Mescolamento dei quark

Nicola Cabibbo

10 giugno 2007

Indice

1 Introduzione **1**

2 Il mescolamento dei quark **2**
2.1 Il problema delle fasi 3
2.2 La violazione di CP 4
2.3 La parametrizzazione di Wolfenstein 6

3 Triangolo di unitarietà **7**

4 Misura dell'angolo β. **9**
4.1 Calcolo dell'ampiezza $b + \bar{d} \to d + \bar{b}$ 13

A Teorema di Cecilia Jarlskog **15**

B Un teorema sulle matrici. **17**

1 Introduzione

Il fenomeno del mescolamento dei quark [1] consiste nel fatto che le interazioni deboli, cioè gli accoppiamenti tra quark di tipo u (carica 2/3) edi tipo d (carica -1/3), non sono diagonali nella base che corrisponde agli autostati di massa, rispettivamente u, c, t e d, s, b. Da questo segue ad esempio che le interazioni deboli possono portare alla violazione di numeri quantici quali la stranezza: le reazioni

$$\bar{\nu} + P \to \begin{cases} N + e^+ \\ \Lambda + e^+ \end{cases}$$

sono ambedue possibili. La prima ha $\Delta S = 0$, la seconda $\Delta S = -1$.

Il mescolamento dei quark è anche responsabile [2] della violazione della simmetria CP e della simmetria per inversione temporale T ossservate nei decadimenti dei mesoni K^0 e B^0. M. Kobayashi e T. Maskawa hanno infatti dimostrato [2] che queste violazioni sono rese possibili dal mescolamento se esistono tre (o più) famiglie di fermioni. È notevole che questo lavoro abbia preceduto la scoperta del primo membro della terza famiglia, il leptone τ. Il mescolamnto dei quark è descritto da una matrice unitaria, V, detta matrice CKM.

Un fenomeno del tutto analogo al mescolamento dei quark si verifica nel caso dei leptoni e si manifesta nelle oscillazioni di neutrino, di cui parleremo nel seguito.

2 Il mescolamento dei quark

In questa sezione vediamo come il fenomeno del mescolamento emerga nel modello Standard come conseguenza del meccanismo di Higgs. Tratteremo in particolare il caso di tre famiglie. Ogni famiglia di fermioni è composta da due flavour di quark con carica 2/3, -1/3 (ciascuno in tre stati di colore) e una coppia di leptoni; per la prima famiglia u, d, e, ν_e. Sotto il sottogruppo SU(2) i quark si organizzano in tre doppietti sinistrorsi $q_i^L = \{u_i^L, d_i^L\}$ e tre coppie di singoletti destrorsi, u_i^R e d_i^R. Le interazioni deboli derivano dall'accoppiamento dei quark ai mesoni $W^\pm$, descritto da un termine nel Lagrangiano

$$\mathcal{L}_{qW} = g \sum_i \bar{u}_i^L \gamma^\mu d_i^L W_\mu^\dagger + h.c. \tag{1}$$

Notiamo che l'accoppiamento è diagonale: il quark u_i^L di ciascun doppietto è accoppiato al d_i^L dello stesso multipletto.

La massa dei fermioni deriva dagli accoppiamenti tra un doppietto sinistrorso, un singoletto destrorso e il doppietto di Higgs Φ. Ad esempio un termine del tipo $(g^d \bar{q}^L d^R)\Phi + \text{h. c.}$ dà massa $m^d = g^d v/\sqrt{2}$ al quark d dove v è il valore di aspettazione nel vuoto del campo Φ

$$\langle 0|\Phi|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

mentre un termine $(g^u \bar{q}^L u^R)\tilde{\Phi} + \text{h. c.}$ dà massa $m^u = g^u v/\sqrt{2}$ al quark u. Con più famiglie gli accoppiamenti a Φ si moltiplicano: ciascuno dei doppietti q_i^L può accoppiarsi a ciascuno dei singoletti u_k^R e d_k^R.

$$\mathcal{L}_{q\Phi} = \sum_{ik} [(g_{ik}^d \bar{q}_i^L d_k^R)\Phi] + \sum_{ik} [(g_{ik}^u \bar{q}_i^L u_k^R)\tilde{\Phi}] + \text{h. c.} \tag{3}$$

Per la rottura di simmetria (eq 2) questi accoppiamenti producono termini di massa per i quark che, omettendo gli indici, possiamo scrivere nella forma compatta

$$\mathcal{L}_{qM} = (\bar{u}^L \tilde{M}^u u^R + \bar{d}^L \tilde{M}^d d^R + h.c.) \tag{4}$$

dove le matrici di massa $\tilde{M}^u$, $\tilde{M}^d$ sono date da

$$\tilde{M}_{ik}^u = \frac{v}{\sqrt{2}} g_{ik}^u; \quad \tilde{M}_{ik}^d = \frac{v}{\sqrt{2}} g_{ik}^d \tag{5}$$

Le costanti di accoppiamento g_{ik}^u e g_{ik}^d possono in generale essere numeri complessi, e di conseguenze le matrici di massa possono essere matrici complesse, non necessariamente hermitiane.

Per interpretare fisicamente questo risultato, in particolare la eq. (4), occorre diagonalizzare le due matrici di massa, e questo si ottiene (vedi appendice B) con trasformazioni unitarie indipendenti dei quark L, R,

$$u^L = V_{uL}\, u'^L;\ u^R = V_{uR}\, u'^R;\ d^L = V_{dL}\, d'^L;\ d^R = V_{dR}\, d'^R, \tag{6}$$

tali che

$$V_{uL}^\dagger \tilde{M}^u V_{uR} = M^u, \quad V_{dL}^\dagger \tilde{M}^d V_{dR} = M^d, \tag{7}$$

dove le matrici M_u, M_d sono diagonali e reali. Il termine di massa (4) si esprime allora come

$$\mathcal{L}_{qM} = (\bar{u}'^L M_u u'^R) + (\bar{d}'^L M_d d'^R) + h.c. \tag{8}$$

Dato che M_u e M_d sono diagonali e reali, i campi u', d' possono essere identificati con i quark di massa definita, rispettivamente u, c, t e d, s, b. Dato che gli u_i^L e d_i^L sono trasformati in maniera differente (eq. 6), l'accoppiamento degli u'^L, d'^L ai bosoni $W^\pm$ non è più diagonale, ma la (1) diviene

$$\mathcal{L}_{qW} = g \sum_{ij} \bar{u}_i'^L \mathbf{V}_{ij} \gamma^\mu d_j'^L W_\mu^\dagger + h.c. \tag{9}$$

La matrice unitaria $\mathbf{V}$ è detta "matrice CKM", ed è data da

$$\mathbf{V} = V_{uL}^\dagger V_{dL}. \tag{10}$$

Si usa denotare gli elementi di $\mathbf{V}$ con i nomi dei quark corrispondenti,

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{vmatrix} \tag{11}$$

Gli elementi di matrice hanno una semplice interpretazione fisica che discende dalla (9): la costante di accoppiamento per la transizione $d \to u + W^-$ (il primo passo del decadimento beta) è gV_{ud}, e analogamente per le altre possibili transizioni.

Prima di chiudere questa sezione notiamo che il mescolamento dei quark non ha alcun effetto sugli accoppiamenti dei quark ai bosoni W^3, B e quindi al fotone e al bosone Z^0. Considerando ad esempio l'accoppiamento dei quark u al W^3 abbiamo (vedi la eq. 6; come al solito omettiamo gli indici di sapore)

$$g\bar{u}^L \gamma^\mu u^L \, W_\mu^3 = g\bar{u}'^L V_{uL}^\dagger \gamma^\mu V_{uL} u^L \, W_\mu^3 = g\bar{u}'^L \gamma^\mu u'^L \, W_\mu^3 \tag{12}$$

quindi l'accoppiamento resta immutato dopo il mescolamento. Lo stesso vale per gli tutti gli accoppiamenti ai quark dei bosoni neutri.

2.1 Il problema delle fasi

Le matrici V_{uL}, etc. non sono univocamente determinate dalla eq. (7), dato che, se U_u, U_d sono matrici unitarie *diagonali*,

$$U_u = \begin{vmatrix} e^{i\phi_u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_c} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_t} \end{vmatrix}; \quad U_d = \begin{vmatrix} e^{i\phi_d} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_b} \end{vmatrix}; \tag{13}$$

le matrici unitarie

$$V'_{uL} = U_u V_{uL}, \; V'_{uR} = U_u V_{uR}; \quad V'_{dL} = U_d V_{dL}, \; V'_{dR} = U_d V_{dR} \tag{14}$$

soddisfano la condizione (7) di diagonalizzazione delle masse. Il significato di questa trasformazione è la ridefinizione delle fasi dei campi u, c, t e d, s, b, e

quindi delle fasi dei corrispondenti stati fisici, che non deve avere conseguenze osservabili. Sotto questa trasformazione la matrice V si trasforma in

$$(15)\quad \mathbf{V} \to U_u^\dagger \mathbf{V} U_d = \begin{vmatrix} e^{-i\phi_u} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_c} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\phi_t} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e^{i\phi_d} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_b} \end{vmatrix}$$

A questo punto si pone una domanda interessante: la presenza di elementi complessi nella $\mathbf{V}$ equivale a costanti di accoppiamento complesse tra quark e $W^\pm$, e questo potrebbe portare, e in effetti porta, alla violazione delle simmetrie CP e T. È vero, ma solo se le fasi non sono eliminabili con una ridefinizione delle fasi degli stati fisici. Nella prossima sezione verificheremo in dettaglio questa affermazione.

Il problema che si pone è quindi di sapere se la trasformazione (15) può eliminare tutte le fasi della $\mathbf{V}$, trasformandola in una matrice reale, che non viola CP e T, o se esistono in $\mathbf{V}$ delle fasi *ineliminabili* che violano queste simmetrie.

Consideriamo un caso più generale, assumendo che ci siano N famiglie, e che quindi $\mathbf{V}$ sia una matrice unitaria $N \times N$. Nella trasformazione (15) ogni elemento V_{ik} viene moltiplicato per un fattore $\exp(i\phi_k - i\phi_i)$, e possiamo eliminare $2N-1$ fasi. Eliminare tutte le fasi della matrice unitaria $\mathbf{V}$ equivale a trasformarla in una matrice ortogonale, tale cioè che $\mathbf{V}^T\mathbf{V} = 1$. Una matrice unitaria $N \times N$ è definita da N^2 parametri, mentre una ortogonale richiede $N(N-1)/2$ parametri. La differenza, $N(N+1)/2$, è il numero delle fasi da eliminare. Quindi esisteranno delle fasi ineliminabili se $N(N+1)/2 > 2N-1$, il che accade se $N > 2$. Per tre famiglie esiste una fase ineliminabile.

Con solo due famiglie di fermioni, la situazione precedente al 1973, quando fu scoperto il leptone τ, primo membro della terza famiglia, non si poteva usare il mescolamento dei quark per spiegare l'osservata violazione della simmetria CP. Ma nel 1972 M. Kobayashi e T. Maskawa si accorsero che la violazione di CP diveniva possibile con una terza famiglia, e ne proposero l'esistenza.

2.2 La violazione di CP

Guardiamo in più dettaglio alla violazione di CP prendendo le mosse dal capitolo sulle simmetrie discrete degli appunti del modulo di elettrodinamica quantistica. In questa sezione chiameremo u_i, d_i i quarks di massa definita, rispettivamente u, c, t e d, s, b. Ricordiamo l'azione delle simmetrie P e C sui campi fermionici,

$$(16)\qquad \mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P} = \gamma^0\psi(-x);$$

$$(17)\qquad \mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C} = e^{i\phi}C\psi^\dagger(x); \qquad\qquad \mathcal{C}\psi^\dagger(x)\mathcal{C} = e^{-i\phi}C\psi(x).$$

dove abbiamo introdotto (rispetto ai citati appunti) un fattore di fase nella definizione della matrice unitaria C, che come vedremo servirà per analizzare la violazione di CP derivante dal mescolamento dei quark . La matrice C è tale che

$$(18)\qquad C^\dagger = C = C^{-1}; \quad C\gamma_\mu C = -\gamma^*_{mu}$$

Indipendentemente dal valore del fattore di fase questa definizione è tale che $\mathcal{C}^2 = \mathcal{P}^2 = 1$.

Per i quark possiamo definire la coniugazione di carica attribuendo a ciascun quark una fase diversa:

$$\mathcal{C}u_i\mathcal{C} = e^{i\phi_i}Cu_i^\dagger(x); \quad \mathcal{C}d_i\mathcal{C} = e^{i\chi_i}Cd_i^\dagger(x) \tag{19}$$

Prima di proseguire conviene trattenersi un momento sul significato di questi fattori di fase, che è il seguente: la simmetria CP è conservata se esiste una scelta delle fasi che rende il lagrangiano invariante. Nel caso contrario — impossibilità di trovare una scelta di fase che renda invariante il lagrangiano — la simmetria CP è rotta.

Esercizio 1 *Verificare che*

$$\begin{aligned}\mathcal{CP}\left(\bar{d}_i\gamma^\mu(1-\gamma^5)d_k\right)\mathcal{PC} &= -g^{\mu\mu}e^{i(\chi_k-\chi_i)}\left(\bar{d}_k\gamma^\mu(1-\gamma^5)d_i\right)\\ &= -g^{\mu\mu}e^{i(\chi_k-\chi_i)}\left(\bar{d}_i\gamma^\mu(1-\gamma^5)d_k\right)^\dagger\end{aligned} \tag{20}$$

Per i bosoni $W^\pm$ possiamo definire:

$$\mathcal{P}W_\mu(x)\mathcal{P} = g_{\mu\mu}W_\mu(-x); \tag{21}$$

$$\mathcal{C}W_\mu(x)\mathcal{C} = -W_\mu^\dagger(x); \qquad \mathcal{C}W_\mu^\dagger(x)\mathcal{C} = -W_\mu(x) \tag{22}$$

mentre per il campo del fotone A_μ e per il bosone Z la coniugazione di carica viene definita così,

$$\mathcal{C}A_\mu(x)\mathcal{C} = -A_\mu^\dagger(x); \qquad \mathcal{C}Z_\mu^\dagger(x)\mathcal{C} = -Z_\mu(x). \tag{23}$$

La scelta del segno per il fotone è dettata dalla richiesta che l'interazione elettromagnetica sia invariante sotto coniugazione di carica. Infatti la corrente elettromagnetica

$$\frac{2}{3}\bar{u}\gamma^\mu u + \frac{2}{3}\bar{c}\gamma^\mu c + \cdots$$

è diagonale nei campi dei quark, e cambia segno sotto C indipendentemente dalla scelta di fase per i quark. Con un ragionamento analogo si mostra che l'accoppiamento dello Z alla corrente debole neutra (anch'essa diagonale) è invariante sotto CP indipendentemente dalla scelta delle fasi.

Nel caso dei $W^\pm$ la coniugazione di carica (22) trasforma W^- in W^+ , mentre il segno è scelto in analogia con quello di A, Z. Una diversa scelta di fase, ad esempio

$$\mathcal{C}W_\mu(x)\mathcal{C} = -e^{i\zeta}W_\mu^\dagger(x); \quad \mathcal{C}W_\mu^\dagger(x)\mathcal{C} = -e^{-i\zeta}W_\mu(x) \tag{24}$$

potrebbe, come il lettore può facilmente verificare, essere riassorbita nella scelta di fase dei quark, e sarebbe quindi irrilevante.

Resta quindi da verificare il comportamento dell'accoppiamento tra quark e W, eq. (9), che riscriviamo in forma leggermente diversa,

$$\mathcal{L}_{qW} = g\sum_{ij}\mathbf{V}_{ij}\bar{u}_i^L\gamma^\mu d_j^L W_\mu^\dagger + g\sum_{ij}\mathbf{V}_{ij}^*\bar{d}_i^L\gamma^\mu u_j^L W_\mu. \tag{25}$$

Un calcolo esplicito mostra che per effetto di CP si ottiene

$$\mathcal{CP}L_{qW}\mathcal{PC} = g\sum_{ij}\mathbf{V}_{ij}e^{i(\chi_j-\phi_i)}\bar{d}_i^L\gamma^\mu u_j^L W_\mu + g\sum_{ij}\mathbf{V}_{ij}^* e^{-i(\chi_j-\phi_i)}\bar{u}_i^L\gamma^\mu d_j^L W_\mu^\dagger. \tag{26}$$

Paragonando le (25), (26) si vede che il lagrangiano è invariante purchè sia possibile scegliere le fasi ϕ_i, χ_j di modo che

$$\mathbf{V}_{ij}e^{i(\chi_j-\phi_i)} = \mathbf{V}_{ij}^* \tag{27}$$

che possiamo riscrivere come

$$(\mathbf{V}_{ij}e^{i(\chi_j-\phi_i)/2}) = (\mathbf{V}_{ij}^* e^{i(\chi_j-\phi_i)/2})^*. \tag{28}$$

Questa condizione è esattamente quella introdotta nella precedente sezione, cioè che $\mathbf{V}$ possa essere trasformato in una matrice reale con una trasformazione di fase (15).

Possiamo riassorbire le fasi dei fermioni sotto $\mathcal{C}$ con una ridefinizione dei campi: posso ridefinire i campi dei quark, in modo che $\mathcal{C}$ agisca ne modo semplice. Questo richiede anche una ridefinizione di $\mathbf{V}$,

$$\tilde{u}_i = e^{-i\phi/2}u_i, \quad \tilde{d}_i = e^{-i\chi/2}d_i$$

in modo che $\mathcal{C}$ agisca nel modo semplice

$$\mathcal{C}\tilde{u}_i\mathcal{C} = \tilde{u}_i^\dagger, \quad \mathcal{C}\tilde{d}_i\mathcal{C} = \tilde{d}_i^\dagger$$

Questo richiede anche una ridefinizione di $\mathbf{V}$,

$$\sum_{ij}\mathbf{V}_{ij}\bar{u}_i^L\gamma^\mu d_j^L = \sum_{ij}\tilde{\mathbf{V}}_{ij}\ \bar{\tilde{u}}_i^L\gamma^\mu\tilde{d}_j^L; \quad \tilde{\mathbf{V}}_{ij} = \mathbf{V}_{ij}e^{i(\chi_j-\phi_i)/2}.$$

Se CP è conservata, $\tilde{\mathbf{V}}$ è una matrice a componenti reali, vedi la (28).

2.3 La parametrizzazione di Wolfenstein

Sperimentalmente si sa che gli elementi non diagonali della matrice $\mathbf{V}$ sono piccoli, e questo ha suggerito [3] la seguente parametrizzazione, correntemente usata:

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} 1-\lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho-i\eta) \\ -\lambda & 1-\lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1-\rho-i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{vmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4) \tag{29}$$

che è unitaria a meno di termini $\mathcal{O}(\lambda^4)$. Il parametro $\lambda = V_{us} \approx 0.22$ è relativamente piccolo, mentre A, ρ sono dell'ordine dell'unità. Infine η è il parametro che determina la violazione delle simmetrie discrete CP, T.

Una rassegna delle determinazioni sperimentali dei vari elementi della matrice $\mathbf{V}$ si trova nella edizione 2006 del Particle Data Book [4]. Da questa rassegna

traiamo la seguente tabella, che racchiude le attuali conoscenze sui *moduli* dei vari elementi di $\mathbf{V}$

$$\begin{pmatrix} 0.97383^{+0.00024}_{-0.00023} & 0.2272^{+0.0010}_{-0.0010} & (3.96^{+0.09}_{-0.09}) \times 10^{-3} \\ 0.2271^{+0.0010}_{-0.0010} & 0.97296^{+0.00024}_{-0.00024} & (42.21^{+0.10}_{-0.80}) \times 10^{-3} \\ (8.14^{+0.32}_{-0.64}) \times 10^{-3} & (41.61^{+0.12}_{-0.78}) \times 10^{-3} & 0.999100^{+0.000034}_{-0.000004} \end{pmatrix} \tag{30}$$

3 Triangolo di unitarietà

Consideriamo una matrice unitaria 3×3, ad esempio la matrice CKM [1, 2], che possiamo scrivere

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \tag{31}$$

Dalla condizione di unitarietà segue che il prodotto tra due righe o tra due colonne differenti è nullo, quindi

$$a\,d^* + b\,e^* + c\,f^* = 0 \tag{32}$$

Ognuna delle sei relazoni di ortogonalità tra righe e colonne di $\mathbf{V}$ definisce un triangolo nel piano complesso. La eq. (32) definisce ad esempio il triangolo della fig. 1 a destra, che diremo triangolo T_1. I sei triangoli sono derivati dalle relazioni:

$$\begin{array}{ll} T_1 & a\,d^* + b\,e^* + c\,f^* = 0 \\ T_2 & d\,g^* + e\,h^* + f\,k^* = 0 \\ T_3 & g\,a^* + h\,b^* + k\,c^* = 0 \\ T_4 & a\,b^* + d\,e^* + g\,h^* = 0 \\ T_5 & b\,c^* + e\,f^* + h\,k^* = 0 \\ T_6 & c\,a^* + f\,d^* + k\,g^* = 0 \end{array}$$

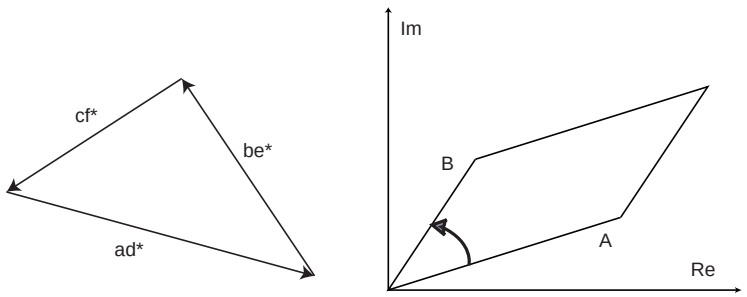

Figura 1: A destra, triangolo di unitarietà, a sinistra, area nel piano complesso.

Teorema 1 *I sei triangoli hanno la stessa area.*

Per dimostrare il teorema, notiamo che l'area del parallelogramma definito dai vettori che rappresentano due numeri complessi A, B (fig. 1 a destra) è

$$\text{Area}(A,\, B) = \text{Im}(A^* B) = \text{Im}(B)\,\text{Re}(A) - \text{Re}(B)\,\text{Im}(A) \tag{33}$$

Questa espressione rappresenta un'area orientata, positiva se l'angolo da A a B è positivo. Quindi l'area del triangolo definito dalla equazione (32) può essere rappresentata in tre modi diversi:

$$2\,\text{Area}(T_1) = \text{Im}(a\, d^* b^* e) = \text{Im}(b\, e^* c^* f) = \text{Im}(c\, f^* a^* d) \tag{34}$$

Le aree dei sei triangoli sono date da

$$\begin{aligned}
2\,\text{Area}(T_1) &= \text{Im}(a\, d^* b^* e) = \text{Im}(b\, e^* c^* f) = \text{Im}(c\, f^* a^* d)\\
2\,\text{Area}(T_2) &= \text{Im}(d\, g^* e^* h) = \text{Im}(e\, h^* f^* k) = \text{Im}(f\, k^* d^* g)\\
2\,\text{Area}(T_3) &= \text{Im}(g\, a^* h^* b) = \text{Im}(h\, b^* k^* c) = \text{Im}(k\, c^* g^* a)\\
2\,\text{Area}(T_4) &= \text{Im}(a\, b^* d^* e) = \text{Im}(d\, e^* g^* h) = \text{Im}(g\, h^* a^* b)\\
2\,\text{Area}(T_5) &= \text{Im}(b\, c^* e^* f) = \text{Im}(e\, f^* h^* k) = \text{Im}(h\, k^* b^* c)\\
2\,\text{Area}(T_6) &= \text{Im}(c\, a^* f^* d) = \text{Im}(f\, d^* k^* g) = \text{Im}(k\, g^* c^* a)
\end{aligned}$$

e si vede facilmente che risultano tutte eguali tra loro. Il valore comune dell'area dei triangoli di unitarietà e denotata da J

$$J = \text{Area}(T_1) = \cdots = \text{Area}(T_6) \tag{35}$$

Si vede anche facilmente che una trasformazione del tipo (15) equivale ad una rotazione di ciascun triangolo nel piano complesso, e quindi l'area dei triangoli di unitarietà risulta invariante rispetto a trasformazioni di questo tipo. Ne segue che, se CP fosse conservato, cioè $\mathbf{V} = \mathbf{V}^*$, avremmo $J = 0$. L'area dei triangoli di unitarietà rappresenta quindi una misura della violazione di CP.

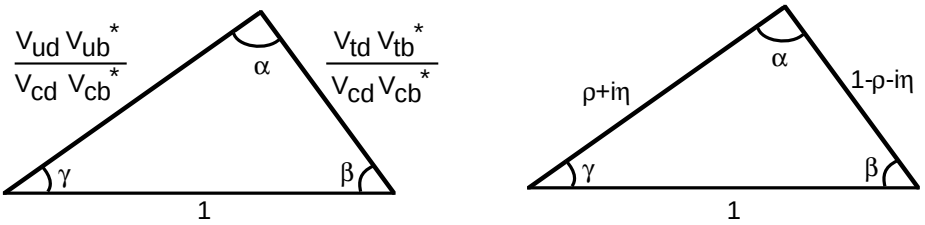

Figura 2: A sinistra il triangolo di unitarietà, a destra il triangolo nella parametrizzazione di Wolfenstein. Da notare che la forma del triangolo nelle due figure non riflette quella oggi nota.

Tra i possibili triangoli unitari, l'attenzione si è concentrata su quello ottenuto dal prodotto della prima e terza colonna di $\mathbf{V}$,

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0 \tag{36}$$

La ragione della scelta si vede bene dalla parametrizzazione (29): in questo triangolo, a differenza degli altri (tranne quello formato dalla prima e terza

riga, che si sarebbe anche potuto scegliere) i tre lati sono all'incirca della stessa lunghezza, esssendo $\propto \lambda^3$. Prendendo i valori centrali nella (30) essi risultano in modulo eguali a 3.9×10^{-3}, 9.6×10^{-3}, 8.1×10^{-3}. Già da questi valori si vede che l'area del triangolo è differente da zero. Invece del triangolo di unitarietà vero e proprio, conviene discutere del triangolo di unitarietà con i lati normalizzati a $V_{cd}V_{cb}^*$, come si vede nella figura 2. Nella parametrizzazione (29) la condizione di unitarietà è automaticamente soddisfatta, come si vede a destra della figura 2. La figura definisce anche i tre angoli α, β, γ, che sono direttamente misurabili nei decadimenti dei mesoni B^0. In particolare, con un occhio alla (29) vediamo che la fase di V_{td} è $-\beta$.

$$V_{td} = |V_{td}|e^{-i\beta} \tag{37}$$

È interessante paragonare due determinazioni [5] del triangolo di unitarietà, mostrate nella figura 3: a destra quella basata su diverse misure della lunghezza dei lati, e sulla violazione di CP nel decadimento del K^0, a sinistra una basata su recenti determinazioni degli angoli. Tra le due determinazioni c'è completo accordo. Nella sezione seguente discuteremo della misura dell'angolo β, attualmente la più precisa.

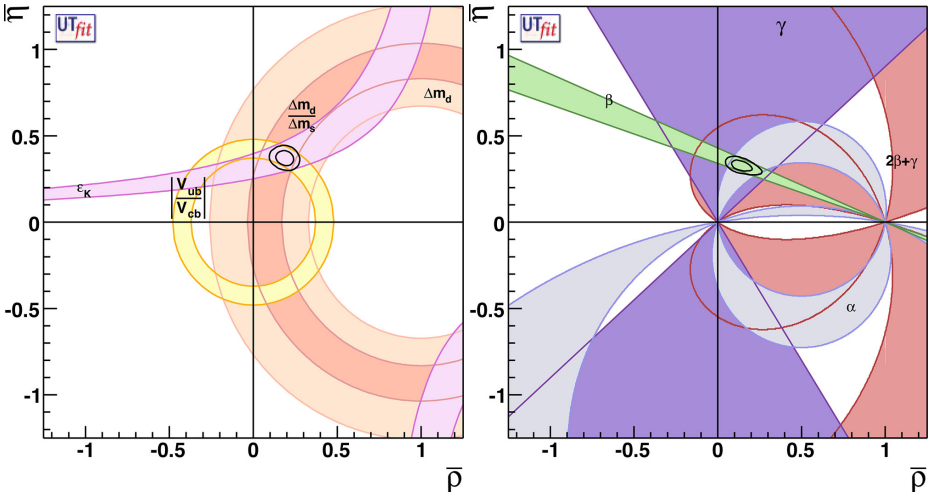

Figura 3: Due diverse detrminazioni del traingolo di unitarietà.

4 Misura dell'angolo β.

Cominciamo con il ricordare che la violazione di CP fu scoperta nel decadimento dei mesoni K neutri nel 1964. A partire dal 2000 è emersa dagli esperimenti BABAR a SLAC (Stanford, USA) e BELLE a KEK (Tsukuba, Giappone) una gran messe di dati che dimostrano la violazione di CP nei decadimenti dei mesoni B_d^0 composti da un quark b e un $\bar{d}$. Dato che ci concentriamo sul comportamento di queste particelle, le chiameremo nel seguito $B, \bar{B}$. Discuteremo in particolare la misura dell'angolo β, basata sui decadimenti

$$B \to J/\Psi + K_S, \quad \bar{B} \to J/\Psi + K_S \tag{38}$$

dove K_S è il mesone K neutro a corta vita media. Come vedremo la misura è particolarmente pulita perchè la sua base teorica non richiede (con ottima approssimazione) calcoli di cromodinamica quantistica.

La misura dell'angolo β è resa possibile dal fenomeno delle oscillazioni $B \leftrightarrow \bar{B}$. Per studiare questo fenomeno dobbiamo considerare l'evoluzione temporale di stati che siano una sovrapposizione lineare di B e $\bar{B}$

$$|B;t\rangle = a(t)\,|\bar{B}\rangle + b(t)\,|B\rangle \tag{39}$$

Nell'evoluzione dobbiamo tenere conto di vari fenomeni: da una parte l'esistenza di transizioni $B \leftrightarrow \bar{B}$ che derivano dalle interazioni deboli. Nella sezione 4.1 presentiamo un calcolo semplificato di questo fenomeno. In conseguenza di questo fenomeno l'evoluzione temporale del vettore $\{a, b\}$ (consideriamo il caso di un B a riposo) sarà data da

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{M}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & M_{12} \\ M_{12}^* & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{40}$$

Notiamo che gli elementi diagonali della matrice $\mathbf{M}$ sono eguali per il teorema CPT (particella e antiparticella hanno massa eguale). Usando la definizione (58)) dell'hamiltoniano effettivo H_{eff}, e i risultati di una calcolo più completo (per cui rimandiamo alla rassegna [6]) della costante di accoppiamento effettiva $\tilde{G}$, si ottiene

$$M_{12} = \langle \bar{B}|\mathcal{H}_{\text{eff}}|B\rangle = (V_{tb}V_{td}^*)^2\,\frac{G_F^2 M_W^2 M_B f_B^2}{12\pi^2}K = |M_{12}|e^{2i\beta} \tag{41}$$

dove K è un fattore dell'ordine dell'unità che include varie correzioni, e f_B è definita dall'elemento di matrice

$$\langle 0|(\bar{d}\gamma^\mu\gamma^5 b)|B;\vec{p}\rangle = \frac{f_B p^\mu}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E}}, \tag{42}$$

e il suo valore corrente [5] è $f_B = (187 \pm 13)MeV$.

Un secondo fenomeno che contribuisce all'evoluzione del nostra stato è il decadimento, per cui l'evoluzione temporale non è unitaria, come espressa dalla (40), ma più generale, che possiamo esprimere come

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \left(\mathbf{M} - i\frac{\mathbf{\Gamma}}{2}\right)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{43}$$

dove $\mathbf{\Gamma}$ è, come $\mathbf{M}$, una matrice hermitiana

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12}^* & \Gamma \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Notiamo che dato che ogni matrice si può rappresentare come somma di una matrice hermitiana ed una antihermitiana, la (43) rappresenta la più generale legge di evoluzione lineare.

Dalla (43) segue che

$$\frac{d}{dt}[|a|^2 + |b|^2] = -\begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix}\mathbf{\Gamma}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{45}$$

e quindi la matrice $\mathbf{\Gamma}$ deve essere interpretata come matrice dei tassi di decadimento.

La presenza di termini non diagonali nella matrice $\mathbf{\Gamma}$ deriva dalla presenza di canali di decadimento comuni per $B, \bar{B}$, ad esempio $[B, \bar{B}] \to \pi^+\pi^-$. Questi canali sono però canali rari, mentre i canali dominanti sono caratterizzati da numeri quantici definiti e diversi per B e $\bar{B}$, ovvero stati con charm $= \pm\ 1$ (quark c o $\bar{c}$ nello stato finale) oppure con stranezza $= \pm 1$ (quark s o $\bar{s}$ nello stato finale). La probabilità di decadimento in canali comuni a B e $\bar{B}$, ad esempio $c+\bar{c}+d+\bar{d}$ oppure $u+\bar{u}+d+\bar{d}$, è soppressa di un fattore λ^2. Un calcolo diretto (vedi [6]) mostra che nel caso dei mesoni B il contributo al mescolamento di Γ_{12} è trascurabile rispetto a quello di M_{12}, $|\Gamma_{12}/M_{12}| \approx 5 \times 10^{-3}$. Nel resto della sezione trascureremo Γ_{12}. Possiamo riscrivere la (43) come

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M - i\Gamma/2 & |M_{12}|e^{2i\beta} \\ |M_{12}|e^{-2i\beta} & M - i\Gamma/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{46}$$

I due autostati della matrice corrispondono a due stati $|B_{1,2}\rangle$

$$|B_1\rangle = (e^{i\beta}\,|B\rangle + e^{-i\beta}\,|\bar{B}\rangle)/\sqrt{2}, \quad |B_2\rangle = (e^{i\beta}\,|B\rangle - e^{-i\beta}\,|\bar{B}\rangle)/\sqrt{2}, \tag{47}$$

che hanno massa $M_{1,2} = M \pm |M_{12}|$, con differenza di massa $\Delta M = 2|M_{12}|$, e (nella approssimazione di trascurare Γ_{12}) la stessa vita media, $\tau = \Gamma^{-1}$.

Lo sviluppo temporale di uno stato che è $|B\rangle$ al tempo $t = 0$ è dato da

$$\begin{aligned} |B;\,t\rangle &= \frac{e^{-i\beta}e^{-i(M-i\Gamma/2)t}}{\sqrt{2}}[e^{-i|M_{12}|t}\,|B_1\rangle + e^{i|M_{12}|t}\,|B_2\rangle] \\ &= e^{-i(M-i\Gamma/2)t}\,\sqrt{2}[\cos(\Delta M\,t/2)\,|B\rangle + ie^{-2i\beta}\sin(\Delta M\,t/2)\,|\bar{B}\rangle] \end{aligned} \tag{48}$$

Mentre lo sviluppo temporale di un $\bar{B}$ è

$$\begin{aligned} |\bar{B};\,t\rangle &= \frac{e^{i\beta}e^{-i(M-i\Gamma/2)t}}{\sqrt{2}}[e^{-i|M_{12}|t}\,|B_1\rangle - e^{i|M_{12}|t}\,|B_2\rangle] \\ &= e^{-i(M-i\Gamma/2)t}\,\sqrt{2}[\cos(\Delta M t/2)\,|\bar{B}\rangle + ie^{2i\beta}\sin(\Delta M t/2)\,|B\rangle] \end{aligned} \tag{49}$$

Esercizio 2 *Supponendo che se per $t = 0$ viene prodotta una coppia $B\bar{B}$, verificare che in ogni istante sucessivo, supponendo che nessuna delle due particelle sia decaduta, lo stato del sistema è ancora rappresentato da una coppia $B\bar{B}$.*

Negli esperimenti BABAR e BELLE si osservano coppie $B^0\bar{B}^0$ prodotte in collisioni e^+e^-. Se una delle due particelle dopo un certo tempo t_1 decade in uno dei suoi modi dominanti, si può determinare se si trattava di un B o di un $\bar{B}$. Se la prima particella è un $\bar{B}$, la seconda particella sarà (allo stesso tempo t_1) un B, e viceversa. La seconda particella potrebbe decadere ad un tempo $t_2 > t_1$ oppure $t_2 < t_1$. Nel secondo caso sappiamo però che, se non fosse già decaduta, al tempo $t_2 = t_1$ la seconda particella sarebbe stata un B, oppure un $\bar{B}$ se la prima era un B. Gli esperimenti sono quindi in grado di seguire, tramite i decadimenti, lo sviluppo temporale di un B (oppure di un $\bar{B}$) sia per tempi positivi che negativi rispetto all'istante t_1 in cui la natura della particella è nota. Nel seguito prenderemo t_1 come origine del tempo, $t_1 = 0$.

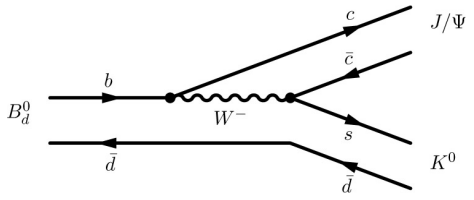

Figura 4: L'ampiezza per $B^0 \to J/\Psi + K$ è dominata dal diagramma "ad albero" nella figura, e risulta proporzionale a $V_{cb}V_{cs}^* = -A\lambda^3$. Questa ampiezza è quindi reale, ed eguale a quella coniugata di carica, $\bar{B}^0 \to J/\Psi + \bar{K}$.

Le ampiezze dei modi di decadimento (38), decritte dal grafico in fig. 4 sono reali e eguali. Non ci interessa qui il valore assoluto di queste ampiezze[1] e possiamo scrivere[2]

$$\langle J/\Psi + K^0|B\rangle = \langle J/\Psi + \bar{K}^0|\bar{B}\rangle = X \propto \lambda^3 \tag{50}$$

Se trascuriamo l'effetto della piccola violazione di CP i mesoni K neutri appaiono in due stati mescolati, K_S e K_L, autostati di CP

$$K_S = \frac{K^0 + \bar{K}^0}{\sqrt{2}} \qquad \mathcal{CP} = 1 \qquad \tau_S = 0.9 \times 10^{-10} s$$
$$K_L = \frac{K^0 - \bar{K}^0}{\sqrt{2}} \qquad \mathcal{CP} = -1 \qquad \tau_L = 5 \times 10^{-8} s$$

Lo stato K_S è facilmente identificato dal suo decadimento in $\pi^+\pi^-$. Inoltre sia B^0 che $\bar{B}^0$ possono decadere in $J/\Psi + K_S$ con ampiezze eguali,

$$\langle J/\Psi + K_S|B\rangle = \langle J/\Psi + \bar{K}_S|\bar{B}\rangle = \frac{X}{\sqrt{2}} \tag{51}$$

Uno stato che al tempo $t = 0$ è $|B\rangle$ o $|\bar{B}\rangle$ evolverà nel tempo secondo le (48), (49), e le ampiezze di decadimento evolvono anch'esse,

$$\begin{aligned} \langle J/\Psi + K_S|B;\, t\rangle &= e^{-i(M-i\Gamma/2)t} X[\cos(\Delta M\, t/2) + ie^{-2i\beta}\sin(\Delta M\, t/2)], \\ \langle J/\Psi + K_S|\bar{B};\, t\rangle &= e^{-i(M-i\Gamma/2)t} X[\cos(\Delta M\, t/2) + ie^{2i\beta}\sin(\Delta M\, t/2)], \end{aligned} \tag{52}$$

e quindi le probabilità di decadimento in funzione di t sono

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(B \to J/\Psi + K_S;\, t) &= e^{-\Gamma\, t} X[1 + 2\sin(2\beta)\sin(\Delta M\ t)], \\ \mathcal{P}(\bar{B} \to J/\Psi + K_S;\, t) &= e^{-\Gamma\, t} X[1 - 2\sin(2\beta)\sin(\Delta M\ t)]. \end{aligned} \tag{53}$$

Si nota subito che il secondo termine nella parentesi quadra rappresenta una differenza tra il comportamento di B e $\bar{B}$, quindi una violazione di CP, che è meglio espressa dalla asimmetria,

$$\frac{\mathcal{P}(B \to J/\Psi + K_S;\, t) - \mathcal{P}(\bar{B} \to J/\Psi + K_S;\, t)}{\mathcal{P}(B \to J/\Psi + K_S;\, t) + \mathcal{P}(\bar{B} \to J/\Psi + K_S;\, t)} = 4\sin(2\beta)\sin(\Delta M\ t) \tag{54}$$

[1] Agli sperimentali naturalmente interessa il valore del *branching ratio*, $(8.72 \pm 0.33) \times 10^{-4}$, che determina il numero di eventi che si potranno osservare.

[2] Sono del tutto trascurabili i piccoli effetti di violazioni di CP che provengono da diagrammi più complessi a proporzionali a maggiori potenze di λ.

Il fatto che la asimmetria sia una funzione dispari del tempo segnala che accanto ad una violazione di CP si ha anche una violazione della simmetria di inversione temporale, T, come richiesto dal teorema CPT.

Sulla base degli esperimenti BABAR e BELLE il valore oggi accettato per $\sin(2\beta)$ è

$$sin(2\beta) = 0.725 \pm 0.037. \tag{55}$$

4.1 Calcolo dell'ampiezza $b + \bar{d} \to d + \bar{b}$

Calcoliamo la ampiezza della reazione

$$b + \bar{d} \to d + \bar{b} \tag{56}$$

che al quarto ordine nella costante di accoppiamento tra quark e W è descritta dai due diagrammi nella figura 5. Noi ci limiteremo ad un calcolo semplificato

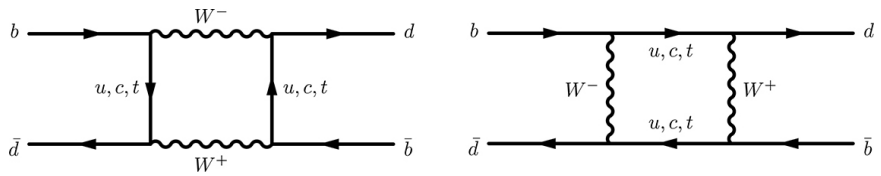

Figura 5: I due grafici per $b + \bar{d} \to d + \bar{b}$ al quarto ordine.

usando l'approssimazione di Fermi per il propagatore del bosone W, chiaramente inadeguata, dato che come vedremo il diagramma è dominato dal quark t, ma che ci porta al corretto ordine di grandezza. Il risultato può essere posto nella forma[3]

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_1 &= \frac{-i\tilde{G}}{\sqrt{2}} \big(\bar{v}(p_{\bar{d}})\gamma^\sigma(1-\gamma^5)u(p_b)\big)\big(\bar{u}(p_d)\gamma_\sigma(1-\gamma^5)v(p_{\bar{b}})\big) \\ \mathcal{M}_2 &= \frac{i\tilde{G}}{\sqrt{2}} \big(\bar{u}(p_d)\gamma^\sigma(1-\gamma^5)u(p_b)\big)\big(\bar{v}(p_{\bar{d}})\gamma_\sigma(1-\gamma^5)v(p_{\bar{b}})\big)] \end{aligned} \tag{57}$$

dove $\tilde{G}$ è una costante di Fermi "effettiva". Questa transizione può quindi essere descrittada un "hamiltoniano effettivo"

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{\tilde{G}}{2\sqrt{2}} \big(\bar{d}\gamma^\sigma(1-\gamma^5)b\big)\big(\bar{d}\gamma_\sigma(1-\gamma^5)b\big). \tag{58}$$

Esercizio 3 *Ricavare la* (57) *dalla* (58). *Notare che il fattore 1/2 nell'hamiltoniano si elimina dato che il calcolo dell'ampiezza produce quattro termini (scambio di ruolo dei due campi b e dei due campi $\bar{d}$) che sono a due a due rispettivamente eguali a $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$.*

[3] I due termini derivano rispettivamente dal primo e secondo diagramma. Il segno "-" è dovuto al fatto che i due diagrammmi si ottengono l'uno dall'altro con uno scambio tra due fermioni, $d \leftrightarrow \bar{d}$.

Come vedremo possiamo scrivere

$$\tilde{G} = (V_{tb}V_{td}^*)^2 2\sqrt{2}\,\pi^2 G_F^2 M_t^2 \tag{59}$$

dove (vedi ad esempio il Mandl e Shaw) G_F è la costante di Fermi,

$$G_F = \sqrt{2}\frac{g_W^2}{M_W^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{g^2}{M_W^2}. \tag{60}$$

Per inquadrare il calcolo consideriamo una delle linee fermioniche nella figura 5, ad esempio quella da b a $\bar{d}$ nel primo diagramma, che, se k è l'impulso che si propaga sulla linea virtuale possiamo scrivere come

$$\big(\bar{v}(p_{\bar{d}})\gamma^\mu(1-\gamma^5)iS(k)\gamma^\nu(1-\gamma^5)u(p_b)\big). \tag{61}$$

Il "propagatore" $S(k)$ è la somma sui tre fermioni che si possono propagare, e include i fattori provenienti dalla matrice $\mathbf{V}$,

$$S(k) = \not{k}\left[\frac{V_{ub}V_{ud}^*}{k^2-M_u^2} + \frac{V_{cb}V_{cd}^*}{k^2-M_c^2} + \frac{V_{tb}V_{td}^*}{k^2-M_t^2}\right].$$

Abbiamo omesso i termini $M_u \cdots M_t$ a numeratore che sono eliminati dai fattori $(1-\gamma^5)$ nella eq. (61). In apparenza i grafici della figura 5 sono quadraticamente divergenti, ma grazie alla unitarietà della matrice $\mathbf{V}$ il risultato è convergente, sia nella approssimazione di Fermi che useremo sia con il propagatore completo dei W. Infatti, usando la (36) possiamo riscrivere

$$S(k) = \not{k}\left[V_{ub}V_{ud}^*\frac{M_u^2-M_t^2}{(k^2-M_u^2)(k^2-M_t^2)} + V_{cb}V_{cd}^*\frac{M_c^2-M_t^2}{(k^2-M_c^2)(k^2-M_t^2)}\right].$$

Sia a numeratore che a denominatore possiamo trascurare M_c^2, M_u^2 rispetto a M_t^2, i che rappresenta un errore trascurabile, dell'ordine di $M_c^2/M_t^2 \approx 10^{-4}$, e usando ancora la (36) otteniamo

$$S(k) = V_{tb}V_{td}^* M_t^2 \frac{\not{k}}{k^2\,(k^2-M_t^2)}, \tag{62}$$

e la stessa espressione è valida per i quattro fermioni virtuali che appaiono nei due diagrammi. Data la dominanza di M_t^2 rispetto alle energie in gioco (inclusa l'energia di legame tra b e $\bar{d}$ nel mesone B_d^0) è sufficente calcolare i diagrammi nel limite in cui le linee esterne portano momento nullo. In questa situazione il calcolo si semplifica perché tutte le linee interne sono associate allo stesso impulso k. Possiamo allora scrivere per il primo diagramma nella approssimazione di Fermi, e semplificando i fattori $(1-\gamma^5)$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 =&(V_{tb}V_{td}^*)^2 2G_F^2 M_t^4 \int d^4k \frac{k_\lambda k_\sigma}{(k^2+i\epsilon)^2(k^2-M_t^2+i\epsilon)^2}\\ &\big(\bar{v}(p_{\bar{d}})\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu(1-\gamma^5)u(p_b)\big)\big(\bar{u}(p_d)\gamma_\nu\gamma^\sigma\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(p_{\bar{b}})\big)\end{aligned} \tag{63}$$

L'integrale deve essere proporzionale a $g_{\lambda\sigma}$,

$$\int d^4k \frac{k_\lambda k_\sigma}{(k^2+i\epsilon)^2(k^2-M_t^2+i\epsilon)^2} = I g_{\lambda\sigma}, \tag{64}$$

dove

$$4\,I = \int \frac{d^4k}{(k^2+i\epsilon)(k^2-M_t^2+i\epsilon)^2} \tag{65}$$

Per calcolare l'integrale eseguiamo una rotazione di Wick, $k^0 \to i\,k^4$ per passare a uno spazio euclideo ($k^2 \to (ik^4)^2 - \vec{k}^2 = -(k^2)_E$)

$$I = \frac{-i}{4}\int_E \frac{d^4k}{k^2(k^2+M_t^2)^2} = \frac{-i\pi^2}{4}\int_0^\infty \frac{d(k^2)}{(k^2+M_t^2)^2} = \frac{-i\pi^2}{4M_t^2} \tag{66}$$

Sostituendo nella (63) otteniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 = &-i(V_{tb}V_{td}^*)^2\frac{\pi^2}{2}G_F^2M_t^2\\ &\big(\bar{v}(p_{\bar{d}})\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu(1-\gamma^5)u(p_b)\big)\big(\bar{u}(p_d)\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\mu(1-\gamma^5)v(p_{\bar{b}})\big)\end{aligned} \tag{67}$$

che possiamo semplificare usando le identità

$$\begin{aligned}&\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3; \quad \epsilon^{0123}=1\\ &\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu = g^{\mu\lambda}\gamma^\nu + \gamma^\mu g^{\lambda\nu} - \gamma^\lambda g^{\mu\nu} + i\epsilon^{\mu\lambda\nu\sigma}\gamma_\sigma\gamma^5\\ &i\epsilon^{\mu\lambda\nu\sigma}\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\mu = -i\epsilon^{\nu\lambda\mu\sigma}\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\mu = -6\gamma^\sigma\gamma^5\\ &g^{\mu\lambda}\gamma_\lambda\gamma_\mu = 4; \quad g^{\mu\nu}\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\mu = -2\gamma_\lambda.\end{aligned} \tag{68}$$

Per verificare la terza riga delle (68) consideriamo il caso $\sigma = 3$,

$$-i\epsilon^{\nu\lambda\mu 3}\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\mu = -6i\gamma_0\gamma_1\gamma_2 = -6i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma^3 = 6\gamma^5\gamma^3 = -6\gamma^3\gamma^5,$$

e per la seconda riga consideriamo il caso $\mu\lambda\sigma = 012$,

$$\gamma^0\gamma^1\gamma^2 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma_3 = -i\gamma^5\gamma_3 = i\gamma_3\gamma^5.$$

Applicando queste identità otteniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 = &-i(V_{tb}V_{td}^*)^2 2\pi^2G_F^2M_t^2\\ &\big(\bar{v}(p_{\bar{d}})\gamma^\sigma(1-\gamma^5)u(p_b)\big)\big(\bar{u}(p_d)\gamma_\sigma(1-\gamma^5)v(p_{\bar{b}})\big)\end{aligned} \tag{69}$$

che coincide con il primo termine della (57) con $\tilde{G}$ dato dalla (59).

In maniera analoga il secondo grafico porta al secondo termine della (57). In realtà non è necesssario eseguire il calcolo, dato che come abbiamo notato i due grafici si ottengono l'uno dall'altro con lo scambio $d \leftrightarrow \bar{d}$. Usando la identità di Fierz [9],[7]

$$(\bar{A}\gamma^\mu(1-\gamma^5)B)(\bar{C}\gamma_\mu(1-\gamma^5)D) = -(\bar{C}\gamma^\mu(1-\gamma^5)B)(\bar{A}\gamma_\mu(1-\gamma^5)D) \tag{70}$$

si vede inoltre che i due diagrammi danno lo stesso contributo.

A Teorema di Cecilia Jarlskog

Il teorema di C. Jarsklog [8] afferma che

$$\begin{aligned}X = &\det[\tilde{M}_u\tilde{M}_u^\dagger\,,\,\tilde{M}_d\tilde{M}_d^\dagger] =\\ &4iJ(m_u^2-m_c^2)(m_c^2-m_t^2)(m_t^2-m_u^2)(m_d^2-m_s^2)(m_s^2-m_b^2)(m_b^2-m_d^2)\end{aligned} \tag{71}$$

Dove J è l'area del triangolo di unitarietà, eq (34). Per ottenere una violazione di CP occorre che le matrici di massa siano intrinsecamente a componenti complesse, e che quindi gli accoppiamenti di Yukawa del bosone di Higgs siano essi stessi non invarianti sotto CP e T.

Per la dimostrazione, usando la (10) si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&X = \det[\tilde{M}_u \tilde{M}_u^\dagger \,,\, \tilde{M}_d \tilde{M}_d^\dagger] = \\
&\det[V_{uL} M_u^2 V_{uL}^\dagger V_{dL} M_d^2 V_{dL}^\dagger - V_{dL} M_d^2 V_{dL}^\dagger V_{uL} M_u^2 V_{uL}^\dagger] = \\
&\det[M_u^2 V M_d^2 V^\dagger - V^\dagger M_d^2 V M_u^2] = \quad \text{(Forma - A)} \\
&\det[V^\dagger M_u^2 V M_d^2 - M_d^2 V^\dagger M_u^2 V] \qquad \text{(Forma - B)}
\end{aligned}
\tag{72}
$$

Sviluppando prima la forma (A) di X si ottiene :

$$
X = \det \begin{vmatrix} 0 & (m_u^2 - m_c^2) Y_{12} & (m_u^2 - m_t^2) Y_{13} \\ (m_c^2 - m_u^2) Y_{21} & 0 & (m_c^2 - m_t^2) Y_{23} \\ (m_t^2 - m_u^2) Y_{31} & (m_t^2 - m_c^2) Y_{32} & 0 \end{vmatrix}
\tag{73}
$$

dove

$$
\begin{aligned}
Y_{12} = Y*_{21} &= m_d^2 V_{11} V_{12}^* + m_s^2 V_{21} V_{22}^* + m_b^2 V_{31} V_{32}^* \\
Y_{31} = Y*_{13} &= m_d^2 V_{13} V_{11}^* + m_s^2 V_{23} V_{21}^* + m_b^2 V_{33} V_{31}^* \\
Y_{23} = Y*_{32} &= m_d^2 V_{12} V_{13}^* + m_s^2 V_{22} V_{23}^* + m_b^2 V_{32} V_{33}^*
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
X = 2i(m_u^2 - m_c^2)(m_c^2 - m_t^2)(m_t^2 - m_u^2) \operatorname{Im}(Y_{12} Y_{23} Y_{31})
\tag{74}
$$

Partendo in modo analogo dalla forma (B) nella (72), arriveremmo a una forma simile,

$$
X = 2i(m_d^2 - m_s^2)(m_s^2 - m_b^2)(m_b^2 - m_d^2) \operatorname{Im}(Z_{12} Z_{23} Z_{31})
\tag{75}
$$

e, paragonando le due espressioni, conchiudiamo che deve essere

$$
\operatorname{Im}(Y_{12} Y_{23} Y_{31}) = K(m_d^2 - m_s^2)(m_s^2 - m_b^2)(m_b^2 - m_d^2) = -K(m_d^4 m_s^2 + ...)
\tag{76}
$$

Il valore di K si ottiene identificando il coefficiente di $m_d^4 m_s^2$ in $\operatorname{Im}(Y_{12} Y_{23} Y_{31})$:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Im}(Y_{12} Y_{23} Y_{31}) = \\
&m_d^4 m_s^2 \operatorname{Im}(V_{11} V_{12}^* V_{13} V_{11}^* V_{22} V_{23}^* + V_{11} V_{12}^* V_{23} V_{21}^* V_{12} V_{13}^* + V_{21} V_{22}^* V_{13} V_{11}^* V_{12} V_{13}^*) + \dots \\
&= m_d^4 m_s^2 \operatorname{Im}(|V_{11}^*|^2 + |V_{12}^*|^2 + |V_{13}^*|^2) V_{12}^* V_{13} V_{22} V_{23}^* + \dots \\
&= m_d^4 m_s^2 \operatorname{Im} V_{12}^* V_{13} V_{22} V_{23}^* + \dots \\
&= -m_d^4 m_s^2 \operatorname{Im} V_{12} V_{13}^* V_{22}^* V_{23} + \dots \\
&= -m_d^4 m_s^2 \, T_{12;\,23} + \dots \\
&= -m_d^4 m_s^2 2J + \dots
\end{aligned}
$$

Quindi $K = 2J$, e combinando le (74, 76) si completa la dimostrazione del teorema.

B Un teorema sulle matrici.

Qui vogliamo dimostrare un teorema sulle matrici:

Teorema 2 *Una qualsiasi matrice A può essere diagonalizzata tramite due matrici unitarie: $U_1^\dagger A\, U_2 = A_D$, dove A_D è una matrice diagonale e reale.*

Per la dimostrazione useremo il fatto che

Teorema 3 *$A^\dagger A$ e $A\, A^\dagger$ hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità.*

Consideriamo anzitutto il caso generico in cui gli autovalori di $A^\dagger A$ sono non nulli. Quindi $\det(A^\dagger A) = |\det(A)|^2 \neq 0$; A è invertibile, e

$$\det(A^\dagger A - \lambda) = \det(A\, A^\dagger - \lambda) = \det(A)\det(A^\dagger - \lambda A^{-1})$$

da questo segue l'asserto del teorema 3 nel caso generico. I casi particolari con autovalori nulli possono essere ottenuti come limite dal caso generico.

Dal teorema 3 segue che le due matrici hermitiane $A^\dagger A$ e $A\, A^\dagger$ possono essere poste nella stessa forma diagonale, D:

$$U^\dagger A\, A^\dagger U = D = V^\dagger A^\dagger A\, V \tag{77}$$

Se adesso definiamo $A' = U^\dagger A\, V$, e quindi $A'^\dagger = V^\dagger A^\dagger U$ dalla (77) segue che

$$A' A'^\dagger = A'^\dagger A' = D$$

e cioé che la parte hermitiana di A', $(A' + A'^\dagger)/2$ commuta con la sua parte antihermitiana, $(A' - A'^\dagger)/2i$, e che quindi A' può essere diagonalizzata con una matrice unitaria W, $W^\dagger A'\, W = \tilde{A}_D$. La matrice diagonale $\tilde{A}_D$ può essere espressa come prodotto di una matrice diagonale reale A_D ed una matrice diagonale unitaria Y, $\tilde{A}_D = Y A_D$. In conclusione otteniamo $A_D = Y^\dagger W^\dagger U^\dagger A\, V\, W$, il che dimostra il teorema 2 con $U_1 = U\, W\, Y$, $U_2 = V\, W$

Dal teorema 2 segue un interessante corollario:

Corollario 4 ***(Teorema della decomposizione centrale)*** *Una qualsiasi matrice A può essere espressa come prodotto di una matrice hermitiana e di una matrice unitaria: $A = HU$, $H^\dagger = H$, $U^\dagger U = \mathbf{1}$*

Usando il teorema 2 basta infatti porre $H = U_1 A_D U_1^\dagger$, e $U = U_1 U_2$.

Notiamo che la decomposizione non è necessariamente unica. Ad esempio in due dimensioni si ha $\sigma_3 \times \mathbf{1} = \sigma_1 \times (i\sigma_2)$.

Nel caso di matrici reali la decomposizione porta al prodotto di una matrice simmetrica e una ortogonale: $A = SO$, $S^T = S$, $O^T O = \mathbf{1}$. Da questo segue ad esempio che una trasformazione di Lorentz può essere espressa come prodotto di in una rotazione (matrice ortogonale) e una trasformazione di velocità (matrice simmetrica).

Riferimenti bibliografici

[1] N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 531 (1963)

[2] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973).

[3] L. Wolfenstein, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1945 (1983).

[4] A. Ceccucci, Z. Ligeti, and Y. Sakai, in W.-M. Yao et al., Journal of Physics G 33, 1 (2006), URL: http://pdg.lbl.gov/.

[5] Il sito http://utfit.roma1.infn.it/ contiene i risultati aggiornati sulle determinazioni del triangolo di unitarietà, oltre a una vasta bibliografia. F. Mandl e G. Shaw, *Quantum Field Theory*, Wiley, 1984.

[6] "$B^0 - \bar{B}^0 Mixing$" in W.-M. Yao et al., Journal of Physics G 33, 1 (2006), URL: http://pdg.lbl.gov/.

[7] Claude Itzykson e Jean-Bernard Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1980.

[8] C. Jarlskog, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1039 (1985).

[9]