$e^+ \; e^- \to W^+ \; W^-$

Roma, Giugno 2006

Calcolo dell'ampiezza nel limite $s \to \infty$

Consideriamo il processo

$$e^+(p_+) + e^-(p_-) \to W^+(k_+) + W^-(k_-) \tag{1}$$

nel limite di alta energia, cioè per $\sqrt{s} = \sqrt{(p_+ + p_-)^2} = \sqrt{(k_+ + k_-)^2}$ molto maggiore di tutte le masse in gioco.
Nel sistema del centro di massa le variabili cinematiche sono

$$\begin{aligned} p^\mu_\mp &\equiv (E, 0, 0, \pm\sqrt{E^2 - m_e^2}) \approx (E, 0, 0, \pm E) \\ k^\mu_\pm &\equiv (E, \mp|\mathbf{k}|\sin\theta, 0, \mp|\mathbf{k}|\cos\theta) \\ q^\mu &= p^\mu_- - k^\mu_- = k^\mu_+ - p^\mu_+ \approx (0, -|\mathbf{k}|\sin\theta, 0, E - |\mathbf{k}|\cos\theta) \\ t &= (p_- - k_-)^2 = (k_+ - p_+)^2 = q^2, \end{aligned} \tag{2}$$

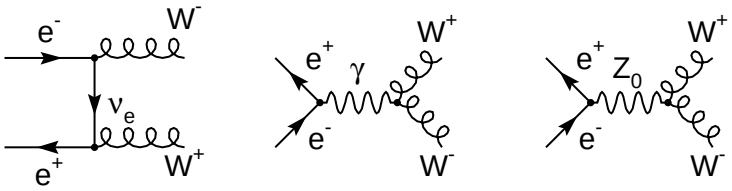
dove θ è l'angolo tra la direzione dell'elettrone incidente e quella del W^- prodotto e $|\mathbf{k}|^2 = E^2 - M_W^2$.
I vettori unitari associati ai $W^\pm$ polarizzati longitudinalmente

$$\epsilon^\mu_\pm \equiv \left(\frac{|\mathbf{k}|}{M_W}, \frac{E}{M_W}\frac{\mathbf{k}_\pm}{|\mathbf{k}|} \right) \tag{3}$$

soddisfano le condizioni $k^\mu_\pm \epsilon_{\pm\mu} = 0$ e $\epsilon^\mu_\pm \epsilon_{\pm\mu} = -1$. Dalla (3) segue immediatamente che

$$\epsilon_\pm = \frac{k_\pm}{M_W} + O\left(\frac{M_W}{E + |\mathbf{k}|} \right) \; . \tag{4}$$

I tre diversi contributi al processo (1), corrispondenti allo scambio di un neutrino e all'annichilazione $e^+e^- \to \gamma$, Z_0, sono rappresentati dai diagrammi di Feynman



(A) (B) (C)

Consideriamo per primo il diagramma (A). L'ampiezza corrispondente è

$$\mathcal{M}_\nu = (-i)^2 \frac{G_F}{\sqrt{2}} M_W^2 \; \overline{e}^+ \not{\epsilon}_+ (1 - \gamma_5) \; i \frac{\not{q}}{t} \; \not{\epsilon}_- (1 - \gamma_5) e^- \; . \tag{5}$$

Nel limite $E, |\mathbf{k}| \gg M_W^2$ possiamo trascurare il secondo termine nel membro di destra della (4) e la (5) diventa

$$\mathcal{M}_\nu = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \; \overline{e}^+ \not{k}_+ (1 - \gamma_5) \; \frac{\not{q}}{t} \; \not{k}_- (1 - \gamma_5) e^- \; . \tag{6}$$

Sostituendo $\not{k}_- = \not{p}_- - \not{q}$, $\not{k}_+ = \not{q} + \not{p}_+$ e $G_F/\sqrt{2} = g^2/8M_W^2$ ed usando l'equazione di Dirac per riscrivere

$$\overline{e}^+ \not{k}_+ = \overline{e}^+ (\not{q} + \not{p}_+) = \overline{e}^+ (\not{q} - m_e) \tag{7}$$

$$\not{k}_- e^- = (-\not{q} + \not{p}) e^- = (-\not{q} + m_e) e^- \; , \tag{8}$$

otteniamo infine, includendo solo i termini lineari in m_e

$$\mathcal{M}_\nu = i\sqrt{2}\, G_F \;\left[\overline{e}^+ \not{q}(1-\gamma_5)e^- - 2m_e\overline{e}^+e^-\right] = i\frac{g^2}{4M_W^2}\;\left[\overline{e}^+ \not{q}(1-\gamma_5)e^- - 2m_e\overline{e}^+e^-\right]\;. \tag{9}$$

Consideriamo ora la sezione d'urto che si ottiene all'ampiezza (9) trascurando i termini in m_e. Dalla

$$\begin{aligned}\sum_{spin}|\mathcal{M}_\nu|^2 &= 2\, G_F^2 Tr[\not{q}(1-\gamma_5)\not{p}_-(1+\gamma_5)\not{q}\not{p}_+] = 16G_F^2\left[2(p_-q)(p_+q) - q^2(p_-p_+)\right] \\ &= 32\, G_F^2 E^2|\mathbf{k}|^2\sin^2\theta\;.\end{aligned}$$

segue che, nel limite $E^2, |\mathbf{k}|^2 >> M_W^2$, cioè $E^2 \approx |\mathbf{k}|^2 \approx s/4$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{s}\sum_{spin}|\mathcal{M}_\nu|^2 \to \frac{G^2}{32\pi^2}\; s\;\sin^2\theta\;, \tag{10}$$

cioè

$$\sigma = \int d\Omega\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{G^2}{12\pi}s\;. \tag{11}$$

La sezione d'urto totale associata al processo (A), nel caso di $W^\pm$ polarizzati longitudinalmente, cresce quindi indefinitamente con l'energia, violando così il limite imposto dall'unitarietà della matrice S (ovvero dalla conservazione della probabilità).

L'unitarietà implica che possiamo esprimere la matrice di scattering corrispondente all'onda parziale di momento angolare J in termini della fase δ_J secondo la

$$S_J = \mathrm{e}^{2i\delta_J}\;,$$

da cui segue che la sezione d'urto totale deve soddisfare la condizione

$$\sigma_J = \frac{4\pi}{k^2}\;(2J+1)\sin^2\delta_J \le \frac{4\pi}{k^2}\;(2J+1)\;, \tag{12}$$

dove k è l'impulso nel sistema di riferimento del centro di massa.

Per il processo che stiamo studiando, in cui (nel limite $m_e = 0$) contribuisce solo l'onda parziale corrispondente a $J = 1$, otteniamo il risultato (usando $k^2 \approx s/4$)

$$\sigma \le \frac{48\pi}{s}\;,$$

che è compatibile con la (11) solo per energie $\sqrt{s} \lesssim 1/\sqrt{G} \sim 300$ GeV. Si noti che nel caso di polarizzazione trasversa l'ampiezza resta costante al crescere di s e questo problema non si pone.

Consideriamo ora l'ampiezza associata al diagramma (B). Usando la regola di Feynman data nell'Appendice (dopo aver cambiato il segno dei quadrimpulsi dei $W^\pm$ e moltiplicato per -1 per tenere conto che in questo caso i due W escono dai vertici) e definendo $\widetilde{q} = p_- + p_+ = k_- + k_+$ otteniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\gamma &= ig\sin\theta_w\;(\overline{e}^+\gamma^\mu e^-)\;\frac{(-i)g_{\mu\nu}}{s}\;(-i)g\sin\theta_w\;\left[g^{\nu\alpha}(\widetilde{q}+k_+)^\beta + g^{\alpha\beta}(k_- - k_+)^\nu + g^{\beta\nu}(-k_- - \widetilde{q})^\alpha\right]\epsilon_{+\alpha}\epsilon_{-\beta} \\ &= -ig^2 sin^2\theta_w\frac{1}{s}\;(\overline{e}^+\gamma_\nu e^-)\;\left[g^{\nu\alpha}(\widetilde{q}+k_+)^\beta + g^{\alpha\beta}(k_- - k_+)^\nu + g^{\beta\nu}(-k_- - \widetilde{q})^\alpha\right]\epsilon_{+\alpha}\epsilon_{-\beta}\end{aligned} \tag{13}$$

Le relazioni $k_\pm^\mu\epsilon_{\pm\mu} = 0$ implicano che

$$\left[g^{\nu\alpha}(\widetilde{q}+k_+)^\beta + g^{\alpha\beta}(k_- - k_+)^\nu + g^{\beta\nu}(-k_- - \widetilde{q})^\alpha\right]\epsilon_{+\alpha}\epsilon_{-\beta} = 2\epsilon_+^\nu(k_+\epsilon_-) - 2\epsilon_-^\nu(k_-\epsilon_+) + (k_-^\nu - k_+^\nu)(\epsilon_+\epsilon_-)\;,$$

dove, per $\epsilon_\pm \approx k_\pm/M_W$

$$(\epsilon_+\epsilon_-) = \frac{(k_+k_-)}{M_W^2} = \frac{E^2 + |\mathbf{k}|^2}{M_W^2} = \frac{s/2 - M_W^2}{M_W^2}\;,$$

da cui segue la

$$\mathcal{M}_\gamma = -ig^2 \sin^2\theta_w \frac{1}{s}\frac{s/2 - M_W^2}{M_W^2}\ \overline{e}^+(\not{k}_+ - \not{k}_-)e^- \ , \tag{14}$$

che nel limite $s \gg M_W^2$ diventa

$$\mathcal{M}_\gamma = -i\frac{g^2 \sin^2\theta_w}{2M_W^2}\ \overline{e}^+(\not{k}_+ - \not{k}_-)e^- \ . \tag{15}$$

Si noti che, mentre l'annichilazione $e^+e^- \to \gamma$ nel diagramma (B) è un'interazione di tipo puramente vettoriale (V), i vertici associati allo scambio di un neutrino nel diagramma (A) sono di tipo V-A. Per avere una cancellazione esatta dei contributi dei diagrammi (A) e (B) dobbiamo quindi necessariamente introdurre il contributo dell'annichilazione $e^+e^- \to Z_0$, in cui sono presenti interazioni di tipo sia V che A (non semplicemente V-A) con costanti di accoppiamento appropriate.

L'ampiezza associata al diagramma (C) si ottiene ancora dalle regole di Feynman date nell'Appendice:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_Z &= \left(-i\frac{g}{4\cos\theta_w}\right)\ \overline{e}^+\gamma^\mu[2\sin^2\theta_w(1+\gamma_5) + (2\sin^2\theta_w - 1)(1-\gamma_5)]e^- \\ &\times\ (-i)\frac{g_{\mu\nu} - \widetilde{q}_\mu\widetilde{q}_\nu/M_Z^2}{s - M_Z^2}\ (-ig\cos\theta_w)\ \left[g^{\nu\alpha}(\widetilde{q}+k_+)^\beta + g^{\alpha\beta}(k_- - k_+)^\nu + g^{\beta\nu}(-k_- - \widetilde{q})^\alpha\right]\epsilon_{+\alpha}\epsilon_{-\beta}\ .\end{aligned} \tag{16}$$

Usando l'equazione di Dirac, dalla quale segue che $\overline{e}^+\gamma^\mu\widetilde{q}_\mu e^- = \overline{e}^+(\not{p}_- + \not{p}_+)e^- = 0$ possiamo eliminare il termine in $\widetilde{q}_\mu\widetilde{q}_\nu$ nel propagatore della Z_0. Procedendo come nel caso del diagramma (B) otteniamo così

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_Z &= i\ \frac{g^2}{4(s-M_Z^2)}\ \overline{e}^+\gamma_\nu[2\sin^2\theta_w(1+\gamma_5) + (2\sin^2\theta_w - 1)(1-\gamma_5)]e^- \\ &\times\ [2\epsilon_+^\nu(k_+\epsilon_-) - 2\epsilon_-^\nu(k_-\epsilon_+) + (k_-^\nu - k_+^\nu)(\epsilon_+\epsilon_-)]\ .\end{aligned} \tag{17}$$

Ora consideriamo il caso di $W^\pm$ polarizzati longitudinalmente, ponendo ancora $\epsilon_\pm \approx k_\pm/M_W$. Nel limite $\sqrt{s} \to \infty$ l'ampiezza risultante si riduce a

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_Z &= i\ \frac{g^2}{4(s-M_Z^2)}\ \overline{e}^+\gamma_\nu[2\sin^2\theta_w(1+\gamma_5) + (2\sin^2\theta_w - 1)(1-\gamma_5)]e^-(k_+ - k_-)^\nu\frac{s/2 - M_W^2}{M_W^2} \\ &\to\ i\frac{g^2}{8M_W^2}\overline{e}^+(\not{k}^+ - \not{k}^-)[2\sin^2\theta_w(1+\gamma_5) + (2\sin^2\theta_w - 1)(1-\gamma_5)]e^-\end{aligned} \tag{18}$$

I contributi delle ampiezze associate ai diagrammi di Feynman (B) e (C) (eq.(15) e (18), rispettivamente) possono essere sommati, col risultato

$$\mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_Z = -i\frac{g^2}{8M_W^2}\ \overline{e}^+(\not{k}^+ - \not{k}^-)(1-\gamma_5)e^- \ , \tag{19}$$

che, utilizzando le (7) e (8), si può riscrivere nella forma

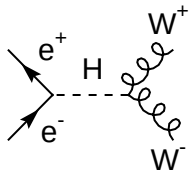
$$\mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_Z = -i\frac{g^2}{4M_W^2}\overline{e}^+\left[\not{q}(1-\gamma_5) - m_e\right]e^- \ . \tag{20}$$

Il confronto con l'eq.(9) mostra che

$$\mathcal{M}_\nu + \mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_Z = -i\frac{g^2}{4M_W^2}m_e\ (\overline{e}^+e^-)\ , \tag{21}$$

cioè che, nel limite in cui si trascura la massa dell'elettrone, l'andamento in s del contributo del diagramma (A) è cancellato esattamente dai contributi dei grafici (B) e (C). Per $m_e \neq 0$, invece, entrambi gli stati di elicità dell'elettrone contribuiscono al processo e la cancellazione non avviene.

Al termine lineare in m_e che sopravvive nel membro di destra della (21) corrisponde una sezione d'urto di produzione di coppie $W^\pm$ polarizzate longitudinalmente che cresce come $s^{1/2}$. Per cancellare anche questa divergenza residua e' necessario tenere conto anche del processo rappresentato dal diagramma (D), in cui H rappresenta il bosone di Higgs.



(D)

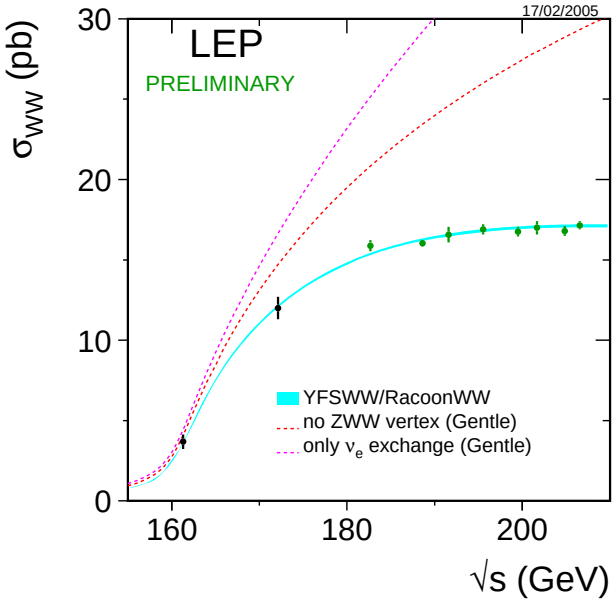
L'ampiezza associata al diagramma (D), che si ottiene dalle regole di Feynman dell'Appendice, è infatti

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_H &= -i\frac{m_e}{v}(\overline{e}^+e^-)\frac{i}{s-M_H^2}\frac{i}{v}g^2g^{\mu\nu}\epsilon_{+\mu}\epsilon_{-\nu} \\ &= i\,\frac{g^2}{2}m_e\,(\overline{e}^+e^-)\frac{1}{s-M_H^2}\,\frac{s/2-M_W^2}{M_W^2} \to i\,\frac{g^2}{4M_W^2}\,m_e\,(\overline{e}^+e^-)\ ,\end{aligned} \tag{22}$$

e sommata alle (9), (15) e (18) dà il risultato

$$\mathcal{M}_\nu + \mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_Z + \mathcal{M}_H = 0\ . \tag{23}$$

Per concludere, riassumiamo i punti principali. La divergenza più forte che si incontra nel calcolo della sezione d'urto del processo $e^+e^- \to W^+W^-$ viene eliminata grazie alla particolare struttura degli accoppiamenti tra i bosoni di gauge prevista dalla teoria di Weinberg e Salam. La divergenza più debole, conseguenza del fatto che la massa dell'elettrone è diversa da zero, è invece rimossa dall'accoppiamento col bosone di Higgs.



La Fig. 1 mostra la dipendenza da $\sqrt{s}$ della sezione d'urto del processo $e^+e^- \to W^+W^-$ misurata al CERN. I dati sono in perfetto accordo con le predizioni della teoria di Weinberg e Salam, rappresentate dalla linea continua, mentre includendo nel calcolo solo il contributo del diagramma (A) o solo quelli dei diagrammi (A) e (B) si ottiene l'andamento in $\sqrt{s}$ illustrato dalle due linee tratteggiate.

Cancellazioni dei contributi divergenti alla sezione d'urto analoghe a quella che abbiamo discusso si verificano in molti altri casi. Di particolare interesse è il processo

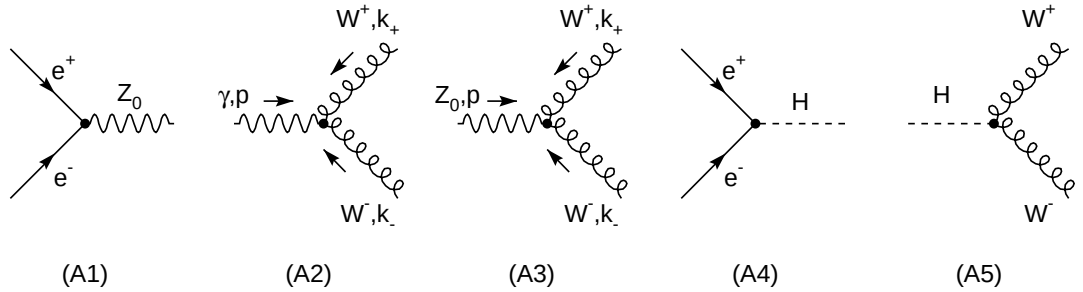
$$W^+W^- \to W^+W^-\ , \tag{24}$$

con $W^{\pm}$ polarizzati longitudinalmente. Se si considerano solo i diagrammi con scambio di γ e Z_0 si ottiene un ampiezza che aumenta linearmente con s per $s \to \infty$. Per cancellare questa divergenza è necessario includere nel calcolo il contributo dei diagrammi con scambio di un bosone di Higgs. L'ampiezza di scattering risultante, nel limite $s \to \infty$ è proporzionale a $M_H^2/v^2 = \sqrt{2}G_F M_H^2$. Imponendo che la sezione d'urto corrispondente a $J = 0$ soddisfi alla condizione di unitarietà (12) si può quindi utilizzare questo risultato per ottenere un limite superiore alla massa del bosone di Higgs

$$M_H < \sqrt{4\pi v^2} = 870 \text{ GeV} . \tag{25}$$

Appendice: regole di Feynman

Il calcolo dei diagrammi (B) e (C) richiede l'uso delle regole di Feynman associate ai vertici illustrati dalle figure (A1)-(A5).



Dalle Lagrangiane d'interazione corrispondenti si ricava facilmente

$$(A1) \to -i\frac{g}{4\cos\theta_w}\gamma^\mu \left[2\sin^2\theta_w(1+\gamma_5) + (2\sin^2\theta_w - 1)(1-\gamma_5)\right] \tag{26}$$

$$(A2) \to ig\sin\theta_w \left[g^{\mu\alpha}(p-k_+)^\beta + g^{\alpha\beta}(k_+ - k_-)^\mu + g^{\beta\mu}(k_- - p)^\alpha\right] \tag{27}$$

$$(A3) \to ig\cos\theta_w \left[g^{\mu\alpha}(p-k_+)^\beta + g^{\alpha\beta}(k_+ - k_-)^\mu + g^{\beta\mu}(k_- - p)^\alpha\right] . \tag{28}$$

$$(A4) \to -i\frac{m_e}{v} \tag{29}$$

$$(A5) \to \frac{i}{2}\, v g^2 g^{\alpha\beta} = 2i\ M_W^2 \left(\sqrt{2}G_F\right)^{1/2} g^{\alpha\beta} \tag{30}$$