

Simmetrie Discrete

Nicola Cabibbo

31 maggio 2008

Indice

1	Le simmetrie discrete in meccanica classica	1
1.1	CT e i collisori elettrone-positrone	4
2	Simmetrie in meccanica quantistica	4
2.1	C, T, P in meccanica quantistica	7
2.2	Un altro teorema di E. Wigner	8
3	C, T, P in teoria dei campi	9
3.1	La coniugazione di carica	10
3.1.1	Coniugazione di carica e i campi di Dirac	10
3.1.2	Coniugazione di carica delle combinazioni bilineari	11
3.1.3	Alcune considerazioni su C e i campi di spin 1/2	12
3.1.4	Coniugazione di carica del fotone	13
3.1.5	C come simmetria nella elettrodinamica quantistica	14
3.2	La parità	14
3.2.1	Parità per particelle di spin 1/2	15
3.2.2	Parità dei bosoni vettoriali	16
3.2.3	Simmetria CP	17
3.3	L'inversione temporale	17
3.4	Il teorema CPT	18

1 Le simmetrie discrete in meccanica classica

In questo documento consideriamo le simmetrie discrete **C**, **T**, **P**. Incominciamo definendo queste simmetrie in un situazione classica¹, e ci riferiremo alla versione classica della QED, la meccanica di un sistema di N particelle, ciascuna caratterizzata da una coordinata \vec{r}_i , da un impulso \vec{p}_i e da una carica elettrica q_i . Le particelle interagiscono con un campo elettromagnetico, con equazioni del

¹Può sembrare strano discutere di coniugazione di carica in ambito classico, ma come vedremo alcune applicazioni di questa simmetria emergono proprio in situazioni ben descritte dalla meccanica classica, ad esempio nella teoria delle macchine di collisione elettrone-positrone

moto che possiamo scrivere in forma relativistica,

$$(1) \quad \frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} = q_i[\vec{E}(\vec{r}_i, t) + \frac{\vec{v}_i(t)}{c} \wedge \vec{B}(\vec{r}_i, t)]$$

$$\vec{p}_i = \frac{m\vec{v}_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Il campo e.m. obbedirà le equazioni di Maxwell,

$$(2) \quad \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) &= \sum_i q_i \delta^3(\vec{x} - \vec{r}_i) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B}(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \vec{E}(\vec{x}, t) &= \sum_i q_i \vec{v}_i \delta^3(\vec{x} - \vec{r}_i) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \vec{B}(\vec{x}, t) &= 0 \end{aligned}$$

Le simmetrie discrete possono essere interpretate come operazioni che cambiano lo stato di un sistema fisico. L'effetto delle simmetrie discrete su un sistema fisico si risolve in cambiamenti di segno di alcune grandezze fisiche. Nella tabella 1 riportiamo l'azione di **C**, **P**, **T** e dei loro prodotti nel caso della elettrodinamica classica. Notiamo che queste simmetrie commutano tra loro e che, applicando due volte la stessa simmetria discreta si torna alla situazione originale: $\mathbf{C}^2 = \mathbf{P}^2 = \dots = (\mathbf{CPT})^2 = \mathbf{1}$. L'insieme delle simmetrie discrete, inclusa la trasformazione identica, forma un gruppo abeliano (cioè commutativo) ad otto elementi, per ciascuno dei quali si ha $X^2 = \mathbf{1}$, e quindi $X^{-1} = X$. L'effetto di una simmetria discreta sulle grandezze che caratterizzano un sistema fisico é riportato nella tabella.

	\vec{r}, t	\vec{p}, E	\vec{J}, \vec{K}	h	q	\vec{B}, \vec{E}	\vec{A}, A^0
C	\vec{r}, t	\vec{p}, E	\vec{J}, \vec{K}	h	$-q$	$-\vec{B}, -\vec{E}$	$-\vec{A}, -A^0$
P	$-\vec{r}, t$	$-\vec{p}, E$	$\vec{J}, -\vec{K}$	$-h$	q	$\vec{B}, -\vec{E}$	$-\vec{A}, A^0$
T	$\vec{r}, -t$	$-\vec{p}, E$	$-\vec{J}, \vec{K}$	h	q	$-\vec{B}, \vec{E}$	$-\vec{A}, A^0$
CP	$-\vec{r}, t$	$-\vec{p}, E$	$\vec{J}, -\vec{K}$	$-h$	$-q$	$-\vec{B}, \vec{E}$	$\vec{A}, -A^0$
PT	$-\vec{r}, -t$	\vec{p}, E	$-\vec{J}, -\vec{K}$	$-h$	q	$-\vec{B}, -\vec{E}$	\vec{A}, A^0
CT	$\vec{r}, -t$	$-\vec{p}, E$	$-\vec{J}, \vec{K}$	h	$-q$	$\vec{B}, -\vec{E}$	$\vec{A}, -A^0$
CPT	$-\vec{r}, -t$	$+\vec{p}, E$	$-\vec{J}, -\vec{K}$	$-h$	$-q$	\vec{B}, \vec{E}	$-\vec{A}, -A^0$

Tabella 1: Definizione di C,P,T suggerita dal limite classico.

Si intende che se vi sono più particelle i cambiamenti di segno vanno applicati alle coordinate di ciascuna particella. Il comportamento del momento angolare \vec{J} , che non può che essere lo stesso del momento orbitale $\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p}$, segue da quelle della coordinata \vec{r} e del momento \vec{p} . Analogamente per i generatori del gruppo di Lorentz $\vec{K} = E\vec{r} + \vec{P}t$. La colonna della elicità² $h = \vec{J} \cdot \hat{p}$ non ha interesse in meccanica classica, che non conosce lo spin, ma la introduciamo con un occhio alla meccanica quantistica; la trasformazione di h deriva da quelle di \vec{J} e di \vec{p} .

²Per particelle di spin 1/2 si definisce l'elicità con un fattore 2, in modo che sia ± 1 , $h = 2\vec{J} \cdot \hat{p}$.

Notiamo la colonna relativa all'energia E : stiamo assumendo che \mathbf{C} , \mathbf{P} , \mathbf{T} siano vere simmetrie che lasciano invariante l'energia totale del sistema³.

Il gruppo di invarianza delle eq. (1), (2) comprende, oltre alle trasformazioni discrete di cui ci occupiamo, il gruppo di Poincaré, cioè le trasformazioni del gruppo di Lorentz ristretto i cui generatori sono $\vec{\mathbf{J}}$ e $\vec{\mathbf{K}}$, e le traslazioni nello spazio e nel tempo, con generatori $\vec{\mathbf{P}}$, E . La tabella 1 specifica il comportamento dei generatori del gruppo di Poincaré quando si esegue una trasformazione discreta.

Lasciamo al lettore la verifica che dalle trasformazioni assegnate al potenziale vettore $\vec{\mathbf{A}}$, A^0 seguono le quelle per $\vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\mathbf{E}}$.

L'invarianza per coniugazione di carica \mathbf{C} afferma che se un elettrone percorre una data orbita, un positrone percorrerebbe la medesima orbita purché invertiamo sia il campo magnetico che quello elettrico.

L'inversione temporale \mathbf{T} *non ha tanto a che fare con l'inversione del tempo quanto con la reversibilità dei processi fisici*. Dato che questa simmetria é probabilmente poco nota al lettore, conviene dedicarle una certa attenzione. Consideriamo una traiettoria del nostro sistema che si svolge dal tempo $-T$ al tempo 0:

$$(3) \quad \vec{r}_i(t) \ (i = 1, n); \quad \vec{E}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t)$$

Notiamo che la traiettoria é definita dal valore assunto dalle variabili dinamiche (inclusi quindi i campi \vec{E} , \vec{B}) per tutti i tempi tra il tempo iniziale e quello finale. Lo stato iniziale A e quello finale B sono definiti dalle condizioni iniziali e finali

$$(4) \quad \begin{array}{ll} (t = -T), \ A: & \vec{r}_i(-T), \ \vec{p}_i(-T), \ \vec{E}(\vec{x}, -T), \ \vec{B}(\vec{x}, -T) \\ (t = 0), \ B: & \vec{r}_i(0), \ \vec{p}_i(0), \ \vec{E}(\vec{x}, 0), \ \vec{B}(\vec{x}, 0) \end{array}$$

Al tempo $t = 0$ invertiamo il moto, trasformiamo cioè lo stato B nello stato temporalmente invertito, B^T ,

$$(t = 0), \ B^T: \quad \vec{r}_i(0), \quad -\vec{p}_i(0), \quad \vec{E}(\vec{x}, 0), \quad -\vec{B}(\vec{x}, 0)$$

A questo punto, lasciato a se stesso, il sistema ripercorrerà all'indietro la traiettoria raggiungendo al tempo T lo stato iniziale, ma invertito nel tempo,

$$(t = T), \ A^T: \quad \vec{r}_i(-T), \quad -\vec{p}_i(-T), \quad \vec{E}(\vec{x}, -T), \quad -\vec{B}(\vec{x}, -T)$$

Notiamo che la dinamica delle eq. (1), (2) é invariante per traslazioni nel tempo, per cui la catena di eventi appena discussi può essere spostata in avanti (o indietro) nel tempo, ad esempio partendo da A al tempo $t = t_1$ per arrivare a $B(t = t_1 + T)$ per poi passare a $B^T(t = t_1 + T)$ e infine a $A^T(t = t_1 + 2T)$.

Quanto abbiamo detto richiede una dimostrazione, peraltro elementare: si tratta di dimostrare che se $\vec{r}_i(t)$, $\vec{E}(\vec{x}, t)$, $\vec{B}(\vec{x}, t)$ rappresentano una soluzione delle equazioni del moto (1), (2), le

³Questo si può esplicitamente verificare riscrivendo le equazioni del moto in forma Hamiltoniana. Per il caso più semplice, in cui tutte le particelle hanno carica nulla e trascuriamo il campo elettromagnetico, $E = p^2/2m$, il risultato é evidente. Il caso generale é lasciato come esercizio.

grandezze temporalmente riflesse, (vedi tavola 1),

$$(5) \quad \begin{aligned} \vec{E}^T(\vec{x}, t) &= \vec{E}(\vec{x}, -t), \\ \vec{B}^T(\vec{x}, t) &= -\vec{B}(\vec{x}, -t), \\ \vec{r}_i^T(t) &= \vec{r}_i(-t) \end{aligned}$$

sono anche una soluzione. Si tratta di una semplice verifica, che lasciamo al lettore.

In conclusione la “inversione temporale” **T** deve essere vista come uno scambio tra stato iniziale e stato finale di un processo fisico. Queste considerazioni saranno alla base della definizione di **T** in meccanica quantistica.

In maniera analoga l’operazione di riflessione spaziale **P** può essere vista, come trasformazione tra una traiettoria classica e la traiettoria riflessa,

$$(6) \quad \begin{aligned} \vec{E}^P(\vec{x}, t) &= -\vec{E}(-\vec{x}, t), \\ \vec{B}^P(\vec{x}, t) &= \vec{B}(-\vec{x}, t), \\ \vec{r}_i^P(t) &= -\vec{r}_i(t) \end{aligned}$$

Ancora una volta lasciamo al lettore la verifica, come pure il compito di ridiscutere in modo analogo la simmetria per coniugazione di carica.

1.1 CT e i collisori elettrone-positrone

Le macchine di collisione elettrone-positrone possono essere realizzate con un singolo anello, nel quale girano in senso inverso elettroni e positroni (AdA, Adone, LEP), o con due anelli (DaΦne) uno dei quali é riservato agli elettroni, l’altro ai positroni. Nel secondo caso, a parte il costo superiore per la costruzione del secondo anello, si ha anche il problema di garantire che i fasci circolanti (di dimensioni molto piccole) si incontrino effettivamente. Questo problema non si pone nel caso delle macchine a singolo anello. Bruno Touscheck, l’inventore delle macchine $e^+ e^-$, mostrò infatti che, grazie alla la simmetria **CT**, particelle e antiparticelle immerse in un campo magnetico *indipendente dal tempo* percorrono le stesse orbite in senso inverso. Se $\vec{r}^-(t)$ é un’orbita percorsa da un elettrone ($q = -e$) in un campo magnetico indipendente dal tempo $\vec{B}(\vec{x})$, un positrone ($q = +e$) può percorrere un’orbita $\vec{r}^+(t) = \vec{r}^-(-t)$, cioè la stessa orbita, ma in senso inverso⁴. La bellezza di questo semplice risultato é nel fatto che la sovrapposizione delle orbite, e quindi la certezza delle collisioni, non dipende dalla precisione con cui é realizzato il campo magnetico.

2 Simmetrie in meccanica quantistica

In questo capitolo ci poniamo la questione di determinare in quale modo le simmetrie **C,P,T**, siano rappresentabili in meccanica quantistica. È necessario affrontare la questione senza preconcetti (simmetria = trasformazione lineare e unitaria) e in forma piuttosto generale, dato che la riflessione

⁴Lasciamo al lettore la relativa dimostrazione. Il lettore noti che questo non é vero in presenza di campi elettrici. In LEP, ad esempio, campi elettrici erano usati per separare i due fasci, in modo che si incontrassero solamente nei “punti di collisione” dove erano disposti gli apparati sperimentali.

temporale \mathbf{T} non é rappresentata da un operatore lineare, un risultato sorprendente dovuto a Wigner.

Nella meccanica quantistica gli stati di un sistema fisico sono rappresentati da vettori $|A\rangle$ in uno spazio di Hilbert, \mathcal{H} . Più precisamente, dato che ad uno stato fisico corrisponde un vettore nello spazio di Hilbert “a meno di una fase”, *ad ogni stato fisico distinto corrisponde un “raggio” (in inglese “ray”) $\mathcal{R}_A = \{\exp i\phi|A\rangle; \phi = 0 \dots 2\pi\}$, cioè un insieme dei vettori che differiscono tra loro al più per un fattore di fase.*

La meccanica quantistica assegna un significato fisico diretto alla grandezza

$$(7) \quad P_{AB} = |\langle B|A\rangle|^2, \quad \{|A\rangle \in \mathcal{R}_A; |B\rangle \in \mathcal{R}_B\}$$

che esprime la probabilità che lo stato \mathcal{R}_A appaia ad una misura come lo stato \mathcal{R}_B . Notiamo che P_{AB} non dipende da quali particolari vettori $|A\rangle, |B\rangle$ siano stati scelti all’interno dei rispettivi “raggi” $\mathcal{R}_A, \mathcal{R}_B$.

Una simmetria in meccanica quantistica può essere definita come una corrispondenza tra stati fisici, $\mathcal{R}_A \rightarrow \mathcal{R}_{A'}$, che mantenga la struttura probabilistica dello spazio di Hilbert:

$$(8) \quad \begin{aligned} \text{Se} \quad & \mathcal{R}_A \rightarrow \mathcal{R}_{A'}, \quad \mathcal{R}_B \rightarrow \mathcal{R}_{B'} \\ \text{Allora} \quad & P_{AB} = P_{A'B'}, \quad |\langle B|A\rangle| = |\langle B'|A'\rangle| \end{aligned}$$

Nell’uso corrente si preferisce far corrispondere ad ogni stato un determinato vettore. Questo significa scegliere all’interno di ciascun raggio \mathcal{R}_A un particolare vettore $|A\rangle$ come rappresentante dello stato fisico corrispondente,

$$(9) \quad \text{stato fisico } A \rightarrow \text{raggio } \mathcal{R}_A \rightarrow \text{vettore } |A\rangle$$

Sorge allora la domanda se si possa stabilire un criterio che permetta di esprimere l’operazione di simmetria (8) come corrispondenza tra vettori, $|A\rangle \rightarrow |A'\rangle$. Domanda cui Wigner ha risposto con un importante teorema⁵:

Teorema 1 *Ogni simmetria, cioè ogni trasformazione tra stati fisici che rispetta la (7) può essere espressa come trasformazione lineare ed unitaria oppure come rappresentazione antilineare ed antiunitaria sullo spazio di Hilbert.*

In altre parole posso eseguire la scelta nella (9) di modo che l’eq. (8) si riduca ad una delle due alternative:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I) } \langle B|A\rangle = \langle B'|A'\rangle \quad \text{Lineare, Unitaria} \\ \text{II) } \langle B|A\rangle = \langle A'|B'\rangle \quad \text{Antilineare, Antiunitaria} \end{array} \right.$$

Quale delle due alternative si debba applicare dipende dalle caratteristiche di ogni particolare simmetria. Ad esempio si dimostra facilmente che la prima alternativa si applica alle simmetrie che sono continuamente connesse⁶ alla trasformazione identica $\mathbf{1}$, come le rotazioni o le trasformazioni di

⁵La dimostrazione é elementare, e si può trovare nel libro di Wigner, [1], nella Appendice al capitolo 20. Una versione più completa nel testo di Weinberg, [2], nella Appendice A al secondo capitolo.

⁶Una simmetria S si dice continuamente connessa (o, semplicemente, connessa), ad $\mathbf{1}$, se esiste una traiettoria continua sul gruppo, $S(t), 0 \leq t \leq 1$ tale che $S(0) = \mathbf{1}, S(1) = S$. Se ad esempio S é una rotazione di angolo θ , possiamo scegliere $S(t)$ come la rotazione di angolo $t\theta$.

Lorentz proprie. Simmetrie di questo tipo possono quindi essere rappresentate da trasformazioni lineari e unitarie. Infatti passare dalla prima alla seconda alternativa rappresenta una discontinuità, e dato che la prima delle alternative in eq. (10) si applica alla trasformazione identica, essa deve anche applicarsi ad ogni trasformazione S connessa all'unità.

Per scegliere l'alternativa giusta nel caso delle simmetrie discrete \mathbf{C} , \mathbf{P} , \mathbf{T} , dovremo studiare alcune conseguenze delle (10). Giungeremo alla conclusione che \mathbf{C} e \mathbf{P} sono rappresentate da trasformazioni lineari e unitarie mentre l'inversione temporale \mathbf{T} è rappresentata da una trasformazione antilineare e antiunitaria

La prima delle (10) corrisponde a un caso ben noto, ma conviene esaminarla assieme alla seconda per poter meglio identificare le differenze tra i due casi.

Scegliamo una base ortonormale $|\Psi_i\rangle$ per lo spazio di Hilbert \mathcal{H} , ed indichiamo con $|\Psi'_i\rangle$ gli stati trasformati. Dato che il prodotto di due vettori base $\langle\Psi_i|\Psi_k\rangle = \delta_{ik}$ è reale, in ambedue i casi si ottiene lo stesso risultato,

$$(11) \quad \langle\Psi'_i|\Psi'_k\rangle = \begin{cases} \langle\Psi_i|\Psi_k\rangle & = \delta_{ik} & \text{Lineare} \\ \langle\Psi_i|\Psi_k\rangle^* & = \delta_{ik} & \text{Antilineare} \end{cases}$$

In ambedue i casi la trasformazione si esprime quindi con una matrice unitaria: se

$$|\Psi'_i\rangle = U|\Psi_i\rangle = \sum_r |\Psi_r\rangle \langle\Psi_r|U|\Psi_i\rangle = \sum_r U_{ri} |\Psi_r\rangle$$

otteniamo

$$(12) \quad \langle\Psi'_k|\Psi'_i\rangle = \sum_{rs} U_{sk}^* U_{ri} \langle\Psi_s|\Psi_r\rangle = \sum_{rs} U_{sk}^* U_{ri} \delta_{rs} = (U^\dagger U)_{ki} = \delta_{ki} \quad \text{Lineare o Antilineare}$$

quindi sia nel caso lineare che in quello antilineare una trasformazione che conservi la probabilità è rappresentata da un operatore unitario,

$$(13) \quad U^\dagger U = 1; \quad U^{-1} = U^\dagger.$$

Un operatore unitario ma antilineare viene detto *antiunitario*.

Dato un generico vettore $|A\rangle = \sum a_i |\Psi_i\rangle$, $a_i = \langle\Psi_i|A\rangle$, se indichiamo con $|A'\rangle$ il trasformato di $|A\rangle$, avremo nei due casi in eq. (8):

$$(14) \quad \begin{cases} \text{I) } \langle\Psi'_i|A'\rangle = \langle\Psi_i|A\rangle = a_i, & |A'\rangle = \sum a_i |\Psi'_i\rangle & \text{Lineare} \\ \text{II) } \langle\Psi'_i|A'\rangle = \langle A|\Psi_i\rangle = a_i^*, & |A'\rangle = \sum a_i^* |\Psi'_i\rangle & \text{Antilineare} \end{cases}$$

Questo conferma il carattere lineare o antilineare dei due casi, in cui avremo:

$$(15) \quad |C\rangle = \alpha |A\rangle + \beta |B\rangle \rightarrow \begin{cases} \text{I) } |C'\rangle = U|C\rangle = \alpha |A'\rangle + \beta |B'\rangle & \text{Lineare} \\ \text{II) } |C'\rangle = U|C\rangle = \alpha^* |A'\rangle + \beta^* |B'\rangle & \text{Antilineare} \end{cases}$$

Alcuni risultati che derivano dalla (14):

- Il prodotto di due operatori lineari, o di due operatori antilineari è un operatore lineare.

- Il prodotto di un operatore lineare e di uno antilineare é antilineare.
- Gli operatori antilineari non commutano con i numeri complessi: $O_a c = c^* O_a$.

Consideriamo adesso due vettori $|A\rangle = \sum_i a_i |\Psi_i\rangle$ e $|B\rangle = \sum_k b_k |\Psi_k\rangle$; il prodotto scalare $\langle B|A\rangle (= \sum b_i^* a_i)$ é *lineare* in $|A\rangle$, e *antilineare* in $|B\rangle$. Lo stesso avviene se applichiamo a $|B\rangle$ un operatore lineare: $O_l |B\rangle = \sum b_i O_l |\Psi_i\rangle = \sum b_i |\Psi'_i\rangle$, e quindi $\langle O_l B|A\rangle = \sum_{i,k} b_k^* a_i \langle \Psi'_k | \Psi_i \rangle$. Al contrario l'espressione $\langle O_a B|A\rangle$ (con O_a antilineare) risulterà *lineare* sia in $|A\rangle$ che in $|B\rangle$. Infatti $O_a |B\rangle = \sum b_i^* O_a |\Psi_i\rangle = \sum b_i^* |\Psi'_i\rangle$, da cui $\langle O_a B|A\rangle = \sum_{i,k} b_k a_i \langle \Psi'_k | \Psi_i \rangle$.

Dobbiamo quindi definire in maniera diversa il coniugato Hermitiano di un operatore lineare o di uno antilineare:

$$(16) \quad \text{coniugazione hermitiana: } \begin{cases} \text{I) } \langle O_l B|A\rangle = \langle B|O_l^\dagger|A\rangle & \text{Lineare} \\ \text{II) } \langle O_a B|A\rangle = \langle B|O_a^\dagger|A\rangle^* & \text{Antilineare} \end{cases}$$

Notiamo in particolare che l'hermitiano coniugato di un operatore antilineare é antilineare.

2.1 C, T, P in meccanica quantistica

Siamo ora in grado di decidere se le simmetrie **C**, **P**, **T** debbano essere rappresentate da operatori lineari e unitari, o antilineari e antiunitari. Lo faremo in una teoria di singola particella (elettroni o positroni), trascurando lo spin e le interazioni elettromagnetiche. Per gli stati a singola particella gli osservabili saranno \vec{p}, \vec{r}, Q dove Q é l'operatore carica che ha autovalori $\pm e$. Dalla tabella 1 vediamo che l'azione degli operatori (dobbiamo ancora decidere se unitari o antiunitari) deve essere:

$$(17) \quad \begin{aligned} \mathbf{C}^\dagger \vec{p} \mathbf{C} &= \vec{p} & \mathbf{C}^\dagger \vec{r} \mathbf{C} &= \vec{r} & \mathbf{C}^\dagger Q \mathbf{C} &= -Q \\ \mathbf{P}^\dagger \vec{p} \mathbf{P} &= -\vec{p} & \mathbf{P}^\dagger \vec{r} \mathbf{P} &= -\vec{r} & \mathbf{P}^\dagger Q \mathbf{P} &= Q \\ \mathbf{T}^\dagger \vec{p} \mathbf{T} &= -\vec{p} & \mathbf{T}^\dagger \vec{r} \mathbf{T} &= \vec{r} & \mathbf{T}^\dagger Q \mathbf{T} &= Q \end{aligned}$$

Gli operatori \vec{p}, \vec{r} obbediscono le regole di commutazione

$$(18) \quad [r_m, p_n] = i \delta_{mn}$$

L'operazione **C** commuta sia con \vec{p} che con \vec{r} , quindi

$$(19) \quad \mathbf{C}^\dagger [r_m, p_n] \mathbf{C} = [r_m, p_n] = \mathbf{C}^\dagger i \delta_{mn} \mathbf{C} = i \delta_{mn}$$

Quindi **C** commuta con i numeri complessi, e deve essere un operatore lineare. Lo stesso vale per la parità **P**, che cambia segno sia a \vec{p} che a \vec{r} . La situazione é differente per **T**, dato che deve essere:

$$(20) \quad \mathbf{T}^\dagger [r_m, p_n] \mathbf{T} = [r_m, -p_n] = \mathbf{T}^\dagger i \delta_{mn} \mathbf{T} = -i \delta_{mn}$$

Quindi l'inversione temporale deve essere rappresentata da un operatore *antiunitario*. Possiamo raggiungere la stessa conclusione considerando lo sviluppo temporale di uno stato di energia definita, E ,

$$(21) \quad |E, t, \alpha\rangle = e^{-itE} |E, 0, \alpha\rangle,$$

dove α rappresenta un insieme di altri numeri quantici, che potrebbe includere ad esempio la carica q , la terza componente del momento angolare m , e possibilmente altri. Per $t = 0$ avremo quindi

$$(22) \quad \mathbf{T}|E, 0, \alpha\rangle = \eta_\alpha |E, 0, \alpha'\rangle$$

Se $\alpha = \{q, m, \dots\}$, avremo⁷ $\alpha' = \{q, -m, \dots\}$. η_α rappresenta un possibile fattore di fase. L'effetto della riflessione temporale deve quindi essere:

$$(23) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}|E, t, \alpha\rangle = \mathbf{T} e^{-itE} |E, 0, \alpha\rangle &= \mathbf{T} e^{-itE} \mathbf{T}^\dagger \mathbf{T} |E, 0, \alpha\rangle \\ &= e^{itE} \eta_\alpha |E, 0, \alpha'\rangle \\ &= \eta_\alpha |E, -t, \alpha'\rangle \end{aligned}$$

Perché tutto funzioni, occorre che $\mathbf{T} e^{-itE} \mathbf{T}^\dagger = e^{itE}$, cioè che \mathbf{T} sia antilineare, confermando così il precedente argomento.

2.2 Un altro teorema di E. Wigner

Il quadrato della riflessione temporale, \mathbf{T}^2 , é a livello classico una trasformazione identica, quindi a livello quantistico ci aspettiamo che per un qualsiasi stato fisico, $|A\rangle$, sia

$$(24) \quad \mathbf{T}^2 |A\rangle = c |A\rangle, \quad \text{con } |c|^2 = 1$$

In altre parole ci aspettiamo che \mathbf{T}^2 sia un multiplo dell'unità, $\mathbf{T}^2 = c\mathbf{1}$. cosa possiamo dire sul valore di c ? Possiamo fare un primo passo per rispondere a questa domanda partendo dalla identità

$$(25) \quad T^3 = T \times T^2 = T^2 \times T, \quad \text{quindi: } T c = c T$$

Dato che \mathbf{T} é antilineare, questo implica che c é reale, e quindi i possibili valori sono⁸ $c = \pm 1$. Wigner ha mostrato⁹ che $\mathbf{T}^2 = 1$ per stati di momento angolare intero, mentre $\mathbf{T}^2 = -1$ per stati di momento angolare semintero. Questo é un risultato veramente notevole e inatteso, perché mostra che \mathbf{T}^2 coincide con $R_{2\pi}$, l'operatore che rappresenta una rotazione di 360° intorno a un asse arbitrario. Per particelle di spin $1/2$, infatti, $R_{2\pi} = \exp(i\pi\sigma_3) = -1$.

Prima di dimostrare questo risultato possiamo sin d'ora rispondere a una possibile curiosità: é possibile cambiare il valore di T^2 modificando la definizione di \mathbf{T} per un fattore di fase, $T' = \exp(i\phi) T$? La risposta é no, infatti $T'^2 = \exp(i\phi) T \exp(i\phi) T = \exp(i\phi) \exp(-i\phi) T T = T^2$.

Per dimostrare il risultato di Wigner basterà calcolare il valore di \mathbf{T}^2 per particelle a riposo. Dato che \mathbf{T}^2 é un multiplo dell'operatore unità il risultato ottenuto resterà valido per particelle di impulso arbitrario. Per gli stati di impulso nullo il momento angolare coincide con il momento di spin. Se la particella ha spin s esisteranno $2s + 1$ stati con impulso $\vec{p} = 0$,

$$(26) \quad |s, s_3\rangle, \quad (s_3 = +s \cdots -s)$$

⁷Il momento angolare cambia segno sotto la inversione temporale, vedi 1.

⁸Il risultato si trova nel cap. 26 di [1] ed é dimostrato con un argomento leggermente diverso che fa uso della scomposizione canonica che illustriamo nella seguente appendice.

⁹Vedi cap. 26 di [1].

Le fasi relative degli stati a riposo saranno definite tramite le note formule, che fanno uso¹⁰ degli operatori di abbassamento e innalzamento del momento angolare, $\mathbf{J}^\pm = \mathbf{J}_1 \pm i\mathbf{J}_2$,

$$(27) \quad \mathbf{J}^- |s, s_3\rangle = \sqrt{(s + s_3)(s - s_3 + 1)} |s, s_3 - 1\rangle;$$

$$(28) \quad \mathbf{J}^+ |s, s_3\rangle = \sqrt{(s - s_3)(s + s_3 + 1)} |s, s_3 + 1\rangle$$

Applicando ripetutamente la (27) o la (28) otteniamo

$$(29) \quad |s, -s\rangle = \frac{1}{(2s)!} (\mathbf{J}_1 - i\mathbf{J}_2)^{2s} |s, s\rangle; \quad |s, s\rangle = \frac{1}{(2s)!} (\mathbf{J}_1 + i\mathbf{J}_2)^{2s} |s, -s\rangle$$

L'inversione temporale \mathbf{T} deve cambiare segno al momento angolare, quindi

$$(30) \quad \mathbf{T}\mathbf{J}_i\mathbf{T}^{-1} = -\mathbf{J}_i, \quad \text{e dato che } \mathbf{T} \text{ é antilineare, } \mathbf{T}(\mathbf{J}_1 - i\mathbf{J}_2)\mathbf{T}^{-1} = -(\mathbf{J}_1 + i\mathbf{J}_2)$$

Se adesso definiamo¹¹ $\mathbf{T}|s, s\rangle = |s, -s\rangle$, troviamo, usando le (29, 30),

$$(31) \quad \mathbf{T}^2 |s, s\rangle = \mathbf{T}|s, -s\rangle = \frac{1}{(2s)!} (\mathbf{T}(\mathbf{J}_1 - i\mathbf{J}_2)\mathbf{T}^{-1})^{2s} \mathbf{T}|s, s\rangle = (-1)^{2s} |s, s\rangle$$

Quindi avremo $\mathbf{T}^2 = \mathbf{1}$ se s é intero, $\mathbf{T} = -\mathbf{1}$ se s é semintero.

3 C, T, P in teoria dei campi

In questo capitolo costruiremo esplicitamente gli operatori \mathbf{C} , \mathbf{T} , \mathbf{P} in una teoria di campo. Lo faremo usando la rappresentazione di interazione, cioè considerando anzitutto il comportamento del campo elettromagnetico e di campi di Dirac considerati come campi liberi. Fatto questo saremo in grado di stabilire quali condizioni sulla densità di Lagrangiano,

$$(32) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}'$$

derivano dalla richiesta di invarianza rispetto alle tre simmetrie e ai loro prodotti \mathbf{CP} , ... \mathbf{CPT} . Questi risultati possono essere estesi ad altri campi vettoriali o campi scalari, in modo da poter affrontare il problema delle simmetrie discrete nel Modello Standard.

Un risultato importante di questo lavoro sarà il teorema \mathbf{CPT} : dimostreremo che se \mathcal{L} é hermitiano e locale, cioè costruito come somma di termini ciascuno dei quali é un prodotto di campi e di loro derivate in uno stesso punto della spazio-tempo, ed é invariante rispetto a trasformazioni del gruppo di Lorentz proprio, la teoria risulta invariante rispetto alla simmetria \mathbf{CPT} .

Il teorema \mathbf{CPT} , assieme al teorema spin-statistica, é valido in qualsiasi teoria dei campi, purché relativisticamente invariante. Di questi due teoremi si può dare una dimostrazione assolutamente generale¹², che non fa uso alla teoria delle perturbazioni.

Preliminarmente alla trattazione delle simmetrie \mathbf{C} , \mathbf{P} e \mathbf{T} dobbiamo definire una base per gli stati ad una particella. I possibili stati di una particella di massa diversa da zero e di spin $s = 0, 1/2, 1$, etc. possono essere costruiti a partire dagli stati della stessa particella con impulso nullo (stati della particella a riposo). Il caso del fotone, che ha massa nulla, va considerato a parte, ad esempio tramite il consueto metodo di quantizzazione delle equazioni di Maxwell. Possiamo dimenticare per il momento il caso del gravitone, ed é ormai noto che i neutrini hanno massa diversa da zero, anche se molto piccola.

¹⁰Le formule che seguono corrispondono a una particolare convenzione di fase, ma come abbiamo visto nella sezione 2.2 il valore di \mathbf{T}^2 non dipende dalla convenzione usata.

¹¹Il momento angolare cambia di segno, la fase é arbitraria ma non influisce sul valore di \mathbf{T}^2 .

¹²Il testo classico su questi temi é quello di R. F. Streater. A. S. Wightman, [3].

3.1 La coniugazione di carica

In questa sezione discutiamo la simmetria di coniugazione di carica, \mathbf{C} . A livello classico abbiamo definito \mathbf{C} nella tabella 1; questa simmetria comporta il cambiamento di segno delle cariche oltre che dei campi elettromagnetici. In una teoria dei campi \mathbf{C} si traduce in uno scambio tra particelle ed antiparticelle, ed ha quindi un effetto anche su particelle neutre, es. neutrone \leftrightarrow antineutrone.

Cominceremo col definire l'azione di \mathbf{C} su particelle di spin 1/2 e sui relativi campi. Segue la derivazione del comportamento sotto \mathbf{C} delle cinque combinazioni bilineari. Verificheremo poi che la trasformazione \mathbf{C} é effettivamente una simmetria nella QED.

3.1.1 Coniugazione di carica e i campi di Dirac

La coniugazione di carica é un operatore unitario \mathbf{C} che trasforma una particella con dato impulso ed elicitá nella corrispondente antiparticella con lo stesso impulso ed elicitá, ad esempio

$$(33) \quad \mathbf{C}|e^-; \vec{p}, h\rangle = |e^+; \vec{p}, h\rangle, \quad \mathbf{C}|e^+; \vec{p}, h\rangle = |e^-; \vec{p}, h\rangle, \quad \text{cioé } \mathbf{C}^2 = 1, \quad \mathbf{C}^\dagger = \mathbf{C}$$

Dato che posso assumere che $\mathbf{C}|0\rangle = |0\rangle$ posso definire \mathbf{C} tramite la sua azione sugli operatori di creazione e distruzione,

$$(34) \quad \mathbf{C}c_h(\vec{p})\mathbf{C} = d_h(\vec{p}), \quad \mathbf{C}c_h^\dagger(\vec{p})\mathbf{C} = d_h^\dagger(\vec{p})$$

e, dato che $\mathbf{C}^2 = 1$,

$$(35) \quad \mathbf{C}d_h(\vec{p})\mathbf{C} = c_h(\vec{p}), \quad \mathbf{C}d_h^\dagger(\vec{p})\mathbf{C} = c_h^\dagger(\vec{p})$$

Vogliamo ora derivare l'effetto di \mathbf{C} sul campo¹³ $\psi(x)$,

$$(36) \quad \psi(x) = \sum_{h, \vec{p}} \left(c_h(\vec{p}) u_h(\vec{p}) e^{-ipx} + d_h^\dagger(\vec{p}) v_h(\vec{p}) e^{ipx} \right)$$

e sul suo hermitiano coniugato,

$$(37) \quad \psi(x)^\dagger = \sum_{h, \vec{p}} \left(d_h(\vec{p}) v_h^*(\vec{p}) e^{-ipx} + c_h^\dagger(\vec{p}) u_h^*(\vec{p}) e^{ipx} \right)$$

Per fare questo ricordiamo le equazioni che definiscono le u e le v ,

$$(38) \quad (\not{p} - m) u_h(\vec{p}) = 0 \quad (\vec{\sigma} \hat{p} - h) u_h(\vec{p}) = 0$$

$$(39) \quad (\not{p} + m) v_h(\vec{p}) = 0 \quad (\vec{\sigma} \hat{p} + h) v_h(\vec{p}) = 0$$

prendendo il complesso coniugato della eq. (38) abbiamo

$$(40) \quad (\gamma^{\mu*} p_\mu - m) u_h^*(\vec{p}) = 0 \quad (\vec{\sigma}^* \hat{p} - h) u_h^*(\vec{p}) = 0$$

dove “*” indica l'operazione di coniugazione complessa (ad esempio $\gamma^* = \gamma^{\dagger T}$). Nella usuale rappresentazione per le matrici γ , γ^2 ha componenti immaginarie, mentre le altre, $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^3$, sono reali. Quindi, se definiamo

$$(41) \quad \mathcal{C} = i\gamma^2; \quad \mathcal{C}^2 = 1, \quad \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^* = \mathcal{C}^T = \mathcal{C}$$

¹³Omettiamo per semplicitá i fattori $\sqrt{m/\sqrt{E_p}}$, inessenziali per la presente discussione.

possiamo scrivere (si verifica esaminando le singole componenti e ricordando che $\sigma_1 = i\gamma^2\gamma^3$, etc.)

$$(42) \quad \gamma^{\mu*} = -\mathcal{C}\gamma^\mu\mathcal{C}, \quad \vec{\sigma}^* = -\mathcal{C}\vec{\sigma}\mathcal{C}$$

Se adesso sostituiamo questi risultati nella eq. (40), otteniamo che

$$(43) \quad (\not{p} + m)\mathcal{C}u_h^*(\vec{p}) = 0 \quad (\vec{\sigma}\hat{p} + h)\mathcal{C}u_h^*(\vec{p}) = 0$$

Quindi, paragonando con la eq. (39), vediamo che $\mathcal{C}u_h^*(\vec{p})$ obbedisce allo stesso sistema di equazioni che definisce la $v_h(\vec{p})$. Questo sistema di equazioni definisce la $v_h(\vec{p})$ a meno di un fattore di fase¹⁴. Possiamo quindi scegliere la fase delle $v_h(\vec{p})$ di in modo tale che sia

$$(44) \quad v_h(\vec{p}) = \mathcal{C}u_h^*(\vec{p})$$

e da questa, usando la (41),

$$(45) \quad \mathcal{C}v_h^*(\vec{p}) = \mathcal{C}\mathcal{C}^*u_h(\vec{p}) = u_h(\vec{p})$$

Infine, raccogliendo le (34), (35), (36), (37), (44), (45), otteniamo l'azione dell'operatore di coniugazione di carica, \mathbf{C} sull'operatore di campo:

$$(46) \quad \mathbf{C}\psi(x)\mathbf{C} = \mathcal{C}\psi^\dagger(x), \quad \text{e quindi} \quad \mathbf{C}\psi^\dagger(x)\mathbf{C} = \mathcal{C}\psi(x)$$

3.1.2 Coniugazione di carica delle combinazioni bilineari

Possiamo adesso veder come si trasformano le combinazioni bilineari, cioè operatori del tipo¹⁵ $N(\bar{\psi}O\psi)$, dove O rappresenta una delle 16 matrici $1, \gamma^\mu \dots \gamma^5$.

In alcuni dei passaggi che seguono esplicitiamo gli indici spinoriali, e utilizziamo il fatto che \mathcal{C} é simmetrica, $\mathcal{C}_{st} = \mathcal{C}_{ts}$, e lo stesso per $\gamma^0 = \beta$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}N(\psi^\dagger\beta O\psi)\mathbf{C} &= N((\mathcal{C}\psi)(\beta O\mathcal{C}\psi^\dagger)) = \left(\psi_r(\mathcal{C}\beta O\mathcal{C})_{rt}\psi_t^\dagger\right) \\ &= -N(\psi^\dagger(\mathcal{C}\beta O\mathcal{C})^T\psi) \quad [\psi, \psi^\dagger \text{ anticommutano}] \\ &= -N(\bar{\psi}\beta(\mathcal{C}\beta O\mathcal{C})^T\psi) = -(\bar{\psi}\beta\mathcal{C}O^T\beta\mathcal{C}\psi) \\ &= N(\bar{\psi}\beta\mathcal{C}O^T\mathcal{C}\beta\psi) \quad [\beta, \mathcal{C} \text{ anticommutano}] \end{aligned}$$

Per ciascuna delle cinque combinazioni bilineari, usando la eq. (42) e la relazione $\beta\gamma^{\mu\dagger}\beta = \gamma^\mu$ troviamo

$$(47) \quad C_O\mathcal{C}O^T\mathcal{C}\beta = \eta O$$

con $C_O = \pm 1$, da cui risulta infine

$$(48) \quad \mathbf{C}N(\bar{\psi}O\psi)\mathbf{C} = C_ON(\bar{\psi}O\psi)$$

¹⁴La normalizzazione delle u, v é fissata dalle relazioni $(\bar{u}u) = 1, (\bar{v}v) = -1$.

¹⁵Consideriamo il caso di operatori in ordinamento normale, cioè quelli che appaiono nella teoria dei campi. Dato che stiamo cambiando particelle in antiparticelle, sotto coniugazione di carica il "mare di Dirac" diventerebbe un mare di antiparticelle, ad esempio di positroni; al contrario della teoria delle lacune, la teoria dei campi tratta in modo simmetrico particelle e antiparticelle.

Nome	O	C_O
S	1	1
V	γ^μ	-1
T	$i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$	-1
A	$\gamma^\mu \gamma^5$	1
P	γ^5	1

Tabella 2: Comportamento delle combinazioni bilineari sotto coniugazione di carica.

I valori di C_O sono riportati nella tabella 2. Riportiamo ad esempio i passi relativi al tensore $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Cominciamo con notare che

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]^T = [\gamma^{\nu T}, \gamma^{\mu T}]$$

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]^\dagger = [\gamma^{\nu\dagger}, \gamma^{\mu\dagger}]$$

e quindi

$$\mathcal{C} i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]^T \mathcal{C} = i[\gamma^{\nu T*}, \gamma^{\mu T*}] = i[\gamma^{\nu\dagger}, \gamma^{\mu\dagger}]$$

$$i\beta[\gamma^{\nu\dagger}, \gamma^{\mu\dagger}]\beta = i[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = -i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

Quindi $C_O = -1$. Il risultato per A, P si ottiene semplicemente a partire da

$$\beta \mathcal{C} (\gamma^5)^T \mathcal{C} \beta = \beta i\gamma^2 \gamma^5 i\gamma^2 \beta = \gamma^5$$

Sotto coniugazione di carica, la corrente $j^\mu = N(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)$ cambia segno, esattamente quanto ci aspettiamo dallo scambio tra particelle negative e particelle positive.

3.1.3 Alcune considerazioni su C e i campi di spin 1/2

Concludiamo questa discussione sulla coniugazione di carica per i campi di spin 1/2 con alcune considerazioni:

Diverse rappresentazioni delle matrici di Dirac Ci possiamo facilmente convincere che i valori di C_O , definiti nelle eq. (47) e (48), e riportati per ciascun bilineare nella tabella 2, non dipendono dalla particolare rappresentazione utilizzata per le matrici di Dirac. Infatti si può dimostrare che diverse rappresentazioni delle matrici di Dirac, γ^μ , che obbediscano alle stesse regole di anticommutazione, sono connesse da una trasformazione unitaria¹⁶ U .

Avremo quindi (eq. (47)) $\beta^t \mathcal{C}' O'^T \mathcal{C}' \beta' = U^\dagger \beta \mathcal{C} O^T \mathcal{C} \beta U = C_O U^\dagger O U = C_O O'$.

¹⁶Un esempio di rappresentazione alternativa delle matrici di Dirac é quella di Majorana, in cui le tutte le γ^μ hanno sono immaginarie, $\gamma^{\mu*} = -\gamma^\mu$. In questo caso, vedi eq. (41), ho semplicemente $\mathcal{C} = 1$. Per una discussione della rappresentazione di Majorana, e della trasformazione unitaria che la lega alla rappresentazione usuale, vedere il libro di Mandl e Shaw, [4].

Bilineari con campi diversi Se abbiamo più campi di spin 1/2, $\psi_i, i = 1 \dots n$, possiamo generalizzare la definizione di \mathbf{C} , come l'operatore che inverte la carica elettrica di ciascun tipo di particelle. In analogia con la eq. (46),

$$(49) \quad \mathbf{C}\psi_i(x)\mathbf{C} = \mathcal{C}\psi_i^\dagger(x), \quad \mathbf{C}\psi_i^\dagger(x)\mathbf{C} = \mathcal{C}\psi_i(x)$$

Per le combinazioni bilineari miste, $N(\bar{\psi}_i O\psi_k)$, troviamo allora

$$(50) \quad \mathbf{C}N(\bar{\psi}_i O\psi_k)\mathbf{C} = C_O N(\bar{\psi}_k O\psi_i)$$

con gli stessi C_O definiti nella tabella 2. Notiamo che gli invarianti bilineari misti sono rilevanti nella teoria delle interazioni deboli, in cui appaiono correnti vettoriali del tipo $\bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_\nu$, ed assiali, $\bar{\psi}_e \gamma^\mu \gamma^5 \psi_\nu$. Le due correnti hanno rispettivamente $C_O = -1$, $C_O = 1$, e dato che la corrente debole é la somma delle due, le interazioni deboli violano la simmetria \mathbf{C} .

Diverse definizioni della Coniugazione di Carica Possiamo modificare la definizione dell'operatore \mathbf{C} introducendo nella eq. (33) un fattore di fase $\xi = e^{+i\phi}$:

$$\mathbf{C}|e^-; \vec{p}, h\rangle = \xi |e^+; \vec{p}, h\rangle, \quad \mathbf{C}|e^+; \vec{p}, h\rangle = \xi^* |e^-; \vec{p}, h\rangle,$$

Con questa definizione abbiamo ancora $\mathbf{C}^2 = 1$. Questa modifica si riflette in una modifica delle eq. (34), (35) e della (46), che diventa

$$(51) \quad \mathbf{C}\psi(x)\mathbf{C} = \xi^* \mathcal{C}\psi^\dagger(x), \quad \mathbf{C}\psi^\dagger(x)\mathbf{C} = \xi \mathcal{C}\psi(x)$$

Si verifica facilmente che il comportamento degli invarianti bilineari, eq. (48) resta immutato. Se esistono più campi di spin 1/2, $\psi_i, i = 1 \dots n$, possiamo associare una fase diversa ξ_i a ciascuno di questi, di modo che

$$\mathbf{C}\psi_i(x)\mathbf{C} = \xi_i^* \mathcal{C}\psi_i^\dagger(x)$$

la legge di trasformazione dei bilineari misti diviene allora

$$\mathbf{C}N(\bar{\psi}_i O\psi_k)\mathbf{C} = \xi_i \xi_k^* C_O N(\bar{\psi}_k O\psi_i)$$

con gli stessi C_O definiti nella tabella 2. Notiamo che anche in questo caso le correnti vettoriali ed assiali hanno un comportamento opposto, e da questo segue che, qualunque sia la scelta delle fasi, la simmetria \mathbf{C} risulta violata nelle interazioni deboli.

3.1.4 Coniugazione di carica del fotone

In accordo con la tabella 1, il campo $A^\mu(x)$ deve cambiare segno sotto \mathbf{C} . deve quindi essere

$$(52) \quad \mathbf{C}A^\mu(x)\mathbf{C} = -A^\mu(x)$$

Il comportamento degli operatori di creazione e distruzione sarà quindi (ricordiamo che il fotone coincide con la sua antiparticella),

$$(53) \quad \mathbf{C}a_r(\vec{k})\mathbf{C} = -a_r(\vec{k}); \quad \mathbf{C}a_r^\dagger(\vec{k})\mathbf{C} = -a_r^\dagger(\vec{k})$$

Infine gli stati di singolo fotone cambieranno segno,

$$(54) \quad \mathbf{C}|\gamma; \vec{k}, r\rangle = -|\gamma; \vec{k}, r\rangle$$

mentre per gli stati ad n fotoni $\mathbf{C}|n \text{ fotoni}\rangle = (-1)^n |n \text{ fotoni}\rangle$.

3.1.5 C come simmetria nella elettrodinamica quantistica

Abbiamo definito l'operatore \mathbf{C} specificando la sua azione sui campi di spin 1/2 e sul campo del fotone, ma si tratta di una vera simmetria della elettrodinamica quantistica? Per dimostrarlo dobbiamo mostrare che \mathbf{C} commuta con l'hamiltoniano totale ovvero con il lagrangiano.

La densità di lagrangiano di perturbazione, $\mathcal{L}_I = -eA_\mu(x) (\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x))$ é invariante dato che sia la corrente che il campo $A_\mu(x)$ cambiano segno sotto \mathbf{C} . L'invarianza del lagrangiano imperturbato é evidente dato che \mathbf{C} (vedi eq. (33), (54)) non modifica impulso ed energia degli stati di singola particella. Possiamo verificare direttamente che \mathbf{C} lascia invariante \mathcal{L}_0 . Il termine $-1/4F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ resta immutato dato che ciascuno dei due fattori F cambiano segno. Per i campi di spin 1/2 troviamo, procedendo come abbiamo già fatto per i bilineari,

$$\begin{aligned} \mathbf{C} i (\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)) \mathbf{C} &= -i ((\partial_\mu\bar{\psi}(x))\gamma^\mu\psi(x)) \\ &= -i \partial_\mu (\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)) + i (\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)) \end{aligned}$$

ed eliminando la derivata totale,

$$= i (\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x))$$

Questa discussione si applica direttamente anche al caso in cui esistano più tipi di particelle cariche, ad esempio i tre leptoni e, μ, τ , dato che ciascuna di esse interagisce separatamente con il campo elettromagnetico.

Notiamo una interessante conseguenza della invarianza della QED sotto coniugazione di carica, il "teorema di Furry": le ampiezze di transizione tra un numero pari di fotoni e un numero dispari di fotoni sono nulle. Dato che l'hamiltoniano di interazione é invariante sotto \mathbf{C} , questo risultato é vero a ciascun ordine dello sviluppo perturbativo. Una conseguenza di questo teorema é che a ciascun ordine perturbativo la somma dei grafici con tre linee fotoniche esterne (ma senza linee fermioniche esterne) si annulla esattamente. Questo risultato elimina una delle possibili divergenze primitive della QED.

Sarebbe possibile introdurre nel lagrangiano di interazione della QED \mathcal{L}_I un termine extra non invariante sotto \mathbf{C} ? Certamente si, ma al prezzo di rinunciare alla rinormalizzabilità: basta aggiungere un nuovo termine che violi esplicitamente il teorema di Furry, ad esempio $\mathcal{L}'_I = \lambda F^{\mu\nu} F_{\nu\lambda} F^\lambda_\mu$. Questo termine é invariante di gauge, ma la costante di accoppiamento ha dimensioni $[E^{-2}]$, e quindi la teoria modificata non é rinormalizzabile¹⁷.

3.2 La parità

Come abbiamo visto nella sezione 2.1 la parità \mathbf{P} può essere rappresentata in meccanica quantistica da un operatore lineare e unitario. La tabella 1 suggerisce che sia possibile definire $\mathbf{P}^2 = \mathbf{1}$, e verificheremo che, contrariamente al caso di \mathbf{T} , di cui abbiamo parlato e su cui torneremo, é possibile imporre la condizione $\mathbf{P}^2 = \mathbf{1}$, ovvero $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^\dagger = \mathbf{P}$. Inoltre \mathbf{P} deve lasciare invariato momento angolare $\vec{\mathbf{J}}$, ma cambiare segno ai generatori dei boost, $\vec{\mathbf{K}}$,

$$(55) \quad \mathbf{P}\vec{\mathbf{J}}\mathbf{P} = \vec{\mathbf{J}}, \quad \mathbf{P}\vec{\mathbf{K}}\mathbf{P} = -\vec{\mathbf{K}}$$

¹⁷Lasciamo al lettore la dimostrazione che non si possono costruire, partendo dal campo A_μ e dalle sue derivate, operatori di dimensione 4 (quindi rinormalizzabili) che siano invarianti di gauge, ma non invarianti sotto \mathbf{C} .

L'effetto di \mathbf{P} su uno stato di singola particella con impulso \vec{p} ed elicità h è di cambiare segno all'impulso e anche all'elicità $\vec{\mathbf{J}} \cdot \hat{p}$ dato che $\vec{\mathbf{J}}$ rimane invariato. $\vec{\mathbf{J}}$

$$(56) \quad \mathbf{P}|\vec{p}, h\rangle = \eta|-\vec{p}, -h\rangle$$

η è la *parità intrinseca* della particella. Dato che $\mathbf{P}^2 = \mathbf{1}$ sarà $\eta = \pm 1$.

3.2.1 Parità per particelle di spin 1/2

Sotto l'azione della parità \mathbf{P} un campo di Dirac $\psi(\vec{x}, t)$ deve essere trasformato in $\psi(-\vec{x}, t)$ a meno di una trasformazione lineare delle componenti spinoriali¹⁸

$$\mathbf{P}\psi(\vec{x}, t)\mathbf{P} = \mathcal{P}\psi(-\vec{x}, t)$$

Si vede facilmente che $\mathcal{P} = \eta\gamma^0$ con η un fattore di fase. Se consideriamo infatti lo sviluppo di $\psi(\vec{x}, t)$ (36), \mathbf{P} opera sugli operatori di creazione e distruzione, ma non sulle funzioni d'onda $u_h(\vec{p})e^{-ipx}$, e $v_h(\vec{p})e^{ipx}$, quindi $\mathbf{P}\psi(\vec{x}, t)\mathbf{P}$ e $\psi(\vec{x}, t)$ obbediscono la stessa equazione di Dirac,

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\psi(\vec{x}, t)\mathbf{P} &= \left(-i\alpha_i\frac{\partial}{\partial x^i} + \beta m\right)\mathbf{P}\psi(\vec{x}, t)\mathbf{P}, & \text{mentre} \\ i\frac{\partial}{\partial t}\psi(-\vec{x}, t) &= \left(i\alpha_i\frac{\partial}{\partial x^i} + \beta m\right)\psi(-\vec{x}, t), & \text{ma moltiplicando per } \gamma^0, \\ i\frac{\partial}{\partial t}\gamma^0\psi(-\vec{x}, t) &= \left(-i\alpha_i\frac{\partial}{\partial x^i} + \beta m\right)\gamma^0\psi(-\vec{x}, t). \end{aligned}$$

Quindi possiamo porre

$$(57) \quad \mathbf{P}\psi(\vec{x}, t)\mathbf{P} = \eta\gamma^0\psi(-\vec{x}, t)$$

Dobbiamo adesso tradurre questo risultato in una legge di trasformazione per gli operatori di creazione e distruzione e degli stati ad una particella. Per questo, considerando le equazioni (38), (39) obbedite dagli spinori $u_h(\vec{p})$ e $v_h(\vec{p})$ notiamo (i dettagli sono lasciati come esercizio) che $\gamma^0 u_h(\vec{p})$ e $u_{-h}(-\vec{p})$ obbediscono le stesse equazioni, e lo stesso accade per $\gamma^0 v_h(\vec{p})$ e $v_{-h}(-\vec{p})$. Quindi possiamo porre

$$\gamma^0 u_h(\vec{p}) = c_u u_{-h}(-\vec{p}); \quad \gamma^0 v_h(\vec{p}) = c_v v_{-h}(-\vec{p})$$

I coefficienti c_u, c_v si determinano considerando il caso con $\vec{p} = 0$, $p^0 = m$, in cui l'equazione di Dirac per i due spinori si riduce a $\gamma^0 u(0) = u(0)$, $\gamma^0 v(0) = -v(0)$, quindi $c_u = 1$, $c_v = -1$, da cui

$$(58) \quad \gamma^0 u_h(\vec{p}) = u_{-h}(-\vec{p}); \quad \gamma^0 v_h(\vec{p}) = -v_{-h}(-\vec{p})$$

Torniamo adesso alla (57) che sviluppiamo usando la (36) e (58)

$$\begin{aligned} &\sum_{h,\vec{p}} \left(\mathbf{P} c_h(\vec{p}) \mathbf{P} u_h(\vec{p}) e^{-i(p^0 t - \vec{p}\vec{x})} + \mathbf{P} d_h^\dagger(\vec{p}) \mathbf{P} v_h(\vec{p}) e^{i(p^0 t - \vec{p}\vec{x})} \right) \\ &= \eta \sum_{h,\vec{p}} \left(c_h(\vec{p}) u_{-h}(-\vec{p}) e^{-i(p^0 t + \vec{p}\vec{x})} + d_h^\dagger(\vec{p}) v_{-h}(-\vec{p}) e^{i(p^0 t + \vec{p}\vec{x})} \right) \end{aligned}$$

¹⁸Ricordiamo la situazione analoga per le trasformazioni di Lorentz, vedi ad esempio l'appendice A di [4]. La parità è un elemento del gruppo di Lorentz allargato.

e cambiando le variabili su cui si esegue la somma, $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, $h \rightarrow -h$

$$= \eta \sum_{h, \vec{p}} \left(c_{-h}(-\vec{p}) u_h(\vec{p}) e^{-i(p^0 t - \vec{p} \cdot \vec{x})} + d_{-h}^\dagger(-\vec{p}) v_h(\vec{p}) e^{i(p^0 t - \vec{p} \cdot \vec{x})} \right)$$

Eguagliando i coefficienti delle stesse funzioni d'onda otteniamo

$$(59) \quad \begin{aligned} \mathbf{P} c_h(\vec{p}) \mathbf{P} &= \eta c_{-h}(-\vec{p}); & \mathbf{P} d_h^*(\vec{p}) \mathbf{P} &= -\eta d_{-h}^*(-\vec{p}), & \text{e anche} \\ \mathbf{P} c_h^*(\vec{p}) \mathbf{P} &= \eta c_{-h}^*(-\vec{p}); & \mathbf{P} d_h(\vec{p}) \mathbf{P} &= -\eta d_{-h}(-\vec{p}) \end{aligned}$$

Arriviamo così ad un risultato apparentemente sorprendente: particelle ed antiparticelle hanno parità intrinseca opposta. Ad esempio se assegniamo all'elettrone¹⁹ $\eta = 1$ abbiamo

$$(60) \quad \mathbf{P} |e^-; \vec{p}, h\rangle = |e^-; -\vec{p}, -h\rangle, \quad \mathbf{P} |e^+; \vec{p}, h\rangle = -|e^+; -\vec{p}, -h\rangle,$$

Da questo segue ad esempio che mesoni come il pione, composti da una coppia quark-antiquark in onda S, hanno parità negativa anziché positiva. Lo stesso vale per i mesoni vettoriali ρ, ω, Φ , composti da una coppia quark-antiquark in onda S e in uno stato di tripletto di spin.

Per le combinazioni bilineari abbiamo, dato che $\eta^2 = 1$,

$$(61) \quad \mathbf{P} \bar{\psi}(\vec{x}, t) O \psi(\vec{x}, t) \mathbf{P} = \bar{\psi}(-\vec{x}, t) \gamma^0 O \gamma^0 \psi(-\vec{x}, t) = P_O \bar{\psi}(-\vec{x}, t) O \psi(-\vec{x}, t)$$

Naturalmente dobbiamo distinguere per ciascun invariante le componenti temporali da quelle spaziali, indicate nella tabella 3 con i, k

Per i bilineari costruiti da invarianti costruiti campi diversi ψ_a, ψ_b , che possono avere parità intrinseca differente η_a, η_b abbiamo

$$(62) \quad \mathbf{P} \bar{\psi}_a(\vec{x}, t) O \psi_b(\vec{x}, t) \mathbf{P} = \eta_a \eta_b P_O \bar{\psi}_a(-\vec{x}, t) O \psi_b(-\vec{x}, t)$$

Nome	O	P_O	$C_O P_O$
S	1	1	1
V	γ^0, γ^i	+1; -1	-1; +1
T	$i[\gamma^0, \gamma^i]; i[\gamma^i, \gamma^k]$	-1; +1	+1; -1
A	$\gamma^0 \gamma^5; \gamma^i \gamma^5$	-1; +1	-1; +1
P	γ^5	-1	-1

Tabella 3: Comportamento delle combinazioni bilineari sotto parità.

3.2.2 Parità dei bosoni vettoriali

Per il campo del fotone, $A^\mu(x)$, seguiamo la tabella 1:

$$(63) \quad \mathbf{P} A^0(\vec{x}, t) \mathbf{P} = A^0(-\vec{x}, t); \quad \mathbf{P} \vec{A}(\vec{x}, t) \mathbf{P} = -\vec{A}(-\vec{x}, t)$$

¹⁹Ricordiamo che solo la parità relativa di due particelle ha significato fisico.

3.2.3 Simmetria CP

Nella taabella 3 abbiamo riportato nell'ultima colonna l'effetto congiunto delle trasformazioni **CP**. Si vede che le correnti assiali e vettoriali hanno lo stesso comportamento sotto **CP**, e che quindi **CP** è una possibile simmetria delle interazioni deboli. In effetti anche questa simmetria è violata. Nel Modello Standard questo avviene tramite il mescolamento dei quark, argomento che verrà discusso in un'altra nota.

3.3 L'inversione temporale

L'inversione temporale deve essere rappresentata da un operatore antilineare **T**. Determiniamo la sua azione su un campo $\psi(\vec{x}, t)$: ci possiamo aspettare che essa si possa scrivere

$$(64) \quad \mathbf{T}\psi(\vec{x}, t)\mathbf{T}^\dagger = \chi \mathcal{T} \psi(\vec{x}, -t) \quad \mathbf{T}\psi^\dagger(\vec{x}, t)\mathbf{T}^\dagger = \chi^* \psi^\dagger(\vec{x}, -t)\mathcal{T}^\dagger$$

dove \mathcal{T} è una opportuna trasformazione degli indici spinoriali, e χ un fattore di fase. Per determinare **S** consideriamo l'effetto di **T** sulla equazione di Dirac, tenendo presente il carattere antilineare di **T**:

$$\mathbf{T}(i\gamma^0\partial_t + i\vec{\gamma}\vec{\nabla} - m)\psi(\vec{x}, t)\mathbf{T}^\dagger = (-i\gamma^{0*}\partial_t - i\vec{\gamma}^*\vec{\nabla} - m)\mathbf{T}\psi(\vec{x}, t)\mathbf{T}^\dagger = 0$$

mentre l'equazione obbedita da $\psi(\vec{x}, -t)$ è

$$(-i\gamma^0\partial_t + i\vec{\gamma}\vec{\nabla} - m)\psi(\vec{x}, -t) = 0$$

Si verifica facilmente che ponendo²⁰

$$(65) \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}^* = -\mathcal{T}^\dagger = \gamma^1\gamma^3; \quad \mathcal{T}^2 = -1$$

$\mathbf{T}\psi(\vec{x}, t)\mathbf{T}^\dagger$ e $\mathcal{T}\psi(\vec{x}, -t)$ obbediscono la stessa equazione, quindi la scelta (64) è giustificata.

Verifichiamo che questa definizione obbedisce al teorema di Wigner che per stati $|f\rangle$ di una particella di spin 1/2, con $f(\vec{x})$ una arbitraria funzione d'onda, richiede che $\mathbf{T}^2|f\rangle = -|f\rangle$. Possiamo costruire $|f\rangle$ applicando al vuoto un appropriato operatore di creazione,

$$|f\rangle = \int d^3x (\psi^\dagger(\vec{x}, 0)f(x))|0\rangle$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{T}|f\rangle &= \chi^* \int d^3x (\psi^\dagger(\vec{x}, 0)\mathcal{T}f^*(x))|0\rangle \\ \mathbf{T}^2|f\rangle &= \chi^*\chi \int d^3x (\psi^\dagger(\vec{x}, 0)\mathcal{T}^2f(x))|0\rangle = -|f\rangle \end{aligned}$$

Per quanto riguarda le combinazioni bilineari, otteniamo

$$(66) \quad \mathbf{T}\bar{\psi}(\vec{x}, t)O\psi(\vec{x}, t)\mathbf{T}^\dagger = \psi^\dagger(\vec{x}, t)\mathcal{T}^\dagger\gamma^0O^*\mathcal{T}\psi(\vec{x}, t) = T_O\bar{\psi}(\vec{x}, t)O\psi(\vec{x}, t)$$

con i coefficienti T_O nella tabella 4. Registriamo infine il comportamento del campo del fotone: dalla tabella 1 otteniamo:

$$(67) \quad \mathbf{T}A^0(\vec{x}, t)\mathbf{T}^\dagger = A^0(\vec{x}, -t); \quad \mathbf{T}\vec{A}(\vec{x}, t)\mathbf{T}^\dagger = -\vec{A}(\vec{x}, -t)$$

²⁰Con la scelta tradizionale delle matrici γ . I dettagli sono lasciati al lettore.

Nome	O	T_O	$C_O P_O T_O$
S	1	1	1
V	γ^0, γ^i	1; -1	-1; -1
T	$i[\gamma^0, \gamma^i]; i[\gamma^i, \gamma^k]$	+1; -1	+1; +1
A	$\gamma^0 \gamma^5; \gamma^i \gamma^5$	1; -1	-1; -1
P	γ^5	1	1

Tabella 4: Comportamento delle combinazioni bilineari sotto inversione temporale.

3.4 Il teorema CPT

Il teorema CPT afferma che qualsiasi teoria di campo locale e invariante di Lorentz è necessariamente invariante sotto l'azione combinata di **C,P,T**, cioè l'azione della teoria obbedisce a

$$(68) \quad \mathbf{CPT} S[\phi_i] \mathbf{T}^\dagger \mathbf{P}^\dagger \mathbf{C}^\dagger = S[\phi_i]$$

L'origine di questo teorema, di cui esiste una dimostrazione che si basa su assiomi molto generali, si può intuire dalle nostre tabelle 2, 3, 4. Infatti che per ciascuno delle cinque combinazioni bilineari si ha (vedi ultima colonna della tabella 4)

$$(69) \quad \mathbf{CPT} \bar{\psi}(\vec{x}, t) O \psi(\vec{x}, t) \mathbf{T}^\dagger \mathbf{P}^\dagger \mathbf{C}^\dagger = (-1)^n \bar{\psi}(-\vec{x}, -t) O \psi(-\vec{x}, -t)$$

dove n è il numero di indici di Lorentz.

Notiamo che dalle (51), (57), e (64), otteniamo

$$(70) \quad \mathbf{CPT} \psi(\vec{x}, t) \mathbf{T}^\dagger \mathbf{P}^\dagger \mathbf{C}^\dagger = (\xi^* \eta \chi) i \gamma^2 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 \psi^\dagger(-\vec{x}, -t) = \zeta \gamma^5 \psi^\dagger(-\vec{x}, -t),$$

con $\zeta = \xi^* \eta \chi$. da questa possiamo ottenere direttamente la (69). I dettagli sono lasciati come esercizio: la dimostrazione segue le linee della sezione 3.1.2, e fa uso del fatto che gli operatori O sono definiti in modo che

$$(71) \quad (\bar{\psi}(\vec{x}, t) O \psi(\vec{x}, t))^\dagger = \bar{\psi}(\vec{x}, t) O \psi(\vec{x}, t).$$

Per il campo A^μ si ha

$$(72) \quad \mathbf{CPT} A^\mu(\vec{x}, t) \mathbf{T}^\dagger \mathbf{P}^\dagger \mathbf{C}^\dagger = -A^\mu(-\vec{x}, -t)$$

e per le sue derivate

$$(73) \quad \mathbf{CPT} \partial_{v_1} \cdots \partial_{v_n} A^\mu(\vec{x}, t) \mathbf{T}^\dagger \mathbf{P}^\dagger \mathbf{C}^\dagger = (-1)^{n+1} \partial_{v_1} \cdots \partial_{v_n} A^\mu(-\vec{x}, -t)$$

Anche in questo caso il fattore è ± 1 a secondo che il numero totale di indici sia pari o dispari. Inoltre le combinazioni bilineari sono state definite in modo che

$$(74) \quad [\bar{\psi}(\vec{x}, t) O \psi(\vec{x}, t)]^\dagger = \bar{\psi}(\vec{x}, t) O \psi(\vec{x}, t).$$

Consideriamo la più generale teoria della elettrodinamica quantistica, in cui il lagrangiano di interazione \mathcal{L}^1 sia una arbitraria combinazione di prodotti di bilineari del campo dell'elettrone e del campo A^μ e delle sue derivate, con coefficienti reali dato che il Lagrangiano deve essere hermitiano. Dato che il Lagrangiano deve essere invariante di Lorentz, esso deve contenere un numero pari di indici vettoriali saturati tra loro, per cui

$$(75) \quad \mathbf{CPT} \mathcal{L}_{\vec{x},t}^1 \mathbf{T}^\dagger \mathbf{P}^\dagger \mathbf{C}^\dagger = \mathcal{L}_{-\vec{x},-t}^1$$

Lo stesso vale per il Lagrangiano libero, e quindi l'azione è invariante.

L'argomento si estende facilmente al caso più generale in cui siano presenti campi scalari, e un numero arbitrario di campi spinoriali o vettoriali, in effetti a qualsiasi teoria di campo.

Riferimenti bibliografici

- [1] E. P. Wigner, *Group Theory*, Academic Press, Inc, New York 1959.
- [2] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, due volumi, Cambridge University Press, 1995.
- [3] R. F. Streater. A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That*, Princeton University Press, 2000 (ristampa).
- [4] F. Mandl e G. Shaw, *Quantum Field Theory*, Wiley, 1984.