *strange*. In questo schema, era naturale attribuire i campi left-handed *up* e *down* ad un doppietto elettrodebole, e gli altri campi a singoletti, secondo le schema:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L ; \quad u_R;\ d_R;\ s_L;\ s_R \tag{8.1}$$

8.1 La teoria di Cabibbo

Cabibbo osserva che la rottura di simmetria puó dare luogo ad un mixing tra d_L e s_L, portando ad una espressione della corrente debole carica della forma:

$$J^1_\mu + iJ^2_\mu = \bar{u}_L \gamma_\mu \left(\cos\theta d_L + \sin\theta s_L\right) \tag{8.2}$$

Con un solo parametro elettrodebole, l' angolo di Cabibbo θ, ed alcuni parametri fenomenologici legati alle interazioni forti, si ottiene un ottimo accordo per le disintegrazioni β di barioni e mesoni con e senza stranezza.

Introducendo il tripletto dei quark:

$$q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}_L \tag{8.3}$$

l' equazione precedente si scrive:

$$\begin{aligned} J^1_\mu + iJ^2_\mu &= \bar{q}_L \mathcal{C} \gamma_\mu q_L = \\ &= \bar{q}_L \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma_\mu q_L \end{aligned} \tag{8.4}$$

La teoria di Cabibbo, tuttavia, non si puó incorporare nella teoria elettrodebole di Glashow-Weinberg-Salam, in quanto la (8.4) condurrebbe ad una *corrente debole neutra che cambia la stranezza*, contrasto con i dati sperimentali. La corrente neutra coinvolge infatti il commutatore della matrice $\mathcal{C}$ con la sua aggiunta, che non è diagonale:

$$\left[\mathcal{C}, \mathcal{C}^\dagger\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{8.5}$$

Termini della forma $\bar{d}_L \gamma_\mu s_L$ nella corrente neutra produrrebbero il decadimento $K_L \to \mu^+\mu^-$ con una velocità di disintegrazione dell' ordine di quella del $K^+ \to \mu^+\nu$. Per questo motivo, i lavori di Glashow, Weinberg e Salam sono tutti ristretti alle interazioni elettrodeboli del doppietto elettrone-neutrino.

8.2 Il meccanismo di Glashow, Iliopoulos e Maiani

La difficoltà è stata superata nel 1970 da S. L. Glashow, J. Iliopoulos e L. Maiani [16], con l'ipotesi dell'esistenza di un quarto quark, il quark *charm*, con gli stessi numeri quantici elettrodeboli del quark *up*. In presenza del quark charm, possiamo classificare il quark s_L in un doppietto elettrodebole, secondo lo schema:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L ; \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L ; \quad u_R;\ d_R;\ c_R;\ s_R \tag{8.6}$$

La matrice $\mathcal{C}$ diventa adesso una matrice 4×4 e la corrente debole carica prende la forma (i quark sono ordinati come u, c, d ed s, ogni elemento è un blocco 2×2):

$$\begin{aligned} J^1_\mu + iJ^2_\mu &= \bar{q}_L \begin{pmatrix} 0 & U_{GIM} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma_\mu q_L \\ U_{GIM} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.7}$$

La corrente neutra, dovuto all'unitarietà di U_{GIM}, è completamente diagonale:

$$\begin{aligned} J^3_\mu &= \bar{q}_L \left[\mathcal{C}, \mathcal{C}^\dagger\right] \gamma_\mu q_L = \\ &= \bar{q}_L \begin{pmatrix} U_{GIM} U^\dagger_{GIM} & 0 \\ 0 & -U^\dagger_{GIM} U_{GIM} \end{pmatrix} \gamma_\mu q_L = \bar{q}_L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \gamma_\mu q_L \end{aligned} \tag{8.8}$$

La massa del quark charm. L' articolo [16] prende le mosse dalla teoria con un solo bosone intermedio carico accoppiato alla corrente $J^1_\mu + iJ^2_\mu$ data dalla (8.4). In questo schema, la corrente neutra (8.5) non è accoppiata e quindi non ci sono transizioni proibite all' ordine piú basso della teoria delle perturbazioni.

Tuttavia, all' ordine immediatamente superiore puó avvenire la transizione $K_L \to W^+W^- \to \mu + \mu^-$ che dà luogo al processo (9.17), vedi la fig. 8.1 In un articolo pioneristico, B. Ioffe e E.

Shabalin [17] osservavano che, nella teoria di Cabibbo con il solo quark *up*, il grafico della fig. 8.1 dà luogo ad un risultato *divergente*, pari a:

$$\mathcal{M}(K_L \to \mu^+\mu^-) = cost \times \sin\theta\cos\theta \times G(G\Lambda^2) \tag{8.9}$$

dove Λ è una energia di cut-off al di là della quale la teoria perde di validità e *cost* un fattore numerico. Il fatto sorprendente era che il confronto con il valore osservato della transizione di corrente neutra (9.17) portava ad un valore del cut-off dell' ordine di qualche GeV, energie ampiamente raggiunte già in quegli anni ed alle quali non si osserva alcuna anomalia particolare.

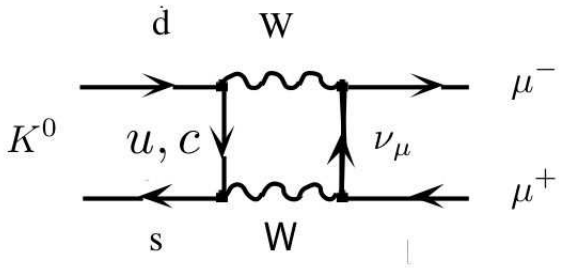

Figura 8.1: Diagramma di Feynman del processo: $K^0 = (d\bar{s}) \to \mu^+\mu^-$ secondo GIM.

Un'analisi piú dettagliata, mostra che il coefficiente della (8.9) è proprio proporzionale all' elemento di matrice non diagonale della corrente neutra nella (8.5) che, esorcizzata all' ordine più basso, è rimessa in gioco dalle correzioni di ordine superiore. L' osservazione fatta in [16] è che l' ampiezza in cui viene scambiato il quark charm, nel grafico in fig. 8.1, interferisce negativamente con l' ampiezza dovuta al quark *up* considerata da Ioffe e Shabalin (*meccanismo GIM*), in modo da produrre un risultato convergente, di ordine:

$$\mathcal{M}(K_L \to \mu^+\mu^-) = cost \times \sin\theta\cos\theta \times G\left[G(m_c^2 - m_u^2)\right] \tag{8.10}$$

Il risultato (8.10), confrontato con il dato sperimentale (9.17) ha permesso di stimare per la prima volta *l' ordine di grandezza della massa* del quark charm (assumendo $m_c >> m_u$). La stima più stringente deriva dalla differenza di massa $K_L - K_S$, anch' essa collegata allo scambio di due bosoni W. Si ottiene:

$$m_c = 2 - 3 \text{ GeV} \tag{8.11}$$

un valore consistente con la massa dei mesoni con charm più leggeri: $D = (c\bar{q})$ $(q = u,\ d)$:

$$M_{D^+} = M(c\bar{d}) = 1869.3 \text{ MeV}; \quad M_{D^0} = M(c\bar{u}) = 1864.5 \text{ MeV} \tag{8.12}$$

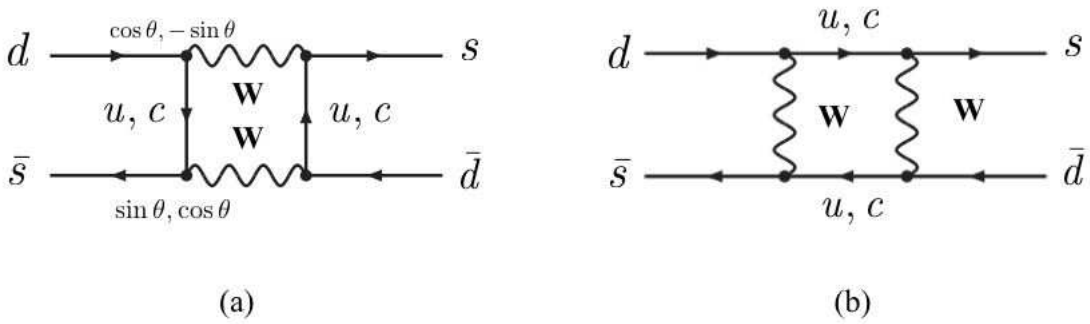

Figura 8.2: Diagrammi di Feynman per la transizione: $K^0 \to \bar{K}^0$ secondo GIM.

8.3 Violazione di CP e teoria di Kobayashi-Maskawa.

Nel 1973 la situazione per quanto riguardava l' unificazione elettrodebole era completamente cambiata rispetto al 1970. I lavori di M. Veltman e di G. 't-Hooft avevano mostrato che la teoria di Weinberg e Salam è rinormalizzabile ed è quindi un' ottimo candidato per una teoria *fondamentale* delle interazioni Elettromagnetiche e Deboli. L' esistenza del quark charm e il meccanismo GIM, necessari per la soppressione dei processi di corrente neutra con cambiamento di stranezza, erano ormai accettati dalla maggioranza dei fisici teorici.

Restava tuttavia da capire quale fosse la sorgente della violazione di CP, osservata nei decadimenti dei mesoni K neutri fin dal 1964. Una teoria elettrodebole fondamentale avrebbe dovuto includere la violazione di CP, il modo naturale essendo quello della presenza di una o più fasi complesse nella matrice di mixing. Tuttavia, era facile mostrare [16] che in una teoria con due doppietti la matrice U_{GIM} puó sempre essere resa reale sfruttando l' arbitrarietà di fase dei campi dei quark.

Il modo piú semplice per ottenere questo risultato è di partire dall' espressione più generale per la corrente di Cabibbo (la prima riga della matrice U_{GIM}):

$$J_\mu^C = \bar{u}_L \gamma_\mu \left(e^{i\alpha} \cos\theta d_L + e^{i\beta} \sin\theta s_L \right) \tag{8.13}$$

e osservare che possiamo riassorbire le due fasi nella definizione di d_L e s_L. A questo punto, la seconda riga di U_{GIM} è fissata, a meno di una fase complessiva, dalla condizione di essere ortonormale alla prima riga. Otteniamo dunque:

$$\begin{aligned} J_\mu^1 + iJ_\mu^2 &= \bar{u}_L \gamma_\mu \left(\cos\theta d_L + \sin\theta s_L \right) + \\ &+ \bar{c}_L \gamma_\mu e^{i\phi} \left(-\sin\theta d_L + \cos\theta s_L \right) \end{aligned} \tag{8.14}$$

ma adesso possiamo inglobare la fase $e^{i\phi}$ nel campo $\bar{c}_L$ ed ottenere la forma puramente reale data in (8.7).

La (giusta!) domanda che si posero M. Kobayashi e T. Maskawa [18] fu: quanti campi di quark sono necessari per restare con almeno una fase non eliminabile? Il caso da studiare è quello con N doppietti left-handed e N singoletti right-handed. In questo caso è facile vedere

che $N = 3$ fornisce proprio il caso minimo, con una sola fase ineliminabile. Su questa base, KM proponevano che dovesse esistere almeno un altro doppietto fondamentale, oltre ai due doppietti identificati nella (8.6) in modo tale che la violazione di CP potesse essere inglobata nella teoria di Weinberg e Salam.

Dim. Partiamo dal fatto che una matrice $N \times N$, unitaria, U, è caratterizzata da N^2 parametri reali. Questo si può vedere dal fatto che possiamo sempre scrivere:

$$U = e^{iH}$$

con H hermitiana, e H possiede:

$$\begin{aligned} &N \text{ parametri reali sulla diagonale;} \\ &2 \times \frac{N(N-1)}{2} = N^2 - N \text{ parametri reali negli elementi sopra la diagonale} = \\ &\text{in totale : } N_{un} = N^2 \text{ parametri reali} \end{aligned} \tag{8.15}$$

(gli elementi al di sotto della diagonale non sono indipendenti in quanto complessi coniugati degli elementi al di sopra).

D' altro canto, una matrice ortogonale $N \times N$ possiede:

$$N_{ort} = \frac{N(N-1)}{2}$$

e quindi nella matrice unitaria ci sono N_f fasi complesse, dove:

$$N_f = N_{un} - N_{ort} = N^2 - \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2} \tag{8.16}$$

Tuttavia, abbiamo in totale $2N$ campi complessi nei doppietti left-handed e possiamo quindi disporre di $2N - 1$ fasi da riassorbire in questi campi (il -1 viene dal fatto che la corrente resta immutata per un cambiamento di fase comune a tutti i campi di tipo *up* e di tipo *down*). In totale, le fasi irriducibili sono N_{irr}:

$$N_{irr} = \frac{N^2 + N - 4N + 2}{2} = \frac{N^2 - 3N + 2}{2} = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \tag{8.17}$$

Ritroviamo i risultati noti per $N = 1, 2$ e, rimarchevolmente, otteniamo $N_{irr} = 1$ nel caso di tre doppietti.

Nello stesso anno, 1976, sono state ottenute

- la prima evidenza diretta delle particelle con charm,
- l' evidenza per un leptone pesante, il leptone τ, che portava a tre le famiglie leptoniche,
- l' evidenza per un nuovo quark di tipo *down*, il quark *beauty*.

Negli anni successivi, diversi esperimenti hanno ottenuto evidenza per l' appartenenza a doppietti elettrodeboli del τ e del b, confermando cosí lo schema illustrato nel Cap. 1, fino all' osservazione diretta del quark *top*, nel 1994, e del neutrino ν_τ, nel 1999.

Nel 2001, esperimenti condotti a KEK (Giappone) e a SLAC (USA), hanno mostrato un ottimo accordo tra la violazione di CP osservata nei decadimenti dei mesoni con beauty e quanto calcolabile a partire dalla fase prevista da KM.

Queste scoperte giustificano ampiamente la convenzione, ormai universale, di associare i nomi di Cabibbo, Kobayashi e Maskawa alla matrice U_{CKM} che caratterizza il mixing dei quark nella teoria con tre famiglie.

Capitolo 9

INTERAZIONI ELETTRODEBOLI DEI QUARK

Consideriamo in questo Capitolo l' inclusione nella teoria di Weinberg e Salam della materia subnucleare.

Gli adroni, le particelle sensibili alle interazioni forti, sono descritti come stati composti da quark e antiquark. In Natura sono state osservate tre famiglie di quark con gli stessi numeri quantici elettrodeboli come illustrato nel Cap. 9, secondo lo schema:

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L ; \quad u_R,\ d_R \\ \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L ; \quad c_R,\ s_R \\ \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L ; \quad t_R,\ b_R \end{array} \tag{9.1}$$

Ogni campo di quark si presenta in tre varietá distinte da un numero quantico di colore cui sono associate le interazioni forti dei quark stessi (ad es. $u \to u_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$).

In analogia con l' elettrone ed il corrispondente neutrino, abbiamo attribuito spin isotopico debole 1/2 e 0 ai campi *left-handed* e *right-handed*, rispettivamente. In presenza di rottura della simmetria elettrodebole, tuttavia, occorre distinguere i campi nelle equazioni precedenti, che hanno isospin debole definito, dai campi che creano o distruggono i quark fisici.

Nel seguito, indichiamo con u_{ph}, d_{ph} etc. i campi fisici, intendendo che i campi senza suffisso siano quelli con isospin debole definito.

In parallelo alle tre famiglie di quark, i leptoni conosciuti sono organizzati in tre famiglie di

campi, privi di colore e con **isospin debole definito**:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L ; \quad e_R \\
&\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L ; \quad \mu_R \\
&\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L ; \quad \tau_R
\end{aligned} \tag{9.2}$$

Le assegnazioni precedenti determinano le interazioni dei quark e dei leptoni con i campi di gauge elettrodeboli, bosoni intermedi e fotone. I numeri quantici corrispondenti sono stati verificati sperimentalmente in processi diversi, in modo particolare nello studio delle disintegrazioni dei bosoni vettori Z e $W^\pm$ (cfr. Cap. 9). In questo Capitolo consideriamo le interazioni dei quark con il doppietto di Higgs, interazioni che regolano masse e mixing di queste particelle.

9.1 Masse e mixing dei quark

Per ogni coppia di famiglie, possiamo costruire due invarianti analoghi a quelli nelle (6.29) e (6.33). Esplicitamente (gli indici di famiglia, i e j, sono fissi, gli indici di isospin debole ripetuti, $a, b = 1, 2$, sono sommati):

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{ij} = g^D_{ij} \bar{Q}_i \phi D_j + g^U_{ij} \epsilon_{ab} \bar{U}_i Q^a_j \phi^b + h.c. \ (i, j = 1, 2, 3) \\
&\mathcal{L}_{qH} = \sum_{ij} \mathcal{L}_{ij}
\end{aligned} \tag{9.3}$$

Q_i rappresenta il generico doppietto left-handed nella (9.1) mentre U_i e D_i denotano i campi right-handed di tipo *up* (u, c, t) e di tipo *down* (d, s, b). Le costanti di accoppiamento, g^D_{ij} e g^U_{ij} pssono assumere valori qualsiasi, eventualmente complessi se richiediamo solo la hermicitá della Lagrangiana. Valori complessi delle costanti di accoppiamento possono condurre a violazioni delle simmetrie CP e T, lasciando la simmetria CPT esatta, cfr. [12].

Se sostituiamo nella (9.3) il valore nel vuoto del campo di Higgs, cfr. la (6.16), otteniamo la lagrangiana di massa dei quark:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{qm} = \bar{D}_L M^d D_R + \bar{U}_R M^{up} U_L + h.c. \\
&(M^{down})_{ij} = g^D_{ij} \eta; \quad (M^u)_{ij} = g^U_{ij} \eta
\end{aligned} \tag{9.4}$$

$M^{d,u}$ sono matrici nello spazio delle famiglie, in genere non diagonali. Questo introduce una differenza tra la base elettrodebole, individuata dai campi indicati nelle (9.1), e la base fisica individuata dai campi che diagonalizzano le matrici di massa e sono associati alle particelle fisiche. Per caratterizzare la base fisica, utilizziamo la decomposizione delle matrici $M^{d,u}$ illustrata nell' Appendice B, eq. (B.12), per cui possiamo scrivere:

$$M^u = W^\dagger m_u Z; \quad M^d = U^\dagger m_d V \tag{9.5}$$

con $m_{u,d}$ matrici diagonali e positive e W, Z, U, V unitarie. La lagrangiana di massa si scrive quindi come:

$$\mathcal{L}_{qm} = \bar{D}_L U^\dagger m_d V D_R + \bar{U}_R W^\dagger m_u Z U_L + h.c. \tag{9.6}$$

Notiamo adesso che le trasformazioni:

$$U_R \to W U_R; \quad D_R \to V D_R \tag{9.7}$$

corrispondono ad una ridefinizione dei singoletti elettrodeboli che possiamo eseguire rispettando la simmetria elettrodebole. Similmente, possiamo assorbire la matrice Z in una ridefinizione dei doppietti left-handed:

$$Q = \begin{pmatrix} U_L \\ D_L \end{pmatrix} \to ZQ \tag{9.8}$$

e quindi ottenere:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{qm} = \bar{D}_L Z U^\dagger m_d D_R + \bar{U}_R m_u U_L + h.c. = \\ &= \bar{D}_L U_{CKM} m_d D_R + \bar{U}_R m_u U_L + h.c. \end{aligned} \tag{9.9}$$

I campi che compaiono nella (9.9) hanno ancora isospin debole definito ma, mentre i campi di tipo U diagonalizzano la massa, nella nuova base c'e' ancora un disallineamento per i campi di tipo D. Poniamo quindi:

$$(D_{ph})_L = U^\dagger_{CKM} D_L; \text{ ovvero :}$$

$$D_L = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L = U_{CKM}(D_{ph})_L = U_{CKM} \begin{pmatrix} d_{ph} \\ s_{ph} \\ b_{ph} \end{pmatrix}_L ; \tag{9.10}$$

$$D_{ph} = (D_{ph})_L + D_R \tag{9.11}$$

In termini dei campi fisici, la lagrangiana di massa è adesso completamente diagonale:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{qm} = \bar{D}_L Z U^\dagger m_d D_R + \bar{U}_R m_u U_L + h.c. = \\ &= \bar{D}_L U_{CKM} m_d D_R + \bar{U}_R m_u U_L + h.c. = \\ &= (\bar{D}_{ph})_L m_d D_R + (\bar{U}_{ph})_R m_u (U_{ph})_L + h.c. = \\ &= \bar{D}_{ph} m_d D_{ph} + \bar{U}_{ph} m_u U_{ph} \end{aligned} \tag{9.12}$$

Come vedremo tra un momento, la matrice U_{CKM} é proprio la matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa introdotta nel Capitolo precedente, che determina le interazioni deboli di corrente neutra dei quark.

Il disallineamento rappresentato da U_{CKM} rompe la simmetria elettrodebole. L' operatore di abbassamento dello isospin debole applicato a $U = U_{ph}$ produce $D \neq D_{ph}$, che è una sovrapposizione di campi fisici associati a particelle con masse differenti tra loro e quindi non è autostato dell' Hamiltoniana. Fisicamente, questo effetto si trasmette alla corrente accoppiata

al bosone intermedio carico. La corrente, associata all' operatore che innalza lo isospin debole, cambia ogni quark di tipo *down*, nella base elettrodebole, nel corrispondente campo di tipo *up*:

$$\begin{aligned} J_\mu^{(+)} &= J_\mu^1 + iJ_\mu^2 = \bar{U}_L\gamma_\mu D_L = (\bar{U}_{ph})_L\gamma_\mu U_{CKM}(D_{ph})_L = \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{c} & \bar{t} \end{pmatrix}\gamma_\mu(-\gamma_5)U_{CKM}\begin{pmatrix} d \\ s \\ d \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.13}$$

dove abbiamo sottinteso, per semplicità di notazione, il suffisso *ph* dai campi dei quark.

Gli elementi diagonali di U_{CKM}, che sperimentalmente risultano dominanti, producono i decadimenti intra-famiglia: $d \to u$, $c \to s$ e $t \to b$. Gli elementi non diagonali violano la conservazione del tipo di famiglia (denominato usualmente *sapore*). Concludiamo quindi che, per effetto del mixing indotto dalla rottura di $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$:

- *i processi mediati dalle correnti cariche violano la conservazione del sapore dei quark.*

Nel complesso, gli elementi della matrice U_{CKM} hanno una rilevanza cosmologica in quanto permettono i decadimenti dei quark s e b, le particelle piú leggere dei rispettivi doppietti, che altrimenti sarebbero assolutamente stabili. La loro presenza spiega perchè la materia ordinaria sia costituita solo da quark di tipo u e d.

Per completare il quadro delle interazioni dei quark con i campi vettoriali di $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, dobbiamo considerare l' accoppiamento con il bosone Z, che avviene attraverso la corrente neutra (cfr. l' eq. (4.31)):

$$J_\mu^{(Z)} = J_\mu^3 - \sin^2\theta J_\mu^{e.m.} \tag{9.14}$$

dove $J^{e.m.}$ rappresenta la corrente elettromagnetica e J^3 la terza componente della corrente di isospin debole. Se usiamo la notazione usata in (9.8) per indicare il complesso dei doppietti left-handed, possiamo scrivere (la matrice T^+ è composta di blocchi 3×3):

$$J_\mu^1 + iJ_\mu^2 = \bar{Q}\gamma_\mu T^+ Q = \bar{Q}\gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & U_{CKM} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q \tag{9.15}$$

e, in corrispondenza:

$$\begin{aligned} J_\mu^3 &= \bar{Q}\gamma_\mu \left[T^+, T^-\right] Q = \\ &= \bar{Q}\gamma_\mu \begin{pmatrix} U_{CKM}U_{CKM}^\dagger & 0 \\ 0 & -U_{CKM}^\dagger U_{CKM} \end{pmatrix} Q \\ &= \bar{Q}\gamma_\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Q \end{aligned} \tag{9.16}$$

Dato che la corrente elettromagnetica è ovviamente diagonale nei quark, la corrente neutra implicata dalla (9.14) e dallo schema di mixing (9.11) è diagonale nelle famiglie. A differenza dei processi mediati dalle corrente cariche, appena esaminati:

- *i processi mediati dalla corrente neutra conservano il sapore dei quark.*

La prima evidenza sperimentale per questa regola di selezione proviene dai decadimenti dei mesoni K, per i quali si trova:

$$\begin{aligned} B(K^+ \to \mu^+\nu) &= (63.55 \pm 0.11) \cdot 10^{-2} \\ B(K_L^0 \to \mu^+\mu^-) &= (6.84 \pm 0.11) \cdot 10^{-9} \end{aligned} \tag{9.17}$$

e dalla differenza di massa $K^0\bar{K}^0$. Processi di questo tipo sono descritti, nella Teoria Standard, dai grafici delle Fig. 9.1 e 8.2. Le ampiezze sono soppressi dal meccanismo GIM, o dalle sue estensioni alla teoria con sei flavor, in modo da risultare effettivamente di ordine G_F^2, come osservato.

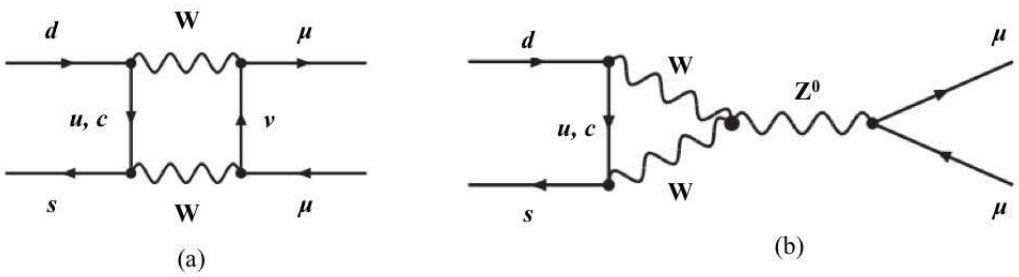

Figura 9.1: Diagrammi di Feynman del processo: $K^0 = (d\bar{s}) \to \mu^+\mu^-$ nella teoria elettrodebole.

9.2 La matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa.

Nel corso degli anni, si é rivelata particolarmente utile la parametrizzazione della matrice U_{CKM} dovuta a L. Wolfenstein[19](cfr. Ref.[20] per una rassegna recente). Questa parametrizzazione parte dall'osservazione che gli elementi della matrice sono di $\mathcal{O}(1)$ sulla diagonale e diventano sempre piú piccoli in corrispondenza a transizioni tra quark di generazioni crescenti. L'ordine di grandezza delle transizioni é dato dalle potenze di $\lambda = \sin\theta_C$, corrette da due parametri reali: un parametro reale, A, per $b \to c$, e un parametro $A^2(\rho - i\eta)$, per $b \to u$. La fase che viola CP é dovuta ad $\eta \neq 0$.

Fissate le transizione di base, gli altri elementi di matrice sono determinati dall'unitarietá della matrice. Le relazioni di unitarietá sono risolte in serie di potenze di λ fino alla precisione desiderata. Diamo qui la parametrizzazione introdotta in Ref. [22] (vedi anche [23]) in cui sono tenuti termini fino all'ordine λ^5.

$$U_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{8}\lambda^4 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda + \frac{1}{2}A^2\lambda^5[1 - 2(\rho + i\eta) & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{8}\lambda^4(1 + 4A^2) & A\lambda^2 \\ A\lambda^3[1 - (1 - \frac{1}{2}\lambda^2)(\rho + i\eta)] & -A\lambda^2 + \frac{1}{2}A\lambda^4[1 - 2(\rho + i\eta)] & 1 - \frac{1}{2}A^2\lambda^2 \end{pmatrix} \tag{9.18}$$

In molti casi, é sufficiente usare la parametrizzazione originale di Wolfenstein[19], valida all'ordine λ^3:

$$U_{CKM} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}\lambda^2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1-\frac{1}{2}\lambda^2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3[1-(\rho+i\eta)] & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.19}$$

I valori dei parametri della matrice CKM si ottengono da un fit simultaneo a moltissimi dati sulle interazioni elettrodeboli delle particelle con i diversi flavor, cfr. la Ref. [20] per una estesa disussione. Nella stessa Ref. sono riportati i valori del fit migliore:

$$\begin{aligned} &\lambda = 0.2253 \pm 0.0007,\ A = 0.808^{+0.022}_{-0.015} \\ &\bar{\rho} = 0.132^{+0.022}_{-0.014},\ \bar{\eta} = 0.341 \pm 0.013 \end{aligned} \tag{9.20}$$

dove $\bar{\rho}$ e $\bar{\eta}$ sono circa eguali e collegati a ρ e η dalla relazione:

$$\rho + i\eta = \frac{(\bar{\rho}+i\bar{\eta})\sqrt{1-A^2\lambda^4}}{\sqrt{1-\lambda^2}[1-A^2\lambda^4(\bar{\rho}+i\bar{\eta})]} \tag{9.21}$$

Queste relazioni assicurano che $\bar{\rho} + i\bar{\eta} = -(U_{ud}U^*_{ub})/(U_{cd}U^*_{cb})$ é indipendente dalla convenzione di fase and che la matrice CKM, scritta in termini di $\bar{\rho}$ e $\bar{\eta}$ é unitaria a tutti gli ordini in λ.

La Fig. 9.2 riporta le restrizioni provenienti dalle diverse quantitá fisiche e illustra la qualitá del fit in (9.20).

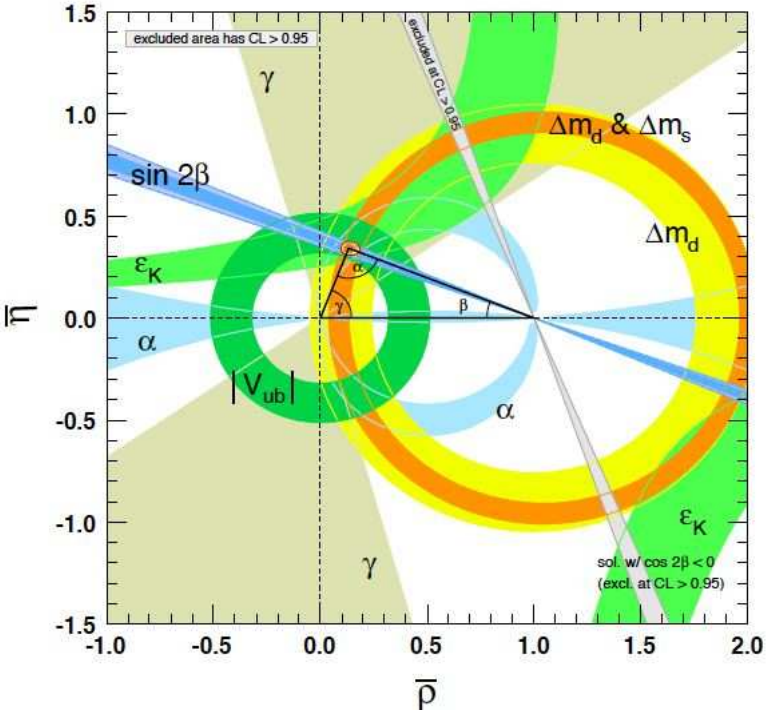

Figura 9.2: CKM fit, Ref. [20].

Capitolo 10

DETERMINAZIONE DELLA CORRENTE NEUTRA LEPTONICA

10.1 Sezione d' urto dei processi $\nu_\mu - e$, $\bar{\nu}_\mu - e$

La corrente J_μ^Z nella (4.32) è la somma di contributi dai diversi leptoni. Quindi nel prodotto che compare nella (4.34) ci saranno termini non diagonali, ad esempio termini che accoppiano i nuetrini muonici con l' elettrone. Studiamo in questa sezione la sezione d' urto dei processi di diffusione elastica di neutrini ed antineutrini muonici sugli elettroni atomici:

$$\begin{aligned} \nu_\mu + e^- &\to \nu_\mu + e^- \\ \bar{\nu}_\mu + e^- &\to \bar{\nu}_\mu + e^- \end{aligned} \tag{10.1}$$

osservata con fasci di neutrini di alta energia, da alcuni GeV ad alcune centinaia di GeV. In entrambi i casi, possiamo trascurare la massa dei leptoni, come faremo sistematicamente in questo capitolo.

I processi (10.1) rappresentano le reazioni piú semplici previste dalla teoria eletrodebole. Sono stati scoperti nel 1973 al PS del CERN, con la camera a bolle *Gargamelle*. Processi di neutrini di alta energia sono stati studiati a FermiLab, al Tevatron, ed al CERN, all' SPS, nel corso degli anni settanta. I risultati di questi esperimenti sono stati di importanzas cruciale per lo sviluppo della teoria delle particelle fondamentali (per un' estesa discussione della sviluppo storico e della teoria dei neutrini, cfr. [24]).

I termini rilevanti nella lagrangiana (4.34) sono:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(cn\ \nu_\mu e)} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}}[\bar{\nu}_\mu \gamma_\lambda (1-\gamma_5)\nu_\mu] \cdot [g_L \bar{e}\gamma^\lambda (1-\gamma_5)e + g_R \bar{e}\gamma^\lambda (1+\gamma_5)e] \\ g_L &= -\frac{1}{2} + \sin^2\theta; \quad g_R = \sin^2\theta \end{aligned} \tag{10.2}$$

In alternativa, possiamo usare la parametrizzazione in termini delle correnti assiali e vettoriali:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{(cn\ \nu_\mu e)} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}[\bar{\nu}_\mu \gamma_\lambda (1-\gamma_5)\nu_\mu] \cdot [\bar{e}\gamma^\lambda (g_V + g_A \gamma_5) e] \\
&g_V = g_R + g_L = -\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta; \\
&g_A = g_R - g_L = \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{10.3}$$

Reazione $\nu_\mu - e$. L' elemento di matrice S si scrive (indichiamo i 4-momenti con i simboli delle particelle):

$$\begin{aligned}
&< \nu', e' | S^{(1)} | \nu, e >= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\nu' + e' - \nu - e) \cdot \frac{G_F}{\sqrt{2}} (\Pi_{i,f} \sqrt{\frac{m}{EV}})\ \mathcal{M} \\
&\mathcal{M} = \bar{u}(\nu')\gamma_\lambda (1-\gamma_5) u(\nu) \cdot \\
&\cdot [g_L \bar{u}(e')\gamma^\lambda (1-\gamma_5) u(e) + g_R \bar{u}(e')\gamma^\lambda (1+\gamma_5) u(e)]
\end{aligned} \tag{10.4}$$

La sezione d' urto differenziale nel sistema di riferimento del laboratorio è:

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\nu' + e' - \nu - e) \cdot \frac{d^3\nu'}{(2\pi)^3} \frac{d^3 e'}{(2\pi)^3} \frac{G_F^2}{2} (\Pi_{i,f}\ \frac{m}{E}) \left(\frac{1}{2} \sum_{all\ \ spin} |\mathcal{M}|^2 \right) \tag{10.5}$$

Il fattore 1/2 è dovuto alla media sugli spin iniziali: ci sono solo due stai su cui mediare, gli stati di spin dell' elettrone, in quanto il neutrino che proviene dal decadimento di un pione, è in un puro stato di elicità $-1/2$.

Poniamo:

$$m_e^2 m_\nu^2 \sum_{all\ \ spin} |\mathcal{M}|^2 = N^{\mu\nu} E_{\mu\nu} \tag{10.6}$$

$$\begin{aligned}
&N^{\mu\nu} = \frac{1}{4} Tr\left[\not{\nu}\gamma^\mu (1-\gamma_5)\not{\nu}'\gamma^\nu (1-\gamma_5)\right] = \frac{1}{2} Tr\left[\not{\nu}\gamma^\mu \not{\nu}'\gamma^\nu (1-\gamma_5)\right] = \\
&= 2\left[(\nu')^\mu \nu^\nu + (\nu')^\nu \nu^\mu - g^{\mu\nu}(\nu'\nu) + i\eta\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}\nu'_\alpha \nu_\beta\right]
\end{aligned} \tag{10.7}$$

$$\begin{aligned}
&E^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left\{g_L^2 Tr[\not{e}\gamma^\mu (1-\gamma_5)\not{e}'\gamma^\nu (1-\gamma_5)] + g_R^2 Tr[\not{e}\gamma^\mu (1+\gamma_5)\not{e}'\gamma^\nu (1+\gamma_5)]\right\} = \\
&= 2\left\{g_L^2 [(e')^\mu e^\nu + (e')^\nu e^\mu - g^{\mu\nu}(e'e) + i\eta\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} e'_\alpha e_\beta] + g_R^2 (\eta \to -\eta)\right\}
\end{aligned} \tag{10.8}$$

η è un segno che non vale la pena determinare (ma comunque cfr. [1]): occorre solo seguire i segni relativi tra i termini del neutrino e quelli dell' elettrone. Troviamo:

$$N^{\mu\nu} E_{\mu\nu} = 16[g_L^2 (\nu e)(\nu' e') + g_R^2 (\nu e')(\nu' e)] \tag{10.9}$$

da cui:

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\nu' + e' - \nu - e) \cdot \frac{d^3\nu'}{(2\pi)^3} \frac{d^3 e'}{(2\pi)^3} \cdot$$
$$\cdot 4(G_F^2 m_e) \frac{E_\nu}{E_{e'} E_{\nu'}} [g_L^2 + g_R^2 \left(\frac{(\nu' e)}{(\nu e)} \right)^2] \tag{10.10}$$

L' integrazione sullo spazio delle fasi si esegue in modo standard:

- l' integrale sul momento del neutrino uscente elimina la funzione delta tridimensionale e pone $\nu' = \nu - \mathbf{e}'$;
- l' integrazione sul coseno dell' angolo polare dell' elettrone finale, $\cos\theta$, si esegue usando la funzione delta dell' energia, il cui argomento è:

$$f(\cos\theta) = m_e + E_\nu - E_{e'} - \sqrt{E_\nu^2 + E_{e'}^2 - 2E_\nu E_{e'} \cos\theta} \tag{10.11}$$

  e quindi introduce un fattore:

$$|\frac{\partial f}{\partial \cos\theta}|^{-1} = \frac{E_{\nu'}}{E_\nu E_{e'}} \tag{10.12}$$

- l' integrazione sull' angolo azimutale delle' elettrone uscente introduce un fattore 2π.

In conclusione, troviamo:

$$d\sigma = \frac{dE_{e'}}{E_\nu} \frac{G_F^2 2 m_e E_\nu}{\pi} \; [g_L^2 + g_R^2 \left(\frac{(\nu' e)}{(\nu e)} \right)^2] \tag{10.13}$$

É usuale introdurre la variabile $0 \geq y <\geq 1$:

$$y = \frac{E_{\nu'}}{E_\nu} = 1 + \frac{E_{e'}}{E_\nu} \tag{10.14}$$

e scrivere infine:

$$\frac{d\sigma^{\nu,nc}}{dy} = \frac{G_F^2 s}{\pi} [g_L^2 + g_R^2 (1-y)^2];$$
$$\sigma^{\nu,nc} = \frac{G_F^2 s}{\pi} [g_L^2 + \frac{1}{3} g_R^2] \tag{10.15}$$

in termini della variabile s (il quadrato dell' energia nel centro di massa):

$$s = (e + \nu)^2 \simeq 2(e\nu) = 2 m_e E_\nu \tag{10.16}$$

La scala delle sezioni d' urto è determinata dalla combinazione:

$$\frac{G_F^2 2 m_e E_\nu}{\pi} = 1.72 \cdot 10^{-41} cm^2 \frac{E_\nu}{1\text{GeV}} \tag{10.17}$$

Reazione $\bar{\nu}_\mu - e$. Si passa dal neutrino all' antineutrino semplicemente scambiando $\nu \leftrightarrow \nu'$ nella (10.7) ovvero mandando $\eta \to -\eta$ nella (10.8). In conclusione, otteniamo la sezione d' urto di antineutrino semplicemente scambiando $g_L \leftrightarrow g_R$ nella (10.15):

$$\frac{d\sigma^{\bar{\nu},nc}}{dy} = \frac{G_F^2 s}{\pi}[g_L^2(1-y)^2 + g_R^2]$$
$$\sigma^{\bar{\nu},nc} = \frac{G_F^2 s}{\pi}[\frac{1}{3}g_L^2 + g_R^2] \tag{10.18}$$

Reazione di corrente carica. Con un calcolo analogo si ottiene la sezione d' urto del processo di corrente carica:

$$\nu_\mu + e \to \mu^- + \nu_e \tag{10.19}$$

$$\frac{d\sigma^{\nu,cc}}{dy} = \frac{G_F^2 s}{\pi} \tag{10.20}$$

I valori degli accoppiamenti chirali nella corrente neutra si ottengono dalla misura dei rapporti [24]:

$$R_\nu = \frac{\sigma^{\nu,nc}}{\sigma^{\nu,cc}} = g_L^2 + \frac{1}{3}g_R^2;$$
$$R_{\bar{\nu}} = \frac{\sigma^{\bar{\nu},nc}}{\sigma^{\nu,cc}} = \frac{1}{3}g_L^2 + g_R^2. \tag{10.21}$$

I rapporti in (10.21) determinano quattro combinazioni di g_L e g_R (le intersezioni di due ellissi) che differiscono per i segni.

Il segno relativo si puó fissare dalla sezione d' urto dei processi ν_e-e ad energia dell' ordine del MeV, che è sensibile ai termini di ordine $(m_e/E_\nu)g_L g_R$. Il segno assoluto si trova dall' asimmetria avanti-indietro nel processo $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ (vedi dopo) che dipende dai prodotti eg_L ed eg_R.

In conclusione, dai dati di neutrino piú le informazioni sul segno si trova:

$$g_A = 0.525 \pm 0.032$$
$$g_V = -0.036 \pm 0.018 \tag{10.22}$$

Nonostante la precisione delle (10.22) sia stata successivamente superata dalle misure sul bosone intermedio Z, le reazioni di neutrini hanno avuto un' importanza cruciale perchè hanno dato per la prima volta una predizione delle masse dei bosoni intermedi.

Dalle (10.22) e (10.3) troviamo:

$$\sin^2\theta \simeq 0.24 \tag{10.23}$$

e quindi ($e^2 = 4\pi\alpha \simeq 4\pi/137$):

$$M_W^2 = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F} \simeq (77.5\ \text{GeV})^2; \quad M_Z = \frac{M_W}{\cos\theta} \simeq 89.1\ \text{GeV} \tag{10.24}$$

Nota. La relazione $\bar{e}_R\gamma^\mu e_L = 0$ implica che le correnti assiali e vettoriali *conservano l' elicità* delle particelle. Nel centro di massa della reazione (10.1), le elicità delle particelle iniziali e finali sono distribuite come in Fig. 10.1, per la diffusione di un neutrino su un elettrone L o R. Nel secondo caso, la componente del momento angolare iniziale nella direzione dell' elettrone è $(J_z)_{in} = +1$ mentre, se l' angolo di diffusione è 180^0, $(J_z)_{fin} = -1$. Quindi l' ampiezza si deve annullare per $\cos\theta^* = -1$. Esplicitamente abbiamo:

$$1 - y = \frac{(\nu' e)}{(\nu e)} = \frac{1 + \cos\theta^*}{2} \tag{10.25}$$

Il fattore $(1 - y)^2$ che moltiplica g_R^2 permette alla sezione d' urto di soddisfare la regola di selezione. Al contrario, per la diffusione del neutrino su un elettrone L, la componente del momento angolare nella direzione dell' elettrone è $J_z = 0$ e l' ampiezza di diffusione non deve avere alcuno zero.

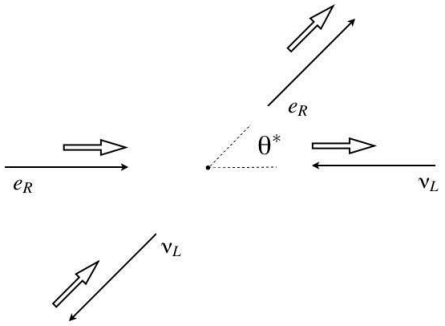

Figura 10.1: Conservazione delle elicità nella diffusione $\nu_L - e_R$. Per $\theta^* = 180^0$ la componente del momento angolare lungo la linea di volo non si conserva e l' ampiezza si deve annullare.

10.2 Larghezze leptoniche dello Z

Dalle (4.31) e (4.32) troviamo, al primo ordine in g:

$$< f|S^{(2)}|Z >= \frac{1}{\sqrt{2M_Z V}}\epsilon^\mu \ \frac{g^2}{4\cos^2\theta} < f|J_Z^\mu(0)|0 > \ (2\pi)^4\delta^{(4)}(P - P_f) \tag{10.26}$$

Procedendo come al solito, otteniamo la formula per la larghezza:

$$\Gamma = \frac{1}{3}\ \frac{1}{2M_Z}\ \frac{g^2}{4\cos^2\theta}\sum_f (2\pi)^4\delta^{(4)}(P - P_f) < 0|J_Z^\nu(0)|f >< f|J_Z^\mu(0)|0 > (-g_{\mu\nu} + \frac{P_\mu P\nu}{M_Z^2}) \tag{10.27}$$

Se trascuriamo la massa dei leptoni carichi, la corrente dello Z è conservata e il proiettore sugli stati si puó semplificare in $-g_{\mu\nu}$. Con semplici calcoli, si trova:

$$\begin{aligned}\Gamma(Z \to f + \bar{f}) &= \Gamma_0(4g_L^2 + 4g_R^2);\\ \Gamma_0 &= \frac{G_F}{12\sqrt{2}\pi} M_Z^3 \simeq 0.147 \text{ GeV}\end{aligned} \tag{10.28}$$

con

$$\begin{aligned}(4g_L^2 + 4g_R^2) &= 1 \ (\mathrm{f} = \nu_\mathrm{e}, \nu_\mu, \nu_\tau)\\ (4g_L^2 + 4g_R^2) &= (1 - 2\sin^2\theta)^2 + 4sin^4\theta \simeq \ 0.50 \ \ (\mathrm{f} = \mathrm{e}, \mu, \tau);\end{aligned} \tag{10.29}$$

10.3 Formula di Breit-Wigner relativistica

Il propagatore di una particelle neutra (come lo Z^0) deve dare l' ampiezza per trovare al tempo t la particella creata al tempo 0 ($t > 0$). Per una particelle instabile con vita media τ e larghezza $\Gamma = 1/\tau$, ci aspettiamo che, oltre al fattore $e^{(-i\omega t)}$, l' ampiezza contenga un esponenziale reale decrescente, che rappresenta l' *ampiezza di non-decadimento* fino al tempo t

$$A(t > 0) \sim e^{-i\omega(\mathbf{p})t} e^{-\frac{M}{\omega(\mathbf{p})}\frac{\Gamma}{2}t} \ \ (\mathrm{t} > 0) \tag{10.30}$$

(Il fattore $1/\gamma = M/\omega$ contiene la dilatazione relativistica della vita media di una particella con velocità $v = |\mathbf{p}|/\omega$).

Per tempi $t < 0$, l' ampiezza per osservare la particella in 0, se è stata prodotta al tempo t, deve contenere il fattore:

$$A(t < 0) \sim e^{i\omega(\mathbf{p})t} e^{+\frac{M}{\omega(\mathbf{p})}\frac{\Gamma}{2}t} \ \ (\mathrm{t} < 0) \tag{10.31}$$

Ricordiamo che A(t) si ottiene dall' integrazione nel piano complesso di p^0 lungo il cammino di Feynman [1]. Piú precisamente, gli esponenti sono i valori di $-ip^0$ nei poli della trasformata di Fourier del propagatore. Vediamo quindi che nel caso di particelle instabili i due poli si devono trovare in:

$$\omega^+ = \omega(\mathbf{p}) - i\frac{\Gamma}{2\gamma} \Leftrightarrow (\omega^+)^2 \simeq \omega^2 - i\frac{M\Gamma}{2} \tag{10.32}$$

$$\omega^- = -\omega(\mathbf{p}) + i\frac{\Gamma}{2\gamma} \Leftrightarrow (\omega^-)^2 \simeq \omega^2 - i\frac{M\Gamma}{2} \tag{10.33}$$

dove abbiamo approssimato per $\Gamma << M$. In termini della variabile p^2, otteniamo la posizione corretta dei due poli se nel propagatore sostituiamo:

$$p^2 - M^2 \to p^2 - M^2 + iM\Gamma \tag{10.34}$$

In corrispondenza, la trasformata di Fourier del propagatore dello Z, cfr. (**??**) si trasforma secondo la:

$$\frac{-g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu/M^2}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \to \frac{-g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu/M^2}{k^2 - M^2 + iM\Gamma} \tag{10.35}$$

10.4 Fisica dello Z nelle reazioni e$^+$ e$^-$

Consideriamo i processi:

$$e^+e^- \to f\bar{f}; \quad (\mathrm{f} \neq \mathrm{e}) \tag{10.36}$$

Al secondo ordine nella teoria delle perturbazioni e per $f \neq e$, l' ampiezza del processo è la somma di due ampiezze, corrispondenti rispettivamente allo scambio del fotone e dello Z (Fig.10.2):

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_Z \tag{10.37}$$

In corrispondenza, il modulo quadro, e quindi la sezione d' urto, e´la somma di tre termini, che indichiamo rispettivamente come termine risonante, interferenza e termine elettromagnetico:

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_Z|^2 + 2\mathcal{R}e(\mathcal{M}_Z\mathcal{M}_\gamma^*) + |\mathcal{M}_\gamma|^2 \tag{10.38}$$

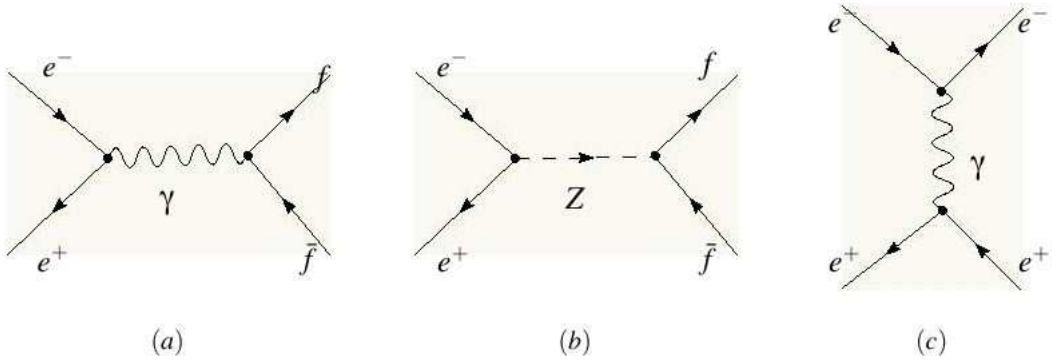

Figura 10.2: (a) e (b): grafici di Feynman per l'annichilazione $e^+e^- \to f\bar{f}$, con $f \neq e$. Per $f = e$ e per piccoli angoli di diffusione occorre tenere conto del grafico di diffusione coulombiana, (c).

Ci poniamo nel centro di massa della (10.36) e indichiamo con E l' energia totale:

$$E = E_+ + E_- = 2E_+ \tag{10.39}$$

Termine elettromagnetico. Si ottiene dal ben noto calcolo della sezione d' urto di annichilazione $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ [1]:

$$\sigma_\gamma(f\bar{f}) = \frac{4\pi\alpha Q_f^2}{3}\,\frac{1}{E^2}; \tag{10.40}$$

Termine risonante. Dalla lagrangiana (4.31) troviamo[1]:

$$\sum_{fin} |\mathcal{M}_Z|^2 = (\frac{g^2}{4\cos^2\theta})^2 \sum_{fin}(< 0|J^Z_\mu(0)|e^+e^- > D^{\mu\nu}_Z(P) < fin|J^Z_\nu(0)|0 >) \cdot$$
$$\cdot(< e^+e^-|J^Z_\lambda(0)|0 > (D^{\lambda\sigma}_Z(P))^* < 0|J^Z_\sigma(0)|fin >) \cdot (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_+ + p_- - p_{fin}) =$$
$$= \frac{g^2}{4\cos^2\theta}\ |D(P)|^2 \cdot$$
$$\cdot\ (< 0|J^Z_\mu(0)|e^+e^- >< e^+e^-|J^Z_\lambda(0)|0 >)\ \Pi^{\mu\nu}(P)\Pi^{\lambda\sigma}(P) \cdot$$
$$\cdot\frac{g^2}{4\cos^2\theta}\ \sum_{fin}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_+ + p_- - p_{fin}) < 0|J^Z_\sigma(0)|fin >< fin|J^Z_\nu(0)|0 > \tag{10.41}$$

dove abbiamo posto:

$$P = p_+ + p_-;\ \ |D(P)|^2 = \frac{1}{(P^2 - M_Z^2)^2 + M_Z^2\Gamma_Z^2};$$
$$\Pi^{\mu\nu}(P) = -g^{\mu\nu} + \frac{P^\mu P\nu}{M_Z^2} \tag{10.42}$$

Nelle considerazioni che seguono, ci porremo nella regione intorno alla risonanza: $P^2 \simeq M_Z^2$. In questa regione:

$$P_\mu\Pi^{\mu\nu}(P) \simeq 0 \tag{10.43}$$

L' ultima linea della (10.41) produce un tensore a due indici, σ, ν che dipende solo da $P = p_+ + p_-$. Questo tensore puó solo essere una combinazione dei due possibili tensori, $g_{\nu\sigma}$ e $P_\sigma P_\nu$ con coefficienti funzioni dell' invariante P^2. In formule:

$$\frac{g^2}{4\cos^2\theta}\ \sum_{fin}(2\pi)^4\delta^{(4)}(P - p_{fin}) < 0|J^Z_\sigma(0)|fin >< fin|J^Z_\nu(0)|0 >=$$
$$= g_{\nu\sigma}\mathcal{A}(P^2) + P_\sigma P_\nu\mathcal{B}(P^2) \tag{10.44}$$

Il termine in $\mathcal{B}$ non contribuisce in virtú della condizione di ortogonalità (C.58), mentre $\mathcal{A}$ puó essere ottenuto proiettando con $\Pi^{\sigma\nu}$. Troviamo (notando che $\Pi^{\sigma\nu}g_{\sigma\nu} = 3$):

$$\mathcal{A} = \frac{1}{3}\ \frac{g^2}{4\cos^2\theta}\ \Pi^{\sigma\nu}\sum_{fin}(2\pi)^4\delta^{(4)}(P - p_{fin}) < 0|J^Z_\sigma(0)|fin >< fin|J^Z_\nu(0)|0 >=$$
$$= 2M_Z\Gamma_f;$$
$$\Gamma_f = \Gamma(Z \to fin) \tag{10.45}$$

L' ultimo passaggio si ottiene confrontando con l' eq. (10.27) della Sezione precedente.

[1] d' ora innanzi omettiamo i fattori del volume di normalizzazione, V, che comunque si cancellano nelle sezioni d' urto e/o nelle larghezze.

Sostituendo nella (10.41), otteniamo:

$$\sum_{fin} |\mathcal{M}_Z|^2 = \frac{g^2}{4\cos^2\theta}|D(P)|^2 \cdot 2M_Z\Gamma_f \cdot$$
$$\cdot g_{\sigma\nu}\Pi^{\mu\nu}(P)\Pi^{\lambda\sigma}(P)\ (< 0|J^Z_\mu(0)|e^+e^- >< e^+e^-|J^Z_\lambda(0)|0 >) =$$
$$= |D(P)|^2 \cdot 2M_Z\Gamma_f \cdot$$
$$\Pi^{\mu\lambda}(\frac{g^2}{4\cos^2\theta}\ < 0|J^Z_\mu(0)|e^+e^- >< e^+e^-|J^Z_\lambda(0)|0 >) \tag{10.46}$$

Se sommiamo sugli spin di elettrone e positrone (cosa che dobbiamo comunque fare per ottenere la sezione d' urto non polarizzata) l' ultima linea dell' eq. (10.46) puó essere espressa in termini della larghezza parziale in e$^+$ e$^-$. Questo si vede considerando l' espressione di $\Gamma(Z \to e^+e^-)$:

$$\Gamma(Z \to e^+e^-) = \Gamma_e = \frac{g^2}{4\cos^2\theta}\ \frac{1}{2M_Z}\int \frac{d^3p_+}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_-}{(2\pi)^3}(2\pi)^4\delta^{(4)}(P - p_+ + p_-) \cdot$$
$$\cdot\frac{1}{3}\ \Pi^{\mu\lambda}(P)\sum_{s\ in} < 0|J^Z_\mu(0)|e^+e^- >< e^+e^-|J^Z_\lambda(0)|0 > \tag{10.47}$$

- integriamo p_- con la delta 3-dimensionale;
- integriamo l' energia E$_+$ con la delta dell' energia, ottenendo un fattore 1/2 dalla relazione: $\delta(2E_+ - M_Z) = 1/2\ \delta(E_+ - M_Z/2)$;
- il risultato è invariante per rotazioni e quindi l' integrazione sull' angolo solido di p_+ dà 4π.

In conclusione, troviamo:

$$\Gamma_e = \frac{1}{3}\frac{1}{2M_Z}(\frac{g^2}{4\cos^2\theta}\ \frac{M_Z^2}{8\pi} \cdot$$
$$\cdot\ \Pi^{\mu\lambda}(P)\sum_{s\ in} < 0|J^Z_\mu(0)|e^+e^- >< e^+e^-|J^Z_\lambda(0)|0 >) =$$
$$= \frac{M_Z}{48\pi}(\frac{g^2}{4\cos^2\theta}\ \Pi^{\mu\lambda}(P)\sum_{s\ in} < 0|J^Z_\mu(0)|e^+e^- >< e^+e^-|J^Z_\lambda(0)|0 >) \tag{10.48}$$

Sostituendo infine nella (10.46) dopo avere introdotto la media sugli spin iniziali, troviamo il semplice risultato:

$$\frac{1}{4}\sum_{s\ in}\sum_{fin}|\mathcal{M}_Z|^2 = \frac{24\pi\Gamma_e\Gamma_f}{(P^2 - M_Z^2)^2 + M_Z^2\Gamma_Z^2} \tag{10.49}$$

Per ottenere la sezione d' urto risonante dobbiamo semplicemente dividere per il fattore di flusso, pari a $2v = 2$ nel centro di massa, e otteniamo:

$$\sigma_Z(e^+e^- \to f\bar{f}) = \frac{12\pi\Gamma_e\Gamma_f}{(P^2 - M_Z^2)^2 + M_Z^2\Gamma_Z^2} \tag{10.50}$$

Sempre nel centro di massa:

$$P^2 = E^2 \tag{10.51}$$

e la sezione d' urto, per $E \simeq M_Z$, si scrive:

$$\begin{aligned} \sigma_Z &= \frac{12\pi\Gamma_e\Gamma_f}{(E+M_Z)^2(E-M_Z)^2 + M_Z^2\Gamma_Z^2} \simeq \\ &\simeq \frac{12\pi}{M_Z^2}\,\frac{\Gamma_e\Gamma_f}{4(E-M_Z)^2+\Gamma_Z^2} \end{aligned} \tag{10.52}$$

- La sezione d' urto al picco non contiene alcun parametro piccolo, ed è quindi molto piú grande della sezione d' urto elettromagnetica (10.40) che é di ordine α^2;
- per $E = M_Z \pm \Gamma_Z/2$ la sezione d' urto decresce di una fattore 2 rispetto alla sezione di picco: Γ_Z puó essere ottenuta dall' andamento della sezione d' urto come *larghezza a metà altezza.*
- lo scambio dello Z dà un' ottima approssimazione della sezione d' urto totale intorno allo Z anche per f=e, tranne che per gli eventi in cui le particelle finali sono molto prossime alla direzione iniziale, per i quali bisogna tenere conto dell' ampiezza di diffusione coulombiana, grafico (c) in Fig. 10.2.

I risultati ottenuti suggeriscono una semplice strategia per la verifica della teoria $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

- L' andamento della sezione d' urto per qualsiasi canale osservabile (ad es. $f = \mu$) permette la determinazione accurata di M_Z e Γ_Z;
- la misura della sezione d' urto al picco:

$$\sigma_{peak} = \frac{12\pi}{M_Z^2} B_e B_f \tag{10.53}$$

  (B indica la frazione di decadimento) permette la determinazione della frazione di decadimento, quindi della larghezza, in tutti i canali *visibili*: e, μ, τ, adroni. Da ciascuna di queste misure otteniamo diverse determinazioni di $\sin^2\theta$ che devono essere tutte consistenti tra loro e con le misure dai neutrini (per la determinazione teorica della larghezza in adroni, vedi dopo);
- possiamo determinare per sottrazione la larghezza nei *canali invisibili*: decadimenti in particelle che non interagiscono nei rivelatori, come i neutrini:

$$\Gamma_{inv} = \Gamma_Z - \Gamma_{vis} \tag{10.54}$$

  e confrontare la larghezza invisibile con quanto atteso dai neutrini:

$$\Gamma_{inv} = N\Gamma_0 \tag{10.55}$$

  Γ_0 è la larghezza data nell' eq. (10.28), N il numero di tipi di neutrini con accoppiamento V-A (left-handed) in cui lo Z puó decadere, in pratica neutrini con una massa inferiore a circa $M_Z/2$.

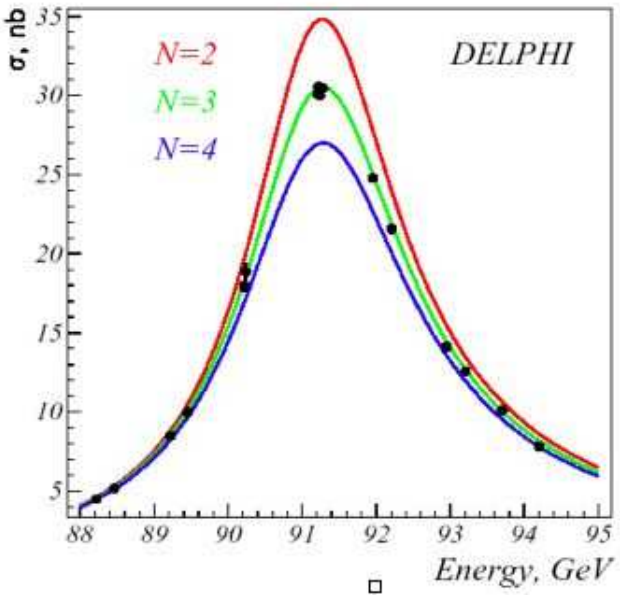

Figura 10.3: Sezione d' urto di annichilazione elettrone-positrone per $E \simeq M_Z$. Sono mostrate le curve teoriche in funzione del numero totale di neutrini leggeri *left-handed* o *right-handed*. I dati confermano con notevole precisione la Teoria Standard che prevede tre neutrini *left-handed*, ν_e, ν_μ, ν_τ.

- in alternativa, possiamo sommare tutti i canali visibili nella sezione d' urto e confrontare con la σ_Z in (10.52):

$$\sigma_{Z,vis}(E) = \frac{12\pi}{M_Z^2} \frac{\Gamma_e(\Gamma_Z - N\Gamma_0)}{4(E - M_Z)^2 + \Gamma_Z^2} \tag{10.56}$$

  Il confronto è riportato nella Fig. 10.3 e mostra un ottimo accordo con N=3, in corrispondenza ai neutrini conosciuti, ν_e, ν_μ, ν_τ.

Sezioni d' urto differenziali e interferenza.

$$D_H D_J^* \left(\sum_{spin} < 0|H_\mu|e^+e^- >< e^+e^-|J_\nu|0 > \right) \cdot \left(\sum_{spin} < f\bar{f}|H_\mu|0 >< 0|J_\nu|f\bar{f} > \right);$$
$$H, J = J^{em}, J^Z \tag{10.57}$$

termini diretti: H=J, interferenza: H≠J. Esplicitamente (M=M$_Z$, $\Gamma = \Gamma_Z$):

$$|D_J|^2 = \frac{1}{P^4} \text{ (J = J}^{\text{em}}\text{)}; \; |D_J|^2 = \frac{1}{(P^2 - M^2)^2 + M^2\Gamma^2} \text{ (J = J}^{\text{Z}}\text{)}$$
$$D_{J^{em}} D_{J^Z}^* + D_{J^{em}}^* D_{J^Z} = \frac{P^2 - M^2}{P^2[(P^2 - M^2) + M^2\Gamma^2]} \tag{10.58}$$

vediamo che *l' interferenza si annulla al picco della risonanza.*

Con facili passaggi, ripetendo quanto già fatto, si trova (nel centro di massa e nel limite di massa nulla e e ed f tutte le energie sono uguali ad E_e=M/2; indichiamo i 4-momenti con i simboli delle particelle corrispondenti):

$$E_{\mu\nu} = \left(\sum_{spin} < 0|H_\mu|e^+e^- >< e^+e^-|J_\nu|0 > \right) =$$
$$= \frac{1}{2E_e^2} Tr\left\{ \not{e}\gamma_\mu \not{e}\gamma_\nu [g_L^e h_L^e (1-\gamma_5) + g_R^e h_R^e (1+\gamma_5)] \right\} \tag{10.59}$$

dove $g_{L,R}^e$ e $h_{L,R}^e$ sono le costanti chirali per l' elettrone delle correnti J ed H.

$$\left(\sum_{spin} < 0|H_\mu|e^+e^- >< e^+e^-|J_\nu|0 > \right)_{LL} = g_L^e h_L^e \frac{2}{E_e^2} \left[e_\nu \bar{e}_\mu + e_\mu \bar{e}_\nu - g_{\nu\mu}(e\bar{e}) + i\eta\epsilon_{\nu\alpha\mu\beta} e^\alpha \bar{e}^\beta \right];$$
$$\left(\sum_{spin} < f\bar{f}|H_\mu|0 >< 0|J_\nu|f\bar{f} > \right)_{LL} = g_L^f h_L^f \frac{2}{E_e^2} \left[e_\nu \bar{e}_\mu + e_\mu \bar{e}_\nu - g_{\nu\mu}(e\bar{e}) + i\eta\epsilon_{\mu\alpha\nu\beta} e^\alpha \bar{e}^\beta \right]; \tag{10.60}$$

dove η è il fattore ± 1 introdotto nella Sez. 10.1 e che è similmente non necessario specificare. Notare lo scambio ($\nu \leftrightarrow \mu$) tra le due linee dell' equazione (10.60).

In complesso, troviamo:

$$\left(\sum_{spin} < 0|H_\mu|e^+e^- >< e^+e^-|J_\nu|0 > \right) \cdot \left(\sum_{spin} < f\bar{f}|H_\mu|0 >< 0|J_\nu|f\bar{f} > \right) = \frac{16}{E_e^4} \cdot$$
$$\cdot \left[(e\bar{f})(\bar{e}f)(g_L^e h_L^e \cdot g_L^f h_L^f + g_R^e h_R^e \cdot g_R^f h_R^f) + (ef)(\bar{e}\bar{f})(g_L^e h_L^e \cdot g_R^f h_R^f + g_R^e h_R^e \cdot g_L^f h_L^f) \right] \tag{10.61}$$

Definiamo θ come l' angolo tra la direzione dell' elettrone e quella del fermione f (quindi l' angolo di $\bar{f}$ è $\theta + \pi$). Si vede facilmente che:

$$(e\bar{f}) = (\bar{e}f) = E_e^2(1+\cos\theta); \quad (ef) = (\bar{e}\bar{f}) = E_e^2(1-\cos\theta) \tag{10.62}$$

da cui:

$$\left(\sum_{spin} < 0|H_\mu|e^+e^- >< e^+e^-|J_\nu|0 > \right) \cdot \left(\sum_{spin} < f\bar{f}|H_\mu|0 >< 0|J_\nu|f\bar{f} > \right) = 16 \cdot$$
$$\cdot [(1+\cos^2\theta)(g_L^e h_L^e + g_R^e h_R^e)(g_L^f h_L^f + g_R^f h_R^f) +$$
$$+ 2\cos\theta (g_L^e h_L^e - g_R^e h_R^e)(g_L^f h_L^f - g_R^f h_R^f)] \tag{10.63}$$

$$A_{FB}^f = \frac{\int d\sigma(\cos\theta > 0) - \int d\sigma(\cos\theta < 0)}{\int d\sigma(\cos\theta > 0) + \int d\sigma(\cos\theta < 0)} \tag{10.64}$$

Prolema Dimostrare che se ϕ ha spin=0 la sezione d' urto della reazione: $e^+e^- \to \phi + \bar{\phi}$ vale 1/4 della sezione d'urto riportata nella (10.40).

Capitolo 11

DIGRESSIONE: LA VIOLAZIONE DELLO SPIN ISOTOPICO

$$
\begin{aligned}
&Q^A = \int J_0^A(\mathbf{x},t) d^3\mathbf{x}^3; \quad \partial^\mu J_\mu^A = 0; \\
&\left[Q_A, Q^B\right] = i f_{ABC} Q^C \\
&[Q_A, \phi_i] = i T_{ij}^A \phi_j
\end{aligned} \tag{11.1}
$$

Nel caso del gruppo chirale $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$, abbiamo correnti vettoriali e assiali:

$$V^i = \bar{q}\frac{\lambda_i}{2}\gamma_\mu q; \tag{11.2}$$

$$A^i = \bar{q}\frac{\lambda_i}{2}\gamma_\mu\gamma_5 q \tag{11.3}$$

Consideriamo inoltre le densità scalari e pseudoscalari (solo quark leggeri)

$$
\begin{aligned}
&S_i = \bar{q}\lambda_i q; \quad P_i = i\bar{q}\lambda_i\gamma_5 q; \\
&\left[V^i, S_j\right] = i f_{ijk} S_k; \quad \left[V^i, P_j\right] = i f_{ijk} P_k; \\
&\left[A^i, S_j\right] = i d_{ijk} P_k; \quad \left[A^i, P_j\right] = i d_{ijk} S_k; \\
&i, j = 0, 1, \cdots, 8.
\end{aligned} \tag{11.4}
$$

11.1 Bosoni di Goldstone in $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$

Assumiamo all' inizio che le masse dei quark u, d, s siano tutte nulle.

Se le interazioni forti rispettano la conservazione della Parità e della Stranezza, gli operatori che possono avere un VEV$\neq$ 0 sono S_0, S_3, S_8. La simmetria si rompe spontaneamente nei

sottogruppi:

$$SU(3)_L \otimes SU(3)_R \rightarrow_{S_0 \neq 0} SU(3)_V \rightarrow_{S_8 \neq 0} SU(2) \otimes U(1) \rightarrow$$
$$\rightarrow_{S_3 \neq 0} U(1)_Q \otimes U(1)_S \tag{11.5}$$

Le cariche dei sottogruppi esatti annichilano il vuoto. Vediamo i casi possibili.

- $< 0|S_0|0 > \neq 0$: relazioni rilevanti:

$$\left\langle 0\right| \left[A^i, P_j\right] \left|0\right\rangle = id_{ijk} \left\langle 0|S_k|0\right\rangle =$$
$$= id_{ij0} \left\langle 0|S_0|0\right\rangle = i\sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{ij} \left\langle 0|S_0|0\right\rangle \tag{11.6}$$

  Tutte le cariche assiali sono rotte ed ho un ottetto di bosoni di Goldstone *pseudoscalari*. Le cariche vettoriali annullano il vuoto: $SU(3)_V$ è una simmetria esatta.

- Oltre ad S_0, anche $< 0|S_8|0 > \neq 0$: alcune cariche vettoriali non annullano piú il vuoto ed ho dei bosoni di Goldstone scalari, con i numeri quantici dei K:

$$\left\langle 0\right| \left[V^i, S_j\right] \left|0\right\rangle = if_{ijk} \left\langle 0|S_k|0\right\rangle = if_{ij8} \left\langle 0|S_8|0\right\rangle \tag{11.7}$$

- $< 0|S_3|0 > \neq 0$: altri bosoni di Goldstone scalari con i numeri quantici del pione

Nel mondo reale, la particella di spin zero piú leggera è il pione, pseudoscalare: il mondo reale sembra essere vicino al primo caso[26]. Quanto vicino?

11.2 Pioni e Kappa come 'quasi' bosoni di Goldstone

Nel mondo delle interazioni forti non ci sono particelle a massa nulla, ma la massa del pione è molto piccola, sulla scala delle masse dei nucleoni, e anche la massa del mesone K è abbastanza piccola:

$$m_\pi^2 = 0.019 \text{ GeV}^2 : \quad m_K^2 = 0.25 \text{ GeV}^2 \tag{11.8}$$

Facciamo le seguenti ipotesi:

- il vuoto rompe $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ ad $SU(3)V$: $< 0|S_0|0 > \neq 0$, con $< 0|S_8|0 >$, $< 0|S_3|0 >$ uguali a 0;

- i quark hanno masse (m_u, m_d, m_s) piccole sulla scala dell interazioni forti.

Le relazioni trovate nella Sez. 5.3 si modificano perchè non ci sono piu poli a $p^2 = 0$, ma determinano le masse dei mesoni pseudoscalari in termini delle masse dei quark (che appaiono nella 4-divergenza delle correnti). I mesoni pseudoscalari sono dei 'quasi' bosoni di Goldstone, con masse piccole che si annullano con le masse dei quark[27] [28].

Riprendiamo l' equazione (5.40) applicata alle densità pseudoscalari, P_i, ma senza assumere l' annullarsi della divergenza della corrente:

$$q_\mu \int d^4x\ e^{iqx}\ \ < 0|T\left[J^\mu(x)P_i(0)\right]|0 >=$$
$$= i\int d^4x\ e^{iqx} < 0|T\left[\partial_\mu J^\mu(x)P_i(0)\right]|0 > +i\int d^3x\ e^{-i\mathbf{qx}}\ \ < 0|\left[J^0(\mathbf{x},0)P_i(0)\right]|0 > \tag{11.9}$$

Se facciamo tendere $q_\mu \to 0$ nella (11.9), il primo membro tende a zero: non ci sono piu bosoni di Goldstone e quindi la funzione di correlazione non ha piú un polo per $q^2 = 0$. Quindi otteniamo la relazione:

$$\int d^4x\ e^{iqx} < 0|T\left[\partial_\mu J^\mu(x)P_i(0)\right]|0 >= -\int d^3x\ e^{-i\mathbf{qx}}\ \ < 0|\left[J^0(\mathbf{x},0)P_i(0)\right]|0 > \tag{11.10}$$

Specializziamo adesso al caso delle correnti assiali (11.3):

$$\int d^4x\ e^{iqx} < 0|T\left[\partial^\mu A^i_\mu(x)P_j(0)\right]|0 >= -id_{ij0} < 0|S_0|0 > \tag{11.11}$$

Consideriamo i casi possibili, partendo da $i = 1$. Esplicitamente[1]:

$$A^1_\mu = \frac{1}{2}\left(\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 d + \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 u\right)$$
$$\partial^\mu A^1_\mu = \frac{m_u + m_d}{2}P_1 \tag{11.12}$$

e quindi:

$$\frac{m_u + m_d}{2}\int d^4x\ e^{iqx} < 0|T\left(P^1(x)P^1(0)\right) = -id_{110} < 0|S_0|0 >= -iA \tag{11.13}$$

dove A è una costante. Se approssimiamo la funzione a due punti in (11.13) con il contributo dello stato ad una particella, il pione carico, troviamo:

$$\int d^4x\ e^{iqx} < 0|T\left(P^1(x)P^1(0)\right) = Z^2_\pi \frac{i}{q^2 - m(\pi^+)^2} \tag{11.14}$$

e l' eq. (11.13) diventa (nel limite $q \to 0$):

$$\left(\frac{m_u + m_d}{2}\right) Z^2_\pi \frac{-i}{q^2 - m(\pi^+)^2} = -iA \ \text{ ovvero}$$
$$m_u + m_d = Cm(\pi^+)^2 \tag{11.15}$$

Ripetendo per i casi (tra parentesi è indicata la particella che domina la funzione a due punti):

$$i = 3\ \ (\pi^0), i = 4\ \ (K^+), i = 6\ \ (K^0) \tag{11.16}$$

[1] nel calcolare la divergenza della corrente usiamo l' equazione di Dirac: $\partial^\mu\gamma_\mu q = -im_q q$, con $q = u, d$ e la sua aggiunta.

Tabella 11.1: Masse delle risonanze barioniche, stati con spin isotopico massimo.

nome	Δ^{++}	Y^+	Ξ^0	Ω^-
contenuto in quark	(uuu)	(uus)	(uss)	(sss)
Stranezza	0	-1	-2	-3
Massa (MeV)	1232	1385	1530	1672
Differenze (MeV)	–	153	145	142

Si trovano altre tre equazioni simili:

$$m_u + m_d = Cm(\pi^0)^2 \tag{11.17}$$
$$m_u + m_s = Cm(K^+)^2 \tag{11.18}$$
$$m_d + m_s = Cm(K^0)^2 \tag{11.19}$$

Abbiamo assunto che le costanti Z soddisfino le condizioni di simmetria:

$$< 0|P^1|\pi^+ >=< 0|P^3|\pi^0 >=< 0|P^4|K^+ >=< 0|P^6|K^0 > \tag{11.20}$$

che sono appropriate nel limite di masse nulle dei quark leggeri, u, d, s, in cui la simmetria $SU(3)_V$ è esatta.

Consideriamo dapprima le due equazioni che coinvolgono la somma $m_u + m_d$ ovvero la somma di (11.13) e (11.17) e la somma di (11.18) e (11.19). Dopo aver eliminato il fattore di scala incognito, C, possiamo determinare il rapporto:

$$\frac{m_u + m_d}{m_s + \frac{m_u+m_d}{2}} = \frac{m^2(\pi^+) + m^2(\pi^0)}{m^2(K^+) + m^2(K^0)} = R = 0.077 \tag{11.21}$$

Per fissare la massa del quark s, possiamo ricorrere allo spettro di massa delle risonanze barioniche considerate nel Cap. 2, vedi fig. 2.4. La composizione in termini di quark e le masse corrispondenti sono riportate nella Tab. 11.1. Il comportamento lineare delle masse nella stranezza si interpreta naturalmente come dovuto alla differenza di massa $m_s - m_u$ che, visto il risultato nelle (11.26), è circa eguale a m_s.

Se prendiamo come valore indicativo $m_s = 150$ MeV, troviamo:

$$\frac{m_u + m_d}{2} = 6 \text{ MeV} \tag{11.22}$$
$$\tag{11.23}$$

Il risultato in (11.22) é notevole. La scala di massa dei quark *up* e *down* fissa la scala della rottura di $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ che si rompe quindi alla scala del MeV, un valore sorprendentemente piccolo, visto che la massa del pione è pari a circa 140 MeV.

La rottura esplicita rappresentata dalla (11.22) implica che la massa del pione non sia esattamente zero, come sarebbe richiesto dal teorema di Goldstone, ma comunque molto piccola

rispetto alla scala delle interazioni forti, ad esempio alla massa del protone, che è associata piuttosto al valore di $< 0|S_0|0 >$.

Detto in altri termini, il parametro che caratterizza la rottura nel vuoto della simmetria chirale é dell'ordine della costante $Z_\pi \simeq f_\pi \simeq 140$ MeV, mentre la rottura esplicita di $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ é dell'ordine del MeV, ovvero la stessa scala della rottura della simmetria di spin isotopico, $SU(2)$.

11.3 La violazione dello spin isotopico

Per valutare individualmente le masse dei quark u e d occorre tenere conto che alle differenze di massa $\pi^+ - \pi^0$ e $K^+ - K^0$ contribuiscono anche correzioni elettromagnetiche, che corrispondono all' energia elettrostatica del campo generato dalle particelle cariche[2]. Possiamo qui utilizzare un risultato dovuto a R. Dashen, secondo cui *le correzioni elettromagnetiche si cancellano* nella particolare combinazione delle differenze di massa:

$$\begin{aligned}&\left[m^2(K^+) - m^2(K^0)\right] - \left[m^2(\pi^+) - m^2(\pi^0)\right] = \Delta = \\ &= -0.0052 \text{ GeV}^2\end{aligned}$$

Possiamo dunque eguagliare questa combinazione a quanto ottenuto dalle equazioni precedenti e porre:

$$m_u - m_d = C\Delta \tag{11.24}$$

Le correzioni elettromagnetiche, non calcolabili, intervengono nell' altra combinazione di masse, ad es. $m^2(\pi^+) - m^2(\pi^0)$. Restiamo quindi con la (11.24) e con le due equazioni che coinvolgono la somma $m_u + m_d$ ovvero la somma di (11.13) e (11.17) e la somma di (11.18) e (11.19). Di qui, otteniamo il rapporto (11.21) ed inoltre:

$$\begin{aligned}&\frac{m_u - m_d}{m_s + \frac{m_u+m_d}{2}} = 2\frac{\left[m^2(K^+) - m^2(K^0)\right] - \left[m^2(\pi^+) - m^2(\pi^0)\right]}{\left[m^2(K^+) + m^2(K^0)\right]} = -0.021 \\ &=\end{aligned} \tag{11.25}$$

da cui troviamo:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{m_u}{m_s} = 0.029 \\ \frac{m_d}{m_s} = 0.051\end{array}\right] \tag{11.26}$$

Se prendiamo ancora $m_s = 150$ MeV, troviamo:

$$m_u = 4.4 \text{ MeV} \tag{11.27}$$

$$m_d = 7.7 \text{ MeV} \tag{11.28}$$

[2]in particolare, la differenza di massa dei quark non contribuisce alla differenza di massa $\pi^+ - \pi^0$ che quindi è dovuta esclusivamente agli effetti elettromagnetici.

Un altro risultato sorprendente. La differenza delle masse dei quark *up* e *down*, che rompe lo spin isotopico, non è affatto piccola rispetto alle masse stesse[29]. Come mai quindi lo spin isotopico è una simmetria cosí rispettata dalle interazioni forti? La spiegazione sta proprio nella piccolezza delle masse dei quark leggeri: il mondo reale è prossimo alla simmetria di spin isotopico non perchè le masse siano vicine tra loro, come le masse del protone e del neutrone, ma perchè sono entrambe circa eguali a zero!

Un ultimo commento sullo spin isotopico. L' aspettativa iniziale, accennata nel Cap. 2, era che la simmetria fosse rotta solo dalle interazioni elettromagnetiche, che ovviamente distinguono il protone dal neutrone (e il quark *up* dal quark *down*). Vediamo ora che a questo effetto se ne aggiunge un' altro, associato alle masse dei quark e non controllato dalle interazioni forti.

Il nuovo effetto è necessario per spiegare la fenomenologia delle violazioni dello spin isotopico. In effetti, tutti i tentativi di calcolare la differenza di massa protone-neutrone sulla pura base dell' elettromagnetismo portano (come è naturale!) ad un protone piú pesante del neutrone, con una differenza $M_N - M_P$ negativa, pari circa a -1.5 MeV. Tenendo conto che $P = (uud)$ e $N = (udd)$ il nuovo effetto aggiunge $m_d - m_u \simeq 3$ MeV alla massa del neutrone, riportandoci in accordo con il dato sperimentale.

Analisi piú precise, eseguite alla fine degli anni sessanta, confermano l' accordo della fenomenologia con la presenza di *due componenti* nella violazione dello spin isotopico, che sono (per quanto ne sappiamo casualmente) dello stsso ordine: gli effetti elettromagnetici e la differenza di massa $m_u - m_d$.

Capitolo 12

MIXING E VIOLAZIONE DI CP NEI MESONI K, B E D NEUTRI

12.1 Mixing e violazione di CP nel sistema $K^0 - \bar{K}^0$.

Illustriamo in questa Sezione le caratteristiche fenomenologiche della violazione della simmetria CP nei decadimenti dei K neutri. Nel Capitolo 13 poniamo a confronto queste caratteristiche con la teoria CKM.

Hamiltoniana dei mesoni K neutri. Nel sistema di quiete del mesone, l'Hamiltoniana si riduce ad una matrice 2×2 che scriviamo nella base:

$$K^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; \bar{K}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12.1}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \tag{12.2}$$

Per completare la descrizione dei mesoni K neutri, dobbiamo tenere conto del fatto che si tratta di particelle instabili. Analogamente al caso dello Z^0, Cap. 10, Sez. 10.3 scriviamo l'Hamiltoniana totale nel sistema di quiete:

$$\mathbf{H} = \mathbf{M} - \frac{i}{2}\mathbf{\Gamma} \tag{12.3}$$

dove Γ é la matrice hermitiana che descrive i decadimenti complessivi di K^0 e $\bar{K}^0$:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix}$$
$$\Gamma_{11}, \; \Gamma_{22} \text{ real}, \; \Gamma_{21} = \Gamma_{12}^* \tag{12.4}$$

In conclusione, scriviamo la matrice $\mathbf{H}$ nella forma:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h & l \\ m & n \end{pmatrix} \tag{12.5}$$

con $h, \cdots n$ complessi e determiniamo autovalori e autovettori, da collegare alle grandezze fisicamente misurabili nei decadimenti dei mesoni K neutri (per un'analisi delle simmetrie CP e CPT in questi decadimenti cfr. le Reff. [30],[23] e [31]).

Simmetrie CP, T e CPT. Scegliamo le fasi dei ket $|K^0>$ e $|\bar{K}^0>$ in modo che sia:

$$CP|K^0>=-|\bar{K}^0>,\ CP|\bar{K}^0>=-|K^0> \tag{12.6}$$

(La convenzione qui usata è opposta a quella usata in [30]per motivi che saranno chiariti nel Cap. 13). Nella base (12.1), la trasformazione CP agisce sulle matrici hermitiane $\mathbf{M}$ e $\mathbf{\Gamma}$ attraverso la matrice di Pauli $-\tau_1$:

$$CP:\ \mathbf{X} \to \tau_1 \mathbf{X} \tau_1\ (\mathbf{X} = \mathbf{M},\ \mathbf{\Gamma}) \tag{12.7}$$

mentre l'inversione temporale, T, corrisponde a prendere il complesso coniugato:

$$T:\ \mathbf{X} \to \mathbf{X}^*, \tag{12.8}$$

da cui:

$$CPT : \mathbf{X} \to \tau_1 \mathbf{X}^* \tau_1 \tag{12.9}$$

la simmetria sotto CP é rispettata da termini in $\mathbf{M}$ o $\mathbf{\Gamma}$ proporzionali alle matrici di Pauli $\mathbf{1}$, τ_1 ed é violata da termini proporzionali a τ_2, come la parte immaginaria di δM^2 nella (12.2), e a τ_3, mentre la simmetria CPT richiede le matrici $\mathbf{1}$, τ_1 (reali e commutanti con τ_1) e τ_2 (immaginaria e anticommutante con τ_1), ma non τ_3 (reale e anticommutante con τ_1, cfr. la Tab. 12.1).

Tabella 12.1: Proprietá di simmetria dei termini dello sviluppo $\mathbf{X} = c_0\mathbf{1}+c_1\tau_1+c_2\tau_2+c_3\tau_3$ ($\mathbf{X} = \mathbf{M},\ \mathbf{\Gamma}$) sotto le trasformazioni CP, T e CPT. Il segno + corrisponde all'invarianza sotto la corrispondente simmetria.

	c_0	c_1	c_2	c_3
CP	+	+	-	-
T	+	+	-	+
CPT	+	+	+	-

L'invarianza sotto TCP richiede quindi l'uguaglianza dei termini sulla diagonale nelle (12.2) e (12.4), invarianza che é soddisfatta, come conseguenza del *Teorema* TCP, in una descrizione dei K con campi locali, cfr. Cap. 13. Possiamo tuttavia tenere in $\mathbf{H}$ due masse e due larghezze diverse sulla diagonale e mettere separatamente le simmetrie CP e CPT a confronto con i dati.

Autovalori. Sono le soluzioni dell'equazione secolare:

$$Det \begin{pmatrix} h-\lambda & l \\ m & n-\lambda \end{pmatrix} \tag{12.10}$$

da cui seguono le due soluzioni

$$\lambda_\pm = \frac{h+n \pm \sqrt{(h-n)^2+4lm}}{2} \tag{12.11}$$

Autovettori. Scriviamo gli autovettori corrispondenti a $\lambda_\pm$ nella forma:

$$v_\pm = \begin{pmatrix} p_\pm \\ q_\pm \end{pmatrix} \tag{12.12}$$

e troviamo facilmente:

$$(\frac{q}{p})_\pm = \frac{n-h \pm \sqrt{(h-n)^2+4lm}}{2l} \tag{12.13}$$

Nel limite in cui le simmetrie CP e CPT sono esatte, le matrici $\mathbf{M}$ e $\mathbf{\Gamma}$ sono combinazioni di $\mathbf{1}$ e τ_1, che corrisponde a $h = n$ e $l = m$. In questo caso, gli autovettori sono le semplici combinazioni:

$$\mathbf{CP},\ \mathbf{CPT}: \text{ simmetrie esatte}$$

$$\begin{aligned} v_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{K^0 + \bar{K}^0}{\sqrt{2}} = K_2 \ (CP = -1) \\ v_- &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{K^0 - \bar{K}^0}{\sqrt{2}} = K_1 \ (CP = +1) \end{aligned} \tag{12.14}$$

Lo stato K_1 puó decadere in due mesoni π (che nello stato con $L = 0$ hanno $CP = +1$) mentre lo stato K_2 deve decadere in almeno tre mesoni π ($CP = -1$ in $L = 0$) con uno spazio delle fasi molto ridotto. Questa situazione persiste anche in presenza di una piccola violazione di CP e si usano le notazioni K_S e K_L (S=short, L=long) per i due autostati di $\mathbf{M}$ che sono prossimi a K_1 e K_2. Sperimentalmente $\tau(K_L)/\tau(K_S) \sim 500$. Per mettere in evidenza questa vicinanza, si usa scrivere:

$$\mathbf{CP},\ \mathbf{CPT}: \text{ violazioni generiche} \tag{12.15}$$

$$\begin{aligned} v_+ &= K_L = N_L(K_2 + \epsilon_L K_1)K_S \\ v_- &= K_S = N_S(K_1 + \epsilon_S K_2) \end{aligned} \tag{12.16}$$

dove $N_{S,L}$ sono fattori di normalizzazione. Confrontando con le (12.12) e (12.13), si trova:

$$
\begin{aligned}
(\frac{q}{p})_+ &= \frac{n-h+\sqrt{(h-n)^2+4lm}}{2l} = \frac{1-\epsilon_L}{1+\epsilon_L} \\
(\frac{q}{p})_- &= \frac{n-h-\sqrt{(h-n)^2+4lm}}{2l} = -\frac{1-\epsilon_S}{1+\epsilon_S}
\end{aligned}
\tag{12.17}
$$

Nella letteratura si introducono le notazioni:

$$
\epsilon = \frac{\epsilon_S+\epsilon_L}{2};\ \Delta = \frac{\epsilon_S-\epsilon_L}{2} \tag{12.18}
$$

Le quantitá misurabili collegate alla matrice **H** sono le masse e le larghezze degli stati $K_{S,L}$ e i parametri ϵ e Δ , cfr Tabb. 12.1, 12.1 e Ref. [21].

$(m_S+m_L)/2$	$\Delta m = m_L - m_S$	τ_S	τ_L
497.614 ± 0.024	$(3.483 \pm 0.006)10^{-12}$	$(0.8937 \pm 0.0012)10^{-10}$	$(511.6 \pm 2.1)10^{-10}$

Tabella 12.2: Masse (MeV) e vite medie (sec) dei K neutri.

$\lvert\epsilon\rvert$	$\arg\epsilon$	$\mathrm{Re}(\Delta)$	$\mathrm{Im}(\Delta)$
$(2.228 \pm 0.011)10^{-3}$	$(43.51 \pm 0.05)^0$	$(25 \pm 23)10^{-5}$	$(-0.6 \pm 1.9)10^{-5}$

Tabella 12.3: Parametri della violazione di CP e CPT nella matrice di massa dei K neutri.

La quantitá Δm puó essere anche data in unitá di $(tempo)^{-1}$:

$$
\Delta m = m_L - m_S = (0.5290 \pm 0.0015)10^{10} s^{-1} \tag{12.19}
$$

Per ottenere i parametri che compaiono nell'Hamiltoniana, **H**, dalle quantitá misurabili occorre invertire le relazioni (12.11) e (12.17). Sono quattro relazioni complesse, che determinano i quattro elementi complessi di **H**. L'inversione di queste relazioni si fa agevolmente se ci si limita ai termini del primo ordine nelle (comunque piccole) violazioni di CP e CPT.

In questa approssimazione, la radice quadrata nella (12.11) si semplifica:

$$
\begin{aligned}
&\left[(h-n)^2+4lm\right]^{\frac{1}{2}} \simeq 2\left[(M_{12}-\frac{i}{2}\Gamma_{12})(M_{12}^*-\frac{i}{2}\Gamma_{12}^*)\right]^{\frac{1}{2}} = \\
&= 2\left[|M_{12}|^2-\frac{1}{4}|\Gamma_{12}|^2-iRe(M_{12}\Gamma_{12}^*)\right]^{\frac{1}{2}} \sim 2(ReM_{12}-\frac{i}{2}Re\Gamma_{12})
\end{aligned}
\tag{12.20}
$$

e troviamo:

$$
\lambda_\pm = \frac{M_{11}+M_{22}-\frac{i}{2}(\Gamma_{11}+\Gamma_{22}) \pm 2(ReM_{12}-\frac{i}{2}Re\Gamma_{12})}{2} \tag{12.21}
$$

ovvero:

$$M_{11} + M_{22} = m_S + m_L;$$
$$\Gamma_{11} + \Gamma_{22} = \Gamma_S + \Gamma_L; \tag{12.22}$$
$$2Re(M_{12}) = m_L - m_S = +\Delta m;$$
$$2Re(\Gamma_{12}) = -(\Gamma_S - \Gamma_L) = -\Delta\Gamma \tag{12.23}$$

Consideriamo adesso le (12.17). Facendo il prodotto membro a membro delle due equazioni troviamo:

$$-\frac{m}{l} = -(\frac{1-\epsilon_S}{1+\epsilon_S})(\frac{1-\epsilon_L}{1+\epsilon_L}) \sim -(1-2(\epsilon_S+\epsilon_L)) = -(1-4\epsilon) \tag{12.24}$$

mentre il rapporto membro a membro ci dá:

$$\frac{\sqrt{(h-n)^2+4lm}+n-h}{\sqrt{(h-n)^2+4lm}-(n-h)} \sim 1 - \frac{h-n}{\sqrt{lm}} =$$
$$= (\frac{1+\epsilon_S}{1-\epsilon_S})(\frac{1-\epsilon_L}{1+\epsilon_L}) \sim 1 + 2(\epsilon_S - \epsilon_L) = 1 + 4\Delta \tag{12.25}$$

Per il primo membro della (12.24) troviamo:

$$\frac{m}{l} = \frac{M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*}{M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}} = \frac{1 + (-iImM_{12} - \frac{1}{2}Im\Gamma_{12})(ReM_{12} - \frac{i}{2}Re\Gamma_{12})^{-1}}{1 - (-iImM_{12} - \frac{1}{2}Im\Gamma_{12})(ReM_{12} - \frac{i}{2}Re\Gamma_{12})^{-1}} =$$
$$= 1 + 2\frac{(-iImM_{12} - \frac{1}{2}Im\Gamma_{12})}{(ReM_{12} - \frac{i}{2}Re\Gamma_{12})} = 1 + 2\frac{(ImM_{12} - \frac{i}{2}Im\Gamma_{12})}{(iReM_{12} + \frac{1}{2}Re\Gamma_{12})} \tag{12.26}$$

Usando le (12.23) possiamo esprimere le parti reali nel denominatore in termini di Δm e $\Delta\Gamma$:

$$\frac{m}{l} = 1 + \frac{4}{\Delta m}\frac{(ImM_{12} - \frac{i}{2}Im\Gamma_{12})}{(-i\frac{2\Delta m}{\Delta\Gamma}+1)}(\frac{2\Delta m}{\Delta\Gamma}) \tag{12.27}$$

Il termine $Im\Gamma_{12}$ dipende dalla violazione diretta di CP nei decadimenti deboli, che sappiamo sperimentalmente essere circa 10^{-3} volte la violazione nel mixing rappresentata da ϵ. Con: $Im\Gamma_{12} \sim 0$, troviamo:

$$\epsilon = \frac{1}{\Delta m}\frac{ImM_{12}}{(-i\tan\phi_{SW}+1)}(\tan\phi_{SW}) = \frac{ImM_{12}}{\Delta m}(\sin\phi_{SW})e^{+i\phi_{SW}} \tag{12.28}$$

dove abbiamo introdotto la cosiddetta *fase superdebole* [1] , ϕ_{SW}, definita da:

$$\phi_{SW} = \arctan[\frac{2\Delta m}{\Delta\Gamma}] = 43.45^0 \tag{12.29}$$

[1] questo sarebbe l'argomento di ϵ in una teoria in cui le interazioni elettrodeboli rispettassero esattamente CP e la violazione osservata fosse l'effetto al primo ordine di una *interazione superdebole*[32], che produce come unico effetto osservabile la transizione $K^0 - \bar{K}^0$. Di qui il nome attribuito alla fase (12.29).

Dalla (12.28) vediamo che l'argomento del numero complesso ϵ é fissato al valore di ϕ_{SW}, indipendentemente dai dettagli della teoria elettrodebole che sono contenuti nella quantitá ImM_{12}, e in ottimo accordo con il valore sperimentale, cfr. Tab. 12.1.

Per finire, analizziamo la (12.25), da cui si trova direttamente la relazione:

$$\begin{aligned}\Delta &= -\frac{1}{4}\frac{M_{11}-M_{22}-\frac{i}{2}(\Gamma_{11}-\Gamma_{22})}{ReM_{12}-\frac{i}{2}Re\Gamma_{12}} = \\ &= \frac{i}{\Delta\Gamma}\frac{M_{11}-M_{22}-\frac{i}{2}(\Gamma_{11}-\Gamma_{22})}{-i\frac{2\Delta m}{\Delta\Gamma}+1} = \\ &= \frac{i}{2}(\sin\phi_{SW})e^{+i\phi_{SW}}\frac{M_{11}-M_{22}-\frac{i}{2}(\Gamma_{11}-\Gamma_{22})}{\Delta m} \qquad (12.30)\end{aligned}$$

che collega la violazione di CPT rappresentata da $M_{11}-M_{22}$ e $\Gamma_{11}-\Gamma_{22}$ alla quantitá osservabile Δ.

Al momento non si hanno indicazioni positive per una violazione di CPT, come indicato dai valori riportati nella Tab. 12.1, cfr. Ref. [31].

A conclusione di questa Sezione, annotiamo la relazione di M_{12} con le osservabili della matrice massa dei mesoni K:

$$Re(M_{12}) = \frac{\Delta m}{2} \qquad (12.31)$$

$$\frac{Im(M_{12})}{\Delta m} = \frac{Re(\epsilon)}{\sin\phi_{SW}\cos\phi_{SW}} = \frac{|\epsilon|}{\sin\phi_{SW}} \qquad (12.32)$$

La previsione CKM per questi stessi parametri sarà illustrata nel Cap. 13.

12.2 Mixing nei mesoni B e D neutri

In linea generale, il formalismo che abbiamo illustrato per i mesoni K resta valido nel caso del mixing dei mesoni $B^0 = (\bar{b}d)$ e $\bar{B}^0 = (b\bar{d})$. Una differenza importante, tuttavia, si ha al livello della matrice delle larghezze. I decadimenti deboli dei mesoni B sono dominati dal decadimento del quark pesante, il quark b, e non ci sono differenze significative nelle velocitá di decadimento nei canali con diverso CP, come nel caso dei K. Un'approssimazione ragionevole per i mesoni B é di trascurare del tutto la larghezza fuori diagonale:

$$M_{12}(B) >> \Gamma_{12}(B) \simeq 0 \qquad (12.33)$$

In questo caso, anche se M_{12}, nella convenzione usata per la matrice CKM, risulta un numero complesso, possiamo sempre eliminare la fase con una scelta appropriata delle fasi degli stati B^0 e $\bar{B}^0$. Questo vuol dire che esiste una definizione della simmetria CP che é conservata nella matrice di massa e l'unica osservabile é la differenza di massa tra i due autostati, B_H e B_L (H=heavy, L=light) che é data da:

$$|\Delta M(B)| = 2|M_{12}| \qquad (12.34)$$

Considerazioni del tutto identiche valgono per i mesoni $D^0 = (c\bar{u})$ e $\bar{D}^0 = (u\bar{c})$.

Capitolo 13

CORRENTI NEUTRE CON CAMBIAMENTO DI SAPORE

Con questo termine (in inglese: *flavor changing neutral current processes*, FCNC) si indicano i processi semileptonici con cambiamento di flavor senza cessione netta di carica ai leptoni, ovvero processi non leptonici che debbono avvenire all'ordine superiore della teoria elettrodebole, come conseguenza del fatto che la corrente neutra non produce cambiamenti di sapore all'ordine piú basso, cfr. il Cap. 9 e l'eq. (9.16), ad es. il decadimento $K_L \to \mu + \mu-$ o la transizione $K^0 - \bar{K}^0$. Nella teoria elettrodebole, le ampiezze FNCN dovute allo scambio di bosoni intermedi, W e Z, devono essere finite, come conseguenza del fatto che non è possibile aggiungere alla corrente neutra controtermini con cambiamento di flavor.

La convergenza dell'integrazione sui momenti interni è assicurata dal meccanismo GIM, o dalle sue estensioni alla teoria con sei quark. Questo ha come conseguenza che i momenti interni rilevanti sono dell'ordine o maggiori della massa del quark charm. Si tratta quindi di ampiezze dominate dalle *corte distanze* ed è possibile calcolare il contributo debole senza tener conto delle correzioni dovute alle interazioni forti, in virtú della libertà asintotica delle interazioni di colore.

Se non ci sono contributi ulteriori dominati dalle lunghe distanze e quindi affetti da correzioni praticamente incalcolabili dovute alle interazioni forti, eventuali discrepanze dei dati sperimentali con le ampiezze calcolate nella teoria standard possono dare indicazioni significativa di nuova fisica. Questo avviene in diversi casi ed i processi FCNC sono diventati, negli ultimi anni, uno strumento efficace per mettere alla prova la teoria standard ad energie non ancora raggiungibili agli acceleratori disponibili. Per una recente discussione sui limiti sulla nuova fisica dalle transizioni FCNC cfr. Ref. [33].

Nonostante il ruolo storico di prototipo di FCNC, il decadimento $K_L \to \mu + \mu-$ non si presta a fornire informazioni di precisione proprio in quanto il processo puó avvenire anche attraverso il canale $K_L \to \gamma\gamma \to \mu + \mu-$, che è dominato dalle lunghe distanze.

Sperimentalmente:

$$B(K_L \to \gamma\gamma) \simeq 6 \cdot 10^{-4} \tag{13.1}$$

$$B(K_L \to \mu\mu) \simeq 7 \cdot 10^{-9} \tag{13.2}$$

poichè la probabilità di $\gamma\gamma \to \mu + \mu-$ è di ordine $(\alpha/\pi)^2 \simeq 4 \cdot 10^{-6}$, si vede che il processo

attraverso lo stato 2γ puó dare conto quanto meno di una parte significativa dell'ampiezza del processo.

In questo capitolo, calcoliamo a titolo illustrativo le ampiezze deboli per le transizioni con doppio cambiamento di sapore, $\Delta F = 2$, processi in cui l'ampiezza debole è dominante e per i quali sono in corso ricerche in diversi laboratori.

13.1 L'ampiezza $\bar{K}^0 \to K^0$

A livello dei quark, la transizione $\bar{K}^0 \to K^0$ è descritta dal processo:

$$s + \bar{d} \to d + \bar{s} \tag{13.3}$$

e dai grafici di Feynman riportati in Fig. 13.1.

Se prendiamo i momenti esterni uguali a zero, nel loop corre un solo momento, che indichiamo con q. La linea interna fermionica è una sovrapposizione dei propagatori dei quark u, c e t.

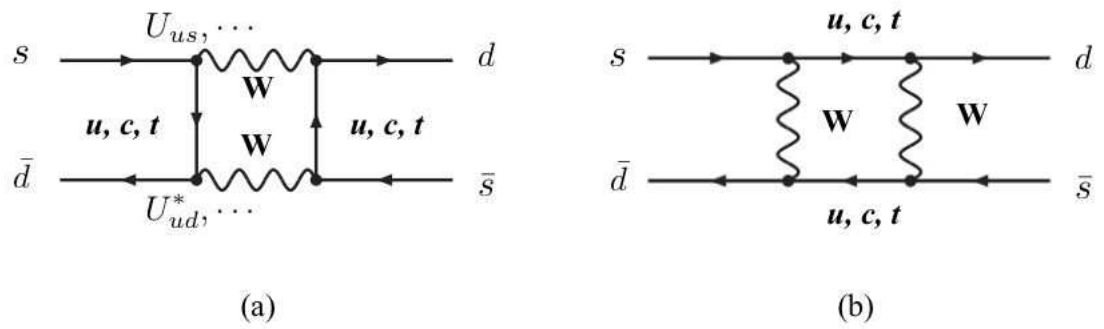

Figura 13.1: Diagramma di Feynman per la transizione: $\bar{K}^0 \to K^0$.

Includendo anche i vertici contigui, abbiamo, per la linea di sinistra nel grafico Fig. 13.1(a), un termine [1] $\bar{v}_d S(q)_{\mu\nu} u_s$ con:

$$\begin{aligned} &S(q)_{\mu\nu} = \gamma_\mu(1-\gamma_5)\left[a\frac{1}{\not{q}-m_u} + b\frac{1}{\not{q}-m_c} + c\frac{1}{\not{q}-m_t}\right]\gamma_\nu(1-\gamma_5) \\ &a = U^*_{ud}U_{us}, \text{ etc.} \\ &a+b+c=0 \end{aligned} \tag{13.4}$$

La relazione: $a = -b - c$ equivale a sottrarre il propagatore del quark u dai propagatori del c e del t, il che li rende piú convergenti. Con ovvie manipolazioni, avendo posto $m_u^2 = 0$,

[1] ricordiamo le regole di Feynman per gli spinori: $u(p)$ ($\bar{v}(p)$) per una particella (antiparticella) nello stato iniziale e $\bar{u}(p)$ ($v(p)$) per una particella (antiparticella) nello stato finale; i suffissi d ed s specificano il sapore; i diversi termini si scrivono risalendo la linea fermionica rispetto alle frecce.

troviamo:

$$S(q)_{\mu\nu} = 2\gamma_\mu \not{q} \left[b\frac{m_c^2}{q^2(q^2-m_c^2)} + c\frac{m_t^2}{q^2(q^2-m_t^2)} \right] \gamma_\nu(1-\gamma_5) \tag{13.5}$$

Possiamo quindi scrivere l'ampiezza corrispondente al grafico della Fig. 13.1(a) come segue[2]:

$$\begin{aligned}
A^{(a)} &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \times \\
&\times 4\left[\frac{g^2}{8}\right]^2 [\bar{v}_d\gamma_\mu \not{q}\gamma_\nu(1-\gamma_5)u_s]\,[\bar{u}_d\gamma_\sigma \not{q}\gamma_\rho(1-\gamma_5)v_s] \times \\
&\times \left[b^2\frac{m_c^4}{q^4(q^2-m_c^2)^2} + 2bc\frac{m_c^2 m_t^2}{q^4(q^2-m_c^2)(q^2-m_t^2)} + c^2\frac{m_t^4}{q^4(q^2-m_t^4)} \right] \times \\
&\times \left(-g^{\mu\rho} + \frac{q^\mu q^\rho}{M_W^2}\right)\left(-g^{\nu\sigma} + \frac{q^\nu q^\sigma}{M_W^2}\right)\frac{1}{(q^2-M_W^2)^2}
\end{aligned} \tag{13.6}$$

Il prodotto dei numeratori nei propagatori dei W dà luogo a quattro termini, a seconda che prendiamo il primo o il secondo termine nel primo o nel secondo numeratore. Teniamo inoltre conto che l'integrazione simmetrica in q fa sí che:

$$\int d^4q\; q^\alpha q^\beta\; F(q^2) = \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}\int d^4q\; q^2\; F(q^2) \tag{13.7}$$

Il termine che corrisponde a $g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}$ dà luogo ad un prodotto di tre matrici gamma, che si puó semplificare utilizzando la formula data in [1]:

$$\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\mu = g^{\nu\alpha}\gamma^\mu + g^{\alpha\mu}\gamma^\nu - g^{\nu\mu}\gamma^\alpha - i\epsilon^{\nu\alpha\mu\rho}\gamma_\rho\gamma_5 \tag{13.8}$$

e quella che si ottiene abbassando gli indici:

$$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu = g_{\nu\alpha}\gamma_\mu + g_{\alpha\mu}\gamma_\nu - g_{\nu\mu}\gamma_\alpha - i\epsilon_{\mu\alpha\nu\rho}\gamma^\rho\gamma_5 \tag{13.9}$$

Sostituendo la (13.8) troviamo:

$$\begin{aligned}
&\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu(1-\gamma_5)\otimes\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\mu(1-\gamma_5) = \\
&= 10\gamma_\sigma(1-\gamma_5)\otimes\gamma^\sigma(1-\gamma_5) - i\epsilon^{\mu\alpha\nu\rho}\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu(1-\gamma_5)\otimes\gamma_\rho(1-\gamma_5)
\end{aligned} \tag{13.10}$$

Usiamo adesso la (13.9) e troviamo:

$$\begin{aligned}
&-i\epsilon^{\mu\alpha\nu\rho}\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu(1-\gamma_5)\otimes\gamma_\rho(1-\gamma_5) = \\
&= -6\gamma^\sigma(1-\gamma_5)\otimes\gamma_\sigma(1-\gamma_5)
\end{aligned} \tag{13.11}$$

[2] I fattori i per ogni vertice e per ogni propagatore danno un fattore $i^8 = 1$. Il fattore $g^2/8$ associato ad ogni linea di W si ricostruisce dalla formula (4.17), che dà l'interazione con i doppietti, al modo seguente. Un fattore 1/4 nasce dal fatto nella (4.17) compaiono i campi left-handed, quindi in ciascun vertice c'è un fattore $1/2(1-\gamma_5)$. Inoltre i campi $W^{1,2}$ sono accoppiati con le matrici di Pauli $\tau^{1,2}/2$, mentre i vertici in Fig. 13.1 corrispondono agli operatori di innalzamento e abbassamento, $\tau^\pm$. La relazione $\tau^1/2\otimes\tau^1/2 + \tau^2/2\otimes\tau^2/2 = 1/2\tau^+\otimes\tau^- + \cdots$ fornisce l'ulteriore fattore 1/2.

ovvero:

$$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu(1-\gamma_5)\otimes\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\mu(1-\gamma_5) = 4\gamma_\mu(1-\gamma_5)\otimes\gamma^\mu(1-\gamma_5) \tag{13.12}$$

Negli altri termini, le relazioni $\not{q}\not{q} = q^2$ e $\not{q}\not{q}\not{q} = q^2\not{q}$ semplificano direttamente il prodotto di tre matrici gamma. Usando la (13.7) troviamo quindi:

$$\begin{aligned}
A^{(a)} &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \times \\
&\times 4\left[\frac{g^2}{8}\right]^2 [\bar{v}_s\gamma_\mu(1-\gamma_5)u_d]\,[\bar{u}_s\gamma^\mu(1-\gamma_5)v_d] \times \\
&\times \left[b^2\frac{m_c^4}{q^2(q^2-m_c^2)^2} + 2bc\frac{m_c^2m_t^2}{q^2(q^2-m_c^2)(q^2-m_t^2)} + c^2\frac{m_t^4}{q^2(q^2-m_t^4)}\right] \times \\
&\times \left(1 - 2\frac{q^2}{M_W^2} + \frac{1}{4}\frac{q^4}{M_W^4}\right))\frac{1}{(q^2-M_W^2)^2}
\end{aligned} \tag{13.13}$$

Naturalmente, ci dobbiamo ricordare che nei denominatori dei propagatori vale la regola di Feynman per cui, per ogni massa m^2, dobbiamo sostituire $m^2 \to m^2 - i\epsilon$. In questo modo possiamo ruotare l'integrazione in q^0 da $-\infty$ a $+\infty$ ad una integrazione lungo l'asse immaginario, ponendo $q^0 = iq^4$ e integrando q^4 tra $-\infty$ e $+\infty$ (rotazione di Wick). Sotto questa trasformazione:

$$q^2 \to -q^2 \tag{13.14}$$

ed inoltre, in coordinate sferiche:

$$d^4q \to i\pi^2q^2dq^2 \tag{13.15}$$

Mettendo tutto insieme e ricordando che $\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
A^{(a)} &= -i\frac{G_F^2M_W^2}{8\pi^2} \times \sum_{i,j=c,t} C_iC_jE(x_i,x_j) \times \\
&\times [\bar{v}_s\gamma_\mu(1-\gamma_5)u_d]\,[\bar{u}_s\gamma^\mu(1-\gamma_5)v_d]
\end{aligned} \tag{13.16}$$

dove: $x_i = m_i^2/M_W^2$, $C_i = U_{id}^*U_{is}$, e:

$$E(x_i,x_j) = x_ix_j\int_0^\infty dt\,\left(1+2t+\frac{1}{4}t^2\right)\frac{1}{(t+x_i)(t+x_j)}\frac{1}{(t+1)^2} \tag{13.17}$$

Ragionando analogamente, dal grafico nella Fig. 13.1 (b) troviamo:

$$\begin{aligned}
A^{(b)} &= -i\frac{G_F^2M_W^2}{8\pi^2} \times \sum_{i,j=c,t} C_iC_jE(x_i,x_j) \times \\
&\times [\bar{v}_s\gamma_\mu(1-\gamma_5)v_d]\,[\bar{u}_s\gamma^\mu(1-\gamma_5)u_d]
\end{aligned} \tag{13.18}$$

Le funzioni $E(x_i,x_j)$ sono state calcolate da Inami e Lim[34]. A noi serviranno alcuni casi particolari che possiamo ricalcolare direttamente.

Calcolo degli integrali Gli integrali nella (13.17) si riducono ai due integrali:

$$\mathcal{I}(a,b) = \int_0^\infty dt\, \frac{1}{(t+a)(t+b)} \tag{13.19}$$

$$\mathcal{I}(a,b,c) = \int_0^\infty dt\, \frac{1}{(t+a)(t+b)(t+c)} \tag{13.20}$$

Il primo integrale si calcola immediatamente:

$$\mathcal{I}(a,b) = \frac{1}{b-a} \ln \frac{b}{a} \tag{13.21}$$

$$\mathcal{I}(a,a) = \frac{1}{a} \tag{13.22}$$

Notiamo anche:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \int_0^\infty dt\, \frac{1}{(t+a)^2(t+b)} = -\frac{\partial}{\partial a}\mathcal{I}(a,b) = \\
&= \frac{1}{(b-a)}\left[-\frac{1}{(b-a)}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{a}\right] \\
\mathcal{I}_2 &= \int_0^\infty dt\, \frac{1}{(t+a)^2(t+b)^2} = \frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial}{\partial a}\mathcal{I}(a,b) = \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\left[-\frac{2}{(b-a)}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right]
\end{aligned} \tag{13.23}$$

Nel secondo caso, si scompone la frazione secondo la formula:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(t+a)(t+b)(t+c)} = \frac{\alpha}{(t+a)} + \frac{\beta}{(t+b)} + \frac{\gamma}{(t+c)} \\
&\alpha = \frac{1}{(b-a)(c-a)};\ \beta = \frac{1}{(a-b)(c-b)};\ \gamma = \frac{1}{(a-c)(b-c)} \\
&\alpha + \beta + \gamma = 0
\end{aligned} \tag{13.24}$$

da cui, integrando tra 0 e $\lambda >> a, b, c$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(a,b,c) &= \alpha \ln\frac{\lambda}{a} + \beta \ln\frac{\lambda}{b} + \gamma \ln\frac{\lambda}{c} = \\
&= \frac{1}{(b-a)(c-a)}\ln\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{1}{(a-b)(c-b)}\ln\left(\frac{c}{b}\right)
\end{aligned} \tag{13.25}$$

Notiamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2(a,b,c) &= \int_0^\infty dt\, \frac{1}{(t+a)(t+b)(t+c)^2} = -\frac{\partial}{\partial c}\mathcal{I}(a,b,c) = \\
&= \frac{1}{(b-a)}\left[\frac{1}{(c-a)^2}\ln\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{1}{(c-b)^2}\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right] + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}
\end{aligned} \tag{13.26}$$

Risultati. Dalle formule precedenti, troviamo:

$$\begin{aligned}
E(x_t, x_t) &= x_t^2 \int_0^\infty dt \left(1 + 2t + \frac{1}{4}t^2\right)) \frac{1}{(t+x_t)^2}\frac{1}{(t+1)^2} = \\
&= x_t^2 \int_0^\infty dt \left(\frac{1}{4}\mathcal{I}(x_t,1) + \frac{3}{2}\mathcal{I}_1(x_t,1) - \frac{3}{4}\mathcal{I}_2(x_t,1)\right)
\end{aligned} \tag{13.27}$$

Di qui, otteniamo:

$$
\begin{aligned}
E(x_t, x_t) &= x_t^2 \left(\frac{1}{4}\mathcal{I}_0 + \frac{3}{2}\mathcal{I}_1 - \frac{3}{4}\mathcal{I}_2 \right) \\
&= \frac{x_t}{4} + \frac{3}{2}\frac{x_t^2}{(x_t-1)} \left[\frac{1}{(x_t-1)} \ln x_t - \frac{1}{x_t} \right] + \\
&- \frac{3}{4}\frac{x_t^2}{(x_t-1)^2} \left[-\frac{2}{(x_t-1)} \ln x_t + \frac{1}{x_t} + 1 \right] = \\
&= \frac{x_t}{2} F(x_t)
\end{aligned} \tag{13.28}
$$

con $F(1) = 3/2$, $F(+\infty) = 1/2$.

Sostituendo[21] i valori $M_W = 80.399$ GeV, $m_t = 172.9$ GeV, $x_t = 4.62$, si trova:

$$
F(x_t) = 1.093. \tag{13.29}
$$

$E(x_c, x_c)$**:** Si ottiene dal limite della (13.28) per $x \to 0$. Troviamo:

$$
E(x_c, x_c) = x_c \tag{13.30}
$$

$E(x_c, x_t)$**:**

$$
\begin{aligned}
E(x_c, x_t) &= x_c x_t \int_0^\infty dt \left(1 + 2t + \frac{1}{4}t^2 \right)) \frac{1}{(t+x_c)(t+x_t)} \frac{1}{(t+1)^2} = \\
&= x_c x_t \left[\frac{1}{4}\mathcal{I}(x_c, x_t) + \frac{3}{2}\mathcal{I}_1(x_c, x_t, 1) - \frac{3}{4}\mathcal{I}_2(x_c, x_t, 1) \right]
\end{aligned} \tag{13.31}
$$

L'integrale ha una singolarità logaritmica per $x_c \to 0$ che si isola facilmente, ottenendo:

$$
E(x_c, x_t) = x_c \ln \frac{1}{x_c} \tag{13.32}
$$

13.2 Lagrangiana effettiva, fattore di colore, saturazione del vuoto.

Le ampiezze (13.16) e (13.18) possono essere ottenute come elemento di matrice al primo ordine perturbativo nella Lagrangiana efficace $\mathcal{L}_{eff}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{eff}(d\bar{s} \to \bar{d}s) &= -\frac{G_F^2 M_W^2}{16\pi^2} \times \sum_{i,j=c,t} C_i C_j E(x_i, x_j) \times \\
&\times \left[\bar{d}\gamma_\mu (1-\gamma_5) s \right] \left[\bar{d}\gamma^\mu (1-\gamma_5) s \right]
\end{aligned} \tag{13.33}
$$

Adesso i simboli s e $\bar{d}$ indicano i *campi* dei quark. Se prendiamo l'elemento di matrice della (13.33) tra gli stati iniziali indicati nella (13.3) e applichiamo le regole della contrazione degli

operatori nella lagrangiana con gli operatori di creazione delle particelle/antiparticelle negli stati iniziali e finali, troviamo un fattore due relativo alla scelta del campo s con cui annichilare il quark strano iniziale. Ci sono poi due possibilità a seconda che si scelga di annichilare l'anti-d dello stato iniziale con il campo $\bar{d}$ nello stesso covariante cui appartiene il campo s di prima o nell'altro. Nel primo caso si trova il risultato (13.16) relativo al grafico in Fig. 13.1 (a). Nel secondo si trova il risultato (13.18) relativo al grafico in Fig. 13.1 (b).

L'operatore locale

$$[\bar{d}(x)\gamma^\sigma(1-\gamma_5)s(x)] \tag{13.34}$$

è in grado di annichilare una coppia $s\bar{d}$ e creare una coppia $d\bar{s}$. Nello stato con momento angolare orbitale $L = 0$ e spin totale $S = 0$, la coppia quark-antiquark ha gli stessi numeri quantici dei mesoni pseudoscalari $\bar{K}^0 = (s\bar{d})$ e $K^0 = (d\bar{s})$.

L'operatore (13.34) ha dunque proprietà analoghe a quelle dell'operatore di campo $\bar{K}^0(x)$ che appunto é in grado di annichilare un mesone $\bar{K}^0$ e creare un mesone K^0. Con una certa approssimazione[3] possiamo identificare l'operatore locale (13.34) con il campo del $\bar{K}^0$, salvo un appropriato fattore di ragguaglio. Usando la simmetria di spin isotopico, il fattore di ragguaglio si calcola a partire dall'ampiezza che descrive il decadimento leptonico del $K^- = (u\bar{s})$, che coinvolge l'elemento di matrice della corrente carica e che si parametrizza in termini di una costante di decadimento f_K. Scriviamo:

$$< 0|\bar{u}(0)\gamma^\mu(1-\gamma_5)s(0)|K^- >= if_K p^\mu < 0|K^-(0)|K^- > \tag{13.35}$$

da cui (la corrente vettoriale ha elemento di matrice nullo per parità):

$$\bar{u}(x)\gamma^\mu\gamma_5 s(x) = f_K \frac{\partial}{\partial x_\mu} K^-(x)$$

e per la simmetria di spin isotopico:

$$\bar{d}(x)\gamma^\mu\gamma_5 s(x) = f_K \frac{\partial}{\partial x_\mu} \bar{K}^0(x) \tag{13.36}$$

Nota. Se prendiamo la derivata della eq. (13.36) e usiamo le equazioni di Dirac per i quark liberi (cfr. Cap. 11), otteniamo:

$$\partial_\mu(\bar{d}\gamma^\mu\gamma_5 s) = (m_s + m_d)(i\bar{d}\gamma_5 s) = -m_K^2 \bar{K}^0 \tag{13.37}$$

La densità pseudoscalare ha il ruolo di campo interpolante del $\bar{K}^0$. Per le densità pseudoscalari è facile convincersi (cfr. [12], Cap. 3) che, sotto la trasformazione CP:

$$CP(i\bar{d}\gamma_5 s)(CP)^{-1} = -(i\bar{s}\gamma_5 d) \tag{13.38}$$

ovvero

$$CP\bar{K}^0(CP)^{-1} = -K^0 \tag{13.39}$$

di qui l'opportunità della convenzione scelta nel Cap. 9, eq. (12.6).

[3] tanto migliore quanto piú è piccola la massa del mesone.

Fattore di colore. Per scrivere correttamente la lagrangiana effettiva in termini dei campi $\bar{K}^0$ e K^0 occorre tenere conto del colore dei quark e del fatto che gli stati di mesone sono singoletti di colore. In presenza del colore, l'operatore (13.34) si deve scrivere come:

$$\bar{d}(x)\gamma^\sigma(1-\gamma_5)s(x) = \sum_{a=1,3} \bar{d}^a(x)\gamma^\sigma(1-\gamma_5)s_a(x) \tag{13.40}$$

e di conseguenza:

$$\begin{aligned}&[\bar{d}(x)\gamma^\sigma(1-\gamma_5)s(x)][\bar{d}(x)\gamma^\sigma(1-\gamma_5)s(x)] = \\ &= \sum_{a,b=1,3} [\bar{d}^a(x)\gamma^\sigma(1-\gamma_5)s_a(x)][\bar{d}^b(x)\gamma^\sigma(1-\gamma_5)s_b(x)]\end{aligned} \tag{13.41}$$

Per scegliere la coppia di campi $\bar{d}$ e s da associare al mesone $\bar{K}^0$ dobbiamo di nuovo fare una duplice scelta: (i) da quale corrente prelevare il campo relativo all'antiquark d, che ci dà come prima un fattore 2, e(ii) da quale corrente prelevare il campo del quark s. Se lo scegliamo nella stessa corrente, i campi sono già in singoletto di colore, ma se lo scegliamo nell'altra abbiamo la combinazione $\bar{d}^a\ s_b$ che dobbiamo proiettare sul singoletto di colore e sullo stato spaziale giusto. Il secondo punto non presenta problemi: possiamo usare la trasformazione di Fierz per mostrare che, tenuto conto delle proprietà di anticommutazione dei campi fermionici:

$$[\bar{\psi}_1\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_2][\bar{\psi}_3\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_4] = +[\bar{\psi}_1\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_4][\bar{\psi}_3\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_2] \tag{13.42}$$

ovvero:

$$[\bar{d}^a\gamma^\mu(1-\gamma_5)s_a][\bar{d}^b\gamma^\mu(1-\gamma_5)s_b] = [\bar{d}^a\gamma^\mu(1-\gamma_5)s_b][\bar{d}^b\gamma^\mu(1-\gamma_5)s_a] \tag{13.43}$$

Per associare il mesone $\bar{K}^0$ al primo dei bilineari del secondo membro, dobbiamo proiettare sul singoletto di colore. Questo si fa usando la relazione di completezza delle matrici di $SU(3)$, $\mathbf{1}$ e λ^A $(A = 1, \cdots, 8)$, in analogia con la trasformazione di Fierz. Possiamo scrivere:

$$\delta^a_d\delta^c_b = C_0\delta^a_b\delta^c_d + C_8\sum_A(\lambda^A)^a_b(\lambda^A)^c_d \tag{13.44}$$

saturando i due membri con δ^b_a troviamo:

$$\delta^c_d = 3C_0\delta^c_d + C_8\sum_A Tr(\lambda^A)(\lambda^A)^c_d = 3C_0\delta^c_d \tag{13.45}$$

dato che le matrici di Gell-Mann hanno traccia nulla. Quindi $C_0 = 1/3$. Questo risultato determina il fattore di colore tra l'operatore che compare nella lagrangiana effettiva (13.33) e l'operatore $(K^0)^2$:

$$\begin{aligned}&[\bar{d}(x)\gamma^\sigma(1-\gamma_5)s(x)][\bar{d}(x)\gamma^\sigma(1-\gamma_5)s(x)] = (1+\frac{1}{3})(f_K\frac{\partial}{\partial x_\mu}\bar{K}^0 f_K\frac{\partial}{\partial x^\mu}\bar{K}^0) = \\ &= \frac{4}{3}(f_K m_K)^2(\bar{K}^0)^2\end{aligned} \tag{13.46}$$

e quindi:

$$\mathcal{L}_{eff}(d\bar{s} \to \bar{d}s) = -\frac{G_F^2 M_W^2}{12\pi^2} \times \sum_{i,j=c,t} C_i C_j E(x_i, x_j) \times m_K^2 f_K^2 \times (\bar{K}^0)^2 \ + \text{h.c.} + \cdots \tag{13.47}$$

dove abbiamo trascurato termini in cui l'operatore (13.47) connette il mesone K a stati intermedi piu' pesanti (cfr. la discussione seguente sulla saturazione del vuoto).

Elemento di matrice. Siamo adesso in grado di calcolare l'elemento di matrice dell'Hamiltoniana efficace nel sistema di quiete dei mesoni K, che ci dà l'elemento fuori diagonale della matrice di massa, M_{12}, eq. (12.2):

$$\begin{aligned}
&M_{12}(\bar{K}^0 \to K^0) =< K^0|\mathcal{H}_{eff}|\bar{K}^0 >=< K^0| - \mathcal{L}_{eff}|\bar{K}^0 >= \\
&= \frac{G_F^2 M_W^2}{12\pi^2} \times \sum_{i,j=c,t} C_i C_j E(x_i, x_j) \times m_K^2 f_K^2 < K^0|(\bar{K}^0)^2|\bar{K}^0 >= \\
&= \frac{G_F^2 M_W^2}{12\pi^2} \times \sum_{i,j=c,t} C_i C_j E(x_i, x_j) \times m_K^2 f_K^2 \frac{2}{2m_K} = \\
&= \frac{(G_F M_W^2)(G_F f_K^2)}{12\pi^2} \times \sum_{i,j=c,t} C_i C_j E(x_i, x_j) \times m_K
\end{aligned} \tag{13.48}$$

Saturazione del vuoto. Per apprezzare il significato della (13.48), consideriamo l'elemento di matrice tra stati di K^0 e $\bar{K}^0$ della Lagrangiana effettiva di partenza:

$$< K^0|\mathcal{L}_{eff}(0)|\bar{K}^0 >= Cost < K^0|[\bar{s}(0)\gamma^\sigma(1-\gamma_5)d(0)][\bar{s}(0)\gamma_\sigma(1-\gamma_5)d(0)]|\bar{K}^0 > \tag{13.49}$$

Inserendo un insieme completo di stati tra i bilineari dei quark, troviamo:

$$\begin{aligned}
&< K^0|\mathcal{L}_{eff}|\bar{K}^0 >= \\
&= Cost \cdot 2 \sum_n < K^0|\bar{s}(0)\gamma^\sigma(1-\gamma_5)d(0)|n >< n|\bar{s}(0)\gamma^\sigma(1-\gamma_5)d(0)|\bar{K}^0 >= \\
&= Cost \cdot \frac{8}{3} \sum_n < K^0|\bar{s}(0)\gamma^\sigma(1-\gamma_5)d(0)|0 >< 0|\bar{s}(0)\gamma^\sigma(1-\gamma_5)d(0)|\bar{K}^0 > \ + \cdots
\end{aligned} \tag{13.50}$$

dove abbiamo isolato il contributo dello stato di energia minima, il vuoto. Se ora usiamo la (13.35), otteniamo per il termine con il vuoto lo stesso elemento di matrice che otterremmo con la (13.48). Quindi, usare la (13.48) corrisponde ad assumere che lo stato di vuoto dia il contributo piú importante alla somma ((13.50). Questa approssimazione prende il nome di *saturazione del vuoto.*

Per tener conto degli stati intermedi successivi allo stato di vuoto, si introduce un parametro B_K (B-factor), scrivendo l'elemento di matrice della Lagrangiana efficace come:

$$\begin{aligned}
&< K^0|\mathcal{L}_{eff}(0)|\bar{K}^0 >=< K^0|\mathcal{L}_{eff}(0)|\bar{K}^0 > |_{vac.sat.} \times B_K = \\
&= Cost \cdot \frac{8}{3} m_K^2 (f_K^2 B_K)| < 0|K^0|K^0 > |^2
\end{aligned} \tag{13.51}$$

Il calcolo dell'elemento di matrice nella (13.48) con la QCD su reticolo porta a valori di B_K prossimi all'unitá [35], giustificando qualitativamente l'ipotesi della saturazione del vuoto.

13.3 Le ampiezze $\bar{B}^0_d \to B^0_d$, $\bar{B}^0_s - B^0_s$ e $\bar{D}^0 \to D^0$

Mesoni B. Le transizioni dei mesoni B corrispondono, in termini di quark, a processi del tipo:

$$b + \bar{q}' \to \bar{b} + q' \tag{13.52}$$

con: $q' = d,\ s$, e sono descritti dagli stessi grafici in Fig. 13.1 con gli ovvi cambiamenti. I quark scambiati nelle linee interne sono ancora u, c, t e possiamo usare la formula (13.48) con appropriata ridefinizione dei coefficienti C_i .

Mesoni D. In questo caso, i quark scambiati nelle linee interne sono i quark di tipo *down*, d, s e b. Troviamo immediatamente, per la lagrangiana efficace e per l'elemento di matrice di transizione $D^0 - \bar{D}^0$:

$$\mathcal{L}_{eff}(u\bar{c} \to c\bar{u}) = -\frac{G_F^2 M_W^2}{16\pi^2} \times \sum_{i,j=s,b} C_i C_j E(x_i, x_j) \left[\bar{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)c\right] \left[\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)c\right] \tag{13.53}$$

$$M_{12}(\bar{D}^0 \to D^0) = \frac{(G_F M_W^2)(G_F f_D^2)}{12\pi^2} \times \sum_{i,j=s,b} C_i C_j E(x_i, x_j) \times m_D \tag{13.54}$$

13.4 Analisi numerica e confronto con i dati

Le formule per i coefficienti CKM che compaiono nelle ampiezze di transizione dei mesoni K e B ed i corrispondenti valori numerici sono riassunti nella Tab. 13.4. I valori delle funzioni di Inami-Lim rilevanti sono riportati nella Tabella successiva.

Le formule nella Tab. 13.4 sono basate sulla parametrizzazione semplificata della matrice CKM riportata nella (9.19). Questa parametrizzazione é generalmente sufficiente, tranne nel caso cc in cui non descrive la piccola parte immaginaria. In questo caso, una formula piú precisa si ottiene dalla (9.18):

$$\begin{aligned} C_c^2 &= \left[-\lambda + A^2\lambda^2\left(1 - 2\rho + 2i\eta\right)\right]^2 \times \left[1 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{8}\lambda^4(1+4A^2)\right]^2 = \\ &= 5.07 \cdot 10^{-2} - i5.65 \cdot 10^{-5} \end{aligned} \tag{13.55}$$

Per facilitare il confronto tra i risultati con le due parametrizzazioni, nella Tab. 13.4 riportiamo tra parentesi quadra i valori ottenuti con la parametrizzazione piú accurata, eq. (9.18).

Costanti di decadimento dei mesoni pseudoscalari Nell'approssimazione della saturazione del vuoto, l'elemento di matrice della Lagrangiana efficace richiede la costante di decadimento dei mesoni pseudoscalari carichi, f_P, definita nella (13.36) per i K, con analoghe estensioni ai mesoni con sapori piú elevati. All'ordine piú basso nelle interazioni deboli, f_P si ottiene dalla velocità di decadimento del processo:

$$P^+ \to l^+ + \nu_l \tag{13.56}$$

	$\bar{K}^0 \to K^0$	$\bar{B}^0_d \to B^0_d$	$\bar{B}^0_s \to B^0_s$
cc	$\lambda^2(1-\lambda^2)$	$A^2\lambda^6$	$A^2\lambda^4(1-\lambda^2)$
	$4.81\ 10^{-2}$	$8.51\ 10^{-5}$	$1.59\ 10^{-3}$
	$[5.07\ 10^{-2} - i5.65\ 10^{-5}]$	$[8.51\ 10^{-5} - i9.75\ 10^{-8}]$	$[1.59\ 10^{-3}]$
ct	$A^2\lambda^6(1-\frac{1}{2}\lambda^2)(1-\rho+i\eta)$	$-A^2\lambda^6(1-\rho+i\eta)$	$-A^2\lambda^4(1-\frac{1}{2}\lambda^2)$
	$(7.20+i2.83)\ 10^{-5}$	$(-7.29+i2.90)\ 10^{-5}$	$-1.64\ 10^{-3}$
	$[(7.04+i2.83)\ 10^{-5}]$	$[(-7.39+i2.78)\ 10^{-5}]$	$[-1.58\ 10^{-3} + i2.78\ 10^{-5}]$
tt	$A^4\lambda^{10}(1-\rho+i\eta)^2$	$A^2\lambda^6(1-\rho+i\eta)^2$	$A^2\lambda^4$
	$(9.11+i8.46)\ 10^{-8}$	$(5.42+i5.04)\ 10^{-5}$	$1.68\ 10^{-3}$
	$[(8.65+i8.29)\ 10^{-8}]$	$[(5.34+i4.77)\ 10^{-5}]$	$[1.56\ 10^{-3} - i5.51\ 10^{-5}]$

Tabella 13.1: Espressioni e valori dei coefficienti $C_iC_j = (U^*_{iq'}U_{iq})(U^*_{jq'}U_{jq})$; $q = s, b$; $q' = d, s$, che determinano i contributi dei quark $i, j = c, t$ nelle transizioni con $\Delta F = 2$ di $K^0, B^0_d, \bar{B}^0_s$. Per i parametri CKM cfr. Cap. 9, Sez. 9.2. Sotto ciascuna riga, i valori numerici dei coefficienti C_iC_j, eq. (9.19) ovvero eq. (9.18).

secondo la formula:

$$\Gamma(P^+ \to l^+ + \nu_l) = \frac{G_F^2}{8\pi} f_P^2 m_l^2 m_P \left(1 - \frac{m_l^2}{m_P^2}\right) |U_{q_1q_2}| \tag{13.57}$$

dove $U_{q_1q_2}$ è l'elemento della matrice CKM relativo all'annichilazione della coppia quark-antiquark nello stato iniziale. Riportiamo nella Tab. 13.4 i valori delle costanti di decadimento dei mesoni π, K, D, Ref. [36]. Valori di $f_{B_{d,s}}$ si ottengono al momento da calcoli di QCD su reticolo, cfr. Reff. [37] e [39].

	ss	sb	bb
C_iC_j	$\lambda^2(1-\lambda^2)$	$A^2\lambda^6(1-\frac{1}{2}\lambda^2)(\rho+i\eta)$	$A^4\lambda^{10}(\rho+i\eta)^2$
	$4.82\ 10^{-2}$	$(1.10-i2.83)\ 10^{-5}$	$(-1.41+i1.29)\ 10^{-8}$
	$[4.81\ 10^{-2} + i2.83\ 10^{-5}]$	$[(1.09+i2.83)\ 10^{-5}]$	$[(-1.41+i1.29)\ 10^{-8}]$

Tabella 13.2: Espressioni e valori dei coefficienti CKM relativi al caso del D^0, $C_iC_j = (U_{ci}U^*_{ui})(U_{cj}U^*_{uj})$; $i, j = s, b$. Sotto ciascuna espressione, i valori numerici dei coefficienti C_iC_j, eq. (9.19) ovvero eq. (9.18)

	$E(x_1, x_1)$	$2E(x_1, x_2)$	$E(x_2, x_2)$
$q_{1,2} = c,\ t$	$3.48\ 10^{-4}$	$5.54\ 10^{-3}$	2.53
$q_{1,2} = s,\ b$	$3.48\ 10^{-6}$	$4.88\ 10^{-5}$	$3.87\ 10^{-3}$

Tabella 13.3: Valori delle funzioni di Inami e Lim; $q_{1,2} = c,\ t$ ovvero $s,\ b$ sono i quark scambiati nel loop. Valori usati per le masse (in GeV): $m_c = 1.5,\ m_t = 173,\ m_s = 0.150,\ m_b = 5.0$.

$f(\pi^+)$	$f(K^+)$	$f(D^+)$	$f(D_s^+)$	$\sqrt{B_d} f(B_d)$	$\xi = \frac{\sqrt{B_s} f(B_s)}{\sqrt{B_d} f(B_d)}$
130.41 ± 0.03	156.1 ± 0.8	206.7 ± 8.9	257.5 ± 6.1	230 ± 25	1.14 ± 0.04

Tabella 13.4: Valori delle costanti di decadimento dei mesoni pseudoscalari, f_P (MeV), definite secondo la (13.36). Per semplicità, riportiamo solo l'errore maggiore tra quelli citati nella [36]. I valori per $B_{d,s}$ sono ottenuti da calcoli di QCD su reticolo, che danno direttamente la costante di decadimento moltiplicata per la radice del B-factor, eq. (13.51).

Correzioni di QCD e fattori B. Nel caso dei parametri del K^0, l'eq. (13.48) si riscrive al modo seguente:

$$M_{12}(\bar{K}^0 \to K^0)|_{corr} = \frac{(G_F M_W^2)(G_F f_K^2)}{12\pi^2} \times$$
$$\times \left[\eta_1 C_c^2 E(x_c, x_c) + \eta_2 C_t^2 E(x_t, x_t) + 2\eta_3 C_c C_t E(x_c, x_t)\right] \times m_K \times B_K \tag{13.58}$$

dove i coefficienti $\eta_{1,2,3}$ sono le correzioni di QCD ai diagrammi box e B_K il fattore B. Nella Ref. [39] si possono trovare i riferimenti agli articoli originali ed una compilazione dei valori piú recenti:

$$\eta_1 = 1.38;\ \eta_2 = 0.574;\ \eta_3 = 0.47;\ B_K = 0.87 \tag{13.59}$$

(per le correzioni next-to-leading, cfr. [40]).

Nel caso dei mesoni B, il risultato é, come detto, dominato dal quark t e scriviamo:

$$M_{12}(\bar{B}^0 \to B^0)|_{corr} = \frac{(G_F M_W^2)(G_F B_B f_B^2)}{12\pi^2} \eta_b C_t^2 E(x_t, x_t) \times m_B \tag{13.60}$$

dove $\eta_b = 0.55$ rappresenta la correzione di QCD e B_B l'appropriato fattore B, Tab. 13.4.

Confronto con i dati. Nel caso del K^0, è da notare il valore piccolissimo di $Re(C_t)^2$ rispetto a $Re(C_c)^2$. Nonostante sia $x_t >> x_c$, la differenza di massa $K^0 - \bar{K}^0$ è dominata dallo scambio del quark charm, come nella teoria GIM, e la connessione di questa differenza con la scala di

massa del quark charm resta valida anche nella teoria CKM. Lo scambio del top domina invece il parametro di violazione di CP, ϵ.

I coefficienti CKM per i mesoni B sono dello stesso ordine di grandezza ed il contributo del quark top domina parte reale e parte immaginaria di M_{12}.

Il caso del D^0 è simile a quello del K^0. Il termine sb (corte distanze ?) domina la parte immaginaria di M_{12} mentre il quark s (lunghe distanze) domina la parte reale, che peró é sostanzialmente incalcolabile dovuto alle correzioni forti, in particolare gli effetti della rottura di $SU(3)$[4].

In conclusione, si possono ottenere predizioni affidabili per $ImM_{12}(K, B)$ e per ReM_{12} di $B^0_{d,s}$, quantitá che sono dominate da contributi a corte distanze con correzioni di QCD calcolabili (ad oggi, fino ai termini next-to-next leading order in α_S). Il caso di $ReM_{12}(K^0)$ è al margine della zona affidabile. Nel seguito ci concentriamo sul calcolo di $M_{12}(K^0)$, parte reale e immaginaria, e di $|\Delta M|$ per B^0_d e B^0_s.

Riportiamo nella Tab. 13.4, prima riga, i risultati del calcolo per i parametri relativi a K^0, B^0_d e B^0_s, ottenuti a partire dai grafici box e dai valori numerici delle Tabb. 13.4, 13.4 e 13.4. Ricordiamo che $|\Delta M(B)| = 2|M_{12}|$, cfr. l'eq. (12.34).

I valori calcolati, sebbene generalmente dell'ordine giusto, si discostano anche considerevolmente dai valori osservati. L'accordo migliora considerevolmente se si introducono le correzioni di QCD e le correzioni stimate dalla QCD su reticolo per le deviazioni dall'approssimazione di saturazione del vuoto, seconda riga.

	$\lvert\epsilon_K\rvert$	Δm_K	$\lvert\Delta M(B^0_d)\rvert$	$\lvert\Delta M(B^0_s)\rvert$	$\lvert\Delta M(D^0)\rvert$
diag. box	$6.34\ 10^{-3}$	$3.12\ 10^{-12}$	$7.51\ 10^{-10}$	$294\ 10^{-10}$	$2.0\ 10^{-13} \cdot (\frac{m_s}{0.15GeV})^2$
QCD & B-fact.	$2.65\ 10^{-3}$	$3.85\ 10^{-12}$	$4.13\ 10^{-10}$	$119\ 10^{-10}$	??
val. sperim.	$2.228\ 10^{-3}$	$3.483\ 10^{-12}$	$3.34\ 10^{-10}$	$117.0\ 10^{-10}$	$(1.57 \pm 0.39)\ 10^{-11}$

Tabella 13.5: Masse in MeV

Considerando ρ ed η come variabili libere, possiamo tracciare nel piano $\rho - \eta$ le curve che corrispondono ai valori sperimentali di ϵ_K e $\Delta M(B^0_d)$ e che individuano, con la loro intersezione, i valori dei coefficienti ρ ed η della matrice CKM. Il risultato é riportato nella Fig. 13.2 ed é in buon accordo con i valori del Particle Data Group, rappresentati dal punto riportato in figura, eq. (9.20), e ottenuti usando tutte le informazioni disponibili sulle transizioni deboli, con e senza violazione di CP, vedi la Fig 9.2.

[4]nel limite $m_s = m_d$ il mixing é nullo; per una discussione recente del caso del D^0, vedi [41].

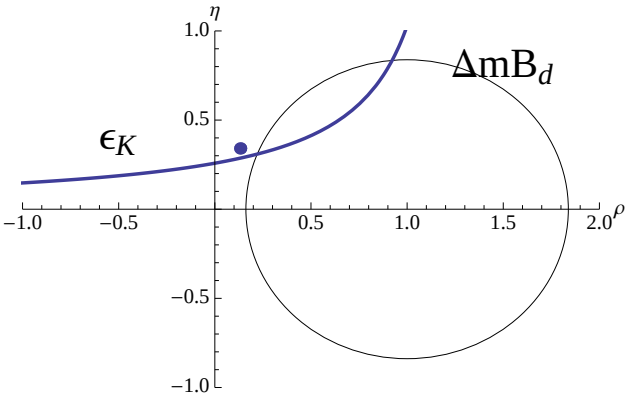

Figura 13.2: Determinazione dei coefficienti ρ ed η della matrice CKM a partire dal valori di $|\epsilon_K|$ e $|\Delta M(B_d^0|$ usando le formule teoriche del testo. Il punto in figura é il valore riportato dal PdG, eq. (9.20).

Capitolo 14

SEGNATURE SPERIMENTALI DEL BOSONE DI HIGGS

Appendice A

Rappresentazione di Kallen-Lehman per la funzione a due punti

A.1 Operatori di creazione e di distruzione nella normalizzazione del continuo

È utile formulare la teoria del campo scalare libero in termini di operatori di creazione e distruzione che soddisfano una condizione di normalizzazione adatta al limite di volume infinito, a differenza degli operatori introdotti in [1].

Consideriamo i campi in un cubo di volume V con condizioni periodiche. Definiamo un sistema di soluzioni dell' equazione di Klein-Gordon (K-G) a frequenza positiva:

$$\begin{aligned} f_q(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{q})V}} e^{-iqx}; \quad (\Box + m^2) f_q = 0; \\ \mathbf{q} &= \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3); \quad \omega(\mathbf{q}) = +\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} \end{aligned} \tag{A.1}$$

dove $n_{1,2,3}$ sono interi e L è il lato del cubo, $V = L^3$. Le funzioni (A.1) sono normalizzate in V come:

$$\int_V d^3x \; f_q^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_t f_{q'}(x) = \delta_{q,q'} \tag{A.2}$$

dove abbiamo introdotto l' abbreviazione:

$$f \overleftrightarrow{\partial}_t g = f(\partial_t \; g) - (\partial_t \; f) g \tag{A.3}$$

Possiamo costruire gli operatori di creazione e distruzione a partire da ϕ e dalle f_q come:

$$\begin{aligned} a_q &= \int d^3x \; \left[f_q(x)^* i \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x)) \right]; \quad \text{(distruzione)} \\ a_q^\dagger &= (a_q)^\dagger \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(creazione)} \\ \left[a_q, a_{q'}^\dagger \right] &= i\delta_{q,q'} \end{aligned} \tag{A.4}$$

Dopo l' integrazione spaziale, gli operatori a_q potrebbero dipendere dal tempo ma è immediato mostrare che di fatto sono costanti, in virtù dell' equazione di K-G:

$$\begin{aligned}
\partial_t a_q &= i \int d^3x \ \left[f_q(x)^* (\partial_t^2 \phi(x)) - (\partial_t^2 f_q(x)^*) \phi(x) \right] = \\
&= i \int d^3x \ \left[f_q(x)^* (\Box \phi(x)) - (\Box f_q(x)^*) \phi(x) \right] = \\
&= i \int d^3x \ \left[f_q(x)^* (\Box + m^2) \phi(x) \right] = 0
\end{aligned} \tag{A.5}$$

poiché sia f_q che ϕ soddisfano l' equazione di K-G.

Per passare al limite continuo, introduciamo l' operatore di proiezione sugli stati con momento compreso in un intervallo tridimensionale, $\Delta^3 n$:

$$P = \sum_{\Delta^3 n} |p\rangle\langle p| \tag{A.6}$$

$P^2 = P$ in virtú della ortonormalitá degli stati $|p\rangle$. Se adesso passiamo al limite di volume infinito, otteniamo:

$$P = \int_{\Delta^3 p} |p\rangle \frac{V \ d^3p}{(2\pi)^3} \langle p| \tag{A.7}$$

La (A.7) suggerisce di definire dei ket normalizzati al continuo:

$$|\tilde{p}\rangle = \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}} |p\rangle \tag{A.8}$$

per i quali:

$$P = \int_{\Delta^3 p} |\tilde{p}\rangle \ d^3p \ \langle \tilde{p}| \tag{A.9}$$

La condizione $P^2 = P$ richiede, come condizione di normalizzazione dei nuovi ket:

$$\langle \tilde{p}' | \tilde{p} \rangle = \delta^{(3)}(p' - p) \tag{A.10}$$

Gli operatori di distruzione e creazione che corrispondono ai nuovi stati sono, evidentemente:

$$\tilde{a}_p = \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}} a_p; \quad \tilde{a}_p^\dagger = (\tilde{a}_p)^\dagger \tag{A.11}$$

e le nuove regole di commutazione si ottengono dalla (A.10):

$$\delta^{(3)}(p' - p) = \langle 0 | \tilde{a}_{p'} \tilde{a}_p^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \left[\tilde{a}_{p'}, \tilde{a}_p^\dagger \right] | 0 \rangle; \tag{A.12}$$

ovvero:

$$\left[\tilde{a}_{p'}, \tilde{a}_p^\dagger \right] = \delta^{(3)}(p' - p) \tag{A.13}$$

Lo sviluppo del campo si scrive adesso come:

$$\phi(x) = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p})V}} \left[a_p\ e^{-ipx} + a_p^\dagger\ e^{ipx}\right] =$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\ \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p})}} \left[\tilde{a}_p\ e^{-ipx} + \tilde{a}_p^\dagger\ e^{ipx}\right] \tag{A.14}$$

I nuovi stati sono normalizzati ad avere, piuttosto che una particella nel volume di riferimento, una densitá di particelle costante. Questo si vede calcolando l' energia del campo, che risulta pari a (introduciamo qui il prodotto normale degli operatori, come definito in [1]):

$$H = \int d^3x\ \frac{1}{2}\left[: (\partial_t\phi)^2 : + : (\nabla\phi)^2 : + m^2 : \phi^2 :\right] =$$
$$= \int d^3p\ \omega(\mathbf{p})\ \tilde{a}_p^\dagger \tilde{a}_p;$$
$$E_p = \langle\tilde{p}|H|\tilde{p}\rangle = \delta^{(3)}(0)\omega(\mathbf{p}) = \frac{V}{(2\pi)^3}\omega(\mathbf{p}) \tag{A.15}$$

Si vede quindi che la densitá di particelle nello stato $|\tilde{p}\rangle$ è: $\rho = 1/(2\pi)^3$.

Infine, notiamo che la relazione che lega i campi agli operatori di distruzione, si scrive:

$$\tilde{a}_q = \int d^3x\ \left[\tilde{f}_q(x)^* i \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x))\right];$$
$$\tilde{f}_q(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega(\mathbf{p})}} e^{-ipx} \tag{A.16}$$

Nel seguito, adotteremo la normalizzazione del continuo, omettendo per brevitá la tilde sugli operatori e sulle funzioni f_q.

A.2 La rappresentazione di Kallen-Lehman

In questa sezione studiamo la forma esatta della funzione di Green a due punti per un campo scalare reale. In una teoria di campo con interazioni non è possibile calcolare esattamente le funzioni di Green, ma la richiesta di invarianza rispetto a trasformazioni di Lorentz e una ragionevole ipotesi sulla struttura degli stati ad una e più particelle permette di stabilire una *rappresentazione spettrale* della funzione a due punti.

L'idea della rappresentazione spettrale è molto semplice: scriviamo, per $x^0 > 0$

$$\langle 0|T\ (\phi(x)\,\phi(0))\,|0\rangle = \langle 0|\phi(x)\,\phi(0)|0\rangle = \sum_\alpha \langle 0|\phi(x)|\alpha\rangle\langle\alpha|\,\phi(0)|0\rangle \tag{A.17}$$

Alla somma sugli stati intermedi possono contribuire stati ad una particella $|\mathbf{p}\rangle$ e stati con due o più particelle. quindi dividiamo la somma (e il risultato) in due parti:

$$\langle 0|\phi(x)\,\phi(0)|0\rangle = \langle 0|\phi(x)\,\phi(0)|0\rangle_1 + \langle 0|\phi(x)\,\phi(0)|0\rangle_{(>1)} \tag{A.18}$$

Il contributo degli stati a una particella può essere scritto esplicitamente, cfr. l' eq. (A.9):

$$\langle 0|\phi(x)\,\phi(0)|0\rangle_1 = \int d^3p \langle 0|\phi(x)|\mathbf{p}\rangle\langle \mathbf{p}|\phi(0)|0\rangle \tag{A.19}$$

Procediamo adesso in due passi.

- La dipendenza da x si ottiene dalla relazione:

$$\phi(x) = e^{iPx}\ \phi(0)\ e^{-iPx} \tag{A.20}$$

  dove P_μ sono gli operatori che rappresentano il quadri-momento totale, da cui:

$$\langle 0|\phi(x)|p\rangle = e^{-ipx}\ \langle 0|\phi(0)|\mathbf{p}\rangle \tag{A.21}$$

- L' elemento di matrice di $\phi(0)$ si parametrizza come:

$$\langle 0|\phi(0)|\mathbf{p}\rangle = \frac{\sqrt{Z(p)}}{\sqrt{(2\pi)^3\ 2\omega(\mathbf{p})}} \tag{A.22}$$

  per cui:

$$\langle 0|\phi(x)\,\phi(y)|0\rangle_1 = \int d^3p \frac{Z(p)}{(2\pi)^3\ 2\omega(\mathbf{p})} e^{-ipx} \tag{A.23}$$

Il punto cruciale è che la Z(p) definita dalla (A.22) *risulta essere Lorentz-invariante.* Essa deve essere quindi una funzione dell' unico invariante che possiamo costruire con il quadri-momento della particella, cioé funzione di $p_\mu p^\mu = m^2$ che è una costante, indipendente dal valore di **p**. La correttezza di questa affermazione, in modo intutitivo ma sostanzialmente corretto, si puó argomentare come segue.

(1) La funzione di Green è Lorentz invariante e cosí la sua restrizione agli stati intermedi ad una particella, il primo membro della (A.23).

(2) Nel secondo membro della (A.23), la misura $d^3p/(2\omega(\mathbf{p}))$ è Lorentz invariante e cosí l' esponenziale exp(-ipx), da cui, per avere un risultato invariante, segue l' invarianza di Z(p).

Possiamo quindi portare Z(p) = Z(m^2) = Z fuori dell' integrale e ottenere:

$$\langle 0|\phi(x)\,\phi(0)|0\rangle_1 = Z \int d^3p \frac{1}{(2\pi)^3\ 2\omega(\mathbf{p})} e^{-ipx}; \quad (\mathrm{x}^0 > 0) \tag{A.24}$$

Se ripetiamo questi passi nel caso $x^0 < 0$ otteniamo, per il contributo degli stati a una particella,

$$\langle 0|\,T\,(\phi(x)\,\phi(0))\ |0\rangle_1 = \frac{Z}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x})}}{2\omega(\mathbf{p})} \left(e^{-i\omega(\mathbf{p})x^0}\theta(x^0) + e^{i\omega(\mathbf{p})x^0}\theta(-x^0)\right)$$

e, paragonando con la definizione del propagatore di Feynman data in [1], otteniamo

$$\langle 0| T\left(\phi(x)\,\phi(0)\right)\,|0\rangle_1 = iZ\ D_F(x;m) \tag{A.25}$$

dove abbiamo introdotto la notazione $D_F(x;m)$ per indicare il propagatore di Feynman relativo a particelle di massa m. La costante Z è indicata col nome di costante di rinormalizzazione del campo.

Gli stati a due o più particelle possono essere caratterizzati sulla base del loro impulso $\mathbf{p}$, della loro massa invariante, M, e della loro energia $E = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}$. Al contrario degli stati di singola particella, che corrispondono a un valoro preciso di m, gli stati a due o più particelle presentano uno spettro continuo di valori di M a partire da una certa soglia M_s. Ad esempio gli stati a due particelle di impulso totale nullo, per i quali $E = M$, saranno composti da due particelle di impulso opposto, $\pm\mathbf{p}$, e quindi $M = E = 2\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} \geq M_s = 2m$[1]. Gli stati che contribuiscono alla somma (A.17) sono creati da ϕ che opera sul vuoto, e avranno momento angolare intrinseco nullo. Quindi anche a questi stati si applicano le considerazioni fatte sugli stati di singola particella, e il contributo degli stati di massa M risulterà proporzionale a $iD_F(x;M)$. Possiamo quindi dare l'espressione generale per la funzione a due punti in una teoria scalare:

$$\langle 0| T\left(\phi(x)\,\phi(0)\right)\,|0\rangle = iZD_F(x;m) + i\int_{M^2=M_s{}^2}^{\infty} dM^2\sigma(M^2)D_F(x;M) \tag{A.26}$$

che dipende da due sole grandezze incognite: la costante di rinormalizzazione Z e la funzione $\sigma(M^2)$ che prende il nome di *funzione spettrale*.

Notiamo che in teoria delle perturbazioni possiamo sviluppare la funzione a due punti in potenze della costante di accoppiamento (λ nella teoria scalare che adottiamo come modello in questo capitolo). Quindi sia la costante di rinormalizzazione Z che la funzione spettrale $\sigma(M^2)$ devono essere considerate come serie di potenze nella costante di accoppiamento. All'ordine zero ci si riduce ai risultati della teoria libera cioé

$$Z = 1; \qquad \sigma(M^2) = 0 \qquad \text{(ordine zero in teoria delle perturbazioni)} \tag{A.27}$$

Piú formalmente ... possiamo dare una costruzione formale del secondo termine nella (A.26) al modo seguente.

Consideriamo per primo il caso $\mathrm{x}^0 > 0$. Il contributo degli stati con piú di una particella si scrive:

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle_{>1} &= \sum_{n>1}\langle 0|\phi(x)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle = \\ &= \sum_{n>1} e^{-iP_n x}\ \langle 0|\phi(x)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle\end{aligned} \tag{A.28}$$

[1]Nella teoria $\lambda\phi^4$, come abbiamo visto, non sono possibili funzioni di Green con numero dispari di punti, ovvero transizioni tra stati con un numero pari e un numero dispari di particelle e la soglia effettiva è $M_s = 3m$.

Gli stati $|n\rangle$ sono stati con 2 o piú particelle, caratterizzati dal quadri-momento totale P_n, piú altri numeri quantici che non dobbiamo specificare. Inseriamo nella (A.28) due funzioni delta, che si integrano esplicitamente ad uno:

$$\begin{aligned}
&\sum_n \langle 0|\phi(x)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle = \\
&= \int dM^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ \delta(p^2-M^2)\sum_n (2\pi)^4\delta^{(4)}(p-P_n)e^{-iP_nx}\ \langle 0|\phi(x)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle = \\
&= \int dM^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ \delta(p^2-M^2)e^{-ipx}\sum_n (2\pi)^4\delta^{(4)}(p-P_n)\ \langle 0|\phi(x)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle \qquad \text{(A.29)}
\end{aligned}$$

dove abbiamo portato l' esponenziale fuori della somma usando la funzione delta.

Il punto cruciale è che, come nel caso della singola particella, la somma sugli stati dà una funzione del quadri-momento p che è *invariante di Lorentz*. Quindi la somma deve essere una funzione di p^2 ovvero, in virtú della seconda funzione delta, di M^2. Possiamo denotare questa funzione come:

$$(2\pi)\sigma(M^2) = \sum_n (2\pi)^4\delta^{(4)}(p-P_n)\ \langle 0|\phi(x)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle \qquad (M^2 = p^2\ ) \qquad \text{(A.30)}$$

ed ottenere:

$$\begin{aligned}
\langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle_{>1} &= \int dM^2\sigma(M^2)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ e^{-ipx} = \\
&= \int dM^2\sigma(M^2)\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\omega(p,M)}\ e^{-i(\omega(p,M)t}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \qquad \text{(A.31)}
\end{aligned}$$

dove $\omega(p,M)$ è l' energia che corrisponde ad una particella di quadri-momento p e massa M.

Ripetiamo l' argomento per $x^0 < 0$ e cambiamo la variabile di integrazione $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$. Troviamo:

$$\begin{aligned}
\langle 0|\phi(0)\phi(x)|0\rangle_{>1} &= \int dM^2\sigma(M^2)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ e^{+ipx} = \\
&= \int dM^2\sigma(M^2)\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\omega(p,M)}\ e^{+i\omega(p,M)t}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \qquad \text{(A.32)}
\end{aligned}$$

In conclusione:

$$\begin{aligned}
&\langle 0|T\left[\phi(x)\phi(0)\right]|0\rangle_{>1} = \\
&\int dM^2\sigma(M^2)\left\{\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\omega(p,M)}\ e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\left[\theta(x^0)e^{-i\omega(p,M)t} + \theta(-x^0)e^{+i\omega(p,M)t}\right]\right\} \qquad \text{(A.33)}
\end{aligned}$$

Confrontando con la ((A.25)) troviamo infine:

$$\begin{aligned}
&\langle 0|T\left[\phi(x)\phi(0)\right]|0\rangle_{>1} = \\
&= i\int dM^2\sigma(M^2)D_F(x,M) \qquad \text{(A.34)}
\end{aligned}$$

La funzione $\sigma(M^2)$ è diversa da zero solo per quei valori di M^2 che corrispondono alla massa di qualche possibile stato intermedio, cioé per $\mathrm{M}^2 > (2m)^2$, quindi i limiti di integrazione vanno da $(2\mathrm{m})^2$ all' infinito [2] e ritroviamo proprio il secondo termine della (A.26).

[2]come già notato, nella teoria $\lambda\phi^4$ lo stato intermedio puó contenere 1, 3, 5, in genere $2k+1$ particelle, quindi la massa minima è 3m.

Appendice B

Una decomposizione utile per matrici finito-dimensionali

Teorema: Una matrice complessa H arbitraria puó essere scritta nella forma:

$$H = MV \tag{B.1}$$

dove M è una matrice hermitiana con autovalori positivi o nulli, V una matrice unitaria[1].

La forma (B.1) generalizza alle matrici la nota decomposizione polare di un numero complesso z, secondo cui:

$$z = \rho e^{i\phi}, \qquad \rho \geq 0 \tag{B.2}$$

Ricordiamo che la decomposizione (B.2) si ottiene direttamente scrivendo:

$$z^2 = (zz^*)(\frac{z}{z^*}) = \rho^2 e^{2i\phi} \tag{B.3}$$

ed estraendo la radice quadrata.

Dimostrazione. La formula (B.3) non si puó estendere direttamente alle matrici, in quanto H e $H^\dagger$ non commutano, in genere, e quindi, anche assumendo che H sia non- singolare, l' espressione $(H^\dagger)^{-1}H$ non fornisce una matrice unitaria, proprio dovuto alla non commutativitá delle due matrici. Restando al caso di una matrice H non-singolare, possiamo mostrare tuttavia che, seppure $HH^\dagger \neq H^\dagger H$, le due matrici obbediscono alla stessa equazione secolare e quindi hanno lo stesso spettro.

Poniamoci all'inizio nel caso in cui H sia una matrice non singolare. Definito:

$$M_a^2 = HH^\dagger; \qquad M_b^2 = H^\dagger H \tag{B.4}$$

si trova:

$$\begin{aligned} &det\left(M_a^2 - \lambda\right) = det\left(H^{-1}H\right) \times det\left(M_a^2 - \lambda\right) = \\ &= det\left[H^{-1}\left(HH^\dagger - \lambda\right)H\right] = det\left(M_b^2 - \lambda\right) \end{aligned}$$

[1] La dimostrazione che segue è derivata da N. Cabibbo [13].

Quindi le matrici M_a^2 e M_b^2 e possono essere diagonalizzate nella stessa matrice con due trasformazioni unitarie, in genere distinte:

$$M_a^2 = U'\rho^2(U')^\dagger; \qquad M_b^2 = V'\rho^2(V')^\dagger \tag{B.5}$$

con ρ^2 diagonale con elementi positivi.

Nel caso generale si arriva alla stessa conclusione per continuitá e ρ puó avere anche valori diagonali nulli.

Costruiamo adesso:

$$h = (U')^\dagger H V' \tag{B.6}$$

Evidentemente si ha:

$$\begin{aligned} hh^\dagger &= (U')^\dagger H H^\dagger U' = (U')^\dagger M_a^2 U' = \rho^2 \\ h^\dagger h &= (V')^\dagger H^\dagger H V' = (V')^\dagger M_b^2 V' = \rho^2 \end{aligned}$$

quindi h e $h^\dagger$ commutano tra loro:

$$hh^\dagger = h^\dagger h \tag{B.7}$$

Possiamo allora applicare lo stesso ragionamento che conduce alla (B.2), scrivendo:

$$h^2 = \left(hh^\dagger\right)\left(\frac{h}{h^\dagger}\right) \tag{B.8}$$

e si verifica facilmente che la seconda parentesi definisce una matrice unitaria:

$$\begin{aligned} &\left[h(h^\dagger)^{-1}\right]^\dagger = \left(h^{-1}h^\dagger\right) = \left(h^\dagger h^{-1}\right) = \\ &= \left[h(h^\dagger)^{-1}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{B.9}$$

Possiamo adesso estrarre la radice quadrata dalla (B.8), un' operazione permessa per matrici hermitiane positive e per matrici unitarie, ed ottenere:

$$h = \rho W \tag{B.10}$$

con ρ positiva e W unitaria. Confrontando infine con la (B.6), otteniamo:

$$H = U'h(V')^\dagger = U'\rho W(V')^\dagger = U'\rho(U')^\dagger U' W(V')^\dagger = MV \tag{B.11}$$

come desiderato.

Corollario: Una qualsiasi matrice complessa H puó essere diagonalizzata con una trasformazione che coinvolge due matrici unitarie (trasformazione bi-unitaria), della forma:

$$H = U\rho V^\dagger \tag{B.12}$$

dove ρ è una matrice diagonale con elementi positivi o nulli, U e V due matrici unitarie.

La rappresentazione (B.12) è stata diffusamente impiegata nella letteratura sulla Interazioni Deboli a partire dagli anni sessanta.

Appendice C

Richiami sulla teoria dei Gruppi Continui e delle loro Rappresentazioni

C.1 GRUPPO

Un *Gruppo* é un insieme G di elementi dotato di una legge di moltiplicazione che soddisfa i seguenti requisiti :

- la legge di moltiplicazione é associativa: $s(ht) = (sh)t$
- esiste l$'$ identitá per moltiplicazioni da sinistra: $se = s$, per ogni s.
- ogni elemento s ha un inverso da sinistra, un elemento che indichamo con s^{-1} tale che:

$$s^{-1}s = e \tag{C.1}$$

Nota 1. Dalla definizione precedente segue:

$$es = s^{-1}(se)s = s^{-1}(s)s = s \tag{C.2}$$

quindi l' identitá per moltiplicazioni da sinistra e da destra coincidono:

$$es = s \ \text{ per ogni } \ s \tag{C.3}$$

Analogamente, l' inverso da destra coincide con quello da sinistra.

Nota 2. Niente abbiamo richiesto sulla commutitivitá del prodotto e, in genere, $sh \neq hs$. I gruppi per cui $sh = hs$ per tutti gli elementi si chiamano *gruppi commutativi* o *abeliani.*

Nota 3. Esiste un gruppo naturale di trasformazioni di G in G definito dall$'$ operazione di coniugazione con un elemento fissato f:

$$g' = T_f(g) = fgf^{-1} \tag{C.4}$$

Nota 4. Nel seguito ci limiteremo a gruppi che formano una varietá continua, differenziabile e compatta. Perché? Le prime due condizioni sono evidenti e naturali: siamo interessati a simmetrie sotto trasformazioni continue sulle variabili di campo, l′ estensione delle rotazioni a trasformazioni interne tipo Spin Isotopico. In Meccanica Quantistica, siamo inoltre interessati a rappresentazioni di queste simmetrie con operatori unitari, che preservano la metrica nello spazio di Hilbert degli stati quantistici. Ora, come vedremo, le rappresentazioni irriducibili dei gruppi compatti sono unitarie, a meno di equivalenze, e finito-dimensionali. Quindi le simmetrie basate su gruppi compatti danno luogo a multipletti finito-dimensionali di particelle, quali si presentano in Natura i gruppi di particelle con masse simili e uguali numeri quantici spazialivcome spin, paritá e coniugazione di carica.

C.2 ALGEBRA DI LIE

Gli elementi dei gruppi continui si possono parametrizzare biunivocamente con un certo numero di variabili $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (in certi casi sono necessarie piú carte per parametrizzare tutta la varietá). In particolare possiamo parametrizzare un intorno di e in modo che in esso i parametri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ siano infinitesimi, con $g(0,0,0) = e$. Questo intorno puó essere considerato uno spazio vettoriale (lo *spazio tangente* alla varietá) e su esso la struttura delle trasformazioni (C.4) si riflette nella struttura di un′ algebra di commutatori, i generatori delle trasformazioni infinitesime:

$$\begin{aligned}
&f \to 1 + i\sum_i \alpha_i T^i;\ g \to 1 + i\sum_i \beta_i T^i \\
&g \to g' = fgf^{-1} \to 1 + i\sum \alpha_i T^i - (\alpha_i\beta_j)[T^i, T^j] \\
&[T^i, T^j] = T^i T^i - T^j T^i
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Poiché anche g′ deve appartenere allo spazio tangente, il commutatore deve ridare una combinazione dei generatori, da cui:

$$[T^i, T^j] = i f^{ijk} T^k \tag{C.6}$$

(somma sugli indici ripetuti). Le costanti f^{ijk} sono caratteristiche dell′ algebra (costanti di struttura) e possiamo scegliere i generatori in modo che le f siano completamente antisimmetriche nei loro tre indici. Per i gruppi continui, la struttura delle trasformazioni (C.4) nell′ infinitesimo é quella di un'*algebra di Lie*. Il *rango* dell'algebra di Lie é il numero massimo di generatori che commutano tra loro e che quindi possono essere diagonalizzati simultaneamente. Evidentemente il rango é ≥ 1.

Oltre ad essere antisimmetriche, le costanti di struttura in (C.6) devono soddisfare delle relazioni algebriche che seguono dall′ identitá di Jacobi, valida per i commutatori di matrici arbitrarie:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X] + [Z, [X, Y]] = 0 \tag{C.7}$$

L′ eq. (C.7) puó essere verificata scrivendo esplicitamente i commutatori. Sostituendo la (C.6) nella (C.7), si trova:

$$\sum_s (f^{ijs}\, f^{ksm} + f^{jks}\, f^{ism} + f^{kis} f^{jsm}) = 0 \tag{C.8}$$

L′ analisi delle possibili realizzazioni di costanti di struttura che soddisfino le (C.6) e (C.7) porta alla classificazione di Cartan delle algebre di Lie semplici.

Nota. Nel caso del gruppo delle rotazioni, la struttura dell′ algebra di Lie é fornita dalle ben note regole di commutazione:

$$[J^i, J^j] = \epsilon^{ijk} J^k \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \tag{C.9}$$

ϵ^{ijk} é il tensore completamente antisimmetrico in 3 dimensioni. I tre generatori del momento angolare non commutano tra loro, quindi l′ algebra caratterizzata dalla (C.9) ha rango 1.

Universal Covering Group. Dai generatori infinitesimi si puó raggiungere qualsiasi elemento del gruppo: l′ algebra quindi determina il gruppo, a meno di problemi che possono nascere se il gruppo G non é semplicemente connesso. Infatti, ogni elemento del gruppo puó essere approssimato dal prodotto di elementi che sono tutti in un intorno dato di e. Il problema é che questa espressione non é unica. In genere, possiamo "deformare" con continuitá la catena e quindi mostrare che il risultato non dipende dalla catena scelta. Tuttavia, questo non é vero se, al variare di g nel gruppo, giriamo intorno ad una singolaritá, come avviene appunto se il gruppo non é semplicemente connesso. Data un′ algebra di Lie, L, tuttavia, é sempre possibile trovare un gruppo semplicemente connesso, $\bar{G}$ (*Universal Covering Group*) di cui L é l′ algebra di Lie dei generatori infinitesimi. Ci puó essere un altro gruppo non semplicemente connesso, G, che ha la stessa algebra infinitesima. In questo caso, esiste un omorfismo di $\bar{G}$ in G che si riduce ad un vero e proprio isomorfismo in un intorno abbastanza piccolo dell'identitá. Le rappresentazioni ad un valore di $\bar{G}$ possono essere rappresentazioni a piú valori di G. Questo é il caso di SU(2) (matrici U, 2x2, unitarie, det(U)=1) che é il covering group dell′ algebra (C.9) e di O(3), il gruppo delle rotazioni di uno spazio euclideo 3-dimensionale. O(3) ha la stessa algebra di SU(2) ma non é semplicemente connesso.

In meccanica quantistica siamo interessati a rappresentazioni univoche a meno di una fase (se una rotazione di 2π applicata al ket $|a>$ ci porta in $-|a>$ piuttosto che in $|a>$, l′ effetto é comunque quello di riportarci nello stesso stato fisico di partenza). Nel caso delle rotazioni, questo corrisponde a prendere le rappresentazioni del covering group, SU(2), piuttosto che restringerci alle sole rappresentazioni di O(3) che escluderebbero gli spin semi-interi.

C.3 RAPPRESENTAZIONI DEL GRUPPO

Una rappresentazione del gruppo G é una corrispondenza tra elementi del gruppo e operatori lineari in uno spazio vettoriale, L, che preserva la legge di moltiplicazione di G:

$$\begin{aligned} &g \to T(g) \\ &gh \to T(gh) = T(g)T(h) \end{aligned} \tag{C.10}$$

da qui segue: $T(e) = 1$. Gli operatori T devono essere non singolari, visto che, se:

$$g \to T(g), \;\; g^{-1} \to T(g^{-1}) \tag{C.11}$$

deve anche essere:

$$T(g)T(g^{-1}) = T(gg^{-1}) = T(e) = 1 \tag{C.12}$$

Da cui:

$$T(g^{-1}) = T^{-1}(g) \tag{C.13}$$

Alcune definizioni:

- Due rappresentazioni: $T_1(g)$ in L_1, $T_2(g)$ in L_2, sono dette *equivalenti* se esiste un operatore non singolare A che trasforma L_1 in L_2 tale che:

$$AT_1(g) = T_2(g)A \text{ per ogni g in G.} \tag{C.14}$$

  Rappresentazioni equivalenti sono la stessa cosa a tutti gli effetti. All′ interno di una data classe di equivalenza possiamo scegliere quella che meglio ci conviene.

- Una rappresentazione si dice unitaria se le $T(g)$ sono matrici unitarie, per cui:

$$T(g^{-1}) = T^{-1}(g) = [T(g)]^{*T} = T(g)^{\dagger} \tag{C.15}$$

  (* = coniugazione complessa, T=trasposizione, † hermitiano coniugato)

- Rappresentazione *riducibile*: le matrici $T(g)$ ammettono un sottospazio invariante $V \neq L$, $V \neq 0$:

$$T(g)x \ \epsilon \ V \text{ se } x \ \epsilon \ V \text{ per ogni g} \tag{C.16}$$

- Rappresentazione completamente riducibile: le matrici $T(g)$ sono *a blocchi*. Piú precisamente:

$$\begin{aligned} L &= \oplus_{i,\alpha} L_{i,\alpha} \\ T(g) &= \oplus_{i,\alpha} T^{(i,\alpha)}(g) \end{aligned} \tag{C.17}$$

  Il simbolo $\oplus_{i,\alpha}$ indica la somma diretta degli spazi vettoriali irriducibili $L_{i,\alpha}$ e la somma diretta di matrici, ciascuna che agisce sui vettori di $L_{i,\alpha}$. Le matrici T(g) sono quindi costituite dai blocchi diagonali, $T^{(i,\alpha)}(g)$. L′ indice i caratterizza le rappresentazioni irriducibili inequivalenti che compaiono nella riduzione di $T(g)$, l′ indice α distingue tra rappresentazioni irriducibili equivalenti, ed é necessario se ci sono degenerazioni nella riduzione di $T(g)$.

  Dobbiamo sottolineare che, in genere, una rappresentazione puó essere riducibile (avere un sottospazio invariante non triviale) ma non completamente riducibile (essere a blocchi, cfr. [42] per esempi e maggiori dettagli). La condizione necessaria e sufficiente perché ció avvenga é che il sottospazio V, ortogonale allo spazio invariante V, sia anch esso invariante.

  Tuttavia:

- Rappresentazioni unitarie riducibili sono sempre completamente riducibili.

  Dim. Scegliamo $x \ \epsilon \ V$, $y \ \epsilon \ V_{ort}$, dove V_{ort} é il complemento ortogonale di V e quindi $(x, y) = 0$. Poiché V é invariante, per ogni g:

$$0 = (T(g^{-1})x, y) = (T(g)^{\dagger}x, y) = (x, T(g)y) \tag{C.18}$$

  Quindi, se $y \ \epsilon \ V_{ort}$, anche $T(g)y \ \epsilon \ V_{ort}$ e le matrici $T(g)$ sono diagonali a blocchi in $L = V \oplus V_{ort}$.

Nota. Nel caso del gruppo delle rotazioni, le rappresentazioni irruducibili sono quelle di momento angolare definito, J (quindi $i = J$), e l′ indice α serve a distinguere eventuali componenti di T con lo stesso del momento angolare.

C.4 RAPPRESENTAZIONI DELL′ ALGEBRA DEI GENERATORI INFINITESIMI

Una rappresentazione dell′ algebra é una corrispondenza:

$$T^i \to K(T^i) = K^i \tag{C.19}$$

K^i sono operatori lineari su uno spazio vettoriale L, tali da fornire una realizzazione delle regole di commutazione dell′ algebra stessa:

$$[K^i, K^j] = if^{ijk}K^k \tag{C.20}$$

Tramite gli operatori K^i possiamo ottenere una rappresentazione degli elementi del gruppo in un intorno infinitesimo dell identitá:

$$\begin{aligned} g &\to 1 + i\alpha_i T^i \\ T(g) &= 1 + i\alpha_i K^i \end{aligned} \tag{C.21}$$

É possibile scrivere un'equazione differenziale nelle variabili α_i le cui soluzioni ci danno gli elementi finiti della rappresentazione $T(g)$ (cfr. [42]). Nel caso di gruppi semplicemente connessi, e quindi nel caso del covering group, le rappresentazioni dell'algebra di Lie determinano completamente le rappresentazioni del gruppo.

Il viceversa é ovvio: gli operatori K^i si ottengono sviluppando le matrici $T(g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n))$ intorno all′ origine. Da notare che una rappresentazione unitaria di G dá luogo ad una rappresentazione dell′ algebra con operatori hermitiani (questo é il motivo della comparsa dell′ unitá immaginaria, i, nelle equazioni precedenti).

La rappresentazione regolare. Possiamo considerare i generatori infinitesimi come una base dello spazio vettoriale generato dalle loro combinazioni lineari:

$$x = i\zeta_i T^i \tag{C.22}$$

L′ operazione di commutazione agisce come una trasformazione lineare su questo spazio e fornisce essa stessa una rappresentazione dell′ algebra di Lie sottostante:

$$\begin{aligned} & x \to x' = F(T^j)x = [T^j, i\zeta_i T^i] = i\zeta_i(if^{jik}T^k) = i\zeta'_k T^k \\ & (\zeta')^k = (K^j_{\text{reg}})_{ki}\zeta^i \\ & (K^j_{\text{reg}})_{ki} = -if^{kji} \end{aligned} \tag{C.23}$$

Evidentemente, dobbiamo verificare che le matrici K^j_{reg} obbediscano alle giuste regole di commutazione, eq. (C.20). Lasciamo al lettore la cura di verificare che queste relazioni, scritte esplicitamente, coincidono con le identitá di Jacobi, eq. (C.7).

Le trasformazioni $x \to x'$ date sopra costituiscono una rappresentazione dell′ algebra che viene indicata col nome di *Rappresentazione Regolare* o *Aggiunta* (Adjoint Representation). La dimensione della rappresentazione regolare coincide, evidentemente con la dimensione dell′ algebra di Lie.

C.5 RAPPRESENTAZIONI DEI GRUPPI COMPATTI O FINITI

La situazione é stata completamente chiarita dai classici lavori di Peter e Weyl, e può essere riassunta nel modo seguente (cfr. [1]). Assumendo, nel caso continuo, che T(g) sia continua:

$$||T(g')x - T(g)x|| \to 0 \ \text{ se } \ g' \to g, \ \text{ per ogni x di } L \tag{C.24}$$

si dimostra che:

- in ogni classe di rappresentazioni equivalenti esiste una rappresentazione unitaria (RU);
- ogni rappresentazione irriducibile é di dimensione finita;
- ogni rappresentazione unitaria é completamente riducibile.

Alla luce di questi risultati, possiamo restringerci allo studio delle rappresentazioni finito-dimensionali ed unitarie. Inoltre, visti i risultati riportati nella Sezione precedente, possiamo restringerci a rappresentazioni finito-dimensionali dell'algebra di Lie corrispondente al gruppo, con generatori infinitesimi K^i che sono hermitiani.

C.6 IL CASO DI SU(2)

Le rappresentazioni dell'algebra del momento angolare (cfr. ad esempio [44]) sono caratterizzate ciascuna da un numero quantico J (il momento angolare) che può assumere valori interi o seminteri $J = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \ldots$. La dimensione della rappresentazione é $\text{Dim}(J) = 2J + 1$ ed i vettori di una base completa sono distinti dagli autovalori di J_3, la componente diagonale del momento angolare:

$$|J, J_3 >; \ \ J_3 = -J, -J+1, ..., +J \tag{C.25}$$

(talvolta J_3 si indica col nome di numero quantico magnetico). L' operatore J^2 commuta con i tre operatori del momento angolare e:

$$J^2|J, J_3 >= J(J+1)|J, J_3 > \tag{C.26}$$

Non é difficile trovare gli elementi di matrice dei generatori non diagonali (cfr. ancora [44]). Diamo per comoditá gli elementi di matrice degli operatori di innalzamento e di abbassamento:

$$\begin{aligned} &J^{(\pm)} = (J_1 \pm iJ_2) \\ &< J, J_3+1|J^{(+)}|J, J_3 >= \sqrt{J(J+1) - J_3(J_3+1)} \\ &< J, J_3-1|J^{(-)}|J, J_3 >= \sqrt{[J(J+1) - J_3(J_3-1)}. \end{aligned} \tag{C.27}$$

Le matrici $K^{(J)}_{1,2,3}$ che rappresentano gli elementi dell'algebra $J_{1,2,3}$ sono hermitiane e la rappresentazione del gruppo SU(2) é unitaria. Per ricostruire le corrispondenti matrici occorre estendere la parametrizzazione agli elementi finiti. Possiamo caratterizzare ogni rotazione dello spazio a 3 dimensioni con un vettore di lughezza 1 ($n_i,\ i = 1, 2, 3$) ed un angolo di rotazione $0 \geq \alpha \leq 2\pi$. Consideriamo esplicitamente le matrici della rappresentazione di spin 1/2, la rappresentazione fondamentale di SU(2), tutte le altre si ottengono componendo questa rappresentazione con se stessa.

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha, \mathbf{n}) = exp[-i\frac{\alpha}{2}\mathbf{n}\cdot\sigma] = \cos\frac{\alpha}{2} - i\mathbf{n}\cdot\sigma\sin\frac{\alpha}{2}; \\ &\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta) \end{aligned}$$

ed abbiamo introdotto le 3 matrici di Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};\ \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le matrici $\mathcal{D}^{(1/2)}$ sono anche gli elementi di SU(2), quindi la parametrizzazione di cui sopra caratterizza la corrispondente varietá differenziale.

C.7 PRODOTTO TENSORIALE DI RAPPRESENTAZIONI, LA SERIE DI CLEBSCH-GORDAN

Dati due spazi vettoriali, L_1 ed L_2, possiamo definire un nuovo spazio che é il prodotto tensoriale dei due. Nella notazione di Dirac:

$$|v, w >= |v > |w >; v\ \epsilon\ L_1, w\ \epsilon\ L_2. \tag{C.28}$$

Date le rappresentazion $T_1(g)$ in L_1 , e $T_2(g)$ in L_2, si definisce il prodotto tensoriale:

$$\begin{aligned} &T(g) = T_1(g) \otimes T_2(g) \\ &T(g)|v, w >= T_1(g)|v > T_2(g)|w > \end{aligned} \tag{C.29}$$

(si verifica che $T(g)$ é una rappresentazione di G ed é unitaria, se lo sono $T_{1,2}(g)$). L$'$ algebra dei generatori infinitesimi é data da:

$$K^i = (K_1)^i \otimes 1 + 1 \otimes (K_2)^i \tag{C.30}$$

In genere la rappresentazione T non é irriducibile. Per i gruppi compatti, tuttavia, la rappresentazione puó essere completamente ridotta in blocchi diagonali irriducibili. In analogia col momento angolare, caratterizziamo i vettori di una RU irriducibile con un complesso di numeri quantici j, che caratterizzano la rappresentazione, ed un complesso di numeri quantici "magnetici", m, che caratterizzano il vettore all$'$ interno della rappresentazione j (per un$'$ algebra di rango R, ci saranno esattamente R numeri quantici magnetici, gli autovalori degli operatori che si possono diagonalizzare simultaneamente, usiamo i caratteri italici per i numeri magnetici per ricordarci che sono un complesso di numeri quantici). In termini dei vettori delle basi in L_1, L_2, una base in L é data dai prodotti tensoriali:

$$|j_1, m_1; j_2, m_2 >= |j_1, m_1 > |j_2, m_2 > \tag{C.31}$$

D'altro canto, dopo la completa riduzione della rappresentazione T, dobbiamo poter scrivere lo spazio L e le matrici $T(g)$ nella forma data nella (C.17):

$$\begin{aligned} L &= \oplus_{j,\alpha} L_{j,\alpha}; \\ T(g) &= \oplus_{j,\alpha} T^{(j,\alpha)}(g) \end{aligned} \tag{C.32}$$

con lo stesso significato dei simboli (ricordiamo che α distingue tra rappresentazioni equivalenti che eventualmente compaiano nello sviluppo).

In ciascun sottospazio $L_{j,\alpha}$ scegliamo una base di vettori: $|j, m, \alpha >$. L$'$ unione di queste basi forma evidentemente una base completa in L, alternativa a quella data prima. Deve quindi esistere una matrice unitaria che effettua il cambiamento di base. In formule:

$$|j_1, m_1 > |j_2, m_2 >= \sum_{j,m,\alpha} C(j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m, \alpha) |j, m, \alpha > \tag{C.33}$$

$$|j, m, \alpha >= \sum_{m_1, m_2} C^*(j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m, \alpha) |j_1, m_1 > |j_2, m_2 > \tag{C.34}$$

I coefficienti C sono noti come i coefficienti di Clebsch- Gordan e soddisfano le relazioni di ortonormalitá:

$$\sum_{j,m,\alpha} C(j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m, \alpha) C^*(j_1, m_1'; j_2, m_2' | j, m, \alpha) = \delta_{m_1, m_1'} \delta_{m_2, m_2'} \tag{C.35}$$

$$\sum_{m_1, m_2} C(j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m, \alpha) C^*(j_1, m_1; j_2, m_2 | j', m', \alpha') = \delta_{j,j'} \delta_{m,m'} \delta_{\alpha,\alpha'} \tag{C.36}$$

Con l$'$ aiuto delle formule precedenti possiamo esprimere gli elementi delle matrici che rappresentano il gruppo sotto la forma di prodotto tensoriale in termini delle matrici irriducibili. Si trova:

$$\begin{aligned} &(T^{(j_1)}(g))_{m_1, m_1'} (T^{(j_2)}(g))_{m_2, m_2'} = \\ &= \sum_{j,m,\alpha} C(j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m, \alpha) (T^{(j)}(g))_{m,m'} C^*(j_1, m_1'; j_2, m_2' | j, m', \alpha) \end{aligned} \tag{C.37}$$

NOTA. Nel caso di rappresentazioni di SU(2) quanto sopra si riduce alla ben nota composizione di due momenti angolari. In questo caso j, il momento risultante, é compreso nell' intervallo:

$$|j_1 - j_2| \geq j \geq |j_1 + j_2| \tag{C.38}$$

j varia a passi di un' unitá, ogni j compare una sola volta (l' indice α non serve).

I coefficienti di Clebsch- Gordan per i casi più semplici (es. $1/2 \otimes 1$) sono tabulati nel Particle Data Book [21]. Coefficienti di Clebsch-Gordan di SU(3), per i casi più usati, sono stati pubblicati in [45].

Come si vede, il caso generale di un gruppo compatto non introduce complicazioni sostanziali rispetto ad SU(2), se non il fatto che una stessa rappresentazione puó comparire piú volte nella serie di Clebsch-Gordan.

C.8 IL LEMMA DI SCHUR

Questo lemma ci permette di caratterizzare gli elementi di matrici di operatori che sono invarianti sotto le trasformazioni del gruppo, operatori cioé che commutano con le matrici della rappresentazione. Affrontiamo per primo il caso di rappresentazioni irruducibili. Dobbiamo considerare due casi.

1. Siano date due rappresentazioni irriducibili ed inequivalenti, $T_1(g)$ in L_1 e $T_2(g)$ in L_2. Sia A un operatore che trasforma vettori di L_1 in vettori di L_2 e supponiamo la relazione:

$$AT_1(g) = T_2(g)A, \quad \text{per ogni g} \tag{C.39}$$

Lemma I: A é l' operatore nullo, $A = 0$.

Dim. Consideriamo in L_1 il nucleo di A, cioé l'insieme N dei vettori di L_1 tali che $Ax = 0$. N é evidentemente un sottospazio invariante per T_1:

$$AT_1(g)x = T_2(g)Ax = 0, \text{per ogni g.} \tag{C.40}$$

Poiché $T_1(g)$ é irriducibile, $N = L_1$ oppure $N = 0$. Nel primo caso il lemma é dimostrato. Nel secondo caso, consideriamo in L_2 l' immagine J della trasformazione A. J é un sottospazio invariante di T_2, dato che, se $y = Ax$:

$$T_2(g)y = T_2(g)Ax = AT_1(g)x = Ax', \quad \text{che } \epsilon J \tag{C.41}$$

Ma T_2 é irriducibile, quindi $J = 0$ oppure $J = L_2$. Il secondo caso é escluso poiché T_1 e T_2 sono inequivalenti, quindi $J = 0$, CDD.

2. Siano $T_1(g)$ e $T_2(g)$ irriducibili ed equivalenti e sia U una matrice unitaria che trasforma L_1 in L_2, tale che:

$$T_1(g) = U^\dagger T_2(g)U, \quad \text{per ogni g.} \tag{C.42}$$

Lemma II: Ogni operatore A che soddisfa la (C.39) é un multiplo di U, $A = \lambda U$. In via preliminare, notiamo che sostituendo la (C.42) nella (C.39), troviamo:

$$BT_2(g) = T_2(g)B \tag{C.43}$$

con $B = AU^\dagger$.

Ovviamente, se $A = \lambda U$, vale anche $AU^\dagger = B = \lambda 1$ e una forma equivalente del lemma é la seguente:

Lemma II $'$: ogni matrice B che commuta con le matrici $T_2(g)$ di una rappresentazione irruducibile é un multiplo dell$'$ identitá.

Dim. La matrice B ammette almeno un autovettore x:

$$Bx = \lambda x, \;\; x \neq 0 \tag{C.44}$$

Lo spazio, V, dei vettori che appartengono all$'$ autovalore λ é uno spazio invariante per $T_2(g)$, visto che:

$$B[T_2(g)x] = T_2(g)Bx = \lambda[T_2(g)x] \tag{C.45}$$

Poiché T_2 é irriducibile, $V = 0$ oppure $V = L_2$. Il primo caso é escluso dall$'$ esistenza di almeno un autovettore. Quindi $V = L_2$ e $B = \lambda 1$, CDD.

C.9 ELEMENTI DI MATRICE DI OPERATORI INVARIANTI

Consideriamo un sistema quantistico (atomo, campo) i cui stati sono rappresentati dai vettori di uno spazio di Hilbert, L. Un operatore $\mathcal{O}$ é invariante sotto le trasformazioni del gruppo se soddisfa la condizione:

$$U^\dagger(g)\mathcal{O}U(g) = \mathcal{O}, \tag{C.46}$$

dove U(g) sono gli operatori unitari che rappresentano l$'$ azione delle trasformazioni di g sugli stati del sistema. Per un gruppo compatto, U(g) é completamente riducibile in blocchi finito-dimensionali,

$$\begin{aligned} L &= \oplus_{j,\alpha} L_{j,\alpha} \\ U(g) &= \oplus_{j,\alpha} U^{(j,\alpha)}(g) \end{aligned} \tag{C.47}$$

Consideriamo gli elementi di matrice tra vettori che appartengono a due blocchi irriducibili:

$$< j, \alpha, m|\mathcal{O}|j', \beta, m' >= \mathcal{O}(j\alpha, j'\beta)_{m,m'} \tag{C.48}$$

Dalla (C.46) si trova:

$$\begin{aligned} &(\mathcal{O}(j\alpha, j'\beta))_{m,m'} =< j, \alpha, m|\mathcal{O}|j', \beta, m' >= \\ &=< j, \alpha, m|\, U(g)^\dagger \mathcal{O}\, U(g)|j', \beta, m' >= \\ &= (T^{(j',\beta)})_{m',n'} (T^{(j,\alpha)})^*_{m,n} (\mathcal{O}(j\alpha, j'\beta))_{n,n'} = \\ &= \left\{ [T^{(j,\alpha)}(g)^T]^\dagger \; [\mathcal{O}(j\alpha, j'\beta)] \; [T^{(j',\beta)}(g)^T] \right\}_{m,m'} \end{aligned} \tag{C.49}$$

La matrice finito-dimensionale $\mathcal{O}(j\alpha, j'\beta)$ soddisfa alle condizioni del lemma di Schur:

$$\mathcal{O}(j\alpha, j'\beta)\ [T^{(j'\beta)}(g)]^T = [T^{(j,\alpha)}(g)]^T\ \mathcal{O}(j\alpha, j'\beta) \tag{C.50}$$

Di qui segue:

- $\mathcal{O}(j\alpha, j'\beta) = 0$, se $j \neq j'$;
- $\mathcal{O}(j\alpha, j'\beta)_{n,n'} = ||\mathcal{O}((j, \alpha, \beta)||\ \delta_{n,n'}$, se $j' = j$.

In parole, un operatore invariante ha elementi di matrice solo tra rappresentazioni equivalenti, questi elementi di matrice sono diagonali nei, e indipendenti dai, numeri quantici magnetici. Ci sono tanti coefficienti indipendenti, $||\mathcal{O}((j, \alpha, \beta)||$, quanti sono i modi di associare tra loro coppie di rappresentazioni equivalenti.

C.10 MISURA INVARIANTE SUL GRUPPO E RELAZIONI DI ORTONORMALITÁ

Per gruppi finiti, la somma sugli elementi del gruppo é invariante sotto l′ operazione che trasla gli elementi del gruppo, moltiplicandoli per un elemento fisso:

$$\sum_g f(g) = \sum_g f(hg) \tag{C.51}$$

per qualsiasi funzione degli elementi del gruppo. É ragionevole pensare di introdurre una simile misura nel caso di un gruppo compatto, trasportando la misura $d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$ dall′ intorno dell'identitá all′ intorno di un elemento generico, mediante la moltiplicazione del gruppo. In effetti (cfr. [46]) per i gruppi compatti si puó definire una misura invariante per moltiplicazione a sinistra:

$$\int dg f(hg) = \int dg f(g) \tag{C.52}$$

e la misura risulta invariante anche per moltiplicazione a destra. La misura (C.52) é definita univocamente a meno di una costante moltiplicativa, che scegliamo in modo tale che sia:

$$\int dg = 1. \tag{C.53}$$

Consideriamo due rappresentazioni irriducibili, $T_1(g)$ e $T_2(g)$, e costruiamo la matrice $B_{q,a}$:

$$B_{q,a} = \int dg\ T_1(g)_{q,r} T_2(g)^*_{a,b} = \int dg\ T_1(g)_{q,r} T_2(g)^\dagger_{b,a} \tag{C.54}$$

la matrice $B_{q,a}$ dipende anche dai due indici r e b che per il momento teniamo fissi e quindi possiamo non scrivere.

B é invariante, nel senso che:

$$T_1(h) B T_2(h)^\dagger = B \tag{C.55}$$

In effetti:

$$T_1(h)_{q,q'} \int dg [T_1(g)]_{q',r} [T_2(g)]^\dagger_{b,a'} T_2(h)^\dagger_{a',a} = \int dg [T_1(hg)]_{q,r} [T_2(hg)]^\dagger_{b,a} =$$
$$= \int dg\ T_1(g)_{q,r} T_2(g)^\dagger_{b,a} = B_{q,a} \tag{C.56}$$

Sulla base del lemma di Schur, possiamo concludere quanto segue:

- se T_1 e T_2 sono inequivalenti, $B = 0$;
- se $T_1 = T_2$, $B_{a,q} = \lambda(r,b,j)\delta_{a,q}$, dove j caratterizza la rapresentazione. Nel secondo caso, possiamo porre $a = q$ e sommare, ottenendo:

$$\lambda(r,b,j)\mathrm{Dim}(j) = \int dg (T_2(g))^\dagger_{b,a} (T_1(g))_{a,r} = \int dg\ \delta_{b,r} = \delta_{b,r} \tag{C.57}$$

Mettendo tutto insieme, otteniamo le relazioni di ortonormalitá:

$$\int dg\ T^{(j)}(g)_{q,r} T^{(j)}(g)^*_{a,b} = 1/\mathrm{Dim}(j)\delta_{j,j'}\delta_{q,a}\delta_{r,b} \tag{C.58}$$

Con la parametrizzazione data prima, la misura invariante di SU(2) si scrive [46]:

$$dg = (cost) \sin 2\frac{\alpha}{2}) d\alpha\ d\cos\theta\ d\phi \tag{C.59}$$

($0 \geq \alpha \geq 2\pi; 0 \geq \theta \geq \pi; 0 \geq \phi \geq 2\pi$). Lasciamo al lettore di verificare le relazioni di ortonormalitá sugli elementi della matrice $\mathcal{D}^{(1/2)}$ data nella (C.28).

C.11 IL TEOREMA DI WIGNER-ECKART

Un caso molto importante é quello di set di operatori nello spazio di Hilbert degli stati di un sistema quantistico che trasformano secondo una rappresentazione irriducibile del gruppo:

$$U(g)\Phi^{(j)}_m U(g)^\dagger = T^{(j)}_{m,m'} \Phi^{(j)}_{m'}, \tag{C.60}$$

dove $U(g)$ sono gli operatori unitari che rappresentano l' azione delle trasformazioni sugli stati del sistema. Come prima, assumiamo che $U(g)$ sia completamente riducibile in blocchi finito-dimensionali, eq. (C.32). Consideriamo l' elemento di matrice di Φ tra stati che appartengono alle rappresentazioni k ed l nella riduzione di $U(g)$ (queste rappresentazioni sono fissate e quindi non é necessario indicare i valori degli altri numeri quantici, α , β, che le individuano all' interno della decomposizione di $U(g)$). Procediamo inserendo nell' elemento di matrice l' operatore $1 = U(g)^\dagger U(g)$ (sempre sommiamo sugli indici ripetuti):

$$< l,s|\Phi^{(j)}_m|k,n >=< l,s|U(g)^\dagger U(g)\Phi^{(j)}_m U(g)^\dagger U(g)|k,n >=$$
$$= (T^{(l)})^*_{s,s'} < l,s'|\Phi^{(j)}_{m'}|k,n' > (T^{(k)})_{n,n'} (T^{(j)})_{m,m'} \tag{C.61}$$

Usiamo ora l′ espressione che dá il prodotto di due matrici in termini delle componenti irriducibili, tramite i coefficienti di Clebsh-Gordan, eq. (C.37). Troviamo:

$$
\begin{aligned}
&< l, s|\Phi_m^{(j)}|k, n >= \\
&= \sum_{s',m',n'} T^{(l)}(g)^*_{s,s'} < l, s'|\Phi_{m'}^{(j)}|k, n' > \cdot \\
&\cdot \sum_{J,\alpha,M} T^{(J)}(g)_{M,M'} C(k, n; j, m\ |J, M, \alpha) C^*(k, n'; j, m'\ |J, M', \alpha)
\end{aligned}
\tag{C.62}
$$

Possiamo ora integrare entrambi i membri sul gruppo ed usare le relazioni di ortonormalitá trovate nella Sezione precedente. Questo seleziona la rappresentazione con $J = l$ e fissa $M = s$, $M' = s'$ nella serie di Clebsch-Gordan. Troviamo:

$$
\begin{aligned}
&< l, s|\Phi_m^{(j)}|k, n >= \\
&= \sum_{m',n',\alpha,s'} < l, s'|\Phi_{m'}^{(j)}|k, n' > C(k, n; j, m|l, s, \alpha) C^*(k, n'; j, m'|l, s', \alpha) = \\
&= \sum_{\alpha} C(k, n; j, m|l, s, \alpha) \sum_{m',n',s'} C^*(k, n'; j, m'|l, s', \alpha) < l, s'|\Phi_{m'}^{(j)}|k, n' >= \\
&= \sum_{\alpha} C(k, n; j, m|l, s, \alpha) < l||\Phi^{(j)}||k >_\alpha;
\end{aligned}
\tag{C.63}
$$

$$
< l||\Phi^{(j)}||k >_\alpha = \sum_{n',m',s'} C^*(k, n'; j, m'|l, s', \alpha) < l, s'|\Phi_{m'}^{(j)}|k, n' >
\tag{C.64}
$$

L′ ultima linea della (C.63) rappresenta il risultato finale - il cosiddetto *teorema di Wigner-Eckart*. L′ elemento di matrice puó essere diverso da zero solo se la rappresentazione $T^{(l)}$ é presente nel prodotto tensoriale $T^{(j)} \otimes T^{(k)}$. La dipendenza dell′ elemento di matrice dai numeri quantici magnetici é fornita dei relativi coefficienti di Clebsch-Gordan moltiplicati per dei numeri, gli *elementi matrice ridotti*, (C.64), che dipendono esclusivamente dalle rappresentazioni j, k ed l. Gli elementi di matrice ridotta sono in numero uguale al numero di volte che la rappresentazione l compare nella riduzione del prodotto $T^{(j)} \otimes T^{(k)}$.

Bibliografia

[1] Meccanica Quantistica Relativistica, Appunti AA 2008-2009.

[2] F. Mandl e G. Shaw, *Quantum Field Theory*, Wiley, 1984.

[3] N. Cabibbo, Appunti di Elettrodinamica Quantistica, a.a. 2005-2006.

[4] diff. di massa protone-antiprotone

[5] diff. di massa K0-Kobar

[6] Landau Lifshitz, Meccanica Quantistica non Relativistica

[7] W. Pauli in *Niels Bohr and the development of Physics* 1949.

[8] C. N. Yang, R. Mills, Phys. **96** 191(1954).

[9] il caso della doppia buca è considerato in maniera illuminante in *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley.

[10] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961) 579.

[11] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967); A. Salam, in N. Svartholm: Elementary Particle Theory, *Proceedings of the Nobel Symposium 1968*, Lerum Sweden (1968) 367-377.

[12] N. Cabibbo, L. Maiani, O. Benhar, Elettrodinamica Quantistica, Parte II, Anno Accademico 2006-2007, Cap. 3.

[13] , N. Cabibbo, *Quark mixing* in http://chimera.roma1.infn.it/OMAR/gauge/2008.

[14] N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.*, **10**, 531 (1963).

[15] vedi ad esempio: M. Gell-Mann, Y. Ne'eman, *The Eightfold Way*, W. A. Benjamin, New York, Amsterdam, 1964.

[16] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, L. Maiani, *Phys.Rev.*, **D2**, 1285 (1970).

[17] B. L. Ioffe and E. P. Shabalin, Yadern. Fiz. **6**, 828 [Soviet J. Nucl. Phys. **6**, 603 (1968)].

[18] M. Kobayashi, T. Maskawa, *Progr. Theor. Phys.*, **49**, 652 (1973).

[19] L. Wolfenstein, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 1945.

[20] A. Ceccucci, Z. Ligeti and Y. Sakai,The CKM quark-mixing matrix, in Ref. [21].

[21] C. Amsler *et al.* [Particle Data Group Collaboration], Phys. Lett. B **667** (2008) 1.

[22] A. J. Buras, M. E. Lautenbacher and G. Ostermaier, Phys. Rev. D **50** (1994) 3433. Vedi anche [23].

[23] D. P. Kirkby and Y. Nir, CP-violation in meson decays, in Ref. [21].

[24] K. Winter, editor, *Neutrino Physics*, Cambridge Monographs on Particle Physics, Cambridge University Press, 1991.

[25] LEP and SLD Collaborations, Phys. Reports **427** (2006) 257.

[26] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961).

[27] M. Gell-Mann, R. Oakes and J. Renner, *Phys. Rev.* **175**, 2195 (1968).

[28] S. L. Glashow and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **20**, 224 (1968).

[29] N. Cabibbo and L. Maiani, *Weak interactions and the breaking of hadron symmetries*, Evolution of particle physics (1970) 50.

[30] L. Maiani, CP and CPT violation in neutral kaon decays, In L. Maiani, G. Pancheri, N. Paver eds: *The second DAPHNE physics handbook*, vol. 1* 3-26 and Frascati INFN - May 1996.

[31] M. Antonelli and G. D'Ambrosio, CPT Invariance Tests in Neutral Kaon Decay, in Ref. [21].

[32] L. Wolfenstein, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 562.

[33] G. Isidori, Y. Nir and G. Perez, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **60** (2010) 355 [arXiv:1002.0900 [hep-ph]].

[34] T. Inami and C. S. Lim, Prog. Theor. Phys. **65** (1981) 297 [Erratum-ibid. **65** (1981) 1772].

[35] D. J. Antonio *et al.* [RBC and UKQCD Collaborations], Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 032001; C. Aubin, J. Laiho and R. S. Van de Water, action lattice QCD," Phys. Rev. D **81** (2010) 014507.

[36] J. L. Rosner and S. Stone, Decay Constants of Charged Pseudoscalar Mesons, in [21]. arXiv:0802.1043 [hep-ex].

[37] M. Okamoto, PoS LAT **2005** (2006) 013 [hep-lat/0510113].

[38] O. Schneider, $B_0 - \bar{B}^0$ *Mixing* , in Ref. [21].

[39] M. Bona *et al.* [UTfit Collaboration], JHEP **0803** (2008) 049 [arXiv:0707.0636 [hep-ph]].

[40] S. Herrlich and U. Nierste, leading order," Nucl. Phys. B **476** (1996) 27.

[41] A. F. Falk, Y. Grossman, Z. Ligeti and A. A. Petrov, Phys. Rev. D **65** (2002) 054034; A. F. Falk, Y. Grossman, Z. Ligeti, Y. Nir and A. A. Petrov, Phys. Rev. D **69** (2004) 114021.

[42] G. De Franceschi, L. Maiani, Fortschritte der Physik 18 (1965) 279

[43] S. Coleman, *Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures* (Cambridge Uiv. Press. 1985).

[44] L. Landau e Lifshtz, Meccanica Quantistica Non Relativistica.

[45] J. J. de Swart, Rev. Mod. Phys. **35** (1963) 916 [Erratum-ibid. **37** (1965) 326].

[46] H. Weyl,*The Theory of Groups and Quantum Mechanics* (Dover Books on Mathematics).