UNIVERSITÀ DI ROMA "LA SAPIENZA"

Dipartimento di Fisica

ELETTRODINAMICA QUANTISTICA

Anno Accademico 2009-2010

N. Cabibbo[1]

L. Maiani[2]

O. Benhar[3]

[1]e-mail: nicola.cabibbo@roma1.infn.it

[2]e-mail: luciano.maiani@roma1.infn.it

[3]e-mail: omar.benhar@roma1.infn.it

AA 2006-2007, II Trimestre

WORK IN PROGRESS

Commenti, correzioni e suggerimenti, in particolare da parte degli studenti del Corso, sono apprezzati.

Indice

1 INTRODUZIONE **3**

1.1 Unità di misura, Rappresentazione di Heisenberg e di Schroedinger, ecc. 5

2 INTEGRALI DI FEYNMAN **7**

2.1 L'ampiezza di transizione 7

2.2 L'approssimazione reticolare 10

2.3 Il limite classico 10

2.4 Il tempo come variabile complessa 11

2.5 La meccanica statistica 12

2.6 Le funzioni di Green 13

3 PASSAGGIO ALLA TEORIA DI CAMPI **17**

3.1 Il funzionale generatore 19

3.2 L'oscillatore armonico 22

3.3 Campi scalari liberi 26

3.4 Campi scalari liberi — Stati a una particella 28

3.5 Operatori di creazione e di distruzione, normalizzazione del continuo 30

4 Il campo elettromagnetico **33**

4.1 La scelta di gauge 33

4.2 Il funzionale generatore e il propagatore 35

4.3 Gli stati a un fotone 37
4.4 Fotoni virtuali 39

5 Campi Fermionici **43**
5.1 L'oscillatore armonico e l'oscillatore di Fermi 43
5.1.1 Variabili anticommutanti 45
5.1.2 Somma sui cammini per i due oscillatori 46
5.1.3 Integrali gaussiani per variabili anticommutanti 49
5.2 Quantizzazione del campo di Dirac 51
5.2.1 Propagatore del fermione 53
5.2.2 Il teorema di spin e statistica 54
5.2.3 Stati ad una particella del campo di Dirac 55

6 TEORIA DELLE PERTURBAZIONI PER LE FUNZIONI DI GREEN: INTERAZIONE $\lambda\phi^4$ **57**
6.1 Lo sviluppo perturbativo 58
6.2 Diagrammi e regole di Feynman per le funzioni di Green 61
6.3 Parti connesse e diagrammi vuoto-vuoto 66
6.4 Funzione di Green a due punti in teoria delle perturbazioni. 68

7 PROCESSI DI DIFFUSIONE, MATRICE S. **73**
7.1 Stati ''in" e stati ''out" 74
7.2 Ampiezze di diffusione e Matrice S. 76
7.3 Grandezze conservate 78
7.4 Le formule di riduzione LSZ 78

8 DIAGRAMMI DI FEYNMAN PER LA MATRICE S: TEORIA $\lambda\phi^4$ **85**
8.1 Grafici irriducibili ad una particella 85
8.2 Regole di Feynman per gli elementi della Matrice S 88

9 ELETTRODINAMICA QUANTISTICA **91**

9.1 Grafici di Feynman per il funzionale generatore 93

9.2 Funzioni a due punti 95

9.3 La formula di riduzione 97

9.4 Grafici di Feynman per la matrice S 98

9.5 Combinatoria. 102

10 Effetto Compton **105**

10.1 Calcolo del modulo quadrato dell'ampiezza 105

10.2 Sezione d'urto di Klein-Nishina 109

10.3 Diffusione Compton su elettroni relativistici 111

11 Simmetrie P, C, T **113**

11.1 Paritá 113

11.2 Coniugazione di carica 115

11.3 Inversione del tempo 117

11.4 Trasformazione degli stati 120

11.5 Alcune applicazioni 123

11.5.1 Il teorema di Furry 123

11.5.2 Simmetrie del positronio 124

11.6 Il teorema CPT 126

11.6.1 Eguaglianza delle masse di particella e antiparticella 130

12 Rinormalizzazione della QED **133**

12.1 Il propagatore del fotone 135

12.2 La rinormalizzazione della carica 138

12.3 Il propagatore dell'elettrone 139

12.3.1 Il propagatore a tutti gli ordini 141

12.4 Il vertice 143
12.5 L'identità di Ward 145

13 Diffusione in un campo esterno **147**

14 Il momento magnetico anomalo dell'elettrone **151**
14.1 Preliminari 151
14.2 Il calcolo 152

A Ampiezza di Transizione in assenza di Potenziale **157**

B Grafici connessi **159**

C Invarianza di Lorentz e stati a una particella. **163**

D Integrali **165**
D.1 Integrazione in D dimensioni 165
D.2 Parametri di Feynman 167
D.3 Calcolo del tensore di polarizzazione del vuoto a 1 loop 168

E Il metodo di deWitt-Faddeev-Popov. **171**

Capitolo 1

INTRODUZIONE

In questo corso ci occuperemo di elettrodinamica quantistica, la teoria di campo che descrive l'interazione di particelle cariche con il campo elettromagnetico. L'elettrodinamica quantistica o QED (Quantum Electro Dynamics) è una teoria incompleta, dato che tutte le particelle elementari sono anche sottoposte all'azione delle interazioni deboli, e nel caso dei quark alla azione delle interazioni forti.

FERMIONS matter constituents spin = 1/2, 3/2, 5/2, ...

Leptons spin = 1/2			Quarks spin = 1/2		
Flavor	Mass GeV/c^2	Electric charge	Flavor	Approx. Mass GeV/c^2	Electric charge
ν_e electron neutrino	$<1\times10^{-8}$	0	u up	0.003	2/3
e electron	0.000511	−1	d down	0.006	−1/3
ν_μ muon neutrino	<0.0002	0	c charm	1.3	2/3
μ muon	0.106	−1	s strange	0.1	−1/3
ν_τ tau neutrino	<0.02	0	t top	175	2/3
τ tau	1.7771	−1	b bottom	4.3	−1/3

Figura 1.1: Fermioni Elementari (http://particleadventure.org/)

Una teoria più completa, che tiene conto sia delle interazioni elettromagnetiche che di quelle deboli e forti, è offerta dal cosidetto Modello Standard. Anche il Modello Standard è incompleto, dato

che non tiene conto delle interazioni gravitazionali[1]. Malgrado queste limitazioni la QED è molto interessante per varie ragioni:

- La QED ha un'ampio campo di applicazioni di interesse fisico, che vanno dalla interazione dei fotoni ed elettroni con la materia alla struttura fine dei livelli atomici.
- La QED è stata la prima teoria di campo ad essere stata studiata in dettaglio, in particolare per quanto riguarda il metodo dei diagrammi di Feynman, il fenomeno delle divergenze infrarosse e ultraviolette, e l'uso della rinormalizzazione.
- La QED è una teoria di gauge, ed è quindi il prototipo del Modello Standard. Uno studio della QED è un'utile premessa allo studio del Modello Standard.
- Alcune delle predizioni della QED sono, tra le predizioni del Modello Standard, quelle verificate con maggiore accuratezza.

La più precisa verifica della QED è attualmente data dal valore sperimentale della anomalia magnetica dell'elettrone. L'equazione di Dirac assegna all'elettrone un momento magnetico pari a un magnetone di Bohr, $e/2m$, ma questo risultato va corretto a causa dell'interazione con il campo di radiazione per una fattore $(1+a_e)$, dove a_e è appunto la *anomalia magnetica*, che può essere espressa come una serie di potenze di α, la costante di struttura fine:

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} + \cdots$$

I valori sperimentali per elettrone e positrone sono conosciuti con errori dell' ordine di 4 parti per miliardo:

$$\begin{aligned} a_{e^-}^{\text{Exp}} &= (1159652.1884 \pm 0.0043) \times 10^{-9} \\ a_{e^+}^{\text{Exp}} &= (1159652.1879 \pm 0.0043) \times 10^{-9} \end{aligned} \tag{1.1}$$

da paragonare alla previsione teorica:

$$a_{e^-}^{\text{Th}} = (1159652.1535 \pm 0.0240) \times 10^{-9} \quad \text{(21 parti per miliardo)} \tag{1.2}$$

L'errore citato per la previsione teorica è in massima parte dovuto all'incertezza sul valore di α, ottenuto da una misura dell'effetto Hall quantistico. La previsione teorica si basa sul calcolo di a_e sino a termini in α^4.

In questo corso tratteremo della elettrodinamica quantistica usando il metodo degli integrali di Feynman. Seguendo questa strada ci possiamo attrezzare per poter discutere in un prossimo corso del Modello Standard. Il metodo degli integrali di Feynman si è infatti rivelato decisamente superiore al più tradizionale metodo della Quantizzazione Canonica [1] per trattare teorie quantistiche caratterizzate da simmetrie di gauge. Ricordiamo che l'elettromagnetsmo è caratterizzato dall'invarianza di

[1] Mentre a livello di fisica classica (non quantistica) le interazioni gravitazionali sono descritte con grande successo dalla teoria della relatività generale di Einstein, e in molti casi la teoria di Newton si dimostra del tutto sufficiente, non esiste ancora una versione quantistica universalmente accettata di questa teoria.L'opinione più diffusa è che sia necessario passare da una teoria di campo a una teoria di stringhe, argomento al di fuori dai limiti di questo corso.

tutte le grandezze osservabili, ad esempio i campi elettrico e magnetico $\vec{E}, \vec{H}$ rispetto a trasformazioni dei potenziali vettori

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f \tag{1.3}$$

dove f è una funzione arbitraria. Possiamo considerare questa trasformazione come dovuta ad un operatore di trasformazione U_f, e scrivere

$$U_f A_\mu U_f^{-1} = A_\mu + \partial_\mu f \tag{1.4}$$

Se eseguiamo due trasformazioni in successione, U_f, U_g, avremo

$$U_g U_f A_\mu U_f^{-1} U_g^{-1} = A_\mu + \partial_\mu f + \partial_\mu g \tag{1.5}$$

e possiamo facilmente verificare che l'insieme delle U_f forma un gruppo commutativo (abeliano):

$$U_g U_f = U_f U_g = U_{g+f} \tag{1.6}$$

Nel caso dell'elettromagnetismo ci troviamo quindi di fronte a un tipo di invarianza di gauge particolarmente semplice, mentre nel Modello Standard avremo a che fare con simmetrie di gauge non commutative (non abeliane). Anche se metodo degli integrali di Feynman non è indispensabile per la descrizione quantistica dell'elettromagnetismo, è quello preferito nel caso del Modello Standard.

1.1 Unità di misura, Rappresentazione di Heisenberg e di Schroedinger, ecc.

Nel seguito useremo principalmente la rappresentazione di Heisenberg, dove gli operatori hanno una dipendenza dal tempo:

$$O(t) = e^{itH} O e^{-itH}, \qquad O = O(0) \tag{1.7}$$

Noteremo i passaggi in cui sia conveniente passare alla rappresentazione di Schroedinger. In ogni caso operatori e stati per cui non sia indicata una dipendenza esplicita dat tempo, ad esempio $O|m\rangle$, si intendono essere operatori e stati fissi, equivalenti a $O(t=0)|m\rangle$ nella rappresentazione di Heisenberg e a $O|m, t=0\rangle$ nella rappresentazione di Schroedinger.

Useremo unità di misura in cui $\hbar = 1$ e $c = 1$.

Useremo le convenzioni del [2] per quanto riguarda i quadrivettori e le matrici di Dirac. In particolare il prodotto scalare tra due quadrivettori $p = \{p^0, \vec{p}\}$ e $q = \{q^0, \vec{q}\}$ sarà indicato con $pq \equiv p^\mu q_\mu = p^0 q^0 - \vec{p} \cdot \vec{q}$.

Capitolo 2

La meccanica quantistica con l' integrale di Feynman

In questo capitolo vogliamo derivare la somma sui cammini dalla formulazione usuale della meccanica quantistica. Lo faremo nel caso particolarmente semplice di un sistema quantistico con un solo grado di libertà. Dopo avere ricavato l'espressione delle ampiezze di transizione mediante la somma sui cammini, faremo vedere come questo metodo permetta anche di calcolare le funzioni di Green in meccanica quantistica. Conchiuderemo il capitolo indicando come questi risultati vadano estesi al caso di sistemi con più gradi di libertà e alle teoria di campo.

Come ulteriore dimostrazione della equivalenza tra le differenti formulazioni della meccanica quantistica, in un successivo capitolo useremo la formulazione con la somma sui cammini per dedurre le regole di commutazione canoniche,

$$\left[p^m(t_0)\,,\, q^k(t_0)\right] = -i\hbar\,\delta^{mk}$$

2.1 L'ampiezza di transizione

Per introdurre il metodo degli integrali di Feynmann, consideriamo il caso più semplice, quello di un sistema quantistico unidimensionale descritto da una variabile dinamica q e l'impulso coniugato p, con un hamiltoniano

$$H = K + V(q) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \tag{2.1}$$

dove indichiamo con K l'energia cinetica e V l'energia potenziale.

Vogliamo calcolare l'ampiezza di transizione da uno stato $|q_1\rangle$ al tempo $t = t_1$ ad uno stato $|q_2\rangle$ al tempo $t = t_2 = t_1 + T$. Usando unità di misura in cui $\hbar = 1$ troviamo[1]

$$\begin{aligned}
&|q_1\rangle = \text{stato per } t = t_1\\
&e^{-iTH}|q_1\rangle = \text{stato per } t = t_1 + T\\
&\text{Ampiezza di transizione a } |q_2\rangle: \quad \langle q_2|e^{-iTH}|q_1\rangle
\end{aligned} \tag{2.2}$$

[1] In questo passaggio stiamo usando la rappresentazione di Schroedinger.

Conoscere l'ampiezza di transizione in funzione di q_1, q_2, T è equivalente ad avere una descrizione completa del nostro sistema quantistico. Vedremo qualche esempio di questa affermazione, rimandando però al testo di Feynman e Hibbs [3] per maggiori dettagli. Ricordiamo sin d'ora che nella fisica delle particelle elementari siamo interessati proprio al calcolo delle ampiezze di transizione e in particolare agli elementi di matrice S. Consideriamo anzitutto il caso in cui $V(q) = 0$. Si ottiene allora direttamente (vedi appendice A):

$$\langle q_2|e^{-iTK}|q_1\rangle = \langle q_2|e^{-i\frac{Tp^2}{2m}}|q_1\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i T}}e^{i\frac{m(q_2-q_1)^2}{2T}} \quad \text{(V(q) = 0)} \tag{2.3}$$

Notiamo anche che il risultato può essere riscritto in termini della velocità media v,

$$\begin{aligned}
&\langle q_2|e^{-i\frac{Tp^2}{2m}}|q_1\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i T}}e^{iT\frac{mv^2}{2}} \\
&v = (q_2 - q_1)/T
\end{aligned}$$

Questo risultato ha una interpretazione molto semplice: nel limite classico il sistema si muoverebbe a velocità costante v. La fase della ampiezza di transizione è data dalla *azione lungo la traiettoria classica*:

$$\begin{aligned}
&S_{\text{cl}} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q,\dot{q}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m\dot{q}^2}{2} = T\frac{mv^2}{2} \\
&\langle q_2|e^{-i\frac{Tp^2}{2m}}|q_1\rangle \propto e^{iS_{\text{cl}}}
\end{aligned}$$

La corrispondenza tra l' ampiezza di transizione quantistica e l' azione classica è stata per la prima volta messa in evidenza da Dirac [4].

Nel caso generale, con un potenziale $V(q)$ arbitrario, possiamo calcolare la ampiezza di transizione mediante un processo di limite che ci porterà a definire l'integrale di Feynman o integrale sui cammini. Suddividendo l'intervallo di tempo T in N intervalli $\epsilon = T/N$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
&\langle q_2|e^{-iTH}|q_1\rangle = \\
&= \int dq^1 \dots dq^{N-1} \langle q_2|e^{-i\epsilon H}|q^{N-1}\rangle\langle q^{N-1}|e^{-i\epsilon H}|q^{N-2}\rangle \cdots \langle q^1|e^{-i\epsilon H}|q_1\rangle
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Notiamo che, dato che K e V non commutano,

$$e^{-i\epsilon(K+V)} = 1 - i\epsilon(K+V) - \frac{\epsilon^2}{2}(K^2 + V^2 + KV + VK) \tag{2.5}$$

mentre

$$e^{-i\epsilon V}e^{-i\epsilon K} = 1 - i\epsilon(K+V) - \frac{\epsilon^2}{2}(K^2 + V^2 + 2VK) \tag{2.6}$$

quindi possiamo scrivere

$$e^{-i\epsilon H} = e^{-i\epsilon V}e^{-i\epsilon K} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{2.7}$$

e notiamo che un errore $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ ripetuto N volte equivale ad un errore globale $\mathcal{O}(\epsilon)$, che diventerà trascurabile nel limite $\epsilon \to 0$. Ciascuno dei fattori nella (2.4) può quindi essere approssimato come

$$\langle q^k|e^{-i\epsilon H}|q^{k-1}\rangle \approx \langle q^k|e^{-i\epsilon V}e^{-i\epsilon K}|q^{k-1}\rangle \tag{2.8}$$

$$= e^{-i\epsilon V(q^k)}\langle q^k|e^{-i\epsilon K}|q^{k-1}\rangle \tag{2.9}$$

e, usando la (2.3),

$$= \sqrt{\frac{k}{2\pi i\epsilon}}e^{i\epsilon\left(\frac{m(q^k-q^{k-1})^2}{2\epsilon^2}-V(q^k)\right)} = \tag{2.10}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\epsilon}}e^{i\epsilon\left(\frac{m(v^k)^2}{2}-V(q^k)\right)} \tag{2.11}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo definito la velocità nell'intervallo k-mo come

$$v^k = \frac{(q^k - q^{k-1})}{\epsilon} \tag{2.12}$$

di modo che possiamo riconoscere nel fattore di fase il lagrangiano $L = mv^2/2 - V(q)$. Se adesso sostituiamo nella (2.4) otteniamo

$$\langle q_2|e^{-iTH}|q_1\rangle \approx \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i\epsilon}}\right)^N \int \prod_{k=1}^{N-1} dq^k \exp\left(i\sum_k \epsilon\left[\frac{m(v^k)^2}{2} - V(q^k)\right]\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{2.13}$$

Nel limite $\epsilon \to 0$ l'insieme di punti $\{q^N = q_2, q^{N-1}, \dots q^1, q^0 = q_1\}$ formano una traiettoria $q(t)$ dal punto iniziale q_1 al punto finale q_2. Il fattore di fase nella (2.13) diviene semplicemente l'azione classica lungo questa traiettoria,

$$\sum_k \epsilon\left[\frac{m(v^k)^2}{2} - V(q^k)\right] \to \int dt L\big(q(t), \dot{q}(t)\big) = S\big(q(t)\big)$$

mentre l'integrale della (2.13) si può interpretare come una *somma sulle traiettorie.* Nel limite $\epsilon \to 0$ la somma diventa un integrale nello spazio delle traiettorie $q(t)$. La misura di integrazione è *definita* dalla equazione:

$$\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i\epsilon}}\right)^N \int \prod_{k=1}^{N-1} dq^k \to \int D[q(t)]$$

Passando al limite $\epsilon \to 0$, otteniamo infine:

$$\langle q_2|e^{-iTH}|q_1\rangle = \int D[q(t)]e^{iS(q(t))} \tag{2.14}$$

L' integrale è esteso su tutte le traiettorie $q(t)$ tali che $q(t_1) = q_1$, e $q(t_2) = q_2$.

2.2 L'approssimazione reticolare

L'integrale di Feynman è un *integrale funzionale*, cioè un integrale che si estende su tutte le funzioni $q(t)$ definite nell'intervallo t_1, t_2. È interessante considerare la (2.13) come una espressione approssimata che in linea di principio si può prestare a un calcolo esplicito. Questo tipo di approssimazione è largamente utilizzata nella teoria dei campi, in quanto si presta alla esecuzione di calcoli numerici in situazioni in cui non è possibile ottenere risultati esatti, e dove falliscono i metodi perturbativi che illustreremo nel caso della elettrodinamica quantistica. Questo tipo di approssimazione numerica si è rivelata di particolare utilità nella Quantum Chromo Dynamics (QCD), la teoria dei quark e delle loro interazioni forti, che non si presta a calcoli perturbativi se non in casi particolari. Si parla allora di "approssimazione reticolare": nella (2.13), ad esempio, il tempo t è rappresentato tramite un reticolo di punti, $t^k = t_1 + k\epsilon$, e la funzione $q(t)$ tramite il valore che essa assume ai tempi t^i, $q^i = q(t^i)$.

La approssimazione alla ampiezza di transizione della (2.13) ha errori $\mathcal{O}(\epsilon)$, e tanto bastava nella discussione precedente per indicare una convergenza al risultato della (2.14). Se l'interesse è centrato su metodi di calcolo numerico, diviene di grande importanza pratica la velocità con cui il risultato approssimato converge a quello esatto. Ad esempio, come il lettore potrà facilmente dimostrare, una semplice modifica della eq. (2.7),

$$e^{-i\epsilon H} = e^{-i\epsilon V/2} e^{-i\epsilon K} e^{-i\epsilon V/2} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{2.15}$$

permette di costruire uno schema di calcolo che converge molto più rapidamente al risultato esatto.

2.3 Il limite classico

La formulazione della meccanica quantistica mediante la sommma sui cammini, eq. (2.14) si presta particolarmente alla discussione del limite classico di una teoria quantistica. Teniamo presente che in ogni caso la teoria "vera" è quella quantistica e che la teoria classica non è che un particolare limite di questa. Il limite classico si ottiene quando $\hbar \to 0$, quindi conviene riscrivere la (2.14) esplicitando la presenza di $\hbar$,

$$\langle q_2 | e^{-iTH/\hbar} | q_1 \rangle = \int D[q(t)] e^{iS(q(t))/\hbar} \tag{2.14'}$$

La situazione diviene approssimativamente classica se il valore dell'azione è molto grande rispetto ad $\hbar$. Supponiamo che esista una traiettoria $q_c(t)$, tale che $q_c(t_1) = q_1$, e $q_c(t_2) = q_c(t_1 + T) = q_2$ che renda estrema l'azione. La condizione $\delta S = 0$ implica che traiettorie vicine alla $q_c(t)$ contribuiscano all'integrale (2.14') con la stessa fase (o fasi vicine), e quindi interferiscono in modo costruttivo. Al contrario, vicino ad ogni traiettoria che *non* estremizza l'azione ve ne sono altre con fase differente e che interferiscono distruttivamente. Quindi l'integrale sarà dominato dal contributo di un fascetto di traiettorie vicine a $q_c(t)$, traiettorie la cui azione differisce da $S(q_c(t))$ per meno di $\hbar$.

Nel limite $\hbar \to 0$ il moto del sistema quantistico sarà ben descritto dalla traiettoria "classica" $q_c(t)$.

È certo interessante notare che questo argomento permetta di spiegare un fatto altrimenti piuttosto misterioso. Il principio d'azione $\delta S = 0$ viene normalmente dimostrato partendo dalle equazioni del moto di Newton, ma questa derivazione non spiega la ragione della sua esistenza. L'origine

del principio d'azione invece è chiara se ricordiamo che la meccanica classica altro non è che un particolare limite della meccanica quantistica.

2.4 Il tempo come variabile complessa

Sinora abbiamo discusso della somma sui cammini senza preoccuparci eccessivamente della convergenza degli integrali, ad esempio quello che appare nella eq. (2.14). In realtà, guardando la (2.14) si vede subito che c'è un problema: l'integrando $e^{iS(q(t))}$ è di modulo = 1, quindi la definizione dell'integrale richiede qualche cura. In realtà avevamo già incontrato lo stesso problema nel calcolare (vedi appendice A) l'ampiezza di transizione in assenza di forze, eq. (2.3). In quel caso abbiamo visto che occorre definire l'ampiezza di transizione relativa ad un tempo T come limite, per $\eta \to 0^+$, dell'ampiezza relativa ad un intervallo di tempo $T - i\eta$. Applicheremo lo stesso metodo per definire l'integrale sui cammini della (2.14), che riscriviamo ancora una volta in forma più esplicita,

$$\langle q_2|e^{-iTH}|q_1\rangle = \int D[q(t)]\exp(iS) = \int D[q(t)]\exp\left(i\int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q)\right]\right) \tag{2.16}$$

Per dare al tempo una parte immaginaria negativa poniamo $t = (1 - i\chi)\tau$, con χ costante e piccola, di modo da poter approssimare $(1 - i\chi)^{-1}$ con $(1 + i\chi)$,

$$t = (1 - i\chi)\tau, \qquad \text{di modo che} \quad \begin{cases} dt = (1 - i\chi)\tau \\ \\ \dot{q} = \frac{dq}{dt} = (1 + i\chi)\frac{dq}{d\tau} \end{cases} \tag{2.17}$$

e l'integrando della (2.16) diviene $\exp(iS_\chi)$, dove S_χ è l'azione calcolata con il tempo modificato:

$$\exp(iS_\chi) = \exp\left(i\int d\tau\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 - V(q)\right]\right)\cdot\exp\left(-\chi\int d\tau\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q)\right]\right) \tag{2.18}$$

A questo punto l'integrando $\exp(iS_\chi)$ ha modulo eguale a $\exp(-\chi I)$ dove I è l'integrale

$$I = \int d\tau\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q)\right] = \int d\tau\mathscr{H}(q,\dot{q})$$

Notiamo anzitutto che $\mathscr{H}(q,\dot{q})$ l'energia della particella[2]. Per quanto riguarda la convergenza dell'integrale funzionale nella eq. (2.16) possiamo distinguere vari casi a seconda del comportamento della energia potenziale $V(q)$:

V(q) = 0 Questo è il caso della particella libera, dove si può esplicitamente calcolare l'integrale funzionale con il processo di limite delineato nella sezione 2.1 e i metodi elementari sviluppati nella Appendice A; l'integrale funzionale risulta convergente

V(q) definito positivo In questo caso $I > I_0$, dove I_0 è il valore di I calcolato a parità di traiettoria per $V(q) = 0$. Quindi si ha almeno la stessa convergenza del caso precedente.

[2]Notiamo per chiarezza che, dato che $q(t)$ è una traiettoria arbitraria, in generale $\mathscr{H}(q,\dot{q})$ non è indipendente dal tempo.

V(q) limitato inferiormente In questo caso, se $V(q) > V_0$, $I > I_0 + V_0 T$. L'aggiunta di una costante $V_0 T$ non muta la convergenza rispetto ai due casi precedenti.

V(q) non limitato inferiormente Bisogna valutare caso per caso. Se ad esmpio $V(q) = -q^n$ la convergenza dell'integrale funzionale dipende dal valore dell'esponente n. Si può dimostrare che l'integrale funzionale converge se $0 \geq n \geq -1$, e non converge se $n > 0$ o $n < -1$. Notiamo che il potenziale coulombiano è un caso limite.

Notiamo che i casi esclusi sono quelli in cui falliscono anche le formulazioni alternative della meccanica quantistica, ad esempio quella basata sulla meccanica ondulatoria.

2.5 La meccanica statistica

Nelle considerazioni precedenti, abbiamo sostituito l' integrazione sull' asse reale del tempo, con una integrazione nel piano complesso di t, lungo la retta individuata da:

$$t = (1 - i\chi)\tau \simeq e^{-i\chi}\tau \tag{2.19}$$

Il risultato converge anche per valori di χ non infinitesimi e possiamo spingerci al caso estremo in cui $\chi = \pi/2$. Troviamo allora la seguente espressione per l'ampiezza di transizione tra tempi immaginari (!) $t_1 = 0, t_2 = -i\beta$

$$\begin{aligned}\langle q_2|e^{-\beta H}|q_1\rangle &= \int D[q(\tau)] \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \left[\frac{m}{2}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q)\right]\right) \\ &= \int D[q(\tau)] \exp\left(-\int_0^\beta d\tau\, \mathscr{H}(q,\dot{q})\right)\end{aligned} \tag{2.20}$$

dove l'integrale è sui cammini che vanno da q_1 per $\tau = 0$ a q_2 per $\tau = \beta$. Questo assomiglia stranamente ad una funzione di partizione in meccanica statististica, ed è proprio così, se restringiamo l' integrale funzionali ai *cammini periodici* con $q_1 = q(0) = q_2 = q(-i\beta)$.

Assumiamo che gli autostati della nostra particella quantistica siano $|m\rangle$ con energia E_m. Con l'aiuto della (2.20) la funzione di partizione della particella in equilibrio termico ad una temperatura inversa[3] β si può esprimere come integrale sui cammini,

$$\begin{aligned}Z(\beta) &= \sum_m e^{-\beta E_m} = \\ &= \sum_m \langle m|e^{-\beta H}|m\rangle \qquad \text{(cioè una traccia...)} \\ &= \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H} = \int dq \langle q|e^{-\beta H}|q\rangle \qquad (2.21) \\ &= \int D[q(\tau)] \exp\left(-\int_0^\beta d\tau\, \mathscr{H}(q,\dot{q})\right) \qquad \text{(...un integrale sui cammini)} \qquad (2.22)\end{aligned}$$

[3]Ricordiamo che $\beta = 1/kT$, con T la temperatura assoluta e k la costante di Boltzman. Per non fare confusione con il tempo nel testo usiamo β e non la temperatura.

dove l'integrale è su tutti i cammini ciclici, che partono da un arbitrario valore di q a $t = 0$ e tornano allo stesso punto per $t = -i\beta$. Così definito l'integrale sui cammini assorbe l'integrazione che proviene dalla traccia (penultimo passo della eq. 2.21).

Notiamo anche che nel limite $\beta \to \infty$ la funzione di partizione è dominata dallo stato fondamentale:

$$Z(\beta) \xrightarrow[(\beta\to\infty)]{} \exp(-\beta E_0)(1 + \text{termini esponenzialmente piccoli in}\,\beta) \tag{2.23}$$

2.6 Le funzioni di Green

Definiamo come funzioni di Green i valori di aspettazione nello stato fondamentale del prodotto di operatori, ad esempio, nel caso della particella in moto unidimensionale, i prodotti della variabile $q(t)$ presa a tempi diversi, $t_1, t_2, \dots t_N$ *in ordine decrescente*,

$$\langle 0|\, q(t_1)\, q(t_2) \dots q(t_N)\, |0\rangle \qquad (t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_N)$$

Abbiamo qui adottato la rappresentazione di Heisenberg, di modo che

$$q(t_1) = e^{itH} q e^{-itH}$$

Come vedremo una espressione di questo tipo può essere semplicemente scritta come somma sui cammini.

Per estendere la definizione anche al caso di tempi arbitrari $t_1, t_2, \dots t_N$, introduciamo il concetto di prodotto ordinato nel tempo, $T\big(q(t_1)\, q(t_2) \dots q(t_N)\big)$, che è semplicemente il prodotto degli stessi operatori ordinati *in ordine di tempo decrescente*. Per due operatori:

$$T(q(t_1)\, q(t_2)) = \begin{cases} q(t_1)\, q(t_2) & \text{se } t_1 \geq t_2 \\ q(t_2)\, q(t_1) & \text{se } t_2 \geq t_1 \end{cases} \tag{2.24}$$

Possiamo allora definire la funzione di Green ad N tempi come

$$G_N(t_1, t_2, \dots t_N) = \langle 0|\, T\big(q(t_1)\, q(t_2) \dots q(t_N)\big)\, |0\rangle \tag{2.25}$$

Questa definizione va in qualche modo motivata: perchè dare particolare importanza al valore di aspettazione nello stato fondamentale $|0\rangle$? Perchè l'ordinamento temporale? La risposta a queste domande si troverà nella teoria dei campi a cui ci stiamo preparando. In termini semplici lo stato fondamentale della teoria dei campi è lo stato "vuoto", cioè privo di particelle. Il vuoto ha varie caratteristiche che lo rendono unicamente degno di interesse: dal vuoto si possono creare tutti gli altri stati mediante operatori di creazione; il vuoto è l'unico stato di una teoria di campo che sia invariante sotto traslazioni nello spazio e nel tempo e sotto trasformazioni di Lorentz e rotazioni, e si potrebbe continuare. Per quanto riguarda l'ordinamento temporale vedremo che esiste un rapporto diretto tra le funzioni di Green così definite e gli elementi della matrice S. Peraltro. già sappiamo (cfr. la formula di Dyson, in [1]) che il prodotto T-ordinato assume un ruolo centrale nella teoria delle perturbazioni.

Dimostriamo adesso che la (2.25) può essere trasformata nella seguente somma sui cammini

$$G_N(t_1, t_2, \dots t_N) = \frac{\int D[q(t)] \exp(iS)\; q(t_1)\, q(t_2) \dots q(t_N)}{\int D[q(t)] \exp(iS)} \tag{2.26}$$

Nel numeratore e nel denominatore, l'integrale è esteso su tutti cammini tra $t = -\infty$ e $t = \infty$, tali che $q(+\infty) = q(-\infty)$. Si deve intendere, inoltre, che i tempi si ottengono come limite di tempi complessi, secondo quanto discusso nella sezione 2.4. Più precisamente:

$$G_N(t_1, t_2, \dots t_N) = \lim_{\chi\to 0^+} \lim_{T\to\infty} \left[\frac{\int D[q(t')] \exp(iS)(q(t'_1)\, q(t'_2) \dots q(t'_N)}{\int D[q(t')] \exp(iS)} \right] \tag{2.27}$$

e gli integrali sono estesi su tutti i cammini *periodici* tra $t = -T' = -T(1 - i\chi)$ e $t = T' = T(1 - i\chi)$, tali cioè che $q(T') = q(-T')$, e $t'_{1,2,\dots} = (1 - i\chi)\, t_{1,2,\dots}$.

Per dimostrare l'equivalenza tra (2.27) e (2.25) consideriamo per semplicità il caso di due operatori, ed esplicitiamo la dipendenza dal tempo degli operatori in (2.25). Consideriamo il caso in cui $t_1 \geq t_2$

$$\begin{aligned} G_2(t_1, t_2) &= \langle 0|q(t_1)\, q(t_2)|0\rangle = \langle 0|e^{it_1H} q\, e^{-i(t_1-t_2)H} q\, e^{-it_2H}|0\rangle \qquad (t_1 \geq t_2) \\ &= \frac{\langle 0|e^{-i(T-t_1)H} q\, e^{-i(t_1-t_2)H} q\, e^{-i(t_2+T)H}|0\rangle}{\langle 0|e^{-2iTH}|0\rangle} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Nel secondo passo T è un tempo arbitrario, ma tale che $T > t_1,\ t_2 > -T$. Il termine a denominatore, $\langle 0|e^{-2iTH}|0\rangle = \exp(-2iTE_0)$ compensa l'introduzione di due fattori e^{-iTH} nel numeratore, di modo che il risultato non dipende da T. A questo punto introduciamo i tempi complessi, e scriviamo:

$$G_2(t_1, t_2) = \lim_{\chi\to 0^+} \lim_{T\to\infty} \left[\frac{\langle 0|e^{-i(T'-t'_1)H} q\, e^{-i(t'_1-t'_2)H} q\, e^{-i(t'_2+T')H}|0\rangle}{\langle 0|e^{-2iT'H}|0\rangle} \right]$$

dove $T' = (1 - i\chi)T,\ t'_{1,2} = (1 - i\chi)\, t_{1,2}$. Il limite $T \to \infty$ è in apparenza inutile, dato che come abbiamo osservato il termine in parentesi quadra è indipendente da T. Tuttavia esso ci permette di passare dal valore di aspettazione in $|0\rangle$ alla traccia degli operatori sia a numeratore che a denominatore:

$$G_2(t_1, t_2) = \lim_{\chi\to 0^+} \lim_{T\to\infty} \left[\frac{\sum_m \langle m|e^{-i(T'-t'_1)H} q\, e^{-i(t'_1-t'_2)H} q\, e^{-i(t'_2+T')H}|m\rangle}{\sum_m \langle m|e^{-2iT'H}|m\rangle} \right]$$

Infatti per ogni $\chi > 0$ e per T "grande" il contributo degli stati eccitati $|m\rangle \neq |0\rangle$ è depresso sia a numeratore che a denominatore per un fattore $\exp\big(-2\chi T(E_m - E_0)\big)$ rispetto a quello dello stato fondamentale, e svanisce nel limite $T \to \infty$, che è eseguito *prima* di quello $\chi \to 0^+$: l'ordine dei limiti è importante!

Dato che la traccia è indipendente dalla base scelta per descrivere gli stati, possiamo usare la base degli autostati della posizione, $|q\rangle$,

$$G_2(t_1, t_2) = \lim_{\chi\to 0^+} \lim_{T\to\infty} \left[\frac{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q}|e^{-i(T'-t'_1)H} q\, e^{-i(t'_1-t'_2)H} q\, e^{-i(t'_2+T')H}|\tilde{q}\rangle}{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q}|e^{-2iT'H}|\tilde{q}\rangle} \right]$$

Per completare la dimostrazione basta mostrare che l'espressione tra parentesi quadre è identica a quella che otterremmo dalla (2.27) nel caso di due operatori,

$$\begin{aligned} &\frac{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q}|e^{-i(T'-t'_1)H} q\, e^{-i(t'_1-t'_2)H} q\, e^{-i(t'_2+T')H}|\tilde{q}\rangle}{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q}|e^{-2iT'H}|\tilde{q}\rangle} \\ &= \frac{\int D[q(t')] \exp(iS)(q(t'_1)\, q(t'_2)}{\int D[q(t')] \exp(iS)} \end{aligned} \tag{2.29}$$

In effetti il numeratore e il denominatore nelle due espressioni sono separatamente eguali. Per quanto riguarda il denominatore, $\langle\tilde{q}|e^{-2iT'H}|\tilde{q}\rangle$ è una ampiezza di transizione, che possiamo esprimere come $\int D[q(t')]\exp(iS)$, dove l'integrazione è su tutti i cammini che partono da $\tilde{q}$ a $t=-T'$ e tornano allo stesso punto per $t=T'$. Per eseguire l'integrazione su $\tilde{q}$ basta estendere l'integrale sui cammini a tutti quelli che, partendo da *qualsiasi* punto per $t=-T'$, tornano al punto di partenza per $t=T'$. I due denominatori sono quindi eguali.

Per il numeratore, assumiamo che sia $T>t_1,\ t_2>-T$, e introduciamo accanto ai due operatori q somme sul sistema completo di stati, $\int dq|q\rangle\langle q|=1$:

$$\begin{aligned}
&\int d\tilde{q}\langle\tilde{q}|e^{-i(T'-t_1')H}q\,e^{-i(t_1'-t_2')H}q\,e^{-i(t_2'+T')H}|\tilde{q}\rangle\\
&=\iiint d\tilde{q}dq_1dq_2\langle\tilde{q}|e^{-i(T'-t_1')H}|q_1\rangle\langle q_1|q\,e^{-i(t_1'-t_2')H}|q_2\rangle\langle q_2|q\,e^{-i(t_2'+T')H}|\tilde{q}\rangle\\
&=\iiint d\tilde{q}dq_1dq_2\,q_1q_2\langle\tilde{q}|e^{-i(T'-t_1')H}|q_1\rangle\langle q_1|\,e^{-i(t_1'-t_2')H}|q_2\rangle\langle q_2|\,e^{-i(t_2'+T')H}|\tilde{q}\rangle
\end{aligned}$$

L'ultima espressione contiene il prodotto di tre ampiezze di transizione, che possiamo scrivere come una singola somma sui cammini che passano rispettivamente per q_1 al tempo t_1' e per q_2 a t_2':

$$[q(-T')=\tilde{q}]\to[q(t_2')=q_2]\to[q(t_1')=q_1]\to[q(T')=\tilde{q}]$$

l'integrazione su $\tilde{q}$, q_1,q_2 significa estendere l'integrale funzionale su tutti i cammini periodici tali cioè che $[q(T')=q(-T')]$, sostituendo il fattore q_1q_2 con $q(t_1')q(t_2')$, e si ottiene così il numeratore del secondo membro della eguaglianza (2.29). Lasciamo come esercizio la dimostrazione che il risultato è corretto anche per l'altro possibile ordinamento dei tempi, $t_2>t_1$. La dimostrazione si estende facilmente, seguendo gli stessi passi, al caso in cui siano presenti più di due operatori.

Capitolo 3

PASSAGGIO ALLA TEORIA DI CAMPI

Quello che abbiamo fatto per un grado di libertà si estende direttamente al caso di un numero finito di gradi di libertà. Tutti i risultati ottenuti valgono direttamente per un sistema con n gradi di libertà, purchè si intenda che il simbolo q venga interpretato come un vettore ad n componenti, $q = \{q_1 \dots q_n\}$. Ad esempio una funzione di Green può essere definita come

$$G_{k_1,k_2\dots,k_N}(t_1, t_2, \dots t_N) = \langle 0|T\left(q_{k_1}(t_1)\, q_{k_2}(t_2) \dots q_{k_N}(t_N)\right)|0\rangle \tag{3.1}$$

Per "cammino" si intende la traiettoria del vettore $q_k(t)$ tra il tempo iniziale t_1 e il tempo finale t_2, cioè l'insieme delle funzioni $q_k(t)$ nell'intervallo $t_1 \geq t \geq t_2$.

Queste idee si estendono facilmente, almeno in modo formale, a una teoria di campo. Consideriamo il caso di un campo scalare reale $\phi(\vec{x}, t)$. Possiamo definire il lagrangiano L come integrale di una densità di Lagrangiana e l' azione come l' integrale sul tempo del Lagrangiano. In formule:

$$\begin{aligned} &\mathscr{L} = \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \\ &L = \int d^3x \mathscr{L} \\ &S = \int dt\, L = \int d^4x \mathscr{L} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Possiamo pensare questo sistema come limite di un campo definito su un reticolo di punti $\vec{x}_k$ a distanza a, il *passo reticolare*, che coprono un cubo di lato L. Si tratta di un doppio limite $a \to 0$, $L \to \infty$. Per ogni valore di a, L abbiamo un numero finito $n = (L/a)^3$ di punti, e il campo risulta descritto dalle n variabili dinamiche $\phi_k(t) = \phi(\vec{x}_k, t)$. Nella versione discretizzata, scriveremo l'azione come

$$S = \int dt \sum_k a^3 \mathscr{L}_k$$

Dove $\mathscr{L}_k$ è la densità di lagrangiano nel punto $\vec{x}_k$, calcolata approssimando le derivate del campo con differenze, ad esempio

$$\frac{\partial \phi(\vec{x}_k, t)}{\partial x} \approx \frac{\phi(x_k + a, y_k, z_k, t) - \phi(x_k, y_k, z_k, t)}{a}$$

La descrizione di un campo mediante un reticolo di punti, e un passaggio al limite del continuo, può essere usata per definire formalmente una teoria di campo, ma anche per eseguire calcoli numerici di grandezze interessanti, ad esempio le funzioni di Green. In questo secondo caso conviene di solito rappresentare anche il tempo come variabile discreta, come avevamo accennato nella sezione 2.2.

In conclusione una teoria di campo può essere considerata come caso limite di un sistema a molti gradi di libertà, e la corrispondente teoria quantistica può essere definita mediante la somma sui cammini. Per "cammino", con dati valori di a, L si intende l'insieme delle funzioni $\phi_k(t)$ nel dato intervallo temporale. Nel limite $a \to 0$, $L \to \infty$ questo diviene il valore della funzione $\phi(\vec{x}, t)$ per tutti i valori di $\vec{x}$ e per t nell'intervallo dato. Rimane da dimostrare la convergenza del processo di limite, cosa che non si sa fare in generale, se non nel caso più semplice, quello di campi liberi, e in pochi altri casi. Per campi in interazione si può ricorrere alla teoria delle perturbazioni, che discuteremo nel seguito. Vedremo allora che un passo essenziale è costituito dalla procedura di rinormalizzazione, necessaria per eliminare (o meglio interpretare) le divergenza che emergono nel limite di piccole distanze, $a \to 0$.

Supponendo di avere risolto i problemi relativi al passaggio al limite, quello che abbiamo detto nelle sezioni precedenti si applica direttamente a una teoria di campo. Ad esempio possiamo definire la funzione di Green ad N punti come:

$$G(x_1, x_2, \dots x_N) = \langle 0| T\left(\phi(x_1)\,\phi(x_2)\dots\phi(x_N)\right)|0\rangle \tag{3.3}$$

($|0\rangle$ indica lo stato vuoto, e x_k il quadrivettore $\vec{x}_k, t_k$). Come nel caso finito-dimensionale, G può essere espressa come integrale funzionale:

$$G(x_1, \dots x_N) = \frac{\int D[\phi(x)]\exp(iS)\,\phi(x_1)\,\phi(x_2)\dots\phi(x_N)}{\int D[\phi(x)]\exp(iS)} \tag{3.4}$$

dove $D[\phi(x)]$ rappresenta la misura sullo spazio delle funzioni. Anche in questo caso, come nella sezione 2.6, questa espressione va intesa come limite,

$$G(x_1, \dots x_N) = \lim_{\chi\to 0^+}\lim_{\substack{T\to\infty\\ L\to\infty}}\left[\frac{\int D[\phi(\vec{x}, t')]\exp(iS)\,\phi(\vec{x}_1, t_1')\,\phi(\vec{x}_2, t_2')\dots\phi(\vec{x}_N, t_N')}{\int D[\phi(\vec{x}, t')]\exp(iS)}\right] \tag{3.5}$$

dove in parentesi quadra l'integrale si estende su tutte le funzioni $\phi(\vec{x}, t')$ in cui $t' = (1-i\chi)\,t$ si estende tra $\pm(1-i\chi)T$, e periodiche sia nel tempo che nello spazio:

$$\begin{gathered}\phi\left(\vec{x}, (1-i\chi)T\right) = \phi\left(\vec{x}, -(1-i\chi)T\right)\\ \phi(x,y,z,t) = \phi(x+L,y,z,t) = \phi(x,y+L,z,t) = \phi(x,y,z+L,t).\end{gathered} \tag{3.6}$$

La periodicità sia nella direzione temporale che nella direzione spaziale permette di eseguire liberamente integrazioni per parti, ad esempio

$$\int d^4x\,(\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi) = -\int d^4x\,(\phi\,\partial_\mu\partial^\mu\phi) \tag{3.7}$$

Queste espressioni si generalizzano al caso di più campi, $\phi_k(x)$, $(k = 1\dots n)$ ad esempio

$$\begin{aligned}G_{k_1\dots,k_N}(x_1, \dots x_N) &= \langle 0| T\left(\phi_{k_1}(x_1)\dots\phi_{k_N}(x_N)\right)|0\rangle\\ &= \frac{\int\prod_{k=1}^n D[\phi_k(x)]\exp(iS)\,\phi_{k_1}(x_1)\dots\phi_{k_N}(x_N)}{\int\prod_{k=1}^n D[\phi_k(x)]\exp(iS)}\end{aligned} \tag{3.8}$$

Il caso di un campo complesso si può ricondurre a quello di due campi reali[1],

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2); \qquad \phi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \tag{3.9}$$

Il fattore $1/\sqrt{2}$ è scelto in modo che $D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)] = D[\phi_1(x)]D[\phi_2(x)]$ come si verifica dallo Jacobiano. Usando questa relazione il calcolo delle funzione di Green si riconduce alla (3.8), e si ottiene in generale ad esempio

$$\begin{aligned}&\langle 0|T\left(\phi(x_1)\dots\phi(x_N)\,\phi^\dagger(y_1)\dots\phi^\dagger(y_M)\right)|0\rangle\\ &\qquad = \frac{\int D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)]\exp(iS)\,\phi(x_1)\dots\phi(x_N)\,\phi^\dagger(y_1)\dots\phi^\dagger(y_M)}{\int D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)]\exp(iS)}\end{aligned} \tag{3.10}$$

e nel caso semplice di una funzione a due punti,

$$\begin{aligned}&\langle 0|T\left(\phi(x)\,\phi^\dagger(y)\right)|0\rangle\\ &\qquad = \frac{\int D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)]\exp(iS)\,\phi(x)\,\phi^\dagger(y)}{\int D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)]\exp(iS)}\end{aligned} \tag{3.11}$$

La dimostrazione delle eqq. 3.10 e 3.11 è elementare, basta notare che le funzioni di Green definite tramite i valori di aspettazione sono lineari nei campi in ciascun punto, e che questo è ovviamente vero per la loro definizione in termini di somma sui cammini, per cui

$$\begin{aligned}\langle 0|T\left(\cdots(\phi_1(x)\pm i\phi_2(x))\cdots\right)|0\rangle &= \langle 0|T\left(\cdots\phi_1(x)\cdots\right)|0\rangle \pm i\langle 0|T\left(\cdots\phi_2(x)\cdots\right)|0\rangle\\ &= \frac{\int D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)]\exp(iS)\,\cdots(\phi_1(x)\pm i\phi_2(x))\cdots}{\int D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)]\exp(iS)}\end{aligned}$$

3.1 Il funzionale generatore

In questa sezione introduciamo il funzionale generatore, una tecnica che permette di esprimere in modo compatto l'insieme delle funzioni di Green. Consideriamo il caso di un sistema con n gradi di libertà $q_k(t)$, $(k = 1\dots n)$. Definiamo il funzionale generatore Z come

$$Z[J] \equiv Z[J_1(t),\dots J_n(t)] = \int D[q(t)]\exp\left(iS\left(q(t)\right) - i\int dt\sum_k q_k(t)J_k(t)\right) \tag{3.12}$$

dove le $J_k(t)$ sono n funzioni del tempo, e l'integrale funzionale va definito come limite

$$Z[J] \equiv Z[J_1(t),\dots J_n(t)] = \lim_{\chi\to 0^+}\lim_{T\to\infty}\int D[q(t')]\exp\left(iS\left(q(t')\right) - i\int dt'\sum_k q_k(t')J_k(t')\right) \tag{3.13}$$

dove, seguendo la discussione nelle sezioni precedenti, gli integrali nella parentesi quadra sono estesi su tutti i cammini *periodici* tra $t = -T' = -T(1-i\chi)$ e $t = T' = T(1-i\chi)$, tali cioè che $q(T') = q(-T')$, e $t' = (1-i\chi)t$.

[1] Useremo il simbolo † sia per indicare la coniugazione hermitiana nel caso di operatori, che la coniugazione complessa delle funzioni numeriche che rappresentano le traiettorie delle stesse grandezze.

Le funzioni di Green si ottengono allora come derivate funzionali di $Z[J]$.

Per chi non lo avesse ancora incontrato, il concetto di "derivata funzionale" è molto semplice. Consideriamo una funzione $f(x)$, e un funzionale $X\left[f(x)\right]$. Consideriamo poi una variazione $f(x) \to f(x)+\epsilon(x)$. Il valore di $X[f+\epsilon]$ può essere sviluppato in potenze di ϵ, e questo sviluppo ci permette di definire implicitamente, in analogia con lo sviluppo di Taylor, le derivate funzionali di X rispetto ad f:

$$\begin{aligned} X[f+\epsilon] = X[f] + \int dx \frac{\delta X}{\delta\epsilon(x)}\epsilon(x) + \frac{1}{2}\iint dx_1 dx_2 \frac{\delta^2 X}{\delta\epsilon(x_1)\delta\epsilon(x_2)}\epsilon(x_1)\epsilon(x_2) \\ \ldots + \frac{1}{N!}\int\cdots\int dx_1\cdots dx_N \frac{\delta^N X}{\delta\epsilon(x_1)\cdots\delta\epsilon(x_N)}\epsilon(x_1)\cdots\epsilon(x_N) + \ldots \end{aligned} \tag{3.14}$$

Se analogamente esguiamo uno sviluppo di Taylor della $Z[J]$ in potenze di J,

$$Z[J] = \sum_{N=0}^{\infty}\left[\frac{(-i)^N}{N!}\right]\int D[q(t)]\exp(iS)\left(\int dt \sum_k q_k(t)J_k(t)\right)^N, \tag{3.15}$$

e in particolare

$$Z[0] = \int D[q(t)]\exp(iS), \tag{3.16}$$

Alla luce della (2.26) possiamo riscrivere questo risultato come un polinomio nelle $J_k(t)$ i cui coefficienti sono le funzioni di Green,

$$Z[J] = Z[0]\sum_{N=0}^{\infty}\left[\frac{(-i)^N}{N!}\right]\int dt_1\ldots dt_N\, J_{k_1}(t_1)\,\ldots\, J_{k_N}(t_N)\, G_{k_1\ldots,k_N}(t_1,\ldots t_N), \tag{3.17}$$

da cui le singole funzioni di Green possono essere estratte con una appropriata derivata funzionale,

$$G_{k_1\ldots,k_N}(t_1,\ldots t_N) = (i)^N \frac{1}{Z[0]}\left[\frac{\delta^N Z[J]}{\delta J_{k_1}(t_1)\cdots\delta J_{k_N}(t_N)}\right]_{J=0} \tag{3.18}$$

Questi concetti si applicano direttamente alle teorie di campo. Assumiamo che ci siano N campi $\phi_1(x)\ldots\phi_N(x)$, dove $x = \{\vec{x}, t\}$. Definiremo il funzionale generatore in termini di N funzioni di x, $J_k(x)$, $(k = 1\ldots N)$,

$$Z[J] = \int D[\phi(x)]\exp\left(iS\left(\phi(x)\right) - i\int d^4x \sum_k \phi_k(x)J_k(x)\right) \tag{3.19}$$

La definizione di questo integrale segue le prescrizioni di limite e periodicità specificate nella sezione precedente, eqs. (3.5), (3.6). Le funzioni di Green a N punti risultano allora:

$$\begin{aligned} G_{k_1,\ldots k_N}(x_1,\cdots x_N) &= \langle 0|T\left(\phi_1(x_1)\cdots\phi_N(x_N)\right)|0\rangle = \\ &= \frac{\int D[\phi(x)]\phi(x_1)\ldots\phi(x_N)\exp\left(iS\left(\phi(x)\right)\right)}{\int D[\phi(x)]\exp\left(iS\left(\phi(x)\right)\right)} = \\ &= (i)^N\frac{1}{Z[0]}\left[\frac{\delta^N Z[J]}{\delta J_1(x_1)\cdots\delta J_N(x_N)}\right]_{J=0} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Una corrispondenza notevole: la (3.20) si ottiene con la semplice regola di sostituzione

$$\phi_k(x) \to i\frac{\delta}{\delta J_k(x)}\,, \tag{3.21}$$

che possiamo ad esempio utilizzare nel modo seguente: se $F[\phi]$ è un arbitrario funzionale dei campi, otteniamo che

$$\int D[q(t)]\exp(iS)\,F[\phi] = \left[F[i\frac{\delta}{\delta J}]\;Z[J]\right]_{J=0}\,, \tag{3.22}$$

un risultato che utilizzeremo per ricavare lo sviluppo perturbativo di una teoria di campo.

Per un campo complesso possiamo definire un funzionale generatore mediante due funzioni reali J_1, J_2 o, meglio, in termini di una funzione complessa J e della sua coniugata $J^\dagger$,

$$Z(J,J^\dagger) = \int D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)]\exp\left(iS\left(\phi(x),\phi^\dagger(x)\right) - i\int d^4x\left(\phi^\dagger(x)J(x) + J^\dagger(x)\phi(x)\right)\right) \tag{3.23}$$

$$\tag{3.24}$$

Le funzioni di Green si ottengono allora dalla regola di sostituzione (vedi eq. 3.21)

$$\phi(x) \to i\frac{\delta}{\delta J^\dagger(x)}, \qquad \phi^\dagger(x) \to i\frac{\delta}{\delta J(x)} \tag{3.25}$$

che si estende in modo ovvio al caso di più campi reali o complessi.

Invarianza per traslazioni e conservazione del quadri-momento. La forma delle funzioni di Green data nella seconda riga della (3.20) permette di discutere in modo molto semplice l' invarianza per traslazioni. Se consideriamo una traslazione di a^μ, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
G_{k_1,\dots k_N}(x_1+a,\cdots x_N+a) &= \frac{\int D[\phi(x)]\phi(x_1+a)\dots\phi(x_N+a)\exp\left(iS\left(\phi(x)\right)\right)}{\int D[\phi(x)]\exp\left(iS\left(\phi(x)\right)\right)} = \\
&= \frac{\int D[\phi(x)]\phi(x_1+a)\dots\phi(x_N+a)\exp\left(iS\left(\phi(x+a)\right)\right)}{\int D[\phi(x)]\exp\left(iS\left(\phi(x)\right)\right)} = \\
&= \frac{\int D[\phi(x)]\phi(x_1)\dots\phi(x_N)\exp\left(iS\left(\phi(x)\right)\right)}{\int D[\phi(x)]\exp\left(iS\left(\phi(x)\right)\right)} = G_{k_1,\dots k_N}(x_1,\cdots x_N)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

dove abbiamo usato l' invarianza per traslazioni dell' azione e l' ultimo passaggio segue dall' invarianza della misura di integrazione funzionale per la sostituzione: $\phi(x) \to \phi(x+a)$.

Le funzioni di Green, sono funzioni solo delle differenze delle x_k e quindi la loro trasformata di Fourier deve contenere una funzione delta della conservazione del quadri-momento:

$$\begin{aligned}
&\int\dots\int d^4x_1\dots d^4x_N\; e^{i[(p_1x_1)+\dots+(p_Nx_N)]}\; G_{k_1,\dots k_N}(x_1,\cdots x_N) = \\
&= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2+\dots p_N)\;\tilde{G}(p_1,\dots,p_N)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

dove $\tilde{G}$ è una funzione regolare dei quadri-momenti. Lasciamo al lettore di dimostrare la (3.27) a partire dalla (3.26) (vedi ad es. ref. [1], Cap. 12).

3.2 L'oscillatore armonico

In questa sezione applicheremo i concetti che abbiamo illustrati a un caso particolarmente semplice, quello di un oscillatore armonico di massa $m = 1$, con un hamiltoniano e lagrangiano rispettivament dati da

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2); \qquad L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) \tag{3.28}$$

Vogliamo usare la tecnica del funzionale Z per calcolare le funzioni di Green. Seguiremo i calcoli in qualche dettaglio, dato che essi si applicano direttamente a situazioni interessanti, ad esempio alla teoria dei campi. Prima di procedere con il funzionale Z, calcoliamo la funzione di Green a due punti partendo dalla normale formulazione della Meccanica Quantistica in modo da poter verificare la equivalenza delle due formulazioni.

Ricordiamo che, in termini degli operatori di creazione e distruzione (vedi ad esempio [5]), abbiamo:

$$\begin{aligned}
&q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger);\\
&a^\dagger|0\rangle = |1\rangle, \qquad a^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle, \quad a|1\rangle = |0\rangle;\\
&H|0\rangle = \frac{\omega}{2}|0\rangle, \quad H|1\rangle = \frac{3\omega}{2}|1\rangle
\end{aligned} \tag{3.29}$$

e quindi,

$$q|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}|1\rangle; \; q|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(|0\rangle + \sqrt{2}|2\rangle\right) \tag{3.30}$$

Considerando prima il caso in cui $t_1 > t_2$ abbiamo

$$\begin{aligned}
G(t_1, t_2) &= \langle 0|q(t_1)\, q(t_2)\,|0\rangle = \langle 0|e^{iHt_1}\, q\, e^{-iH(t_1-t_2)}\, q\, e^{-iHt_2}|0\rangle\\
&= \frac{1}{2\omega}e^{-i\omega(t_1-t_2)}; \qquad\qquad (t_1 > t_2)
\end{aligned}$$

e, mettendo assieme il risultato per $t_2 > t_1$,

$$G(t_1, t_2) = \frac{1}{2\omega}\left(e^{-i\omega(t_1-t_2)}\theta(t_1 - t_2) + e^{-i\omega(t_2-t_1)}\theta(t_2 - t_1)\right) \tag{3.31}$$

Per quanto riguarda il metodo della somma sui cammini, notiamo anzitutto che con una integrazione per parti

$$S = \frac{1}{2}\int dt\,\left(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2\right) = -\frac{1}{2}\int dt\,\left(q\ddot{q} - \omega^2 q^2\right) = -\frac{1}{2}\int dt\,\left(q\mathcal{O}q\right) \tag{3.32}$$

dove $\mathcal{O}$ è l'operatore differenziale

$$\mathcal{O} = \partial_t^2 + \omega^2 \tag{3.33}$$

Il funzionale generatore sarà quindi

$$Z[J] = \int D[q(t)]\exp\left[\frac{-i}{2}\int dt\,\left(q\mathcal{O}q + 2qJ\right)\right] \tag{3.34}$$

La strategia per eseguire l'integrale è quella standard per integrare funzioni del tipo $\exp(-ax^2+bx)$, usata ad esempio nella Appendice A, e consiste nel riscrivere l'esponente come quadrato perfetto, per ottenere un integrale gaussiano. Procediamo formalmente, riscrivendo la (3.34) come[2]

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int D[q(t)] \exp \frac{-i}{2} \int dt \left((q+\mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(q+\mathcal{O}^{-1}J) - (\mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J) \right) \\ &= \exp\left[\frac{i}{2} \int dt\, (\mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J) \right] \int D[q(t)] \exp\left[\frac{-i}{2} \int dt\, (q+\mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(q+\mathcal{O}^{-1}J) \right] \end{aligned} \tag{3.35}$$

L'integrale funzionale nell'ultima espressione è in realtà una costante indipendente da J, come si vede con un cambiamento di variabili[3] $q \to q' = q + \mathcal{O}^{-1}J$, e in conclusione

$$Z[J] = K \exp\left[\frac{i}{2} \int dt\, (\mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J) \right] \tag{3.36}$$

Una costante moltiplicativa non ha alcun effetto sul valore delle funzioni di Green (vedi ad esempio la eq. (3.18)). per cui possiamo semplicemente scrivere

$$Z[J] = \exp\left[\frac{i}{2} \int dt\, J\mathcal{O}^{-1}J \right] \tag{3.37}$$

L'inverso di $\mathcal{O}$ sarà un operatore integrale:

$$(\mathcal{O}^{-1}J)(t) = -\int dt' G(t-t')\, J(t') \tag{3.38}$$

La funzione G è detta "propagatore". Il segno è stato scelto in vista di quanto faremo poi sulla teoria dei campi e delle convenzioni esistenti, e deve essere:

$$\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J)(t) = J(t)$$

quindi la funzione $G(t)$ deve obbedire l'equazione differenziale

$$\mathcal{O}\, G(t) = -\delta(t) \tag{3.39}$$

Dobbiamo però ricordare che la $Z[J]$ è definita (eq. 3.13) come limite partendo da valori del tempo con una piccola[4] parte immaginaria negativa, $t' = (1-i\chi)t$. Per χ piccolo ma non nullo, l'operatore differenziale $\mathcal{O}$ diventa

$$\mathcal{O} = \partial^2_{t'} + \omega^2 = (1+2i\chi)\partial^2_t + \omega^2 \tag{3.40}$$

[2]Per verificare questo risultato, notare che, con due integrazioni per parti,

$$\int dt\, (\mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}\phi = \int dt \left(\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J) \right) \phi = \int dt\, J\phi$$

[3]Ricordiamo che l'integrale funzionale si estende su tutte le orbite periodiche, $q(+\infty) = q(-\infty)$, quindi vogliamo che anche q' sia periodico. Occorre quindi imporre qualche restrizione su $J(t)$, ad esempio che le funzioni $J(t)$ ammissibili tendano abbastanza rapidamente a zero per $t \to \pm\infty$. Una analoga restrizione si dovrà applicare nel caso della teoria dei campi.

[4]Nelle seguenti manipolazioni trascureremo termini $\propto \chi^2$.

e il propagatore $G(t)$ sarà il limite per $\chi \to 0$ di una funzione $G(t,\chi)$ che obbedisce l'equazione[5], vedi la eq. (2.17),

$$\left((1+2i\chi)\partial_t^2+\omega^2\right)G(t,\chi) = -\delta(t) \tag{3.41}$$

La soluzione generale di questa equazione è la somma di una soluzione particolare e della soluzione generale della equazione omogenea, che possiamo scrivere, sempre trascurando termini $\mathcal{O}(\chi^2)$,

$$\partial^2 G = -\left((1-i\chi)\omega\right)^2 G; \qquad \to \qquad G = a\,e^{-it\omega(1-i\chi)} + b\,e^{it\omega(1-i\chi)}$$

Per trovare una soluzione della (3.41) passiamo alle trasformate di Fourier,

$$G(t,\chi) = \frac{1}{2\pi}\int dE\, G(E,\chi)e^{-iEt} \qquad \delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int dE e^{-iEt} \tag{3.42}$$

Quindi

$$G(E,\chi) = \frac{-1}{\omega^2 - E^2(1+2i\chi)} = \frac{(1-2i\chi)}{E^2-\omega^2(1-2i\chi)} \tag{3.43}$$

e trascurando il fattore moltiplicativo $(1-2i\chi)$,

$$G(E,\chi) = \frac{1}{E^2-\omega^2+i\epsilon} \qquad \text{oppure} \qquad = \frac{1}{E^2-(\omega-i\eta)^2} \tag{3.44}$$

dove $\epsilon = 2\chi\omega^2,\ \eta = \chi\omega$

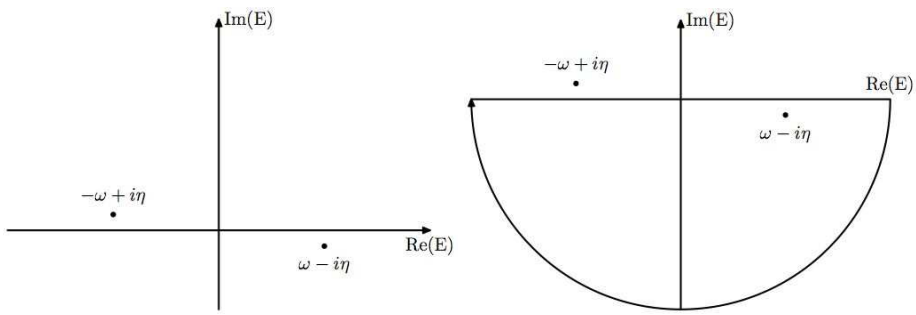


Figura 3.1: Posizione dei poli nella funzione $G(x,\chi)$ e cammino di integrazione per tempi positivi

Possiamo adesso calcolare $G(t,\chi)$,

$$G(t,\chi) = \frac{1}{2\pi}\int dE\,\frac{e^{-iEt}}{E^2-(\omega-i\eta)^2} \tag{3.45}$$

[5]Stiamo trascurando fattori moltiplicativi che tendono ad uno quando $\chi \to 0$. Ad esempio avremmo dovuto scrivere $\delta(t') = \delta(t)/(1-i\chi)$, ma questo fattore è irrilevante nel limite.

per $t > 0$ il cammino di integrazione può essere completato sul semipiano inferiore — figura 3.2 — e comprende il polo di destra, mentre per $t < 0$ il cammino di integrazione va chiuso nel semipiano superiore e comprende il polo di sinistra. Notiamo che la presenza di una parte immaginaria del tempo risulta in una selezione del polo che contribuisce all'integrazione. Applicando il teorema dei residui in ciascuno dei due casi, $t > 0$ e $t < 0$, otteniamo quindi una soluzione particolare della (3.41),

$$G(t,\chi) = \frac{-i}{2\omega}\left(e^{-it\omega(1-i\chi)}\theta(t) + e^{it\omega(1-i\chi)}\theta(-t)\right) \tag{3.46}$$

mentre la soluzione generale sarà

$$G(t,\chi) = \frac{-i}{2\omega}\left(e^{-it\omega(1-i\chi)}\theta(t) + e^{it\omega(1-i\chi)}\theta(-t)\right) + a\,e^{-it\omega(1-i\chi)} + b\,e^{it\omega(1-i\chi)} \tag{3.47}$$

Per determinare le costanti a, b ricordiamo che, per eseguire il calcolo che porta alla (3.37) abbiamo eseguito un cambiamento di variabili nella integrazione sui cammini,

$$q(t) \to q'(t) = q(t) - \delta q(t); \qquad \delta q(t) = \int dt' G(t-t')\,J(t') = q(t)$$

Dato che l'integrale è esteso su tutti i cammini periodici tra $t = \pm\infty$, anche i cammini trasformati devono essere periodici, qualunque sia la funzione $J(t)$. Quindi $\delta q(t)$ deve essere periodica. La soluzione particolare soddisfa questa condizione, dato che tende a zero sia per $x \to \infty$ che per $x \to -\infty$ (ricordiamo che questo limite va preso prima di mandare $\chi \to 0$) grazie alla presenza delle funzioni $\theta(\pm t)$. Quindi dobbiamo considerare l'effetto dei termini aggiuntivi. Se prendiamo $J(t) = \delta(t - t_1)$, con t_1 un tempo arbitrario dai termini aggiuntivi a, b della (3.47) otteniamo

$$\delta q(t) = a\,e^{-i(t-t1)\omega(1-i\chi)} + b\,e^{i(t-t1)\omega(1-i\chi)}$$

Il primo termine diverge per $t \to -\infty$, il secondo per $t \to -\infty$, quindi la sola soluzione accettabile per la (3.41) è quella in cui $a = b = 0$, cioè la soluzione (3.46) che passando al limite $\chi \to 0$ diviene

$$G(t) = \frac{-i}{2\omega}\left(e^{-i\omega t}\theta(t) + e^{i\omega t}\theta(-t)\right) \tag{3.48}$$

Il funzionale generatore — eq. (3.37), (3.38) — può essere scritto

$$Z[J] = \exp\left[\frac{-i}{2}\iint dt\,dt'\,J(t)\,G(t-t')\,J(t')\right] \tag{3.49}$$

Quindi — vedi eq. (3.18), ma qui abbiamo solo un grado di libertà —

$$G(t,\,t') = \langle 0|T\left(q(t)\,q(t')\right)|0\rangle = -\frac{1}{Z(0)}\left[\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(t)\delta J(t')}\right]_{J=0} = i\,G(t-t') \tag{3.50}$$

e sostituendo la (3.48) si ottiene il risultato della (3.31).

Abbiamo apparentemente fatto molto più lavoro che nella formulazione usuale — ma in quel caso avevamo dato per conosciute le proprietà degli operatori di creazione e distruzione, quindi il paragone non è interamente calzante — ma abbiamo ottenuto di più, dato che nel funzionale generatore della eq. (3.49) sono racchiuse tutte le possibili funzioni di Green dell'oscillatore armonico. Ad

esempio potremmo calcolare in due righe — lo lasciamo come esercizio — il valore della funzione di Green a quattro punti, $\langle 0|T\left(q(t_1)\,q(t_2)\,q(t_3)\,q(t_4)\right)|0\rangle$.

E' interessante a questo punto fingere di non sapere nulla sulla struttura degli stati eccitati dell'oscillatore armonico e vedere cosa possiamo direttamente imparare dalla conoscenza delle funzioni di Green, cioè dalla (3.31), che riscriviamo per comodità, nel caso $t_1 > t_2$

$$\langle 0|q(t_1)\,q(t_2)\,|0\rangle = \frac{1}{2\omega}e^{-i\omega(t_1-t_2)}; \qquad (t_1 > t_2) \tag{3.51}$$

D'altra parte, introducendo un insieme completo di stati,

$$\langle 0|q(t_1)\,q(t_2)\,|0\rangle = \sum_X \langle 0|q(t_1)|X\rangle\langle X|q(t_2)\,|0\rangle; \qquad (t_1 > t_2) \tag{3.52}$$

e paragonando con il risultato precedente concludiamo che deve esistere uno stato $|1\rangle$ tale che

$$\langle 0|q(t_1)|X\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}e^{-i\omega\,t_1} \tag{3.53}$$

e quindi $E_1 = E_0+\omega$. Dalla funzione di Green a quattro punti possiamo imparare qualcosa del secondo stato eccitato, e così via. Il funzionale $Z[J]$ contiene informazioni sull'intero spettro degli stati.

3.3 Campi scalari liberi — Propagatore e funzionale generatore

Il lavoro svolto nella precedente sezione permetta di saltare direttamente alla teoria dei campi, senza comportare novità concettuali. Consideriamo quì il caso più semplice, quello di un campo scalare reale $\phi(\vec{x},t)$ che scriveremo anche $\phi(x)$ dove x denota il quadrivettore $\{\vec{x},t\}$. Ricordiamo naturalmente che nelle nostre unità di misura la velocità della luce è $c = 1$. La densità di lagrangiano è, per un campo senza interazioni,

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\phi(x)\,\partial^\mu\phi(x) - m^2\phi^2\right] \tag{3.54}$$

In analogia con quanto fatto per l'oscillatore armonico vogliamo calcolare il valore di aspettazione nel vuoto del prodotto ordinato nel tempo di due operatori di campo, $\langle 0|\,T\left(\phi(x)\,\phi(y)\right)|0\rangle$. Seguendo i passi eseguiti nel caso dell'oscillatore armonico, calcoliamo il funzionale generatore (eq. 3.19). Con una integrazione per parti[6] possiamo scrivere la azione come

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x\,\frac{1}{2}\left[\partial_\mu\phi(x)\,\partial^\mu\phi(x) - m^2\phi^2\right] \\ &= -\int d^4x\,\frac{1}{2}\left[\phi(x)\,\partial_\mu\partial^\mu\phi(x) + m^2\phi^2\right] = -\int d^4x\,\frac{1}{2}\left(\phi K\phi\right) \end{aligned} \tag{3.55}$$

[6]Nel fare integrazioni per parti assumiamo una periodicità di $\phi(x)$ sia nel tempo che nello spazio, come descritto in dettaglio nella sezione **??**.

dove K è l'operatore differenziale di Klein Gordon,

$$K = \partial_\mu \partial^\mu + m^2 = \Box + m^2 \tag{3.56}$$

Possiamo allora calcolare il funzionale generatore (3.19) — notiamo l'analogia passo a passo con il metodo usato nella sezione precedente

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \int D[\phi(x)] \, \exp\left(iS\left(\phi(x)\right) - \int d^4x \phi(x) J(x) \right) \\
&= \int D[\phi(x)] \, \exp\left(-\frac{i}{2} \int d^4x \, \left[\phi K \phi + 2\phi(x) J(x) \right] \right) \\
&= \int D[\phi(x)] \, \exp\left(-\frac{i}{2} \int d^4x \, \left[(\phi + K^{-1}J) K (\phi + K^{-1}J) - (J K^{-1} J) \right] \right) \\
&= \exp\left(\frac{i}{2} \int d^4x (J K^{-1} J) \right) \int D[\phi(x)] \, \exp\left(-\frac{i}{2} \int d^4x \, \left[(\phi + K^{-1}J) K (\phi + K^{-1}J) \right] \right)
\end{aligned}$$

Il residuo integrale funzionale può essere eseguito con un cambiamento di variabili, $\phi \to \phi' = \phi + K^{-1}J$ ed è una costante che può essere omessa, e possiamo semplicemente scrivere

$$Z[J] = \exp\left(\frac{i}{2} \int d^4x (J K^{-1} J) \right)$$

L'inverso dell'operatore differenziale K sarà un operatore integrale, che (per riprodurre l'usuale convenzione di segno sulla funzione Δ_F) possiamo scrivere

$$K^{-1} J(x) = -\int dy \, \Delta_F(x-y) J(y) \tag{3.57}$$

Δ_F deve obbedire l'equazione

$$(\Box + m^2)\Delta_F(x) = -\delta^4(x) \tag{3.58}$$

Anche questa volta, come nel caso dell'oscillatore armonico, dobbiamo stare attenti al limite da tempi immaginari per cui riscriviamo l'operatore K come (vedi eq. 3.40)

$$K = (1 + 2i\chi)\partial_t^2 - (\vec{\nabla})^2 + m^2 \tag{3.59}$$

che passando alle trasformate di Fourier,

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \, \Delta_F(p) e^{-ipx} \qquad \delta^4(t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \, e^{-ipx} \tag{3.60}$$

con p il quadrivettore $\{E, \vec{p}\}$, porta a (vedi discussione nella sessione precedente)

$$\Delta_F(p) = \frac{1}{E^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{3.61}$$

Il termine $i\epsilon$ specifica il cammino di integrazione come discusso precedentemente.

Naturalmente, lo stesso risultato per la funzione di Green a due punti, inclusa la prescrizione dell' $i\epsilon$, si ottiene a partire dalla quantizzazione canonica del campo scalare, cfr. [1].

In conclusione il funzionale generatore pr un campo scalare reale è

$$Z[J] = \exp\left(\frac{-i}{2}\iint d^4x\, d^4y\, J(x)\,\Delta_F(x-y)\,J(y)\right) \tag{3.62}$$

da cui possiamo ricavare le differenti funzioni di Green. In particolare quella a due punti è semplicemente

$$\langle 0|\, T\left(\phi(x)\,\phi(y)\right)|0\rangle = i\Delta_F(x-y) \tag{3.63}$$

La funzione $\Delta_F(x)$ è detta il propagatore del campo ϕ.

Quanto abbiamo fatto in questa sezione si estende semplicemente al caso di un campo complesso privo di interazioni con massa m, equivalente (vedi eq. 3.9) a due campi reali, il cui lagrangiano si può scrivere

$$\mathscr{L} = \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2}\left[\partial_\mu\phi_k(x)\,\partial^\mu\phi_k(x) - m^2\phi_k^2\right] = \partial_\mu\phi^\dagger(x)\,\partial^\mu\phi(x) - m^2\phi^\dagger\phi \tag{3.64}$$

Anche in questo caso $Z[J]$ (vedi eq. 3.23) si calcola esplicitamente ripetendo i passi sviluppati in precedenza, per arrivare a

$$Z[J,J^\dagger] = \exp\left(-i\iint d^4x\, d^4y\, J^\dagger(x)\,\Delta_F(x-y)\,J(y)\right) \tag{3.65}$$

La funzione a due punti si calcola con le regole di sostituzione (3.25), e si ottiene

$$\langle 0|\, T\left(\phi(x)\,\phi^\dagger(y)\right)|0\rangle = i\Delta_F(x-y) \tag{3.66}$$

$$\langle 0|\, T\left(\phi(x)\,\phi(y)\right)|0\rangle = \langle 0|\, T\left(\phi^\dagger(x)\,\phi^\dagger(y)\right)|0\rangle = 0 \tag{3.67}$$

Lasciamo la derivazione di questi ultimi risultati come esercizio.

3.4 Campi scalari liberi — Stati a una particella

Possiamo usare le eq. (3.66), (3.67) per studiare lo spettro degli stati nella teoria scalare, come avevamo fatto precedentemente per l'oscillatore armonico. Troveremo che un campo scalare complesso descrive due particelle della stessa massa, che potremo chiamare la *particella P* e la *antiparticella A*. Ciascuna delle due può esistere in stati caratterizzati da una quantità di moto $\vec{p}$ e energia $\omega_p = \sqrt{(\vec{p}^2 + m^2)}$.

Riscriviamo la (3.66) usando le (3.60), (3.61)

$$\langle 0|\, T\left(\phi(x)\,\phi^\dagger(y)\right)|0\rangle = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3p\, e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\left[\frac{1}{(2\pi)}\int dE\,\frac{e^{-iE(t_x-t_y)}}{E^2-\omega_p^2+i\epsilon}\right]$$

L'integrale in parentesi quadre è quello della eq. (3.45), che già conosciamo dalla (3.48), quindi:

$$\begin{aligned}\langle 0|\, T\left(\phi(x)\,\phi^\dagger(y)\right)|0\rangle &= i\Delta_F(x-y)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\frac{e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{2\omega_p}\left(e^{-i\omega_p(t_x-t_y)}\theta(t_x-t_y)+e^{-i\omega_p(t_y-t_x)}\theta(t_y-t_x)\right)\end{aligned} \tag{3.68}$$

Se consideriamo la trasformata di Fourier sulla variabile y, definendo

$$\phi(\vec{q},t_y)=\int d^3y e^{-i\vec{q}y}\phi(\vec{y},t_y); \qquad \phi^\dagger(\vec{q},t_y)=\int d^3y e^{i\vec{q}y}\phi^\dagger(\vec{y},t_y) \tag{3.69}$$

otteniamo

$$\langle 0|\, T\left(\phi(\vec{x},t_x)\,\phi^\dagger(\vec{q},t_y)\right)|0\rangle = \frac{e^{i\vec{q}\vec{x}}}{2\omega_q}\left(e^{-i\omega_q(t_x-t_y)}\theta(t_x-t_y)+e^{-i\omega_q(t_y-t_x)}\theta(t_y-t_x)\right)$$

Consideriamo separatamente i casi $t_x > t_y$ e $t_y > t_x$,

$$\langle 0|\,\phi(\vec{x},t_x)\,\phi^\dagger(\vec{q},t_y)\,|0\rangle = \frac{e^{i\vec{q}\vec{x}}}{2\omega_q}e^{-i\omega_q(t_x-t_y)} \qquad (t_x>t_y) \tag{3.70}$$

$$\langle 0|\,\phi^\dagger(\vec{q},t_y)\,\phi(\vec{x},t_x)\,|0\rangle = \frac{e^{i\vec{q}\vec{x}}}{2\omega_q}e^{-i\omega_q(t_y-t_x)} \qquad (t_y>t_x) \tag{3.71}$$

Se definiamo due famiglie di stati $|P,\vec{q}\rangle$ e $|A,\vec{q}\rangle$,

$$|P,\vec{q}\rangle = \frac{\sqrt{2\omega_q}}{(2\pi)^{3/2}}\phi^\dagger(\vec{q},0)|0\rangle \qquad , \tag{3.72}$$

$$|A,\vec{q}\rangle = \frac{\sqrt{2\omega_q}}{(2\pi)^{3/2}}\phi(-\vec{q},0)|0\rangle \tag{3.73}$$

Dalla (3.70) otteniamo

$$\langle 0|\,\phi(\vec{x},t_x)\,|P;\vec{q}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_q}}e^{i(\vec{q}\vec{x}-\omega_q t_x)} \tag{3.74}$$

e dal complesso coniugato della (3.71),

$$\langle 0|\,\phi^\dagger(\vec{x},t_x)\,|A;\vec{q}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_q}}e^{i(\vec{q}\vec{x}-\omega_q t_x)} \tag{3.75}$$

Questo ci dice già[7] che gli stati $|P,\vec{q}\rangle$ e $|A,\vec{q}\rangle$ hanno energia $\omega_q=\sqrt{m^2+\vec{q}^2}$ ed impulso $\vec{q}$, e sono quindi interpretabili come stati[8] di una particella di massa m.

[7] Possiamo scrivere $\phi(\vec{x},t)=e^{i(Ht-\vec{P}\vec{x})}\phi(0,0)e^{-i(Ht-\vec{P}\vec{x})}$ dove H è l'hamiltoniano e $\vec{P}$ l'operatore impulso.

[8] la normalizzazione dei ket che compaiono nelle (3.72, 3.73) corrisponde al limite di volume infinito e sará discussa in dettaglio nella prossima Sezione

Con una seconda trasformata di Fourier su $\vec{x}$ ricaviamo anche i prodotti scalari di due stati P, o due stati A:

$$\langle P; \vec{p}|P; \vec{q}\rangle = \langle A; \vec{p}|A; \vec{q}\rangle = \delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \tag{3.76}$$

Se adesso ripetiamo l'esercizio a partire dalla funzione di Green con due ϕ, (3.67), possiamo dimostrare che gli stati $|P\rangle$ e $|A\rangle$ sono ortogonali tra loro,

$$\langle P; \vec{p}|A; \vec{q}\rangle = 0 \tag{3.77}$$

Si tratta quindi di stati di due particelle differenti, ambedue di massa m.

Che i due tipi di particella siano in rapporto particella–antiparticella non si vede in una teoria così semplice, che descrive particelle prive di interazione. Introducendo però l'interazione con un campo elettromagnetico potremmo facilmente dimostrare che le due particelle hanno carica elettrica opposta. Quale chiamare particella e quale antiparticella rimane una scelta arbitraria.

Nel caso di un campo scalare reale la trattazione è più semplice, e abbiamo un solo tipo di particella.

3.5 Operatori di creazione e di distruzione, normalizzazione del continuo

È utile collegare gli argomenti precedenti alla formulazione del campo scalare libero in termini di operatori di creazione e distruzione (cfr. [1]). Ci poniamo all' inizio in un volume finito, per poi introdurre una normalizzazione degli stati e degli operatori di creazione appropriata nel limite di volume infinito.

Consideriamo i campi in un cubo di volume V con condizioni periodiche. Definiamo un sistema di soluzioni dell' equazione di Klein-Gordon (K-G) a frequenza positiva:

$$\begin{aligned} f_q(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{q})V}} e^{-iqx}; \quad (\Box + m^2) f_q = 0; \\ \mathbf{q} &= \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3); \quad \omega(\mathbf{q}) = +\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2} \end{aligned} \tag{3.78}$$

dove $n_{1,2,3}$ sono interi e L è il lato del cubo, $V = L^3$. Le funzioni (3.78) sono normalizzate in V come:

$$\int_V d^3x\, f_q^*(x)\, i \overleftrightarrow{\partial}_t f_{q'}(x) = \delta_{q,q'} \tag{3.79}$$

dove abbiamo introdotto l' abbreviazione:

$$f \overleftrightarrow{\partial}_t g = f(\partial_t\, g) - (\partial_t\, f) g \tag{3.80}$$

Possiamo costruire gli operatori di creazione e distruzione a partire da ϕ e dalle f_q come:

$$\begin{aligned} a_q &= \int d^3x \left[f_q(x)^* i \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x)) \right]; \quad \text{(distruzione)} \\ a_q^\dagger &= (a_q)^\dagger \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(creazione)} \\ \left[a_q, a_{q'}^\dagger \right] &= i\delta_{q,q'} \end{aligned} \tag{3.81}$$

Dopo l' integrazione spaziale, gli operatori a_q potrebbero dipendere dal tempo ma è immediato mostrare che di fatto sono costanti, in virtù dell' equazione di K-G:

$$\begin{aligned}\partial_t a_q &= i\int d^3x\ \left[f_q(x)^*(\partial_t^2\phi(x)) - (\partial_t^2 f_q(x)^*)\phi(x)\right] = \\ &= i\int d^3x\ \left[f_q(x)^*(\Box\phi(x)) - (\Box f_q(x)^*)\phi(x)\right] = \\ &= i\int d^3x\ \left[f_q(x)^*(\Box + m^2)\phi(x)\right] = 0\end{aligned} \tag{3.82}$$

poiché sia f_q che ϕ soddisfano l' equazione di K-G.

Per passare al limite continuo, introduciamo l' operatore di proiezione sugli stati con momento compreso in un intervallo tridimensionale, $\Delta^3 n$:

$$P = \sum_{\Delta^3 n} |p\rangle\langle p| \tag{3.83}$$

$P^2 = P$ in virtú della ortonormalitá degli stati $|p\rangle$. Se adesso passiamo al limite di volume infinito, otteniamo:

$$P = \int_{\Delta^3 p} |p\rangle \frac{V\, d^3p}{(2\pi)^3}\langle p| \tag{3.84}$$

La (3.84) suggerisce di definire dei ket normalizzati al continuo:

$$|\tilde{p}\rangle = \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}}|p\rangle \tag{3.85}$$

per i quali:

$$P = \int_{\Delta^3 p} |\tilde{p}\rangle\ d^3p\ \langle\tilde{p}| \tag{3.86}$$

La condizione $P^2 = P$ richiede, come condizione di normalizzazione dei nuovi ket:

$$\langle\tilde{p}'|\tilde{p}\rangle = \delta^{(3)}(p' - p) \tag{3.87}$$

Gli operatori di distruzione e creazione che corrispondono ai nuovi stati sono, evidentemente:

$$\tilde{a}_p = \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}}a_p; \quad \tilde{a}_p^\dagger = (\tilde{a}_p)^\dagger \tag{3.88}$$

e le nuove regole di commutazione si ottengono dalla (3.87):

$$\delta^{(3)}(p' - p) = \langle 0|\tilde{a}_{p'}\tilde{a}_p^\dagger|0\rangle = \langle 0|\left[\tilde{a}_{p'}, \tilde{a}_p^\dagger\right]|0\rangle; \tag{3.89}$$

ovvero:

$$\left[\tilde{a}_{p'}, \tilde{a}_p^\dagger\right] = \delta^{(3)}(p' - p) \tag{3.90}$$

Lo sviluppo del campo si scrive adesso come:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p})V}} \left[a_p\, e^{-ipx} + a_p^\dagger\, e^{ipx} \right] = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p})}} \left[\tilde{a}_p\, e^{-ipx} + \tilde{a}_p^\dagger\, e^{ipx} \right]\end{aligned} \tag{3.91}$$

I nuovi stati sono normalizzati ad avere, piuttosto che una particella nel volume di riferimento, una densitá di particelle costante. Questo si vede calcolando l' energia del campo, che risulta pari a (introduciamo qui il prodotto normale degli operatori, come definito in [1]):

$$\begin{aligned}H &= \int d^3x\, \frac{1}{2} \left[:(\partial_t\phi)^2: + :(\nabla\phi)^2: + m^2 :\phi^2: \right] = \\ &= \int d^3p\, \omega(\mathbf{p})\, \tilde{a}_p^\dagger \tilde{a}_p; \\ E_p &= \langle \tilde{p}|H|\tilde{p}\rangle = \delta^{(3)}(0)\omega(\mathbf{p}) = \frac{V}{(2\pi)^3}\omega(\mathbf{p})\end{aligned} \tag{3.92}$$

Si vede quindi che la densitá di particelle nello stato $|\tilde{p}\rangle$ è: $\rho = 1/(2\pi)^3$.

Infine, notiamo che la relazione che lega i campi agli operatori di distruzione, si scrive:

$$\begin{aligned}\tilde{a}_q &= \int d^3x\, \left[\tilde{f}_q(x)^*\, i \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x)) \right]; \\ \tilde{f}_q(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega(\mathbf{p})}} e^{-ipx}\end{aligned} \tag{3.93}$$

Nel seguito, adotteremo la normalizzazione del continuo, omettendo per brevitá la tilde sugli operatori e sulle funzioni f_q.

Capitolo 4

Il campo elettromagnetico

In questo capitolo ci occuperemo della quantizzazione del campo elettromagnetico libero. Anche in questo caso adotteremo le convenzioni del Mandl e Shaw, [2]. In particolare il tensore di campo $F^{\mu\nu}$ può essere espresso in termini dei potenziali A^μ tramite la

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \tag{4.1}$$

Le equazioni di Maxwell per il campo libero

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0 \tag{4.2}$$

possono essere derivate da una densità di Lagrangiano

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{4.3}$$

Una trasformazione dei potenziali:

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x), \tag{4.4}$$

dove $\Lambda(x)$ è una funzione arbitraria, lascia invarianti sia il tensore di campo $F^{\mu\nu}$ che la densità di lagrangiano $\mathscr{L}$, e quindi l'integrale d'azione. Più in generale una trasformazione di gauge non deve avere alcun effetto su qualsiasi processo fisico, e in particolare sui risultati di qualunque misura. Un corollario di questa affermazione è che i potenziali elettromagnetici A^μ non sono essi stessi misurabili.

L'invarianza di gauge è centrale nella teoria del campo elettromagnetico e delle sue interazioni. La richiesta che anche in presenza di interazioni la teoria sia invariante rispetto alla trasformazione di gauge determina il tipo di interazione possibile con altri campi. La teoria del campo elettromagnetico è il prototipo delle moderne teorie delle interazioni fondamentali, tutte basate sulla esistenza di particolari invarianze di gauge.

4.1 La scelta di gauge

Per descrivere la teoria quantistica del campo elettromagnetico mediante la somma sui cammini dobbiamo superare un problema legato alla invarianza di gauge.

Dove è il problema? I lettori ricorderanno che per definire una teoria quantistica abbiamo dovuto garantire la convergenza degli integrali funzionali che definiscono la somma sui cammini. Per ottenere questo risultato abbiamo considerato una continuazione analitica nel piano complesso della variabile tempo, tramite la ricetta $t \to t(1 - i\chi)$. Nel caso del campo elettromagnetico la invarianza di gauge introduce un nuovo tipo di divergenza che è immune a questo rimedio. Consideriamo infatti l' integrale funzionale:

$$I = \int \mathscr{D}[A^\mu] e^{iS[A^\mu]} \mathscr{O}[A^\mu] \tag{4.5}$$

$\mathscr{O}[A^\mu]$ è un funzionale delle A^μ invariante di gauge, che quindi può rappresentare una qualche grandezza fisica. Come al solito, l'integrale funzionale è esteso sugli A^μ periodici tra $t = \pm\infty$.

Secondo i principi generali dell' integrale sui cammini, la quantitá I nella (4.5) deve rappresentare l' elemento di matrice di $\mathscr{O}$ sul vuoto, a meno di una costante moltiplicativa indipendente da $\mathscr{O}$. Tuttavia è immediato convincersi che l' integrale I definito dalla $\mathscr{O}[A^\mu]$ è in realtá, infinito. Dato che $S[A^\mu]$ è invariante di gauge, per ogni cammino $A^\mu(t, \mathbf{x})$ ne esistono infiniti altri, ottenuti con una trasformazione di gauge, per i quali l'integrando ha lo stesso valore. Dato che lo spazio delle possibili trasformazioni di gauge, lo spazio delle funzioni Λ(x), è infinito, l'integrale è necessariamente divergente.

Per dominare questa divergenza occorre trovare il modo di metterla a fattore di ogni integrale del tipo (4.5). L'insieme dei cammini $A^\mu(x)$ connessi da trasformazioni di gauge è detto una *traiettoria di gauge*. Quello che vorremmo fare è stabilire un sistema di cordinate nello spazio dei cammini tali che un sottoinsieme di tali coordinate (le linee orizzontali nella figura 4.1) corrispondano alle traiettorie di gauge e le rimanenti coordinate (la linea verticale) servano a distinguere cammini non equivalenti sotto trasformazioni di gauge, quindi fisicamente distinti.

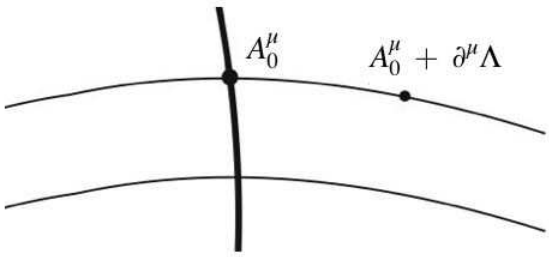


Figura 4.1: Lo spazio delle funzioni $A^\mu(x)$ può essere affettato secondo traiettorie (linee orizzontali) composte da cammini connessi da trasformazioni di gauge. Lungo le coordinate ortogonali alle traiettorie di gauge (linea verticale) troviamo cammini fisicamente distinti.

Se questo fosse possibile, potremmo riesprimere l'integrale (4.5) come

$$\int \mathscr{D}[\Lambda] \int \mathscr{D}[A_0^\mu] e^{iS[A^\mu]} O[A^\mu],$$

ma dato che l'integrando è per ipotesi invariante di gauge, questo potrebbe essere riscritto come

$$\left[\int \mathscr{D}[\Lambda]\right] \int \mathscr{D}[A_0^\mu] e^{iS[A_0^\mu]} O[A_0^\mu]$$

e l'integrale sulle trasformazioni di gauge, sia pure divergente, diverrebbe un fattore moltiplicativo comune in tutti gli integrali del tipo (4.5) e potrebbe essere omesso nel calcolo delle funzioni di Green che sono (vedi (2.26)) *rapporti* di integrali di questo tipo. Naturalmente le cose non sono così semplici dato che, trattandosi di un cambiamento di variabili, dobbiamo anche includere lo jacobiano della trasformazione da A^μ a $\{A_0^\mu, \Lambda\}$.

Il calcolo del determinante jacobiano è illustrato in Appendice. Il risultato è che il determinante jacobiano, per un teoria di gauge abeliana, contribuisce un fattore indipendente dai campi, quindi un contributo *irrilevante per teorie basate su trasformazioni di gauge abeliane*, come e' il caso della QED. Possiamo quindi procedere in modo *ingenuo*, ignorando semplicemente il problema e imponendo una condizione di gauge, che restringe l' integrazione alla linea verticale della figura 4.1.

Per imporre la *condizione di gauge'* ricorriamo al metodo dei moltiplicatori di Lagrange, aggiungendo alla lagrangiana di maxwell un termine (*gauge fixing*, in inglese) che si annulla per le configurazioni che soddisfano la condizione stessa. Dato che siamo interessati a mantenere in evidenza l'invarianza relativistica, consideriamo la *gauge di Lorentz'*, caratterizzata dalla condizione

$$\partial_\nu A^\nu = 0 \tag{4.6}$$

Scriviamo dunque la lagrangiana come:

$$S_0 = -\frac{1}{4}\int d^4x \left[(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) - \frac{1}{2\alpha}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2\right] \tag{4.7}$$

Integrando per parti all' interno dell' integrale, riscriviamo l'Azione nella forma simile a qualle del Capitolo precedente:

$$S_0 = \int d^4x \, \frac{1}{2} A_\mu \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu \tag{4.8}$$

con:

$$\mathcal{O}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\Box + \frac{1-\alpha}{\alpha}\partial^\mu\partial^\nu \tag{4.9}$$

Per $\alpha = 1$, ci riduciamo all'Azione di Fermi:

$$S_F = \int d^4x \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \tag{4.10}$$

con l'equazione del moto della forma:

$$\Box A^\mu = 0 \tag{4.11}$$

4.2 Il funzionale generatore e il propagatore

Le funzioni di Green del campo elettromagnetico,

$$\langle 0| T\left(A_{\mu_1}(x_1)\cdots A^{\mu_n}(x_n)\right)|0\rangle$$

possono essere dedotte da un funzionale generatore dipendente da una funzione ausiliaria $J_\mu(x)$,

$$Z[J_\mu] = \int \mathscr{D}[A^\mu] \exp\left[\frac{-i}{2}\int d^4x\,(A_\mu\,\mathscr{O}^{\mu\nu}\,A_\nu + 2J_\mu A^\mu)\right] \tag{4.12}$$

tramite la regola di corrispondenza

$$A^\mu(x) \quad \rightarrow \quad i\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \tag{4.13}$$

Per calcolare $Z[J]$, dobbiamo completare un quadrato perfetto all'esponente definendo

$$\left[\mathscr{O}^{-1}\right]^{\mu\nu} J_\nu(x) = -\int d^4y\,\Delta_F^{\mu\nu}(x-y;0)\,J_\nu(y)$$

di modo che

$$\begin{aligned} Z[J_\mu] = \exp&\left[\frac{-i}{2}\int d^4x\,(J_\mu\left[\mathscr{O}^{-1}\right]^{\mu\nu} J_\nu)\right] \\ &\int \mathscr{D}[A^\mu]\exp\left[\frac{i}{2}\int d^4x\left(A_\mu - \left[\mathscr{O}^{-1}\right]_{\mu\sigma} J^\sigma\right)\mathscr{O}^{\mu\nu}\left(A_\nu - \left[\mathscr{O}^{-1}\right]_{\nu\rho} J^\rho\right)\right] \end{aligned}$$

Anche in questo caso l'integrale funzionale residuo è un fattore costante che può essere omesso, e otteniamo

$$Z[J_\mu] = \exp\left[\frac{i}{2}\int d^4x\,d^4y\,J_\mu(x)\Delta_F^{\mu\nu}(x-y;0)\,J_\nu(y)\right] \tag{4.14}$$

e la funzione a due punti, nella gauge di Feynman, diviene

$$\langle 0|T\left(A^\mu(x)\,A^\nu(y)\right)|0\rangle = i\Delta_F^{\mu\nu}(x-y;0) \tag{4.15}$$

Calcoliamo adesso esplicitamente il propagatore del fotone nella gauge generale in cui la Lagrangiana prende la forma dell' Eq. (4.9). Dobbiamo calcolare l' inverso di:

$$g^{\mu\nu}\Box + (\frac{1}{\alpha} - 1)\partial^\mu\partial^\nu$$

ovvero, per la trasformata di Fourier, l' inverso di:

$$K^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}p^2 + (\frac{1}{\alpha} - 1)p^\mu p^\nu \tag{4.16}$$

Se scriviamo l' operatore desiderato come:

$$D^{\mu\nu} = A(p^2)g^{\mu\nu} + B(p^2)p^\mu p^\nu$$

e imponiamo:

$$D^{\mu\nu}K_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho \tag{4.17}$$

otteniamo:

$$A = \frac{1}{p^2}; \quad B = (\alpha - 1)\frac{p^\mu p^\nu}{(p^2)^2}$$
$$D^{\mu\nu} = \frac{1}{p^2}\left[g^{\mu\nu} + (\alpha - 1)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right] \tag{4.18}$$

In conclusione, diamo il propagatore del fotone nella gauge generica:

$$i[\Delta_F^{(\alpha)}]_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 + i\epsilon}(-g^{\mu\nu} + (1-\alpha)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}) \tag{4.19}$$

Per $\alpha = 1$ si ottiene il propagatore nella gauge di Feynman. Per $\alpha = 0$ si ottiene invece la cosiddetta *gauge di Landau*, in cui il propagatore soddisfa la condizione di Lorentz.

4.3 Gli stati a un fotone

Se consideriamo il campo elettromagnetico libero (in assenza di cariche e correnti) nella gauge di Coulomb[1] la condizione $\nabla\mathbf{A} = 0$ implica che $\Delta\phi = 0$ e quindi possiamo porre $\phi = 0$. Per un fotone di impulso $\mathbf{k}$ dalla condizione $\nabla\mathbf{A} = 0$ segue che il vettore di polarizzazione ϵ deve essere ortogonale a $\mathbf{k}$. Un fotone di impulso $\mathbf{k}$ può quindi avere due stati di polarizzazione che corrispondono a due vettori ϵ_r tali che $\epsilon_r \mathbf{k} = 0$ e $\epsilon_r \epsilon_s = \delta_{rs}$ $(r = 1, 2)$.

Queste conclusioni, che sono di chiaro significato fisico, devono essere indipendenti da qualsiasi scelta di gauge, e dal metodo di quantizzazione, e devono quindi essere valide anche se procediamo con una quantizzazione nella gauge di Feynman, come abbiamo fatto nelle sezioni precedenti. Su questo punto sorge un problema piuttosto sottile. La azione di Fermi (4.10) tratta in modo simmetrico le quattro componenti del campo A^μ, e sebbene il lagrangiano di Fermi sia equivalente a quello gauge-invariante della (4.3) purché $\partial_\mu A^\mu = 0$, questa condizione non segue direttamente dal lagrangiano di Fermi, o dalle equazioni del moto (4.11). In effetti nella gauge di Feynman sono apparentemente presenti quattro stati di polarizzazione, e una sorpresa! Vediamo quale.

La funzione a due punti nel caso $t_x > t_y$ può essere calcolata direttamente dalla espressione di Δ_F (vedi 3.68),

$$\langle 0|A^\mu(x)\, A^\nu(y)\,|0\rangle \;=\; \frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^3}\int d^3p \frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{2\omega_p} e^{-i\omega_p(t_x - t_y)}$$

Se adesso definiamo le trasformate di Fourier spaziali (tenendo presente che $A^\nu(x)$ è reale)

$$A^\mu(\mathbf{k}, t_x) = \frac{\sqrt{2\omega_k}}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3x e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} A^\mu(\mathbf{x}, t_x)$$
$$A^{\nu\dagger}(\mathbf{q}, \mathbf{t_y}) = \frac{\sqrt{2\omega_q}}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3y e^{i\mathbf{q}\mathbf{y}} A^\nu(\mathbf{y}, t_y) = A^\nu(-\mathbf{q}, t_y)$$

otteniamo da una trasformata di Fourier in $\mathbf{y}$

$$\langle 0|A^\mu(x)\, A^{\nu\dagger}(\mathbf{q}, t_y)\,|0\rangle \;=\; \frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} e^{-i\omega_q(t_x - t_y)}, \tag{4.20}$$

[1]Per una discussione della gauge di Coulomb rimandiamo al Mandl e Shaw [2], in particolare il primo capitolo.

da cui, ponendo $\mu = \nu$, impariamo che lo stato

$$|\mu;\mathbf{q}\rangle = \mathbf{A}^{\mu\dagger}(\mathbf{q},\mathbf{0})|\mathbf{0}\rangle$$

ha impulso $\mathbf{q}$ e energia $\omega_q = \sqrt{\mathbf{q}^2}$. Questo stato descrive quindi una particella di massa nulla. Una seconda trasformata in $\mathbf{x}$, e nel limite $t_x = t_y = 0$ porta a

$$\langle\mu;\mathbf{k}|\nu;\mathbf{q}\rangle = \langle 0|A^\mu(\mathbf{k},0)\,A^{\nu\dagger}(\mathbf{q},0)\,|0\rangle = -g^{\mu\nu}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \tag{4.21}$$

Ecco quindi la sorpresa: non solo per ogni valore di $\mathbf{q}$ ci sono quattro stati, e non i due che ci aspettiamo, ma mentre gli stati con $\mu = 1,2,3$ sono di modulo quadro positivo, dato che $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$,

$$\langle\mu;\mathbf{k}|\nu;\mathbf{q}\rangle = \langle 0|A^\mu(\mathbf{k},0)\,A^{\nu\dagger}(\mathbf{q},0)\,|0\rangle = \delta_{\mu\nu}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \qquad (\mu,\nu = 1.2.3)$$

lo stato $|\mu = 0;\mathbf{q}\rangle$ ha modulo quadro negativo,

$$\langle 0;\mathbf{k}|0;\mathbf{q}\rangle = \langle 0|A^0(\mathbf{k},0)\,A^{0\dagger}(\mathbf{q},0)\,|0\rangle = -\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q})$$

Una situazione che sembra in aperto contrasto con i dettami della meccanica quantistica: si tratta di uno stato di probabilità negativa.

La soluzione di questo problema deriva dalla invarianza di gauge dell'elettromagnetismo, che non è del tutto obliterata dalla scelta della gauge di Feynman. Infatti l'azione di Fermi è invariante sotto una classe ristretta di trasformazioni di gauge, caratterizzate da funzioni $f(x)$ tali che $\Box f(x) = 0$: Infatti (vedi 4.10)

$$\begin{aligned}\int d^4x\,\partial^\nu(A^\mu + \partial^\mu f)\,\partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu f) &= \int d^4x\,(\partial^\nu A^\mu)\,(\partial_\nu A_\mu)\\ &+ \int d^4x\,(\partial^\nu\partial^\mu f)\partial_\nu A_\mu + \int d^4x\,(\partial^\nu A^\mu)(\partial_\nu\partial_\mu f) + \int d^4x\,(\partial^\nu\partial^\mu f)(\partial_\nu\partial_\mu f)\end{aligned}$$

e con una integrazione per parti si verifica che tutti i termini della seconda riga si annullano se $\Box f(x) = 0$.

Nella prossima Sezione vedremo come la presenza di questa invarianza risolva il problema degli stati addizionali che appaiono nella gauge di Feynman[2].

Per ogni valore di $\mathbf{q}$ possiamo scegliere quattro vettori di polarizzazione:

ϵ_1, ϵ_2 Le due polarizzazioni *trasverse*: $\epsilon^\mu_{1,2} = \{0, \epsilon_{1,2}\}$, con $(\epsilon_{1,2}\mathbf{k}) = 0$.

ϵ_3 La polarizzazione *longitudinale*: un vettore spaziale parallelo a $\mathbf{q}$: $\epsilon^\mu_3 = \{0, \hat{q}\}$.

ϵ_0 La polarizzazione *temporale*: un vettore di tipo tempo, $\epsilon^\mu_0 = \eta^\mu = \{1, 0\}$

In corrispondenza dei quattro vettori parleremo di fotoni trasversi, longitudinali o temporali. Se ad esempio $\mathbf{q}$ è nella direzione 3, possiamo scegliere i quattro vettori come

$$\epsilon_1 = \{0, 1, 0, 0\}, \qquad \epsilon_2 = \{0, 0, 1, 0\} \qquad \epsilon_L = \{0, 0, 0, 1\} \qquad \epsilon_T = \{1, 0, 0, 0\}$$

[2]Una discussione più approfondita e citazioni della letteratura originale, in particolare al lavoro di Gupta e Bleuler, si trovano nel capitolo 5 del Mandl e Shaw [2].

Per gli stati trasversi possiamo, per ogni valore di $\mathbf{q}$ scegliere due vettori di polarizzazione $\epsilon_r^\nu(\mathbf{q})$ ($\mathbf{r} = \mathbf{1},\mathbf{2}$) puramente spaziali ($\epsilon_{1,2}^0 = 0$), tali che

$$\mathbf{q}\epsilon_\mathbf{r} = \mathbf{0}; \qquad \epsilon_\mathbf{r}\epsilon_\mathbf{s} = \delta_\mathbf{rs}$$

Se quindi definiamo gli stati a un fotone come

$$|\gamma; \mathbf{q}, r\rangle = \epsilon_r^\nu(\mathbf{q}) A_\nu^\dagger(\mathbf{q}, 0)|0\rangle$$

dalla (4.21) otteniamo

$$\langle\gamma; \mathbf{k}, s|\gamma; \mathbf{q}, r\rangle = \delta_{rs}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \tag{4.22}$$

e, dalla (4.20),

$$\langle 0|A^\mu(x)|\gamma; \mathbf{q}, r\rangle = \frac{\epsilon_r^\mu(\mathbf{q})}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_q}} e^{i\mathbf{qx}} e^{-i\omega_q(t_x-t_y)}, \tag{4.23}$$

Quest'ultima risulterà utile per stabilire le regole di calcolo per la matrice S. Nel presente testo consideriamo i vettori ϵ_r^ν come vettori a componenti *reali*, che descrivono fotoni a polarizzazione lineare. Ricordiamo però che per descrivere stati con polarizzazione circolare, in particolare fotoni di elicità definita si devono usare vettori ϵ_r^ν a componenti *complesse*.

4.4 Fotoni virtuali

L' interazione tra il campo elettromagnetico e la materia avviene attraverso la corrente elettromagnetica [1]:

$$\mathscr{L}_I = eA_\mu(x)J^\mu(x). \tag{4.24}$$

L' invarianza di gauge prescrive che la corrente sia conservata:

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \tag{4.25}$$

Nella QED dell' elettrone:

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{4.26}$$

e la conservazione della corrente è garantita dal teorema di Noether.

Il piú semplice complesso con cui possiamo sperimentare sul campo elettromagnetico è constituito da un' antenna e da un ricevitore. Nell' antenna, un elettrone compie una transizione da uno stato A ad uno stato B, nel ricevitore un' altro elettrone passa da A' a B'.

L' ampiezza della transizione complessiva: A→ B, A'→ B' al secondo ordine della teoria delle perturbazione è data da:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle B, B'|\int d^4x d^4y\; T\left[\mathscr{L}_I(x)\mathscr{L}_I(y)\right]|A, A'\rangle \\ &= \frac{(ie)^2}{2}\int d^4x d^4y\; \langle B, B'|T\left[A_\mu(x)J^\mu(x)A_\nu(y)J^\nu(y)\right]|A, A'\rangle \end{aligned} \tag{4.27}$$

Fattorizzando gli stati quantistici di antenna e ricevitore ($|A, A'\rangle = |A\rangle|A'\rangle$, etc.) e tenendo conto che, a questo ordine, le correnti commutano tra loro e con il potenziale vettore, possiamo scrivere:

$$S_{fi} = \frac{(ie)^2}{2} \int d^4x d^4y \left(\langle B|J^\mu(x)|A\rangle\langle B'|J^\nu(y)|A'\rangle + x \leftrightarrow y\right) \langle 0|T\left[A_\mu(x)A_\nu(y)\right]|0\rangle =$$
$$= (ie)^2 \int d^4x d^4y \, \langle B|J^\mu(x)|A\rangle\langle 0| \, T\left[A_\mu(x)A_\nu(y)\right]|0\rangle \, \langle B'|J^\nu(y)|A'\rangle \tag{4.28}$$

dove abbiamo usato la simmetria tra le variabili di integrazione x ed y per cancellare il fattor 1/2. Possiamo rappresentare l' ampiezza (4.28) con il grafico di Feynman in Fig. 4.2. La linea ondulata rappresenta il propagatore del fotone. Si dice, in questo caso, che tra le due correnti si scambia un *fotone virtuale*.

Passando alle trasformate di Fourier ed usando la (4.19) otteniamo:

$$S_{fi} = (ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{J}^\mu_{BA}(-p) \, \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \left[-g_{\mu\nu} + (1-\alpha)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right] \tilde{J}^\nu_{B'A'}(p) \tag{4.29}$$

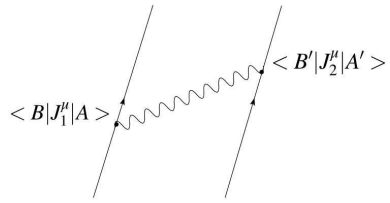


Figura 4.2: Il grafico di Feynman rappresenta l' ampiezza per l' interazione antenna-ricevitore dovuta allo scambio di un fotone virtuale. Le linee continue raffigurano, nello spazio-tempo, le linee-universo di antenna e ricevitore, la linea ondulata scambiata tra i vertici rappresenta la propagazione del campo elettromagnetico.

Una prima conseguenza della (4.29) è che S_{fi} è indipendente dalla gauge: i termini dipendenti da α nel propagatore danno contributo nullo grazie alla conservazione della corrente (4.25), che implica $p_\mu J^\mu(p) = 0$.

Possiamo quindi scrivere:

$$S_{fi} = (ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (\tilde{J}_{BA})^\mu(-p) \, \frac{i(-g_{\mu\nu})}{p^2 + i\epsilon} \, (\tilde{J}_{B'A'})^\nu(p) \tag{4.30}$$

Questa equazione fa pensare ci sia ancora un problema: il residuo nel polo a $p^2 = 0$ è proporzionale a -$g_{\mu\nu}$, il che sembra indicare che tutti e quattro i tipi di fotoni possano contribuire, vedi la (4.21). La patologia, tuttavia, è solo apparente ed è di nuovo curata dalla conservazione della corrente[3].

[3]Notiamo che l' ampiezza si puó anche scrivere come $\int d^4x \, J^\mu_{A'B'}(x)(A_{AB})_\mu(x)$, dove $(A_{AB})_\mu(x)$ è il campo classico generato dalla corrente $J^\mu_{AB}(x)$. La discussione a questo punto segue quasi parola per parola quella riportata in [1] a proposito della funzione di Green del campo elettromagnetico classico.

Con riferimento al 4-momento p, introduciamo i quattro vettori di polarizzazione ϵ^μ(p), Eq. (4.3) che formano una base ortonormale nello spazio delle p (naturalmente in relazione alla metrica $g^{\mu\nu}$). È facile convincersi che la relazione di completezza per questa base si scrive:

$$-g^{\mu\nu} = \sum_{i=0,\dots,3} x_i\, \epsilon_i^\mu \epsilon_i^\nu = \\ x_0 = -1,\ \ x_{1,2,3} = +1 \tag{4.31}$$

ovvero:

$$-g^{\mu\nu} = \left(\sum_{i=1,2} \epsilon_i^\mu \epsilon_i^\nu \right) + \left(\epsilon_3^\mu \epsilon_3^\nu - \eta^\mu \eta^\nu \right) \tag{4.32}$$

Se esprimiamo ϵ_3 in funzione di p e di η^μ, ottieniamo:

$$\epsilon_3^\mu = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \left(p^\mu - p^0 \eta^\mu \right); \tag{4.33}$$

$$\left(\epsilon_3^\mu \epsilon_3^\nu - \eta^\mu \eta^\nu \right) = \frac{p^2}{|\mathbf{p}|} \eta^\mu \eta^\nu \ + \ \dots \tag{4.34}$$

dove i punti di sospensione indicano termini proporzionali a p^μ e/o a p^ν, che danno zero quando inseriti nella (4.29), sempre in virtú della conservazione della corrente.

In conclusione, con questa sostituzione, la (4.29) diventa:

$$S_{fi} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}\, \tilde{J}^\mu_{BA}(-p) \frac{i \left(\sum_{i=1,2} (\epsilon_i)_\mu (\epsilon_i)_\nu \right)}{p^2 + i\epsilon} \tilde{J}^\nu_{B'A'}(p) \ + \\ + \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}\, \tilde{J}^0_{BA}(-p) \frac{-i}{|\mathbf{p}|} \tilde{J}^0_{B'A'}(p) \tag{4.35}$$

Il primo termine a secondo membro della (4.35) mostra che al polo in $p^2 = 0$ contribuiscono solo i fotoni trasversi, che sono quindi gli unici stati presenti a grande distanza dall' interazione. Non ci sono fotoni di altro tipo negli stati "in e "out introdotti nel capitolo precedente. Il contributo dei fotoni longitudinali e temporali si combina, in virtú della conservazione della corrente, nel secondo termine che, come si vede dal fattore $1/|\mathbf{p}|$, non è altro che l' interazione coulombiana istantanea tra le due correnti.

In effetti, tornando allo spazio x, abbiamo:

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}\, \tilde{J}^0_{BA}(-p) \frac{-i}{|\mathbf{p}|} \tilde{J}^0_{B'A'}(p) = \int d^4x d^4y\, J^0_{BA}(x) J^0_{B'A'}(y) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip(x-y)} \frac{-i}{|\mathbf{p}|} = \\ = -i \int d^4x d^4y\, J^0_{BA}(x)\, \delta(x^0 - y^0) \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} J^0_{B'A'}(y) \tag{4.36}$$

che non è altro che -i moltiplicato per l' elemento di matrice dell' Hamiltoniana di interazione elettrostatica tra le due correnti.

Se avessimo effettuato il calcolo nella gauge di Coulomb, avremmo scritto l' Hamiltoniana di interazione come somma dell' interazione della corrente con i fotoni trasversi (di ordine e) piú l' interazione coulombiana tra le densitá di carica, di ordine e^2:

$$H_I = e \int d^3x\, \mathbf{A}(x,t) \mathbf{j}(x,t) + \frac{e^2}{2} \int d^3x d^3y\, j_0(x,t) \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} j_0(x,t) \tag{4.37}$$

L' ampiezza (4.35) si ottiene prendendo, nella matrice S, l' interazone coulombiana al primo ordine e l' interazione con i fotoni trasversi al secondo ordine. Il vantaggio decisivo della formulazione relativistica è di calcolare *tutto insieme*, con il solo grafico della Fig. 4.2.

Capitolo 5

Campi Fermionici

5.1 L'oscillatore armonico e l'oscillatore di Fermi

In questo capitolo passiamo dalla trattazione di campi scalari a quella di campi di Dirac che descrivono particelle di spin 1/2. Il problema che si pone è come trattare campi che devono obbedire leggi di anticommutazione e al principio di Pauli. Nelle trattazioni elementari della teoria dei campi abbiamo visto che un campo libero che descrive particelle bosoniche non interagenti è equivalente a un insieme di oscillatori armonici, uno per ciascun stato in cui si può trovare una particella. Concentrandoci su un singolo oscillatore possiamo definire gli operatori di creazione e distruzione, $a^\dagger$, a che obbediscono a regole di commutazione

$$[a, a^\dagger] = 1 \tag{5.1}$$

Se indichiamo con $|n\rangle$ lo stato in cui l'oscillatore contiene n particelle, avremo

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle; \qquad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle; \qquad \text{(bosoni)} \tag{5.2}$$

Anche un campo spinoriale può essere sviluppato in "oscillatori", ma oscillatori di tipo diverso, gli *oscilatori di Fermi*. Ciascuno di questi oscillatori può contenere al massimo una particella, e l'azione dei corrispondenti operatori di creazione e distruzione su stati a 0,1 particelle è

$$a^\dagger|0\rangle = |1\rangle; \qquad a^\dagger|1\rangle = 0; \qquad a|1\rangle = |0\rangle; \qquad a|0\rangle = 0; \qquad \text{(fermioni)} \tag{5.3}$$

Questo dà luogo a regole di anticommutazione,

$$\{a, a^\dagger\} = 1 \tag{5.4}$$

In ambedue i casi l'hamiltoniano diviene[1]

$$H = \hbar\omega\, a^\dagger a \tag{5.5}$$

[1] Come diverrà chiaro fra poco conviene in questa fase esplicitare la dipendenza dalla costante di Planck.

con ω l'energia della particella. Possiamo ricavare formalmente questo hamiltoniano da un lagrangiano

$$L = i\hbar a^\dagger \dot{a} - \hbar\omega a^\dagger a \tag{5.6}$$

dal quale si ottiene l'hamiltoniano corretto

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = i\hbar a^\dagger; \qquad H = \pi\dot{a} - L = \hbar\omega\, a^\dagger a \tag{5.7}$$

Notiamo che $\partial L/\partial \dot{a}^\dagger = 0$, dato che L non dipende da $\dot{a}^\dagger$. In realtà la relazione tra a ed $a^\dagger$ è simmetrica, dato che con una integrazione per parti possiamo esprimere l'azione in due modi equivalenti in cui i ruoli di a, e $a^\dagger$ sono scambiati,

$$S = \hbar \int dt\, (i a^\dagger \dot{a} - \omega a^\dagger a) = \hbar \int dt\, (-i\dot{a}^\dagger a - \omega a^\dagger a)$$

Se applichiamo le regole di commutazione canoniche otteniamo il risultato "bosonico",

$$[a,\, a^\dagger] = \frac{1}{i\hbar}[a,\, \pi] = \frac{1}{i\hbar}\cdot i\hbar = 1 \tag{5.8}$$

Sappiamo già come derivare tutte le proprietà dell'oscillatore armonico bosonico mediante la somma sui cammini della variabile $q(t)$. Come vedremo fra poco, possiamo direttamente usare cammini nelle variabili $a(t)$ e $a^\dagger(t)$. Come modificare la somma sui cammini per ottenere risultati fermionici? L'idea giusta nasce considerando, invece di $a, a^\dagger$, le variabili $\tilde{a} = \sqrt{\hbar}a$, $\tilde{a}^\dagger = \sqrt{\hbar}a^\dagger$, che non dipendono dalla costante di Planck, e sono quindi variabili classiche:

$$\tilde{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \qquad \tilde{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right) \tag{5.9}$$

In termini di queste il lagrangiano diviene

$$L = i\tilde{a}^\dagger \dot{\tilde{a}} - \omega \tilde{a}^\dagger \tilde{a} \tag{5.10}$$

e le regole di commutazione

$$[\tilde{a},\, \tilde{a}^\dagger] = \hbar \tag{5.11}$$

Nella somma sui cammini $\tilde{a}(t)$, $\tilde{a}^\dagger(t)$ sono trattate come funzioni a valore numerico, cioè come grandezze che commutano. Quindi è come se si prendesse un limite classico, $\hbar \to 0$, nel quale $\tilde{a}(t)$, $\tilde{a}^\dagger(t)$ divengono grandezze commutanti,

$$[\tilde{a},\, \tilde{a}^\dagger] = 0 \tag{5.12}$$

Nel caso fermionico si parte da regole di anticommutazione che nel limite $\hbar \to 0$ divengono semplicemente

$$\{\tilde{a},\, \tilde{a}^\dagger\} = 0 \tag{5.13}$$

quindi i cammini nel caso fermionico devono essere descritti da una funzione il cui valore non è un normale numero, ma una quantità che anticommuta, una variabile di Grassman.

Nel seguito torniamo ad usare unità di misura in cui $\hbar = 1$.

5.1.1 Variabili anticommutanti

Le regole di calcolo con grandezze anticommutanti sono molto semplici, e la pagina che segue contiene un intero manuale di calcolo differenziale e integrale con variabili di Grassmann. Supponiamo di avere n variabili di questo tipo, $a_1 \cdots a_n$, tali quindi che

$$\{a_h, a_k\} = 0 \tag{5.14}$$

il che in particolare implica che $(a_i)^2 = 0$. Valgono allora le seguenti regole:

Coefficienti numerici, combinazioni lineari Una variabile anticommutante può essere moltiplicata pe un numero ordinario c, con cui commuta, $c\,a = a\,c$. Si possono fare combinazioni lineari: $c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots$.

Funzioni Dato che $a_k^2 = 0$, la più generale funzione è un polinomio di ordine n

$$F = C_0 + \sum_k C_1(k) a_k + \sum_{h>k} C_2(h,k)\, a_h\, a_k \cdots + C_n\, a_1\, a_2 \cdots a_n \tag{5.15}$$

dove le C sono coefficienti numerici.

Differenziali e derivate Il differenziale da di una grandezza anticommutante a è esso stesso anticommutante: dato che $a_1\, a_2 = -a_2\, a_1$, deve essere $a_1\, da_2 = -da_2\, a_1$. La derivata rispetto a una variabile anticommutante d/da_k è definita dalle seguenti regole:

- $\frac{d}{da_k} 1 = 0; \qquad \frac{d}{da_k} a_h = \delta_{hk}$
- L'operazione d/da_k anticommuta con altre variabili grassmaniane. Questo si può capire considerando un prodotto di grandezze anticommutanti $c\,d \cdots a \cdots$: d/da "sfila" a dal prodotto e per far questo deve portare a in prima posizione. Quindi $d/da\,(b \cdot a) = d/da\,(-a \cdot b) = -b$ ovvero $d/da\, b \cdot a = -b \cdot d/da\, a$, e così via.
- Le derivate anticommutano tra loro, ad esempio $d/da\, d/db(ba) = 1$ mentre $d/db\, d/da(ba) = d/db(-b) = -1$

Integrali Gli integrali di variabili anticommutanti è definito con le seguenti regole:

$$\int da = 0; \qquad \int da\, a = 1 \tag{5.16}$$

ne segue che per variabili anticommutanti l'integrale e la derivata sono la stessa operazione.

$$\int da\, F = \frac{d}{da} F \tag{5.17}$$

Questa definizione è motivata nel modo seguente: gli integrali $\int da$ e $\int da\, a$ devono essere definiti come costanti che non dipendono da nessuna grandezza anticommutante, quindi come numeri ordinari. Allo stesso tempo, dato che da è anticommutante $\int da$ dovrebbe essere anticommutante, quindi l'unica possibilità è che sia $= 0$, l'unico numero ordinario che sia anche anticommutante, $0x = -x0$. Il secondo integrale, $\int da\, a$, può essere un numero qualsiasi: porre $\int da\, a = 1$ equivale a definire la normalizzazione delle a. Se ad esempio avessimo $\int da\, a = X$, potremmo definire una nuova variabile, $a = a' X^{1/2}$ tale che $\int da'\, a' = 1$.

Notiamo che se P_i indica prodotti di un numero pari di grandezze anticommutanti e A_k prodotti di un numero dispari, si ha

$$P_i P_k = P_k P_i; \qquad P_i A_k = A_k P_i; \qquad A_i A_k = -A_k A_i \tag{5.18}$$

ad esempio, se a, b, c, d sono anticommutanti, $(ab)(cd) = (cd)(ab)$, $(ab)c = c(ab)$, mentre $(abc)d = -d(abc)$. Quindi il prodotto di un numero pari di grandezze anticommutanti si comporta come una grandezza commutante.

5.1.2 Somma sui cammini per i due oscillatori

In questa sezione sviluppiamo le regole di calcolo della somma sui cammini di grandezze anticommutanti applicandole a un caso concreto: l'oscillatore di Fermi definito nella sezione 5.1. Come vedremo la somma sui cammini porta a risultati che sono in pieno accordo con quelli ottenuti in modo tradizionale.

Nella sezione 3.2 abbiamo calcolato il funzionale generatore dell'oscillatore armonico nel linguaggio delle $q(t)$. Vogliamo adesso rifarlo nel linguaggio delle $a(t)$, $a^\dagger(t)$, stando attenti a fare operazioni che siano egualmente valide sia nel caso che queste variabili commutino (caso bosonico) che anticommutino (caso fermionico) e notando via via le differenza tra i due casi. Definiamo quindi $Z(J, J^\dagger)$ come

$$Z(J, J^\dagger) = \int \mathscr{D}a(t)\mathscr{D}a^\dagger(t)\, \exp\left[i \int dt \left(a^\dagger(t)\, D\, a(t) - J^\dagger(t)\, a(t) - a^\dagger(t)\, J(t) \right) \right] \tag{5.19}$$

dove (vedi eq. 5.10) l'operatore differenziale[2] D è dato da

$$D = i\frac{d}{dt} - \omega \tag{5.20}$$

Dato che l'azione deve in ogni caso essere una grandezza commutante, nel caso fermionico sia J che $J^\dagger$ devono essere anticommutanti. Come abbiamo fatto nella sezione 3.2 introduciamo una funzione $S(t)$ tale che

$$D\, S(t) \;=\; \delta(t); \qquad \rightarrow \qquad \dot{S}(t) \;=\; -i\omega S(t) \;-\; i\,\delta(t) \tag{5.21}$$

Possiamo riscrivere il termine in $(a^\dagger J)$ della (5.19) come

$$\int dt\, a^\dagger(t)\, J(t) \;=\; \int dt\, a^\dagger(t)\, D \left(\int dt' S(t-t')\, J(t') \right)$$

mentre il termine in $(J^\dagger a)$ può essere scritto come

$$\int dt\, J^\dagger(t)\, a(t) \;=\; \int dt \left(\int dt'\, J^\dagger(t')\, S(t'-t) \right) D\, a(t)$$

[2] Questo non è altro che l'operatore di Dirac $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)$, ma in uno spazio ad una sola dimensione.

come si verifica con una integrazione per parti,

$$\int dt \left(\int dt' \, J^\dagger(t') \, S(t'-t)\right) \left(i\frac{d}{dt} - \omega\right) a(t)$$
$$= \int dt \left(-i\frac{d}{dt} - \omega\right) \int dt' \, J^\dagger(t') \, S(t'-t) \; a(t)$$

e notando che

$$\left(-i\frac{d}{dt} - \omega\right) S(t'-t) = \left(i\frac{d}{d(t'-t)} - \omega\right) S(t'-t) = \delta(t'-t).$$

Possiamo allora riscrivere il funzionale generatore come

$$Z(J, J^\dagger) = \exp\left[-i\int dt' \, dt \, J^\dagger(t') \, S(t'-t) \, J(t)\right] \int \mathscr{D}a(t) \mathscr{D}a^\dagger(t)$$
$$\exp\left[i\int dt \left(a^\dagger(t) - \int dt' \, J^\dagger(t') \, S(t'-t)\right) D\left(a(t) - \int dt' S(t-t') \, J(t')\right)\right]$$

L'integrale funzionale residuo viene eseguito con un cambiamento di variabile

$$a(t) \;\to\; a'(t) = a(t) - \int dt' S(t-t') \, J(t')$$

e analogamente per $a^\dagger$, e si riduce a una costante moltiplicativa che coincide con il valore di $Z[0]$ e può essere omessa. Questi cambiamenti di variabile sono però legittimi solo se (vedi la sezione 3.2)

$$\lim_{t\to\infty} S\big(t(1-i\chi)\big) \;=\; \lim_{t\to-\infty} S\big(t(1-i\chi)\big) = 0 \tag{5.22}$$

La soluzione generale della (5.21) è $S(t) = A\,e^{-i\omega t} \;-\; i\theta(t)\,e^{-i\omega t}$, ma la (5.22) impone $A \;=\; 0$, quindi

$$S(t) \;=\; -i\theta(t)\,e^{-i\omega t} \tag{5.23}$$

e il funzionale generatore diviene

$$Z(J, J^\dagger) = \exp\left[-i\int dt' \, dt \, J^\dagger(t') \, S(t'-t) \, J(t)\right] \tag{5.24}$$

Dato che siamo stati attenti a non cambiare l'ordinamento delle grandezze che nel caso fermionico anticommutano tra loro, quanto fatto sinora vale sia per il caso bosonico che per quello fermionico. Delle differenze appaiono nel calcolo delle funzioni di Green, dove bisogna tenere conto del carattere anticommutante degli operatori. Ad esempio, se a è una grandezza anticommutante, la (2.24) va ridefinita come

$$T(a(t_1)\,a(t_2)) = \begin{cases} a(t_1)\,a(t_2) & \text{se } t_1 \geq t_2 \\ -a(t_2)\,a(t_1) & \text{se } t_2 \geq t_1 \end{cases} \qquad \text{Fermioni} \tag{5.25}$$

e quindi anche

$$T(a(t_1)\,a(t_2)) = -T(a(t_2)\,a(t_1)) \tag{5.26}$$

e queste proprietà si estendono al prodotto ordinato nel tempo di più operatori e quindi anche alle funzioni di Green.

Le regole per l'uso del funzionale generatore sono anche leggermente diverse nei due casi. Infatti, mentra la regola di corrispondenza

$$a(t) \quad \to i\frac{\delta}{\delta J^\dagger(t)} \qquad \text{Bosoni o Fermioni} \tag{5.27}$$

è la stessa nei due casi, si ha

$$a^\dagger(t) \quad \to \quad \begin{cases} i\frac{\delta}{\delta J(t)} & \text{Bosoni} \\ -i\frac{\delta}{\delta J(t)} & \text{Fermioni} \end{cases} \tag{5.28}$$

come si vede dalla (5.19) notando che nel caso fermionico $\frac{\delta}{\delta J(t)}$ anticommuta con $a^\dagger(t)$. Calcoliamo alcune funzioni di Green: Per la funzione a due punti otteniamo, sia nel caso fermionico che nel caso bosonico (lasciamo la derivazione ai lettori),

$$\begin{aligned} \langle 0|T\Big(a(t)a^\dagger(\tau)\Big)|0\rangle &= \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t)}\frac{\delta}{\delta J(\tau)}Z[J,J^\dagger]\Big|_{J=J^\dagger=0} \\ &= iS(t-\tau) = \theta(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)} \end{aligned} \tag{5.29}$$

Consideriamo anzitutto il caso $t > \tau$, per cui otteniamo, assegnando una energia $E_0 = 0$ allo stato $|0\rangle$,

$$\langle 0|a(t)a^\dagger(\tau)|0\rangle \equiv \langle 0|a\,e^{-iH(t-\tau)}a^\dagger|0\rangle = e^{-i\omega(t-\tau)}$$

Questo risultato ci dice che[3] esiste uno stato $|1\rangle$ con energia $E_1 = \omega$, e che $|\langle 1|a^\dagger|0\rangle|^2 = 1$. Quindi possiamo definire la fase dello stato $|1\rangle$ in modo che $a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$. Al contario, se $\tau > t$ otteniamo

$$\langle 0|a^\dagger(\tau)\,a(t)|0\rangle = 0$$

e introducendo un insieme completo di stati $|A\rangle$ con energia E_A,

$$\sum_A |\langle A|a|0\rangle|^2 e^{iE_A(\tau-t)} = 0$$

da cui si ottiene (considerando il caso $\tau = t$) $a|0\rangle = 0$.

Per la funzione a quattro punti c'è una differenza tra il caso bosonico e quello fermionico. Nei passaggi che seguono, dove appare il simbolo $\pm$ si intende che il segno $+$ si applica al caso bosonico, il $-$ al caso fermionico, e dove non appare il risultato è lo stesso nei due casi.

$$\begin{aligned} &\langle 0|T\Big(a(t_1)\,a(t_2)\,a^\dagger(\tau_1)\,a^\dagger(\tau_2)\Big)|0\rangle \\ &= \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_1)}\frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_2)}\frac{\delta}{\delta J(\tau_1)}\frac{\delta}{\delta J(\tau_2)}\,\frac{1}{2}\left[-i\int dt'\,dt\,J^\dagger(t')\,S(t'-t)\,J(t)\right]^2 \\ &= -\frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_1)}\frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_2)}\left[\int dt' J^\dagger(t')S(t'-\tau_1)\right]\left[\int dt'' J^\dagger(t'')S(t''-\tau_2\right] \\ &= -\left[S(t_2-\tau_1)\,S(t_1-\tau_2) \pm S(t_1-\tau_1)\,S(t_2-\tau_2)\right] \\ &= e^{i\omega(t_1+t_2-\tau_1-\tau_2)}\left[\theta(t_2-\tau_1)\,\theta(t_1-\tau_2) \pm \theta(t_1-\tau_1)\,\theta(t_2-\tau_2)\right] \end{aligned}$$

[3] Vedi la discussione alla fine della sezione 3.2.

Il segno − che appare nel caso fermionico riflette il principio di Pauli. Ad esempio, nel caso $t_1 > t_2 > \tau_1 > \tau_2$ si ottiene

$$\langle 0|(a(t_1)\, a(t_2)\, a^\dagger(\tau_1)\, a^\dagger(\tau_2)|0\rangle = \begin{cases} 2\, e^{-i\omega(t_1+t_2-\tau_1-\tau_2)} & \text{Bosone} \\ 0 & \text{Fermione} \end{cases} \tag{5.30}$$

Se in questa espressione passiamo al limite $t_1 \to t_2$ e $\tau_1 \to \tau_2$, nel caso bosonico otteniamo

$$\langle 0|[a(t_2)]^2\, [a^\dagger(\tau_2)]^2|0\rangle = 2e^{-i2\omega(t_2-\tau_2)} \tag{5.31}$$

e da questo impariamo che esiste uno stato $|2\rangle$ con energia $E_2 = 2\omega$, e che $[a^\dagger]^2|0\rangle = \sqrt{2}|2\rangle$. Dato che $a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$, deve essere $a^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle$. Analogamente deduciamo che $a^2|2\rangle = \sqrt{2}|0\rangle$. Nel caso fermionico impariamo invece che, come segue dal principio d Pauli, $[a^\dagger]^2|0\rangle = 0$ — non esiste un secondo stato eccitato dell'oscillatore di Fermi.

5.1.3 Integrali gaussiani per variabili anticommutanti

Per usi successivi, riportiamo qui il calcolo degli integrali gaussiani su variabili anticommutanti, da confrontare con il risultato per gli analoghi integrali su variabili commutanti.

L' integrale piú semplice è:

$$A(\lambda) = \int da^\dagger da\, e^{-\lambda a^\dagger a} \tag{5.32}$$

e si effettua utilizzando le regole date sopra:

$$A(\lambda) = \int da^\dagger da\, (1 - \lambda a^\dagger a) = \lambda \int da^\dagger a^\dagger da a = \lambda \tag{5.33}$$

Il risultato (5.33) si generalizza immediatamente al caso di N coppie di variabili:

$$A(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \int (\prod_i da_i^\dagger da_i)\, e^{\sum_k \lambda_k a_k^\dagger a_k} = \prod_i \lambda_i \tag{5.34}$$

e quindi al caso di una forma bilineare:

$$\begin{aligned} A(\Lambda) &= \int (\prod_i da_i^\dagger da_i)\, e^{(a^\dagger \Lambda a)}; \\ (a^\dagger \Lambda a) &= \sum_{ij} a_i^\dagger \Lambda_{ij} a_j \end{aligned} \tag{5.35}$$

In questo caso, diagonalizziamo la matrice Λ con una trasformazione unitaria:

$$\tilde{a}_i = \sum_k U_{ik} a_k; \quad U^\dagger U = 1 \tag{5.36}$$

in modo tale che:

$$(a^\dagger \Lambda a) = \sum_k \lambda_k \tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k \tag{5.37}$$

dove le λ_k sono gli autovalori di Λ. Da notare che lo jacobiano della trasformazione tra le variabili $a^\dagger, a$ e le $\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}$ vale uno:

$$J = det\left[\frac{\partial(\tilde{a}^\dagger, \tilde{a})}{\partial(a^\dagger, a)}\right] =$$
$$= det\left[\frac{\partial(\tilde{a}^\dagger)}{\partial(a^\dagger)}\right] det\left[\frac{\partial(\tilde{a})}{\partial(a)}\right] = |detU|^2 = 1 \tag{5.38}$$

da cui:

$$A(\Lambda) = \int (\prod_i d\tilde{a}_i^\dagger d\tilde{a}_i)\ e^{\sum_k \lambda_k \tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k} = det\Lambda \tag{5.39}$$

Questo risultato si puó confrontare con quello relativo all' integrale gaussiano su variabili commutanti:

$$C(\Lambda) = \int (\prod_i dx_i^\dagger dx_i)\ e^{-(x^\dagger \Lambda x)} \tag{5.40}$$

Nella base in cui Λ è diagonale, poniamo:

$$x_i = \frac{u_i + i v_i}{\sqrt{2}};\ \ x_i^\dagger = \frac{u_i - i v_i}{i\sqrt{2}} \tag{5.41}$$

da cui otteniamo:

$$C(\Lambda) = \int \prod\left(du_i dv_i\ e^{-\frac{\lambda_i(u_i^2+v_i^2)}{2}}\right) = \prod_i\left(\frac{2\pi}{\lambda_i}\right) = \left[det(\frac{2\pi}{\Lambda})\right]^{-1} \tag{5.42}$$

Il passaggio da variabili anticommutanti a commutanti comporta il cambimento: $det\Lambda \to [det\Lambda]^{-1}$, a meno di una inessenziale costante moltiplicativa.

Con l' aiuto delle formule precedenti, possiamo considerare il caso di integrali funzionali gaussiani della forma:

$$A(D) = \int [\mathscr{D}\psi^\dagger(x)][\mathscr{D}\psi(x)]\ e^{-(\psi^\dagger D\psi)};$$
$$(\psi^\dagger D\psi) = \int dxdy\ \psi^\dagger(x)D(x,y)\psi(y) \tag{5.43}$$

Determinato il sistema delle autofunzioni dell' operatore D:

$$\int D(x,y)\psi_i(y) = \lambda_i\psi_i(x) \tag{5.44}$$

possiamo sviluppare le funzioni anticommutanti nella base delle autofunzioni:

$$\psi(x) = \sum_i a_i\psi_i(x) \tag{5.45}$$

dove le a_i sono variabili anticommutanti. Nella nuova base, scriviamo l' integrale funzionale come:

$$A(D) = \int \prod_i da_i^\dagger da_i\ e^{-(a^\dagger Da)};\ \ D_{ij} = \int dxdy\ \psi_i^\dagger(x)D(x,y)\psi_j(y) \tag{5.46}$$

da cui, come prima:

$$A(D) = detD \tag{5.47}$$

con il determinante di D dato dalla (5.39). Il caso di variabili commutanti si tratta in modo analogo.

5.2 Quantizzazione del campo di Dirac

In questa sezione calcoliamo esplicitamente il funzionale generatore per un campo di Dirac libero e la funzione a due punti. Daremo per nota la descrizione standard di questo sistema, basata sulle regole di quantizzazione canonica, e le proprietà delle matrici γ e delle soluzioni ad onda piana della equazione di Dirac. Adotteremo le notazioni e convenzioni del Mandl e Shaw [2] in particolare la Appendice A di quel testo.

Ricordiamo che esistono due tipi di quadrispinori: il tipo "normale", rappresentato dal campo di Dirac $\psi(x)$ e il tipo "aggiunto" rappresentato dal campo $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger \gamma^0$. In genere ometteremo gli indici spinoriali intendendo in particolare che due indici contigui, uno "normale" ed uno "aggiunto" siano sommati. Nelle matrici di Dirac il primo indice va considerato "normale" e il secondo "aggiunto".

La equazione di Dirac per una particella di massa m sarà scritta come

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \tag{5.48}$$

e può essere derivata da una densità di lagrangiano:

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) \tag{5.49}$$

La (5.49) sarà il nostro punto di partenza. In analogia a quanto abbiamo fatto per l'oscillatore, definiamo il funzionale generatore introducendo due funzioni ausiliarie $J_\rho(x)$, $\bar{J}_\rho(x)$.

$$Z(J, \bar{J}) = \int \mathscr{D}[\psi]\mathscr{D}[\bar{\psi}] \exp\left[i \int d^4x \left(\bar{\psi}(x) D \psi(x) - \bar{J}(x)\psi(x) - \bar{\psi}(x) J(x) \right) \right] \tag{5.50}$$

dove D è l'operatore di Dirac

$$D = i\gamma^\mu \partial_\mu - m$$

e considereremo ψ, $\bar{\psi}$, J, $\bar{J}$ come grandezze *anticommutanti*. Per eseguire l'integrale seguiamo i passi della sezione precedente. Introduciamo quindi una funzione $S_F(x)$, il propagatore, tale che

$$D S_F(x) = \delta^4(x) \tag{5.51}$$

di modo che possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} Z(J, \bar{J}) = \exp\left[-i \int d^4x' \, d^4x \, \bar{J}(x') S_F(x' - x) J(x) \right] \int \mathscr{D}[\psi]\mathscr{D}[\bar{\psi}] \\ \exp\left[i \int d^4x \left(\bar{\psi}(x) - \int d^4x' \, \bar{J}(x') S_F(x' - x) \right) D \left(\psi(x) - \int d^4x' S_F(x - x') J(x') \right) \right] \end{aligned}$$

Per dimostrare questa trasformazione cominciamo con

$$\int d^4x \, \bar{\psi}(x) J(x) = \int d^4x \, \bar{\psi}(x) \, (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m) \int d^4x' S_F(x - x') J(x')$$

che si verifica direttamente dalla (5.51). Inoltre

$$\begin{aligned}
&\int d^4x'\, d^4x\, \bar{J}(x')\, S_F(x'-x)\, (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m)\, \psi(x) \\
&\qquad = \int d^4x'\, d^4x\, \bar{J}(x')\, S_F(x'-x)\, (-i\gamma^\mu \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu} - m)\, \psi(x) \\
&\qquad = \int d^4x'\, d^4x\, \bar{J}(x') \delta^4(x'-x) \psi(x) = \int d^4x\, \bar{J}(x) \psi(x)
\end{aligned}$$

dove nel primo passaggio abbiamo eseguito una integrazione per parti, e nel secondo abbiamo utilizzato la (5.55) che dimostreremo fra poco. La freccia indica che la derivata va eseguita sulla funzione alla sinistra. $\overleftrightarrow{\partial}$ L'integrale funzionale si calcola con un cambiamento di variabili

$$\begin{aligned}
\psi(x) \to \psi'(x) &= \psi(x) - \int d^4x' S_F(x-x')\, J(x') \\
\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) &= \bar{\psi}(x) - \int d^4x'\, \bar{J}(x')\, S_F(x'-x)
\end{aligned}$$

e risulta in una costante moltiplicativa (il valore di $Z[0]$) che può essere omessa, e si ottiene semplicemente

$$Z(J, \bar{J}) = \exp\left[-i \int d^4x'\, d^4x\, \bar{J}(x')\, S_F(x'-x)\, J(x)\right] \tag{5.52}$$

Come visto in precedenza, questa procedura è legittima solo se

$$\lim_{t\to\pm\infty} S_F\big((t(1-i\chi), \vec{x}\big) = 0 \tag{5.53}$$

Una soluzione della (5.51) con le qualità desiderate si ottiene ponendo

$$S_F(x) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p\, e^{-ipx} \frac{\not{p} + m}{E^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{5.54}$$

Infatti, sostituendo nella (5.51) si ottiene[4]

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Delta_F(x) = -(\Box + m^2)\Delta_F(x) = \delta^4(x)$$

Dalla espressione (5.54) segue una relazione che abbiamo usato in precedenza,

$$S_F(y-x)(i\gamma^\mu \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu} + m) = -\delta^4(x-y) \tag{5.55}$$

[4]Vedi la sezione 3.3. Ricordiamo che $(\gamma^\mu \partial_\mu)^2 = \partial^\mu \partial_\mu = \Box$. Si verifica facilmente che questa è l'unica soluzione accettabile, dato che l'equazione omogenea che corrisponde alla (5.51) non è altro che l'equazione di Dirac, le cui soluzioni sono sovrapposizioni di onde piane che falliscono la condizione (5.53), per $t \to -\infty$ se del tipo a frequenza positiva $e^{-i\omega t}$, e per $t \to \infty$ per le frequenze negative, $e^{i\omega t}$.

sostituendo infatti nel primo menbro la (5.54) otteniamo ($\partial/\partial x = -\partial/\partial y$)

$$\begin{aligned} S_F(y-x)(i\gamma^\mu \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu} + m) &= (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} + m)(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m)\Delta_F(y-x) \\ &= (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} + m)(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} + m)\Delta_F(y-x) = -\delta^4(x-y) \end{aligned}$$

Le regole di corrispondenza per passare dal funzionale generatore alle funzioni di Green sono dedotte dalla (5.50),

$$\psi_\alpha(x) \quad \rightarrow \quad i\frac{\delta}{\delta \bar{J}_\alpha(x)}; \qquad \bar{\psi}_\beta(x) \quad \rightarrow \quad -i\frac{\delta}{\delta J_\alpha(x)} \tag{5.56}$$

e la funzione di Green a due punti diviene

$$\langle 0|T\left(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\right)\rangle = i(S_F)_{\alpha\beta}(x-y) \tag{5.57}$$

Come abbiamo visto nel caso dell'oscillatore, il segno "-" nella seconda delle regole di corrispondenza si compensa con un secondo segno "-" che proviene dal carattere anticommutante delle derivate funzionali. Avremmo quindi ottenuto esattamente lo stesso risultato se avessimo trattato il campo di Dirac come grandezza commutante.

Notiamo anche che le funzioni di Green con due ψ o due $\bar{\psi}$ sono eguali a zero

$$\langle 0|T\left(\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)\right)\rangle = \langle 0|T\left(\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\right)\rangle = 0 \tag{5.58}$$

5.2.1 Propagatore del fermione

Per le applicazioni successive, registriamo le formule relative al propagatore del fermione.

$$\begin{aligned} i(S_F)_{\alpha\beta}(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ipx}\, (i\tilde{S}_F)_{\alpha\beta}(p) = \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ipx}\, \frac{i\left(\not{p}+m\right)_{\alpha\beta}}{p^2-m^2+i\epsilon} \end{aligned} \tag{5.59}$$

Possiamo semplificare l' espressione della trasformata di Fourier di S_F usando la relazione:

$$\left(\not{p}+m\right)\left(\not{p}+m\right) = p^2+m^2 \tag{5.60}$$

per scrivere:

$$i(S_F)_{\alpha\beta}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ipx} \left(\frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon}\right)_{\alpha\beta} \tag{5.61}$$

5.2.2 Il teorema di spin e statistica

Il teorema di spin e statistica, secondo cui particelle di spin intero sono descritte da campi commutanti, mentre particelle di spin semintero da campi anticommutanti, è uno dei pochi risultati esatti della teoria dei campi. In questa sezione verifichiamo che la teoria quantistica di un campo di Dirac libero necessariamente richiede che ψ, $\bar{\psi}$ siano grandezze anticommutanti, e che al contrario nella teoria del campo scalare libero la ϕ è necessariamente una grandezza commutante. Chiaramente questa verifica non è una dimostrazione generale del teorema, che si applica anche al caso di campi in interazione con spin arbitrario.

Nel caso della teoria di Dirac scriviamo in forma più esplicita il secondo membro della (5.57) utilizzando la (3.68).

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\, T\left(\psi_\alpha(x)\,\bar{\psi}_\beta(y)\right)|0\rangle \\
&\quad= \frac{(i\partial\!\!\!/ + m)_{\alpha\beta}}{(2\pi)^3}\int d^3p\,\frac{e^{i\vec{p}\,(\vec{x}-\vec{y})}}{2\omega_p}\left(e^{-i\omega_p(t_x-t_y)}\theta(t)+e^{i\omega_p(t_x-t_y)}\theta(-t)\right) \\
&\quad= \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\,\frac{e^{-ip(x-y)}(p\!\!\!/+m)_{\alpha\beta}}{2\omega_p} & (t_x > t_y) \\ \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\,\frac{e^{ip(x-y)}(-p\!\!\!/+m)_{\alpha\beta}}{2\omega_p} & (t_x < t_y) \end{cases}
\end{aligned}$$

Nel termine con frequenze negative $e^{i\omega_p(t_x-t_y)}$ abbiamo cambiato segno alla variabile di integrazione $\vec{p}$.

Nei passi che seguono useremo le proprietà degli operatori di proiezione (vedi [2], app. A),

$$\frac{(p\!\!\!/+m)_{\alpha\beta}}{2m} = \sum_{r=1}^{2} u_{r\alpha}(\vec{p})\,\bar{u}_{r\beta}(\vec{p}); \qquad \frac{(-p\!\!\!/+m)_{\alpha\beta}}{2m} = -\sum_{r=1}^{2} v_{r\alpha}(\vec{p})\,\bar{v}_{r\beta}(\vec{p}) \tag{5.62}$$

e le proprietà di ortogonalità

$$\left(u_r^\dagger(\vec{q})\,u_s(\vec{q})\right) = \left(v_r^\dagger(\vec{q})\,v_s(\vec{q})\right) = \frac{\omega_q}{m}\delta_{rs}; \qquad \left(u_r^\dagger(\vec{q})\,v_s(-\vec{q})\right) = 0 \tag{5.63}$$

quindi, per $t_x > t_y$ otteniamo

$$\langle 0|\,\psi_\alpha(x)\,\bar{\psi}_\beta(y)\,|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\; e^{-ip(x-y)}\,\frac{m}{\omega_p}\sum_{r=1}^{2} u_{r\alpha}(\vec{p})\,\bar{u}_{r\beta}(\vec{p}), \tag{5.64}$$

e, per $t_x < t_y$,

$$-\langle 0|\,\bar{\psi}_\beta(y)\,\psi_\alpha(x)\,|0\rangle = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\; e^{ip(x-y)}\,\frac{m}{\omega_p}\sum_{r=1}^{2} v_{r\alpha}(\vec{p})\,\bar{v}_{r\beta}(\vec{p}) \tag{5.65}$$

dove il segno "-" a secondo membro deriva dall'operatore di proiezione per energie negative, mentre quello a primo membro deriva dalla anticommutatività dei campi.

Moltiplicando primo e secondo membro per γ^0, trasformiamo $\bar{\psi} \to \psi^\dagger$, $\bar{u} \to u^\dagger$ e $\bar{v} \to v^\dagger$, e le due equazioni divengono

$$\langle 0|\,\psi_\alpha(x)\,\psi_\beta^\dagger(y)\,|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\; e^{-ip(x-y)}\,\frac{m}{\omega_p}\sum_{r=1}^{2} u_{r\alpha}(\vec{p})\,u_{r\beta}^\dagger(\vec{p}) \tag{5.66}$$

$$\langle 0|\,\psi_\beta^\dagger(y)\,\psi_\alpha(x)\,|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\; e^{-ip(y-x)}\,\frac{m}{\omega_p}\sum_{r=1}^{2} v_{r\alpha}(\vec{p})\,v_{r\beta}^\dagger(\vec{p}) \tag{5.67}$$

è facile vedere che la anticommutatività è indispensabile. Consideriamo infatti la equazione (5.67), passando al limite $y \to x$, e con $\alpha = \beta$. Riesprimiamo anche il primo membro introducendo un sistema completo di stati $|X\rangle\langle X|$,

$$\langle 0|\psi_\alpha^\dagger(x)\,\psi_\alpha(x)\,|0\rangle = \sum_X \left|\langle X|\psi_\alpha(x)|0\rangle\right|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\,\frac{m}{\omega_p}\sum_{r=1}^{2}|v_{r\alpha}(\vec{p})|^2$$

Sia il primo membro che il secondo membro sono grandezze definite positive. Se avessimo considerato ψ, $\bar{\psi}$ come grandezze *commutanti* il secondo membro di questa equazione avrebbe un segno negativo (verrebbe a mancare il segno "-" a primo membro della eq. 5.65) e avremmo ottenuto un risultato assurdo. I campi di Dirac devono essere *anticommutanti*.

Alla conclusione opposta si arriva nel caso di un campo scalare. Consideriamo il caso di un campo scalare complesso (vedi sez. 3.4). E' facile verificare che sia nel caso commutante che nel caso anticommutante la funzione a due punti sarebbe data dalla equazione (3.68); nelle manipolazioni che hanno portato a quel risultato partendo dalla (3.23) abbiamo infatti sempre rispettato l'ordinamento delle varie grandezze. Se nella (3.68) consideriamo il caso $t_x < t_y$, otteniamo, nel caso di grandezze commutanti,

$$\langle 0|\phi^\dagger(y)\,\phi(x)\,|0\rangle \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\frac{e^{-ip(x-y)}}{2\omega_p}$$

e nel limite $y \to x$,

$$\langle 0|\phi^\dagger(x)\,\phi(x)\,|0\rangle \;=\; \sum_X \left|\langle X|\psi(x)|0\rangle\right|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\frac{1}{2\omega_p},$$

una eguaglianza tra grandezze definite positive. Nel caso *anticommutante* il cambiamento di segno a primo membro avrebbe portato a un risultato assurdo.

5.2.3 Stati ad una particella del campo di Dirac

Vogliamo adesso dimostrare che il campo di Dirac descrive due tipi di particelle — particella e antiparticella — ciascuna con due stati di polarizzazione. Per fare questo definiamo i seguenti operatori ottenuti dalle ψ, $\bar{\psi}$ con trasformate di Fourier spaziali proiettate sugli spinori u, v:

$$c_r(\vec{q};t) = \left(\frac{m}{(2\pi)^3\omega_q}\right)^{1/2}\sum_\alpha\int d^3x\,e^{-i\vec{q}\vec{x}}u_{r\alpha}^\dagger(\vec{q})\psi_\alpha(\vec{x},t); \tag{5.68}$$

$$c_r^\dagger(\vec{q};t) = \left(\frac{m}{(2\pi)^3\omega_q}\right)^{1/2}\sum_\alpha\int d^3y\,e^{i\vec{q}\vec{y}}\psi_\beta^\dagger(\vec{y},t)\,u_{r\beta}(\vec{q}); \tag{5.69}$$

$$d_r(\vec{q};t) = \left(\frac{m}{(2\pi)^3\omega_q}\right)^{1/2}\sum_\alpha\int d^3y\,e^{-i\vec{q}\vec{y}}\psi_\beta^\dagger(\vec{y},t)\,v_{r\beta}(\vec{q}) \tag{5.70}$$

$$d_r^\dagger(\vec{q};t) = \left(\frac{m}{(2\pi)^3\omega_q}\right)^{1/2}\sum_\alpha\int d^3x\,e^{i\vec{q}\vec{x}}v_{r\alpha}^\dagger(\vec{q})\psi_\alpha(\vec{x},t) \tag{5.71}$$

Naturalmente, come adesso dimostreremo, questi sono gli usuali operatori di creazione e distruzione per le particelle e le antiparticelle.

Dalle (5.66), (5.67), e le proprietà di ortogonalità (5.63), otteniamo

$$\langle 0|\, c_r(\vec{q};t_x)\, \psi^\dagger_\beta(y)\, |0\rangle = \left(\frac{m}{(2\pi)^3\omega_q}\right)^{1/2} e^{-i\omega_q t} e^{iqy}\, u^\dagger_{r\beta}(\vec{q}); \tag{5.72}$$

$$\langle 0|\, \psi^\dagger_\beta(y)\, d^\dagger_r(\vec{q};t_x)\, |0\rangle = \left(\frac{m}{(2\pi)^3\omega_q}\right)^{1/2} e^{i\omega_q t} e^{-iqy}\, v^\dagger_{r\beta}(\vec{q}); \tag{5.73}$$

come si verifica facilmente sostituendo a c, $d^\dagger$ le espressioni (5.68), (5.71), mentre

$$\langle 0|\, \psi^\dagger_\beta(y)\, c_r(\vec{q};t_x)\, |0\rangle = \langle 0|\, d^\dagger_r(\vec{q};t_x)\, \psi^\dagger_\beta(y)\, |0\rangle = 0; \tag{5.74}$$

Con passaggi analoghi, dalle (5.72), (5.73) otteniamo

$$\begin{aligned} \langle 0|\, c_r(\vec{q};t_x)\, c^\dagger_s(\vec{p};t_y)\, |0\rangle &= \delta^3(\vec{q}-\vec{p})\,\delta_{rs} e^{-i\omega_q(t_x-t_y)} \\ \langle 0|\, d_s(\vec{p};t_y)\, d^\dagger_r(\vec{q};t_x)\, |0\rangle &= \delta^3(\vec{q}-\vec{p})\,\delta_{rs} e^{-i\omega_q(t_y-t_x)} \end{aligned} \tag{5.75}$$

inoltre dalla (5.74),

$$\langle 0|\, c^\dagger_s(\vec{p};t_y)\, c_r(\vec{q};t_x)\, |0\rangle = \langle 0|\, d^\dagger_r(\vec{q};t_x)\, d_s(\vec{p};t_y)\, |0\rangle = 0,$$

da cui, con $s = r,\ \vec{p} = \vec{q},\ t_y = t_x = 0,$ e introducendo un insieme completo di stati,

$$\sum_X \left|\langle X|c_r(\vec{q})\,|0\rangle\right|^2 = \sum_X \left|\langle X|d_r(\vec{q})\,|0\rangle\right|^2 = 0$$

dove $c_r(\vec{q}) = c_r(\vec{q};\, t=0)$, $d_r(\vec{q}) = d_r(\vec{q};\, t=0)$. Quindi

$$c_r(\vec{q})|0\rangle = d_r(\vec{q})|0\rangle = 0 \tag{5.76}$$

Se adesso definiamo

$$|P;\vec{p},r\rangle = c^\dagger_r(\vec{p})|0\rangle; \qquad |A;\vec{p},r\rangle = d^\dagger_r(\vec{p})|0\rangle \tag{5.77}$$

sostituendo nella (5.72) (di cui prendiamo il complesso coniugato) e nella (5.73), in ambedue i casi con $t_x = 0$, otteniamo

$$\langle 0|\, \psi_\beta(y)\, |P;\vec{p},r\rangle = \left(\frac{m}{(2\pi)^3\omega_q}\right)^{1/2} e^{-ipy}\, u_{r\beta}(\vec{p}); \tag{5.78}$$

$$\langle 0|\, \psi^\dagger_\beta(y)\, |A;\vec{p},r\rangle = \left(\frac{m}{(2\pi)^3\omega_q}\right)^{1/2} e^{-ipy}\, v^\dagger_{r\beta}(\vec{p}); \tag{5.79}$$

Queste ci dicono che $|P;\vec{p},r\rangle$, $|A;\vec{p},r\rangle$ sono stati di impulso $\vec{p}$ e di energia $\omega_p = (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}$, quindi stati a una particella. I due stati di polarizzazione associati alla variabile $r = 1,2$ possono essere scelti come stati di elicità definita. La equazione (5.75), con $t_x = t_y = 0$ fissa la normalizzazione degli stati:

$$\langle P;\vec{p},r\,|\,P;\vec{q},s\rangle = \langle A;\vec{p},r\,|\,A;\vec{q},s\rangle = \delta_{rs}\delta(\vec{p}-\vec{q}) \tag{5.80}$$

Gli stati $|P\rangle$ e $|A\rangle$ sono necessariamente differenti: infatti la funzione a due punti $\langle 0|T(\psi\ \psi)|0\rangle$ si annulla (eq 5.58), e da questo possiamo ottenere, con un lavoro analogo a quello svolto sinora, che

$$\langle 0|\, c_s(\vec{p};t_y)\, d^\dagger_r(\vec{q};t_x)\, |0\rangle = \langle P;\vec{p},s|A;\vec{q},r\rangle = 0 \tag{5.81}$$

Gli stati di particella $|P\rangle$ e di antiparticella $|A\rangle$ sono quindi ortogonali e necessariamente differenti.

In conclusione abbiamo visto che il formalismo funzionale permette di ricostruire lo spettro degli stati a una particella della teoria e il ruolo, già ben noto, degli operatori di creazione e distruzione.

Capitolo 6

TEORIA DELLE PERTURBAZIONI PER LE FUNZIONI DI GREEN: INTERAZIONE $\lambda\phi^4$

Nei Capitoli precedenti abbiamo applicato il metodo della somma sui cammini a teorie di campo molto semplici, in particolare a campi scalari reali o complessi *liberi*, che corrispondono a particelle di spin zero, a campi di particelle di spin 1/2, ad esempio l'elettrone, e di spin 1 e massa nulla, il fotone. In ogni caso è solamente nel caso di campi liberi che si può portare a conclusione il calcolo delle varie grandezze che caratterizzano la teoria, in particolare le funzioni di Green e il funzionale generatore. Per campi *liberi* si intende parlare di campi che descrivono particelle che non interagiscono tra loro. Questo si traduce nella richiesta che il Lagrangiano non contenga termini che sono il prodotto di più di due campi, e a questo tipo di lagrangiano corrispondono equazioni del moto lineari nei campi: l' equazione di Klein-Gordon, per il campo scalare:

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0,$$

le equazioni di Dirac e di Maxwell, per campi di spin /2 e 1 (massa nulla), rispettivamente.

In tutti questi casi la soluzione generale delle eq. del moto è data da una sovrapposizione di onde piane, che corrispondono ai diversi possibili stati di impulso definito delle particelle. In tutti i casi interessanti la situazione è molto più complessa: il lagrangiano contiene termini del terzo o quarto ordine (o di ordine ancora superiore), le equazioni del moto non sono lineari e si ottengono teorie non risolvibili esattamente. Si ricorre allora a metodi approssimati, tra cui in primo luogo la teoria delle perturbazioni.

Anche se in questo corso vogliamo sopratutto occuparci di elettrodinamica quantistica, cominciamo con il considerare il caso semplice di un campo scalare reale con una interazione $\lambda\phi^4$, e cioé con un lagrangiano

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\,\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 \tag{6.1}$$

cui corrisponde una equazione del moto non lineare,

$$(\Box + m^2)\phi(x) = -\frac{1}{3!}\lambda\phi^3$$

di cui non si conosce una soluzione generale nemmeno a livello classico.

6.1 Lo sviluppo perturbativo del funzionale generatore e i diagrammi di Feynman

Possiamo esprimere, almeno formalmente, le grandezze di interesse fisico come serie di potenze nella *costante d'accoppiamento* λ, la cosidetta *serie perturbativa*. In particolare possiamo esprimere le funzioni di Green come serie di potenze in λ. Se λ è piccolo, i primi termini di questa serie potranno dare una buona approssimazione della grandezza di interesse fisico.

Per procedere in questa direzione, si suddivide il lagrangiano in due termini,

$$\mathscr{L}(\phi,\partial_\mu\phi) = \mathscr{L}^0(\phi,\partial_\mu\phi) + \mathscr{L}^1(\phi) \tag{6.2}$$

dove $\mathscr{L}^0$ è il lagrangiano libero, ad esempio quello studiato nella sezione 3.3, $\mathscr{L}^1$ un termine di interazione[1]. Il funzionale generatore sarà allora (eq. 3.19)

$$Z[J] = \int D[\phi(x)] \exp\left(i\int d^4x \mathscr{L}^1(\phi)\right) \exp\left(i\int d^4x \left(\mathscr{L}^0(\phi,\partial_\mu\phi) - \phi(x)J(x)\right)\right),$$

che possiamo riscrivere (vedi eq. 3.22) come

$$Z[J] = \exp\left(i\int d^4x \mathscr{L}^1\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right) Z^0[J], \tag{6.3}$$

dove $Z^0[J]$ è il funzionale d'azione ottenuto dal lagrangiano imperturbato $\mathscr{L}^0$. Nel caso della teoria $\lambda\phi^4$, eq. (6.1), $Z^0[J]$ è quello dalla (3.62), che riportiamo per convenienza,

$$Z^0[J] = \exp\left(\frac{-i}{2}\iint d^4x\, d^4y\, J(x)\,\Delta_F(x-y)\,J(y)\right) \tag{6.4}$$

mentre uno sviluppo formale del funzionale generatore in potenze di λ è dato da

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \exp\left(\frac{-i\lambda}{4!}\int d^4x \left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right) Z^0[J] = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^n}{(4!)^n n!}\left(\int d^4x \left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right)^n Z^0[J] = \\
&= Z^0[J] - i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x \left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 Z^0[J] + \\
&\quad - \frac{\lambda^2}{2(4!)^2}\iint d^4x\, d^4y \left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 \left(i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^4 Z^0[J] + \ldots
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Per procedere col calcolo, ordine per ordine, dobbiamo eseguire materialmente le derivate funzionali. Notiamo che (eq. 6.4)

$$i\frac{\delta}{\delta J(x)} Z^0[J] = \int d^4y\, \Delta_F(x-y)\, J(y)\, Z^0[J] = \int d^4y\, \Delta_F(x-y)\, J(y)\, Z^0[J] \tag{6.6}$$

[1]Abbiamo supposto che $\mathscr{L}^1$ dipenda dai campi e non dalle loro derivate, una limitazione che semplifica i seguenti sviluppi formali ma che può essere superata senza particolari difficoltà. Pure per semplicità considereremo quì il caso di un singolo campo

La prima derivata che si esegue "cala" un fattore $\Delta_F J$ dall'esponenziale, mentre quelle successive possono "calare" ulteriori fattori, o "catturare" la J da un fattore $\Delta_F J$ "calato" da una derivata precedente, ad esempio per la derivata seconda

$$i\frac{\delta}{\delta J(x')}\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}Z^0[J]\right)=\left(\int d^4y'\,\Delta_F(x'-y')\,J(y')\right)\left(\int d^4y\,\Delta_F(x-y)\,J(y)\right)Z^0[J]+ \\ +i\Delta_F(x-x')\,Z^0[J] \tag{6.7}$$

Per dominare meglio la complicazione di questi calcoli, che cresce rapidamente di derivata in derivata, si ricorre ad una rappresentazione grafica. Ad ogni fattore $(i\delta/\delta J(x))^4$ corrisponde un punto, detto "vertice" da cui escono quattro linee. Ogni linea può finire in un altro vertice di cui ha "catturato" una J (o nello stesso vertice se cattura una J prodotta da una precedente derivata), oppure in un pallino, che rappresenta una J non catturata da altre derivate. Nel primo caso la linea (che diremo "linea interna") corrisponde a un propagatore $i\Delta_F$, nel secondo (linea "esterna") a un fattore $\Delta_F J$. Ad esempio i due termini della derivata seconda possono essere rappresentati dai due diagrammi della figura 6.1. Naturalmente in questo caso da ciascuno dei due punti x, x' esce una sola linea. Per unificare la descrizione dei due tipi di linee ci conviene riscrivere il termine che corrisponde a una linea che termina in un pallino come $\Delta_F J = (i\Delta_F)(-iJ)$ di modo che ad ogni linea, interna o esterna, corrisponda un fattore $i\Delta_F$.

Figura 6.1: Rappresentazione grafica dei due termini della eq. (6.7). I pallini grandi tratteggiati corrispondono ciascuno ad un fattore $-iJ$.

Al termine di ordine λ della $Z[J]$ (eq. 6.5) corrisponderanno diagrammi con un singolo vertice, e ci si convince facilmente che le sole possibilità sono i diagrammi (a,b,c) della figura 6.2. Il diagramma (a), dove tutte le J sono state "catturate", e che è privo di linee esterne, viene detto un diagramma *vuoto-vuoto*.

Il diagramma (b) rappresenta una modificazione al propagatore di una singola particella, che all'ordine λ^0 è quello che abbiamo calcolato in precedenza (sezione 3.3), e che potremmo rappresentare come diagramma senza vertici, come in (d). Anche su questo tema torneremo nel seguito. Intanto però diamo una occhiata ai diagrammi dello stesso tipo che si incontrano al secondo ordine pertubativo, nella figura 6.3. Sorge il sospetto che il diagramma (a) di questa figura sia, assieme a (d) e (b) della figura precedente, l'inizio di una serie interessante. Sospetto come vedremo del tutto giustificato.

Il diagramma (c) della figura 6.2, infine, rappresenta lo scattering di due particelle. Come vedremo questo è direttamente connesso all'elemento della matrice S che descrive questo processo, o meglio alla approssimazione al primo ordine λ a questo processo. Anche in questo caso esistono correzioni di ordine superiore, al secondo ordine quelli della figura 6.4

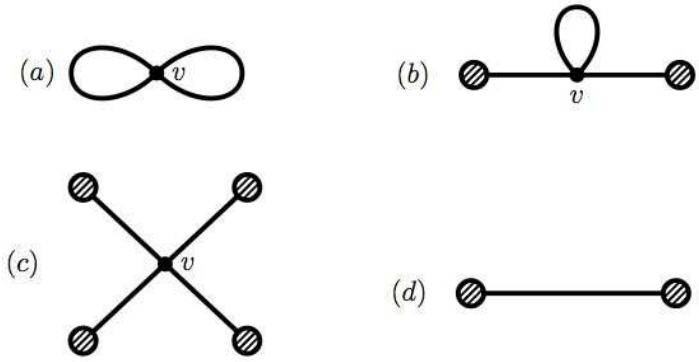


Figura 6.2: I diagrammi al primo ordine perturbativo

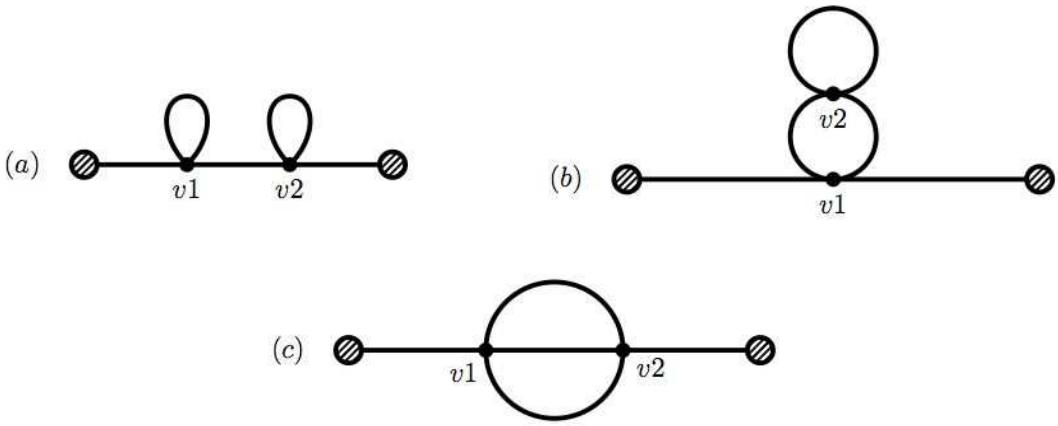


Figura 6.3: Correzioni al propagatore al secondo ordine perturbativo

La corrispondenza tra diagrammi della teoria $\lambda\phi^4$ e termini in $Z[J]$ si ottiene con alcune semplici regole:

$$\begin{array}{ll} \text{pallino} & -i\int d^4x\, J(x) \\ \text{vertice} & \dfrac{-i\lambda}{4!}\int d^4v \\ \text{linea da } x \text{ a } y & i\Delta_F(x-y) \end{array} \tag{6.8}$$

a queste si deve aggiungere una regola per calcolare il fattore combinatorio da applicare al contributo di ciascun diagramma. Nel caso della teoria $\lambda\phi^4$ quest'ultima regola è parecchio più complicata che nel caso della elettrodinamica quantistica. Nel nostro contesto, in cui la $\lambda\phi^4$ ci serve come modello semplice per la QED, conviene soprassedere a questa discussione. È sempre possibile, una volta iden-

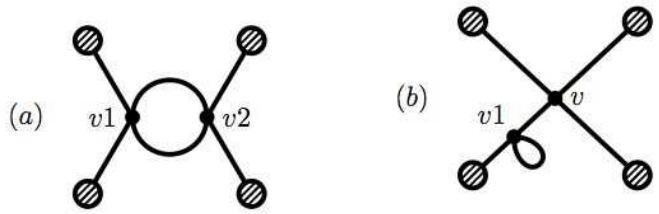


Figura 6.4: Correzioni al vertice al secondo ordine perturbativo

tificata — con le regole che abbiamo dato — la forma di un particolare contributo alla $Z[J]$, tornare alla (6.5) per ottenere il fattore combinatorio corretto.

A ogni vertice o pallino si associa un punto nello spazio-tempo (x, v), su cui viene eseguita una integrazione, e l'argomento delle Δ_F è la differenza tra le posizioni degli estremi, siano essi vertici o pallino. Quindi al diagramma (c) della figura 6.2 corrisponde un termine in $Z[J]$ che possiamo chiamare D_1 (è il primo diagramma che calcoliamo!)

$$\begin{aligned} D_1[J] = (-i)^4 \int d^4x_1\, J(x_1) \int d^4x_2\, J(x_2) \int d^4x_3\, J(x_3) \int d^4x_4\, J(x_4) \quad \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 v \\ (i)^4 \Delta_F(x_1 - v)\Delta_F(x_2 - v)\Delta_F(x_3 - v)\Delta_F(x_4 - v) \end{aligned} \tag{6.9}$$

che rappresenta il primo ordine in λ del termine in $Z[J]$ proporzionale a J^4. Le correzioni di ordine λ^2 sono date dai diagrammi della fig. 6.4; (a) corrisponde a

$$\begin{aligned} D_2[J] = (-i)^4 (6^2) \int d^4x_1\, J(x_1) \int d^4x_2\, J(x_2) \int d^4x_3\, J(x_3) \int d^4x_4\, J(x_4) \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)^2 \iint d^4 v_1 d^4 v_2 \\ (i)^6 \Delta_F(x_1 - v_1)\Delta_F(x_2 - v_1)\Delta_F(x_3 - v_2)\Delta_F(x_4 - v_2)\Delta_F(v_1 - v_2)\Delta_F(v_1 - v_2) \end{aligned}$$

dove (6^2) è un fattore combinatorio. Avremmo potuto direttamente ottenere questi risultati , incluso il fattore (6^2), isolando i termini J^4 nella eq. (6.5). Lasciamo questo compito ai lettori come esercizio. Del diagramma (b) della figura 6.4 discuteremo a parte: si tratta di una correzione sulle linee esterne.

6.2 Diagrammi e regole di Feynman per le funzioni di Green

Consideriamo la funzione di Green del campo scalare reale a $2k$ punti (nella teoria con interazione $\lambda\phi^4$ si ottiene un risultato non nullo solo per un numero pari di punti[2]). Riassumendo le formule

[2]Il lagrangiano di questa teoria, eq. (6.1), è simmetrico sotto l'operazione $\phi \to -\phi$. Deve quindi esistere un operatore unitario $\mathbf{P}$ sullo spazio degli stati, tale che $\mathbf{P}\phi\mathbf{P} = -\phi$. Nel linguaggio degli operatori di creazione e distruzione si verifica facilmente che se $|n\rangle$ è un stato ad n particelle, $\mathbf{P}|n\rangle = (-1)^n|n\rangle$. Dato che il vuoto ($n$=0) è pari, ne segue che $\langle n|\phi|0\rangle = 0$ se n è pari.

precedenti, abbiamo:

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_{2k}) = \int D[\phi(x)]\phi(x_1)\phi(x_2)\ldots\phi(x_{2k}) \exp[i\int d^4x \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu\phi)] =$$
$$= \left[(i\frac{\delta}{\delta J(x_1)})(i\frac{\delta}{\delta J(x_2)})\ldots(i\frac{\delta}{\delta J(x_{2k})})Z[J]\right]_{J=0} \tag{6.10}$$

ed inoltre, secondo lo sviluppo perturbativo:

$$Z[J] = \int D[\phi(x)]\exp[i\int d^4x\, \mathscr{L}^1(\phi)] \exp[i\int d^4x\, \mathscr{L}^0 - i\int d^4x J(x)\phi(x)] =$$
$$= \exp[i\int d^4x\, \mathscr{L}^1(i\frac{\delta}{\delta J(x)})]Z^0[J] = \sum_n (\frac{i}{n!})^n \left[\int d^4x\, \mathscr{L}^1(i\frac{\delta}{\delta J(x)})\right]^n Z^0[J] \tag{6.11}$$

con:

$$Z^0[J] = \exp\left[\frac{-i}{2}\int\int d^4x\, d^4y\, J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right] = \exp\left[\frac{-i}{2}(J\Delta_F J)\right] \tag{6.12}$$

Lo sviluppo perturbativo di G prende quindi la forma:

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_{2k}) = \sum_n G^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_{2k});$$
$$G^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_{2k}) =$$
$$= \left\{(i\frac{\delta}{\delta J(x_1)})(i\frac{\delta}{\delta J(x_2)})\ldots(i\frac{\delta}{\delta J(x_{2k})})\,\frac{1}{n!}\left[i\int d^4x\, \mathscr{L}^1(i\frac{\delta}{\delta J(x)})\right]^n Z^0[J]\right\}_{J=0} \tag{6.13}$$

Poiché dobbiamo porre alla fine $J = 0$, nello sviluppo di Z^0 in potenze di $(J\Delta_F J)$ conta solo il termine di grado pari al numero di derivate funzionali che compaiono nella eq. (6.13). Specializzandoci al caso dell' interazione $\lambda\phi^4$, possiamo scrivere, in conclusione:

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_{2k}) =$$
$$= (i\frac{\delta}{\delta J(x_1)})(i\frac{\delta}{\delta J(x_2)})\ldots(i\frac{\delta}{\delta J(x_{2k})})\,\frac{1}{n!}\left[i\int d^4x\,\frac{\lambda}{4!}(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4\right]^n \cdot$$
$$\cdot\frac{1}{M!}\left[\frac{-i}{2}(J\Delta_F J)\right]^M \tag{6.14}$$

con $M = k + 2n$.

Le derivate funzionali possono essere eseguite, naturalmente, in molti modi diversi. Ciascuno di essii può essere rappresentato con un *grafico di Feynman*, un grafico nello spazio-tempo in cui M linee, i propagatori $i\Delta_F$, connettono i punti $x_1, x_2, \ldots, x_{2k}$ tra loro e/o con gli n punti in cui sono localizzate le interazioni, i *vertici*. Ciascuno di questi grafici è associato ad un' ampiezza che è il prodotto di propagatori, costanti di accoppiamento λ e fattori numerici, determinati dalla struttura della (6.14). Esplicitamente, possiamo vedere dalla (6.14) che:

- ogni volta che due derivate agiscono sullo stesso propagatore, otteniamo un fattore 2 e quindi il risultato è un fattore $i\Delta_F$ calcolato nei punti associati dalle derivate funzionali in questione;

- i ruoli dei propagatori possono essere permutati senza cambiare il risultato: questo semplifica il fattore $1/M!$;
- similmente, i ruoli dei vertici possono essere permutati ottenendo $n!$ contributi identici, che semplifica il fattore $1/n!$

Le considerazioni appena svolte si riassumono in prescrizioni semplici ed eleganti per ottenere la funzione di Green di $2k$ punti all' ordine n della teoria delle perturbazioni, che prendono il nome di *regole di Feynman*.

Grafici di Feynman Iniziamo con l' individuazione delle ampiezze indipendenti che contribuiscono alla funzione di Green, costruendo i grafici di Feynman corrispondenti.

- Fissiamo i punti esterni (x_1, x_2,.., x_{2k}) ed i punti (x, y, z,...) dove sono localizzate le interazioni (vertici);
- disegnamo i grafici in cui M linee connettono tra loro punti esterni e vertici in tutti i modi topologicamente indipendenti;

Regole di Feynman Ad ogni grafico è associata un' ampiezza, secondo le regole seguenti.

- un fattore $i\Delta_F(u-v)$ per ogni linea che inizia nel punto u e finisce in v;
- un fattore $i\lambda$ per ogni vertice;
- un fattore numerico, da calcolare caso per caso, che nasce dalla incompleta cancellazione dei fattori $1/4!$ nei vertici con la molteplicità dei modi in cui si eseguono le derivate corrispondenti al grafico;
- integriamo l' ampiezza sulle coordinate di tutti i vertici;
- la funzione di Green è la somma delle ampiezze corrispondenti a ciascun grafico.

Diamo come esempio il calcolo della funzione a due e quattro punti al primo ordine in λ.

Calcolo di $G^{(1)}(x_1,x_2)$. Con un vertice e due punti esterni possiamo costruire due grafici indipendenti, Fig. 6.5. Calcoliamo adesso i fattori numerici relativi ai due grafici eseguendo esplicitamente le derivate funzionali (per brevità scriviamo 1, 2 al posto di $x_{1,2}$):

$$G^{(1)}(1,2) = (i\frac{\delta}{\delta J(1)})(i\frac{\delta}{\delta J(2)})\frac{i\lambda}{4!}(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4\ \frac{1}{3!}[\frac{-i}{2}\ (J\Delta_F J)]^3 \tag{6.15}$$

Eseguiamo le derivate rispetto a J(1) e J(2). Le due derivate possono agire: (a) sullo stesso propagatore, (b) su propagatori diversi:

$$\begin{aligned}
G_{2a} &= i\Delta_F(1-2)\ \frac{i\lambda}{4!}(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4\ \frac{1}{2!}(\frac{-i}{2}\ J\Delta_F J)^2;\\
G_{2b} &= \frac{i\lambda}{4!}(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4 \times\\
&\times \int\int d^4u d^4v\ [i\Delta_F(1-u)(-iJ(u))]\ [i\Delta_F(2-v)(-iJ(v))]\ (\frac{-i}{2}\ J\Delta_F J)
\end{aligned} \tag{6.16}$$

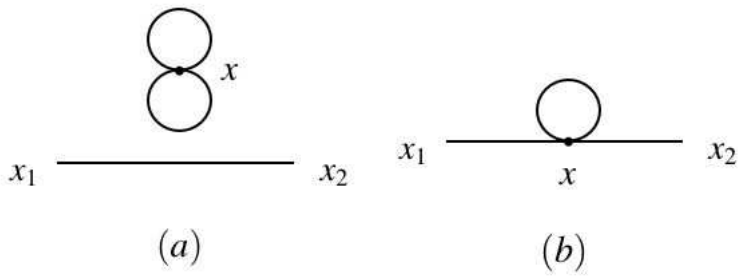


Figura 6.5: Grafici di Feynman al primo ordine per la funzione di Green a due punti.

Nel caso di G_{2a}, eseguiamo una prima derivata e troviamo:

$$G_{2a} = i\Delta_F(1-2)\ \frac{i\lambda}{4!}(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^3 \int d^4u\ \Delta_F(x-u)J(u)[\frac{-i}{2}\ (J\Delta_F J)] \tag{6.17}$$

Una delle altre tre derivate deve agire su J(u), il che può avvenire in tre modi diversi, le altre due eliminano le correnti in ($J\Delta_F J$). Quindi:

$$G_{2a} = C_a[i\Delta_F(1-2)]\ (i\lambda)[i\Delta_F(0)]^2;\ \ C_a = \frac{3}{4!} = \frac{1}{8} \tag{6.18}$$

Nel caso di G_{2b}, due derivate devono operare sulle correnti J(u) e J(v), che può avvenire in $4\cdot 3$ modi diversi, mentre le altre due agiscono su ($J\Delta_F J$). In totale, troviamo quindi:

$$G_{2b} = C_b\ i\lambda\ [i\Delta_F(1-x)]\ [i\Delta_F(2-x)i\Delta_F(0);\ \ C_b = \frac{12}{4!} = \frac{1}{2} \tag{6.19}$$

Calcolo di $G^{(1)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Riportiamo in Fig. 6.6 i grafici di Feynman della funzione a quattro punti al primo ordine.

Il calcolo esplicito si effettua a partire dall' espressione:

$$G^{(1)}(1,2,3,4) = (i\frac{\delta}{\delta J(1)})(i\frac{\delta}{\delta J(2)})(i\frac{\delta}{\delta J(3)})(i\frac{\delta}{\delta J(4)})\frac{i\lambda}{4!}(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4\ \frac{1}{4!}[\frac{-i}{2}\ (J\Delta_F J)]^4 \tag{6.20}$$

Il grafico (a) corrisponde a far agire due a due le derivate rispetto alle correnti dei punti esterni su due propagatori. Otteniamo cosí:

$$G_{4a} = \frac{i\lambda}{4!}\ i\Delta_F(1-2)\ i\Delta_F(3-4)(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4\ \frac{1}{2!}[\frac{-i}{2}\ (J\Delta_F J)]^2\ +\ (2\leftrightarrow 3)\ +\ (2\leftrightarrow 4) \tag{6.21}$$

Ripetendo l' argomento che ci ha portato alla (6.18) troviamo quindi:

$$G_{4a} = \frac{3}{4!}\ i\lambda\ i\Delta_F(1-2)\ i\Delta_F(3-4)[i\Delta_F(0)]^2\ +\ (2\leftrightarrow 3)\ +\ (2\leftrightarrow 4) \tag{6.22}$$

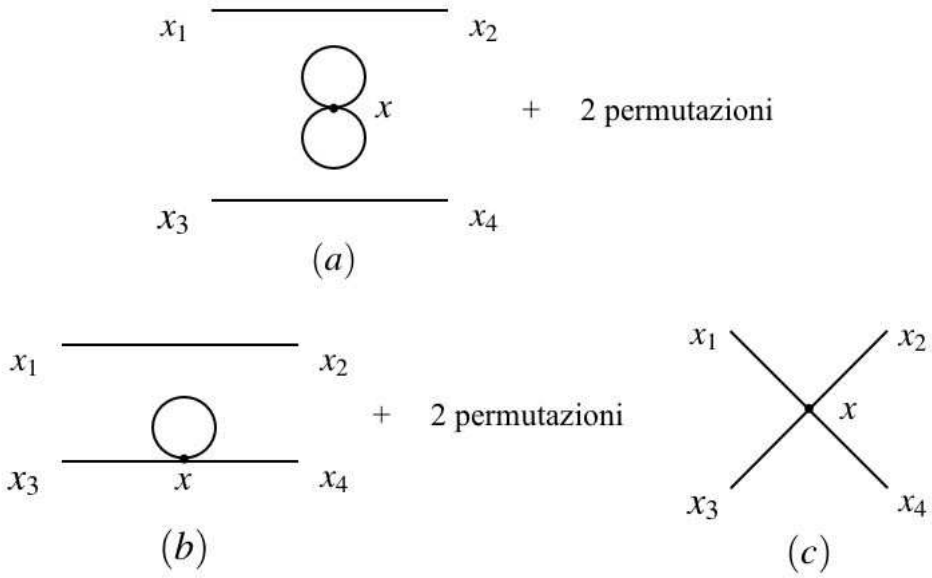


Figura 6.6: Grafici di Feynman al primo ordine per la funzione di Green a quattro punti.

Per il grafico (b), solo due delle derivate rispetto alle correnti nei punti esterni vanno sullo stesso propagatore. Troviamo quindi:

$$G_{4b} = \frac{i\lambda}{4!}\, i\Delta_F(1-2)(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4 \times$$
$$\times \int\int d^4u d^4v \Delta_F(3-u)\Delta_F(4-v)J(u)J(v)\ [\frac{-i}{2}\ (J\Delta_F J)] + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4) \tag{6.23}$$

Procedendo come per la (6.19) troviamo quindi:

$$G_{4b} = \frac{12}{4!}\ i\lambda\ i\Delta_F(1-2)\ i\Delta_F(3-x)\ i\Delta_F(4-x)\ i\Delta_F(0) + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4) \tag{6.24}$$

Calcoliamo infine il grafico (c). In questo caso le derivate rispetto alle correnti nei punti esterni devono agire tutte su propagatori diversi. Troviamo quindi:

$$G_{4c} = \frac{i\lambda}{4!}(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4 \int\int\int\int d^4u\, d^4v\, d^4w\, d^4z$$
$$\Delta_F(1-u)\Delta_F(2-v)\Delta_F(3-w)\Delta_F(4-z)\ J(u)J(v)J(w)J(z) \tag{6.25}$$

In questo caso la cancellazione del fattore $1/4!$ è completa e troviamo:

$$G_{4c} = i\lambda\ i\Delta_F(1-x)i\Delta_F(2-x)i\Delta_F(3-x)i\Delta_F(4-x). \tag{6.26}$$

A chiusura della Sezione, riportiamo alcuni commenti di ordine generale.

Grafici di Feynman e somma sui cammini. L' analisi delle funzioni di Green in termini dei grafici di Feynman corrisponde in pieno all' idea della somma sui cammini che abbiamo introdotto all' inizio del volume. Possiamo interpretare, ad esempio, la funzione di Green a 4 punti come l' ampiezza quantistica di un processo nello spazio-tempo in cui due particelle vengono create in x_1 ed x_2 ed assorbite in x_3 ed x_4. Ogni grafico indipendente, fissate le posizioni dei vertici, corrisponde ad un cammino possibile e l' ampiezza corrispondente è data dal prodotto delle ampiezze delle diverse componenti del cammino: ampiezza di propagazione, $i\Delta_F(x-y)$, e interazione, $i\lambda$. Lo sviluppo perturbativo corrisponde ad avere una, due, ..., n, interazioni lungo i cammini delle diverse particelle.

Le coordinate dei punti esterni non determinano quante interazioni avvengono nel processo né fissano i punti dello spazio-tempo dove avvengono le interazioni stesse. Secondo i principi generali della Meccanica Quantistica, dobbiamo quindi integrare sullo spazio-tempo le coordinate delle interazioni (vertici) per ciascun grafico e sommare le ampiezze dei grafici indipendenti.

Contrazioni nello stesso vertice. Quando due derivate funzionali in una lagrangiana di interazione catturano le due J di un termine $(J\Delta_F J)$, nel grafico corrispondente appare una linea che si chiude sul vertice stesso, come nella Fig. 6.2, (b). Il circuito chiuso corrisponde all' inserzione di un termine di interazione con due potenze in meno dei campi, in questo caso della forma: $Cost \cdot \phi^2$. Poichè la lagrangiana *gà contiene* termini con tutte le potenze dei campi fino a quattro, l' inserzione corrisponde a ridefinire le costanti già presenti nella lagrangiana stessa. Il risultato è una nuova, semplice, regola:

- Le contrazioni nello stesso vertice possono essere ignorate.

Nella formulazione di Dyson della matrice S, questa regola è soddisfatta automaticamente se si prende la lagrangiana di interazione come *prodotto normale* di campi , vedi [1].

6.3 Parti connesse e diagrammi vuoto-vuoto

Torniamo a considerare lo sviluppo perturbativo del funzionale generatore, Z[J].

I diagrammi che abbiamo mostrato nelle figure 6.2 – 6.4 sono tutti topologicamente connessi. In ciascuno di essi ci si può spostare da qualsiasi vertice o pallino a qualsiasi altro muovendosi lungo le linee del diagramma. Esistono anche diagrammi non connessi. Ad esempio tra i termini del secondo ordine in λ nella eq. (6.5) ne esiste uno in cui ciascuna delle otto derivate "cala" un fattore $\Delta_F J$, il che risulta semplicemente nel quadrato del termine della eq. (6.9). Questo termine è rappresentato dalla figura 6.7, un diagramma composto da due parti topologicamente separate centrate sui due vertici v_1, v_2. A un diagramma non connesso corrisponde un termine (un funzionale di J) che si fattorizza nel prodotto di due o più funzionali di J, e nel caso della figura 6.7 si ottiene[3] $(D_1[J])^2/2$.

Dal punto di vista fisico ciascuna delle due parti del diagramma nella fig. 6.7 rappresenta un processo di scattering tra due particelle. La combinazione delle due parti rappresenta due processi di scattering indipendenti tra loro: possiamo immaginare che il primo avvenga al CERN, il secondo a Frascati. L'ampiezza di probabilità per la combinazione di più processi indipendenti è semplicemente il prodotto delle ampiezze di ciascuno di essi, e la probabilità che tutti avvengano è il prodotto delle

[3] La giustificazione di questo risultato si troverà nella appendice B, eq. (B.14).

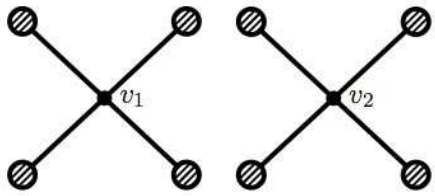


Figura 6.7: Un diagramma sconnesso al secondo ordine in λ.

singole probabilità. Non c'è altro da imparare dallo studio di processi indipendenti, quindi conviene concentrarci sui singoli processi, che corrispondono a diagrammi connessi.

Abbiamo visto che tramite la teoria delle perturbazioni il funzionale $Z[J]$ può essere espresso come una somma di diagrammi, di cui alcuni connessi, altri non connessi. È possibile definire un funzionale $W[J]$ che genera solo i diagrammi connessi,

$$W[J] = \sum_{\text{(diag. connessi)}} D_i[J] \tag{6.27}$$

Il rapporto tra $W[J]$ e $Z[J]$ è semplicemente dato da:

$$Z[J] = \exp(W[J]) \tag{6.28}$$

La dimostrazione di questo risultato è riportato nella appendice B.

Notiamo ancora che per $J = 0$ otteniamo

$$Z[0] = \exp(W[0]) \tag{6.29}$$

dove $W[0]$ corrisponde alla somma dei diagrammi connessi vuoto-vuoto, quelli che non hanno "pallino", gli unici che non si annullano per $J = 0$. Possiamo quindi scrivere

$$Z[J] = Z[0]\exp(W'[J]) \tag{6.30}$$

dove $W'[J]$ è la somma dei diagrammi connessi che non siano del tipo vuoto-vuoto, quindi dei diagrammi provvisti di gambe esterne. L'effetto dei diagrammi vuoto-vuoto sul funzionale generatore $Z[J]$ consiste quindi in una costante moltiplicativa $Z[0]$. Come si vede dalla (3.20) il fattore $Z[0]$ non contribuisce al calcolo delle funzioni di Green, e possiamo semplicemente tralasciarlo.

Possiamo applicare questo concetto direttamente alle funzioni di Green, definendo le funzioni di Green *connesse* tramite le derivate del funzionale $W[J]$, o in modo equivalente del funzionale $W'[J]$, dato che i due differiscono per una costante $W[0]$ che non contribuisce alle derivate:

$$\langle 0|T\left(\phi(x_1)\cdots\phi(x_N)\right)|0\rangle\Big|_{\text{Conn.}} = \frac{i\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{i\delta}{\delta J_N(x_N)}W[J]\Big|_{J=0} \tag{6.31}$$

Alla funzione di Green connessa ad N punti contribuiranno i diagrammi connessi con esattamente N linee esterne, quindi N fattori J. Se guardiamo alle regole per i diagrammi della (6.8), vediamo

che le derivate funzionali $i\delta/\delta J(x_k)$ della (6.31) sopprimono i fattori $-iJ(x)$ delle linee esterne, e fissano ad x_k la terminazione di ciascuna linea. Si passa quindi dai diagrammi per il funzionale generatore a quelli per la funzione di Green semplicemente sopprimendo i pallini e il relativo fattore, $-i\int d^4x\, J(x)$, e fissando l'estremità di ciascuna linea alla coordinata di uno dei campi presenti nella funzione di Green. Consideriamo ad esempio la funzione a quattro punti: il diagramma di ordine minore che vi contribuisce è il (c) della figura 6.2, da cui (vedi la eq. 6.9) otteniamo

$$\begin{aligned}&\langle 0|T\left(\phi(x_1)\cdots\phi(x_4)\right)|0\rangle\Big|_{\text{Conn.}} = \\ &= -i\lambda\int d^4v\,(i)^4\Delta_F(x_1-v)\Delta_F(x_2-v)\Delta_F(x_3-v)\Delta_F(x_4-v)\ +\mathcal{O}(\lambda^2)\end{aligned} \tag{6.32}$$

Notiamo che la derivata quarta a primo membro ha anche eliminato il fattore 1/4! della (6.9). A

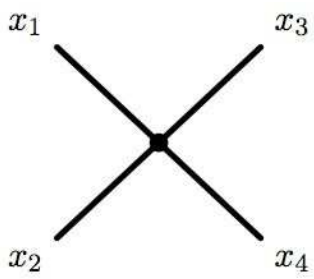


Figura 6.8: Il grafico di ordine λ per la funzione a quattro punti.

livello grafico possiamo rappresentare i diagrammi della funzione di Green sostituendo ai "pallini" l'indicazione delle coordinate dei punti in cui terminano le linee esterne, come ad esempio mostrato nella figura 6.8.

6.4 Funzione di Green a due punti in teoria delle perturbazioni.

Abbiamo già derivato in [9], la rappresentazione esatta della funzione a due punti in teoria dei campi nota come rappresentazione di Lehmann-Kallen.

Per la teoria di un campo scalare corrispondente a particelle di massa m, la rappresentazione L-K prende la forma:

$$G(x,y) = iZ\Delta_F(x-y,m^2) + \int_{(3m)^2}^{+\infty} dM^2\,\sigma(M^2)\; i\Delta_F(x-y,M^2) \tag{6.33}$$

dove $i\Delta_F(x-y,m^2)$ è il propagatore di una particella scalare libera di spin zero e massa m. La funzione $\sigma(M^2)$, la cosiddetta *funzione spettrale*, è definita positiva. In questa Sezione diamo una discussione della funzione a due punti nella teoria delle perturbazioni al secondo ordine, nella teoria scalare $\lambda\phi^4$.

Ripetiamo qui la lagrangiana data nella eq. (3.54)

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 \tag{6.34}$$

indicando peró con m_0 il coefficiente del termine quadratico in ϕ, per distinguerlo dalla massa fisica m che compare nella formula (6.33).

Possiamo definire m_0 come la massa che avrebbe la particella *nel limite* $\lambda \to 0$, una quantità chiaramente inosservabile, mentre m è la massa inerziale di una particella isolata, misurabile in linea di principio e determinata dalla posizione del polo nella trasformata di Fourier della funzione a due punti, (6.33). Il calcolo che segue mostra come, partendo dai grafici di Feynman intermini della massa nuda, si ricostruisce la funzione a due punti in termini della massa fisica o rinormalizzata. È il piú semplice caso del processo indicato come *rinormalizzazione* in teoria dei campi.

I relativi grafici di Feynman connessi sono riportati nella Fig. 6.9.

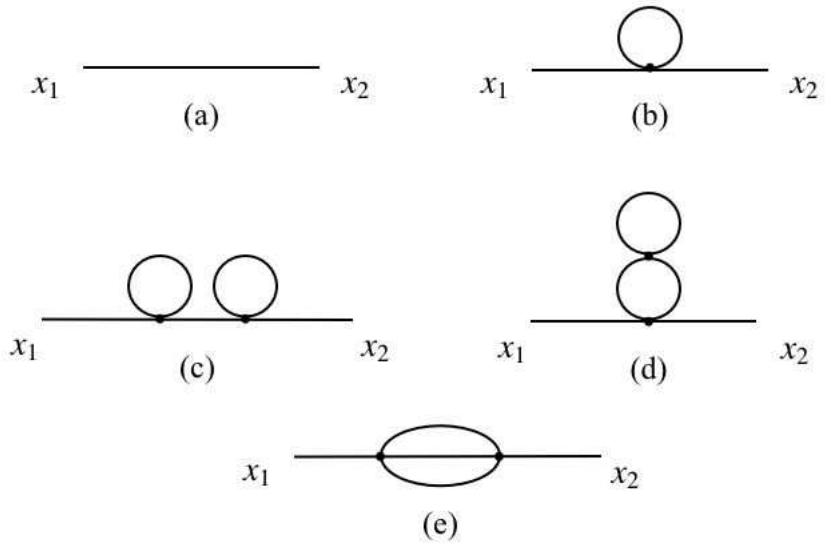


Figura 6.9: I diagrammi connessi per la funzione a due punti nella teoria $\lambda\phi^4$, al secondo ordine perturbativo.

Consideriamo la trasformata di Fourier:

$$\tilde{G}(p_1, p_2) = \int d^4x_1 d^4x_2\; e^{-i(p_1x_1)} e^{+i(p_2x_2)}\; G(x_1, x_2) \tag{6.35}$$

limitandoci, in un primo momento, ai termini al primo ordine in λ, Fig, 6.9, (a) e (b). Rifacendoci alle eq. (6.18) e (6.19), possiamo scrivere direttamente:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(p_1, p_2) &= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 - p_2)G_{(a+b)}(p_1); \\ G_{(a+b)}(p) &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2}(i\lambda C_1)\frac{i}{p^2 - m_0^2} + \mathscr{O}(\lambda^2) \end{aligned} \tag{6.36}$$

dove abbiamo posto:

$$C_1 = i\frac{1}{2}\Delta_F(0) \tag{6.37}$$

Nella (6.36) compare la *massa nuda*, m_0. Notiamo che il propagatore ha un polo doppio in m_0. Introduciamo adesso la *massa rinormalizzata*, m, scrivendo:

$$m_0^2 = m^2 + \delta m^2 \tag{6.38}$$

δm^2 deve dipendere da λ, in particolare deve essere $\delta m^2 = \mathcal{O}(\lambda)$ poiché $m^2 \to m_0^2$ se mandiamo $\lambda \to 0$. Possiamo sviluppare il primo termine nella (6.36) utilizzando la relazione:

$$\frac{1}{A+\epsilon} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A^2}\,\epsilon + \frac{1}{A^3}\,\epsilon^2 + \dots \tag{6.39}$$

e fermandoci al primo ordine in δm^2. Otteniamo:

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2} = \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2}\,\delta m^2 + \mathcal{O}(\lambda^2) \tag{6.40}$$

Se ci limitiamo al primo ordine in λ, trascurando termini di ordine λ^2, possiamo invece identificare m_0^2 con m^2 nel secondo termine della (6.36). In totale abbiamo quindi:

$$G_{(a+b)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2}[\delta m^2 - \lambda C_1] + \mathcal{O}(\lambda^2) \tag{6.41}$$

Secondo la rappresentazione L-K, la funzione di Green deve avere un polo semplice per $p^2 = m^2$, dove m è la *massa fisica*. Questo fissa $\delta m^2 = \lambda C_1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$. A questo ordine, otteniamo l' eq. (6.33) con:

$$Z = 1; \quad \sigma(M^2) = 0 \tag{6.42}$$

Estensione all' ordine λ^2. Possiamo determinare la forma del propagatore al secondo ordine abbastanza semplicemente, come segue.

I grafici in Fig, 6.9, (c), (d), (e) corrispondono ad aggiungere alla (6.36), rispettivamente, i termini:

$$\begin{aligned}
G_c &= \frac{i}{p^2 - m_0^2}\,(i\lambda C_1)\,\frac{i}{p^2 - m_0^2}\,(i\lambda C_1)\,\frac{i}{p^2 - m_0^2} \\
G_d &= \frac{i}{p^2 - m_0^2}\,(i\lambda^2 C_2)\,\frac{i}{p^2 - m_0^2} \\
G_e &= \frac{i}{p^2 - m_0^2}\,[i\lambda^2 F(p^2)]\,\frac{i}{p^2 - m_0^2}
\end{aligned} \tag{6.43}$$

In questi termini, che sono giá del secondo ordine, possiamo identificare m_0 con m.

Abbiamo indicato, come prima, con $i\lambda C_1$ la costante corrispondente alla singola bolla nelle Figure 6.9, (b) e (c), e con $i\lambda^2 C_2$ il contributo, sempre una costante, della doppia bolla in Fig. 6.9, (d). Il calcolo esplicito di G_e è alquanto piú difficile e non siamo ancora in grado di farlo. Tuttavia, ci basta

sapere che l' ampiezza corrispondente al circuito chiuso (*loop*) nella Fig. 6.9, (e) si può scrivere come $i\lambda^2 F(p^2)$, con F una funzione non triviale di p^2, regolare in $p^2 = m^2$.

Possiamo rappresentare la funzione $F(p^2)$ al modo seguente:

$$F(p^2) = F(m^2) + (p^2 - m^2)F'(m^2) + (p^2 - m^2)R(p^2) \tag{6.44}$$

dove $R(p^2)$ è una funzione regolare che *si annulla*[4] per $p^2 = m^2$.

Per quanto riguarda la (6.36), dobbiamo adesso sviluppare il primo termine fino al secondo ordine in δm^2 e il secondo termine fino al primo ordine. Otteniamo:

$$\begin{aligned} G_{a+b}(p^2) &= \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2}\,[\delta m^2 - \lambda C_1] + \\ &+ \frac{i}{(p^2 - m^2)^3}\,[(\delta m^2)^2 - 2\delta m^2\,(\lambda C_1)] \end{aligned} \tag{6.45}$$

Per quanto riguarda G_e, usando la rappresentazione (6.44), troviamo:

$$G_e = \frac{i}{(p^2 - m^2)^2}\,[-\lambda^2 F(m^2)] + \frac{i}{(p^2 - m^2)}\,[-\lambda^2 F'(m^2)] + \frac{i}{p^2 - m^2}\,[-\lambda^2 R(p^2)] \tag{6.46}$$

Ponendo tutto insieme, abbiamo:

$$\begin{aligned} G(p^2) &= \frac{i[1 - \lambda^2\,F'(m^2)]}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2}\,[\delta m^2 - \lambda C_1 - \lambda^2 C_2 - \lambda^2 F(m^2)] + \\ &+ \frac{i}{(p^2 - m^2)^3}\,[(\delta m^2)^2 - 2\delta m^2\,(\lambda C_1) + \lambda^2 C_1^2] + \\ &+ i\,\frac{-\lambda^2 R(p^2)}{p^2 - m^2} + \mathcal{O}(\lambda^3) \end{aligned} \tag{6.47}$$

Per cancellare il residuo nel doppio polo dobbiano adesso porre:

$$\delta m^2 = \lambda C_1 - \lambda^2 C_2 - \lambda^2 F(m^2) + \mathcal{O}(\lambda^3) \tag{6.48}$$

e con questa posizione, si cancella anche il residuo del polo triplo. Il risultato finale è quindi:

$$G(p^2) = \frac{i[1 - \lambda^2\,F'(m^2)]}{p^2 - m^2} + i\,\frac{-\lambda^2 R(p^2)}{p^2 - m^2} + \mathcal{O}(\lambda^3) \tag{6.49}$$

Abbiamo ottenuo una rappresentazione della funzione a due punti composta da un termine di polo (il primo) ed un termine regolare in $p^2 = m^2$, in quanto $R(m^2) = 0$. Il risultato ha la forma data nella (6.33) se identifichiamo:

$$\begin{aligned} &Z = 1 - \lambda^2\,F'(m^2); \\ &\mathcal{R}(p^2) = \frac{-\lambda^2 R(p^2)}{p^2 - m^2} = \int_{(3m)^2}^{+\infty} \frac{\sigma(M^2)}{p^2 - M^2}\,dM^2 \end{aligned} \tag{6.50}$$

[4] $(p^2 - m^2)R(p^2)$ è il resto di Taylor dello sviluppo al primo ordine di $F(p^2)$ in $p^2 = m^2$, ed è un infinitesimo di ordine superiore ripsetto a $p^2 - m^2$.

Uno studio piú approfondito mostra che la funzione al primo membro della (6.50) è una funzione analitica della variabile complessa p^2 con un taglio sull' asse reale positivo di p^2 che parte da $p^2 = (3m)^2$ e arriva a $+\infty$. Il secondo membro della (6.50) è quindi la familiare rappresentazione di Cauchy di una funzione analitica, come integrale della discontinuitá sul taglio. La discontinuitá è proprio la funzione spettrale $\sigma(M^2)$ che, come anticipato, risulta essere di $\mathscr{O}(\lambda^2)$. Esplicitamente:

$$\sigma(M^2) = \frac{i}{2\pi} \lim_{\epsilon \to 0} [\mathscr{R}(M^2 + i\epsilon) - \mathscr{R}(M^2 - i\epsilon)] \tag{6.51}$$

Capitolo 7

PROCESSI DI DIFFUSIONE, MATRICE S.

Possiamo descrivere un processo di collisione tra due particelle al modo seguente.

All'istante iniziale, indichiamolo con $-T/2$, le particelle sono preparate in uno stato corrispondente a due pacchetti d'onda localizzati in regioni dello spazio molto lontane tra loro. A tutti gli effetti, al tempo $-T/2$, possiamo trascurare l'interazione tra le due particelle.

Successivamente, il sistema evolve senza influenze dall'esterno per un tempo T, durante il quale le particelle interagiscono tra loro e danno luogo ai prodotti della collisione. Questi ultimi vengono rivelati, al tempo $+T/2$, da opportuni apparati sperimentali. Anche al momento della rivelazione, il sistema consiste di due particelle (o piú particelle, per collisioni ad energie relativistiche) molto lontane tra loro e quindi di nuovo non interagenti.

L'intervallo di tempo T durante il quale si svolge l'esperimento è, in genere, molto piú lungo dei tempi tipici su cui avviene l'interazione. T è determinato dalle dimensioni lineari degli apparati di produzione e rivelazione che sono macroscopiche, dell'ordine, diciamo, del metro. Quindi $T \simeq 10^{-9} - 10^{-8}$ secondi. L'interazione, invece, avviene quando le particelle sono a distanza di qualche Fermi l'una dall'altra (1 Fermi = 10^{-15} m) e quindi su tempi dell'ordine di 10^{-23} secondi, molto inferiore a T. A tutti gli effetti, il processo si svolge tra i tempi $t = \pm\infty$.

A differenza di quanto avviene nella Meccanica Classica, anche se partiamo da uno stato perfettamente definito non possiamo prevedere, in genere, il risultato di un particolare esperimento. Tutto quello che la Meccanica Quantistica puó dare sono le ampiezze di diffusione, numeri complessi i cui moduli quadri danno la probabilitá dei possibili risultati dell'esperimento. Le ampiezze di diffusione possono, a loro volta, essere descritte dagli elementi di matrice di un operatore, la *matrice S*, o matrice di scattering, che quindi è l'elemento centrale della teoria della diffusione.

Lo studio delle collisioni tra particelle rappresenta pressochè l'unico metodo di indagine a nostra disposizione per investigare la struttura delle interazioni fondamentali. Lo studio sperimentale della diffusione ed il calcolo teorico della matrice S sono quindi il punto di contatto tra teoria ed esperimento.

7.1 Stati ''in'' e stati ''out''

Come abbiamo detto, al tempo $-T/2$ lo stato iniziale del processo di diffusione è costituito da particelle separate tra loro e praticamente non interagenti. Possiamo descrivere questi stati con una sovrapposizione di onde piane, caratterizzate dalla quantitá di moto di ciascuna particella:

$$|p_1, \alpha; p_2, \beta > \quad \text{(al tempo t = −T/2)} \tag{7.1}$$

dove α e β rappresentano altri numeri quantici, in aggiunta alla quantitá di moto, eventualmente necessari per caratterizzare lo stato di moto delle particelle stesse (ad esempio le componenti dello spin lungo la direzione del moto).

Nella rappresentazione di Schroedinger, lo stato (7.1) evolve nel tempo in modo complicato, descrivendo una traiettoria nello spazio degli stati, traiettoria che è determinata dall'Hamiltoniana esatta del problema, H. La stessa traiettoria, nella rappresentazione di Heisenberg, è individuata da un vettore fisso, anch'esso determinato dalle quantitá di moto p_1 e p_2, che caratterizzano le condizioni del sistema al tempo $-T/2 \to -\infty$. Chiameremo questo stato uno stato ''in'' e lo indicheremo con:

$$|p_1, \alpha; p_2, \beta; in > \tag{7.2}$$

Il complesso di tutti gli stati di questo tipo, cioè degli stati di Heisenberg, con un numero arbitrario di particelle,[1] che si riducono ad onde piane per $t = -T/2 \to -\infty$, è la base ''in'', cfr. ad esempio [6] [7]) La base degli stati ''in'' costituisce, ovviamente, una base ortonormale. Ci possiamo chiedere se questa base sia anche completa.

In ultima analisi, questa domanda equivale a chiederci se possiamo raggiungere tutti gli stati di moto del sistema a partire da stati di particelle molto lontane tra loro. I processi di diffusione sono l'unico modo con cui possiamo studiare i sistemi microscopici, quindi la risposta non può che essere affermativa, ma con una precisazione importante che faremo tra un momento.

L' ipotesi che gli stati in siano un insieme completo di stati prende anche il nome di *Ipotesi asintotica* e si caratterizza con la relazione:

$$\sum_i |i; in >< i; in| = 1 \quad \text{(completezza ''in'')} \tag{7.3}$$

Naturalmente, nei casi in cui possiamo risolvere le equazioni del moto a partire dall'Hamiltoniana, possiamo anche decidere la composizione degli stati ''in'' ed accertare se la (7.11) è valida opure no. In alcune formulazioni assiomatiche della teoria dei campi, la condizione (7.11) è considerata uno degli assiomi di base.

Completezza degli stati in. Consideriamo dapprima il caso di una particella non relativistica in un potenziale assegnato, con uno spettro discreto per $E < 0$, e continuo per $E > 0$ (ad esempio un elettrone nel potenziale di un protone, considerato come una sorgente fissa).

Possiamo costruire pacchetti d'onda normalizzati sovrapponendo autostati con $E > 0$. E' immediato dimostrare che, per questi stati, il moto si svolge prevalentemente all'infinito, in quanto il valore

[1] Lo stato che non contiene alcuna particella, il cosidetto ''stato di vuoto'', è indicato con $|0$. ed è lo stato di energia minima, $E = 0$. Come sará discusso in seguito, lo stato di vuoto svolge un ruolo fondamentale nelle teorie di campo.

medio nel tempo della probabilitá di trovare la particella in una qualsiasi regione limitata dello spazio è zero (cfr. la discussione in [8]. Infatti:

$$|\psi(x,t)|^2 = \int\int dE dE' c(E)^* c(E') \Psi_E(x)^* \Psi_E(x) e^{+i(E-E')t} \tag{7.4}$$

ed inoltre, per $T \to \infty$:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt e^{+i(E-E')t} \to \frac{2\pi}{T}\delta(E'-E) \tag{7.5}$$

da cui:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt \int_V dx |\psi(x,t)|^2 = \frac{2\pi}{T}\int dE |c(E)|^2 \int_V dx |\Psi_E(x)|^2 \to 0 \tag{7.6}$$

Uno stato arbitrario del tipo (7.4), a tempi sufficientemente remoti, sará rappresentato da sovrapposizione di stati liberi, e quindi è raggiungibile dagli stati ''in''.

Al contrario, se il pacchetto d'onda è costruito come sovrapposizione delle autofunzioni dello spettro discreto:

$$|\psi(x,t)|^2 = \sum_{n,n'} c_n(E)^* c_{n'}(E') \Psi_n(x)^* \Psi_{n'}(x) e^{+i(E_n - E_{n'})t} \tag{7.7}$$

la (7.5) sarà rimpiazzata da:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt e^{+i(E_n - E_{n'})t} = \delta_{n,n'} \tag{7.8}$$

e la probabilitá media (7.6) è diversa da zero:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt \int_V dx |\psi(x,t)|^2 = \sum_n |c_n(E)|^2 \int_V |\Psi_n(x)|^2 \neq 0 \tag{7.9}$$

Il moto si svolge permanentemente nella zona dove la particella è legata al potenziale.

In questo caso, la base degli stati ''in'', evidentemente, non è completa ma piuttosto (l'indice i rappresenta il complesso dei numeri quantici che caratterizzano i vari stati):

$$\sum_i |i;in><i;in| = 1 - \sum_n |E_n><E_n| \tag{7.10}$$

dove al secondo membro compare il proiettore sugli stati legati.

In una teoria invariante per traslazioni, in cui permettiamo anche al protone di muoversi, lo spettro dell'energia totale è sempre continuo e tutti gli stati localizzati, prima o poi, finiscono all'infinito. Tuttavia gli stati con un elettrone ed un protone lontani tra loro non danno una base completa: le due particelle possono allontanarsi all'infinito restando legate tra loro.

Se però includiamo nella base ''in'' anche quegli stati che, al tempo $-T/2 \to -\infty$, contengono degli stati legati (ad esempio l'atomo di idrogeno nel livello fondamentale) possiamo ritenere che gli stati ''in'' formino una base completa[2]

$$\sum_i |i;in><i;in| = 1 \quad \text{(completezza ''in'')} \tag{7.11}$$

[2]In generale, non esiste un unico tempo $-T/2$ a cui tutti gli stati possibili si sono ridotti a stati di particelle non-interagenti. La convergenza degli stati alle condizioni asintotiche non è uniforme, e la base degli stati ''in'' diventa completa solo nel limite $-T/2 \to -\infty$. Questo punto è importante nella discussione delle formule di riduzione discusse nel seguito.

In termini concreti, questo vuol dire che, per determinare completamente la fisica del sistema elettrone-protone, dovremo studiare anche esperimenti di diffusione che coinvolgano, tra gli stati iniziali, l'atomo di idrogeno ad esempio:

$$e + H \rightarrow e + e + P \tag{7.12}$$

Naturalmente, nei casi in cui possiamo risolvere le equazioni del moto a partire dall'Hamiltoniana, possiamo anche decidere la composizione degli stati ''in" ed accertare se la (7.11) è valida opure no. In alcune formulazioni assiomatiche della teoria dei campi, la condizione (7.11) è considerata uno degli assiomi di base.

Accanto alla base ''in", possiamo adesso introdurre la base completa degli stati ''out". Questi stati descrivono degli stati di moto, nella rappresentazione di Heisenberg, che si riducono, al tempo $t = +T/2 \rightarrow +\infty$, a stati con un certo numero di particelle libere, ciascuna con quantità di moto defiita.

In analogia con la (7.2), indicheremo questi stati con:

$$|p_1, \alpha; p_2, \beta; out> \tag{7.13}$$

nel caso di due particelle.
La discussione sulla completezza della base ''out" procede allo stesso modo che per quella ''in", e quindi, con le stesse qualifiche di prima, concludiamo che deve essere:

$$\sum_n |n; out>< n; out| = 1 \quad \text{(completezza ''out'')} \tag{7.14}$$

In assenza di interazione, i numeri quantici che caratterizzano gli stati ''in" o ''out", ad esempio la quantitá di moto delle singole particelle, sono tutti conservati. In questo caso, gli stati ''in" e ''out" coincidono.

Anche in presenza di interazione, tuttavia, la distinzione tra stati ''in" e ''out" non si applica nei casi seguenti.
i. Lo stato privo di particelle (stato di vuoto) è stabile, in quanto stato di energia minima. Quindi

$$|0; in>= |0; out>= |0> \tag{7.15}$$

ii. Per gli stati ce contengono una sola particella, la quantitá di moto e la componente dello spin nellla direzione del moto dellla particella stessa sono grandezze conservate, per cui:

$$|p, \alpha; in>= |p, \alpha; out>= |p,' \alpha> \tag{7.16}$$

7.2 Ampiezze di diffusione e Matrice S.

Possiamo caratterizzare lo stato $|p_1', \alpha'; p_2', \beta'; out>$ come quello in cui, con certezza, i nostri rivelatori troveranno due particelle con quantitá di moto p_1' e p_2' e gli altri numeri quantici con i valori α' e β' rispettivamente, al tempo $+T/2$. Analogamente, lo stato $|p_1, \alpha; p_2, \beta; in>$ è quello in cui, con certezza, due particelle con numeri quantici p_1, α e p_2, β sono presenti al tempo $-T/2$. Il loro prodotto scalare dá, quindi, 'l'ampiezza di probabilitá della reazione:

$$(p_1, \alpha) + (p_2, \beta) \rightarrow (p_1', \alpha') + (p_2', \beta')$$

Piú in generale, l'ampiezza di diffusione è data da:

$$S_{fi} =< f; out|i; in > \tag{7.17}$$

dove f ed i sono i valori dei numeri quantici che caratterizzano lo stato finale ed iniziale, rispettivamente. Per stati normalizzati, il modulo quadro:

$$|< f; out|i; in >|^2 = P(i \to f) \tag{7.18}$$

dá la probabilitá della reazione. Per la relazione che lega la probabilitá (7.18) alla sezione d'urto, cfr. Meccanica Quantistica Relativistica.

In termini degli stati ''in" e ''out", la matrice S si può scrivere come:

$$S = \sum_n |n; in\rangle\langle n, out| \tag{7.19}$$

da cui troviamo:

$$S_{fi} = \langle f; out|i; in\rangle =< f; in|S|i; in >=< f; out|S|i; out > \tag{7.20}$$

Si verifica subito dalla (7.19) che l'operatore S trasforma la base ''out" nella base ''in":

$$S|m; out >= |m; in > \tag{7.21}$$

quindi, dalla completezza delle due basi, segue che S è unitario:

$$S^+S = SS^+ = 1 \tag{7.22}$$

Se scriviamo l'elemento di matrice diagonale della (7.22) come:

$$\begin{aligned} 1 &=< i; out|S^+S|i; out >= \\ &= \sum_f < f; out|S|i; out >|^2 = \textstyle\sum_f P(i \to f) \end{aligned} \tag{7.23}$$

vediamo che l'unitarietá di S equivale a richiedere che la somma delle probabilitá (7.18) su tutti gli stati f sia pari all'unitá. L'insieme di questi stati deve quindi coincidere con tutti i possibili stati finali in un esperimento di diffusione, come infatti è il caso se la base di questi stati è completa.

Le relazioni (7.20) mostrano la relazione tra la definizione della matrice S nella rappresentazione di Heisenberg e la definizione più elementare, in termini della rappresentazione di interazione, cfr. [1].

Nelle (7.20) sia il bra sia il ket si riferiscono allo stesso tempo, che esso sia nel passato o nel futuro, quindi non fanno piú riferimento ad una data rappresentazione. Possiamo interpretare $|f; out\rangle$ e $|i; out\rangle$ semplicemente come i vettori dello spazio di Hilbert, $|f\rangle$ e $|i\rangle$ rispettivamente, che individuano gli stati di ingresso e di uscita del processo di diffusione. In questo caso, il vettore $S|i\rangle$ rappresenta lo stato in cui evolve $|i\rangle$ nella rappresentazione di interazione. e la proiezione $\langle f|S|i\rangle$ rappresenta l' ampiezza di probabilitá di trovare questo stato in $|f\rangle$. Nella teoria delle perturbazioni, S è data dalla usuale rappresentazione mediante la formula di Dyson [1].

7.3 Grandezze conservate

La relazione tra la matrice S e le grandezze conservate si discute molto semplicemente. Consideriamo una grandezza conservata, Q. Dato che Q commuta con H, possiamo scegliere sia gli stati ''in" sia gli stati ''out" in modo che siano autostati simultanei di Q ed H. Poiché Q è una costante del moto, lo stato ''in" che corrisponde ad una valore q di Q deve trasformarsi, per $t \to +\infty$ in uno stato con lo stesso autovalore, cioè:

$$< f, q'; out|i, q; in >= 0, se\, q' \neq q \tag{7.24}$$

Un altro modo di dire la stessa cosa è di usare il fatto che S commuta con tutte le costanti del moto, per cui:

$$0 =< f, q'; in|[Q, S]|i, q; in >= \tag{7.25}$$

$$= (q' - q) < f, q'; in|S|i, q; in >$$

Quindi l' elemento di matrice è nullo se $q \neq q'$. Per lo stesso motivo:

$$U(R)SU(R)^{+} = S \tag{7.26}$$

se $U(R)$ è l'operatore unitario associato ad una simmetria esatta (che non coinvolga l' inversione temporale).

Per i sistemi invarianti sotto traslazioni, la matrice S deve essere diagonale nella base degli stati con quantitá di moto ed energia definiti, quindi i suoi elementi di matrice hanno la forma (f≠ i):

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum P_{fin} - \sum P_{in}) \mathscr{M}_{fi} \tag{7.27}$$

7.4 Le formule di riduzione LSZ

In questa Sezione vogliamo ricavare le relazioni che legano la funzione di Green a q punti con l' elemento di matrice S della reazione tra p particelle iniziali per dare q-p particelle finali (con p≤q-2). Queste relazioni sono state ottenute da H. Lehman, K. Szymanzik e W. Zimmermann [10] e sono note come *formule di riduzione LSZ*. Per semplicità, ci riferiamo al caso di particelle descritte da un campo scalare neutro con interazione $\lambda\phi^4$, la generalizzazione a casi più complessi è, infatti, immediata. Successivamente, estenderemo le regole di Feynman ricavate per le funzioni di Green a quelle per gli elementi di matrice S.

Prima di dimostrare le formule di riduzione, tuttavia, dobbiamo introdurre la cosiddetta *ipotesi asintotica* per i campi nella rappresentazione di Heisenberg ed i corrispondenti campi asintotici, $\phi_{in}(x)$ e $\phi_{out}(x)$.

I campi asintotici, $\phi_{in}(x)$ e $\phi_{out}(x)$ Fissare lo stato quantistico nella rappresentazione di Heisenberg corrisponde, in Meccanica Classica, a determinare la traiettoria nello spazio delle fasi del sistema dando le condizioni iniziali ad un dato tempo, t_0. Si comprende quindi perchè il vettore di

stato, in questa rappresentazione, non cambia al variare del tempo. Per fissare le idee, assumiamo di scegliere gli stati nella base in, quindi $t_0 = -T/2$.

Quelle che variano, al variare del tempo, sono le variabili dinamiche del sistema, quindi i campi che sono funzioni del punto nello spazio e del tempo:

$$\phi = \phi(\vec{x}, t) = \phi(x). \tag{7.28}$$

Nella teoria libera, il campo applicato al vuoto crea uno stato di singola particella per qualunque valore dl tempo. Questo non è più vero nella teoria in interazione, in cui il campo ha elementi di matrice non nulli anche tra il vuoto e gli stati con tre o più particelle, cfr. la Sez. **??**. Tuttavia, come discusso nel capitolo precedente, ci aspettiamo che la situazione fiisca tenda a quella della teoria libera quando il tempo tende a $\pm T/2 \simeq \pm\infty$. Poinché lo stato è comunque fisso, la richiesta precedente, che si indica col termine di *condizione asintotica* deve significare che il campo, in questi limiti, deve tendere in qualche senso al campo libero.

Consideriamo il limite $t \to +\infty$. La condizione asintotica si formula richiedendo che i valori di aspettazione del campo, quindi gli elementi di matrice, convergano ai corrispondenti elementi di matrice di un campo libero, che indichiamo con ϕ_{out}, eventualmente moltiplicati per una costante di proporzionalità[3]. La costante è definita in modo tale che $\phi_{out}(x)$ risulti normalizzato come un campo canonico. In formule:

$$\lim_{t\to+\infty} \langle\alpha|\phi(\vec{x}, t)|\beta\rangle = \sqrt{Z_+}\langle\alpha|\phi_{out}(\vec{x}, t)|\beta\rangle \tag{7.29}$$

$$(-\Box - m^2)\phi_{out}(x) = 0 \tag{7.30}$$

Il limite $t \to -\infty$ si tratta analogamente e porta alla definizione del campo in:

$$\lim_{t\to-\infty} \langle\alpha|\phi(\vec{x}, t)|\beta\rangle = \sqrt{Z_-}\langle\alpha|\phi_{in}(\vec{x}, t)|\beta\rangle$$

$$(-\Box - m^2)\phi_{in}(x) = 0 \tag{7.31}$$

I campi ϕ_{out} applicati al vuoto creano stati a molte particelle non interagenti al tempo $t = +\infty$, quindi generano la base degli stati out. Analogamente, l' applicazione di ϕ_{in} al vuoto genera la base in. Limitandoci al caso out, possiamo sviluppare il campo in operatori di creazione e distruzione nel continuo, cfr. l' eq. (3.91):

$$\phi_{out}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} \left[a_k\, e^{-ikx} + a_k^\dagger\, e^{ikx} \right] \tag{7.32}$$

L' eq. (7.32) si inverte facilmente, cfr. Sez. 3.93, per ottenere;

$$a_{out}(\mathbf{p}) = \int d^3x\, f_{\mathbf{p}}(x)^*\, i \overleftrightarrow{\partial}\, \phi_{out}(x);\;\; f_{\mathbf{p}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})(2\pi)^3}} e^{-ipx)} \tag{7.33}$$

Gli operatori di distruzione definiti dalla (7.33) sono indipendenti dal tempo, in virtù dell' equazione di Klein-Gordon.

[3]non si puó chiedere di più che una *convergenza debole* altrimenti si ricadrebbe nella teoria libera a tutti i tempi.

Poichè il campo out è normalizzato come un campo canonico, a_{out} e $a^\dagger_{out}$ obbediscono alle regole di commutazione canoniche e sono proprio gli operatori di creazione e distruzione degli stati out. Quindi[4]:

$$|p_1, p_2, \ldots; out\rangle = a_{out}(p_1)^\dagger a_{out}(p_2)^\dagger \ldots |0\rangle \tag{7.34}$$

Formule analoghe valgono per il campo e gli stati in.

Gli stati ad una particella in ed out coincidono: per questo abbiamo usato, nelle (7.29) e (7.31), la stessa massa. È facile dimostrare che, per lo stesso motivo, anche le costanti di normalizzazione nelle (7.29) e (7.31) sono uguali tra loro ed uguali alla costante introdotta nella trattazione della funzione a due punti in [9], Sez. 5.2.

Per ottenere questo risultato, consideriamo l' elemento di matrice del campo out tra il vuoto e lo stato ad una particella:

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to+\infty} \langle 0|\phi(x)|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{Z_+}\langle 0|\phi_{out}(x)|\mathbf{p}\rangle = \\ &= \sqrt{Z_+}\langle 0|\phi_{out}(x)|\mathbf{p}; out\rangle = \sqrt{\frac{Z_+}{2\omega(\mathbf{p})(2\pi)^3}}\, e^{-ipx} \end{aligned} \tag{7.35}$$

dove abbiamo usato lo sviluppo (7.32).

D' altro canto, l' elemento di matrice del campo a *tutti i tempi* si puó parametrizzare come segue (cfr. [9]) :

$$\langle 0|\phi(x)|\mathbf{p}\rangle = \langle 0|\phi(x)|\mathbf{p}; out\rangle = \sqrt{\frac{Z}{2\omega(\mathbf{p})(2\pi)^3}}\, e^{-ipx} \tag{7.36}$$

e, quindi, anche nel limite $t \to +\infty$. Confrontando con la (7.35) otteniamo: $Z_+ = Z$. Ripetendo l' argomento nel limite $t \to -\infty$ otteniamo analogamente: $Z_- = Z = Z_+$.

Ipotesi asintotica e correzioni di auto-energia. L' ipotesi asintotica alla base della teoria della matrice S, richiede una qualificazione importante. Quello che è ragionevole attendersi, quando il tempo tende a $\pm\infty$, é che tenda a zero l' interazione tra *particelle diverse*. Non possiamo tuttavia isolare una particella dall' azione del campo da essa stessa generato. Questo è il problema dell' *auto-energia* della particella, già noto in fisica classica.

Nel caso di una particella classica elettricamente carica, l' energia del campo coulombiano da essa stessa generato è facilmente calcolabile e dipende dall' inverso del raggio della particella stessa: è divergente per una carica esattamente puntiforma. In virtú della relazione di Einstein, il campo generato dalla particella dà un termine aggiuntivo alla massa inerziale della particella stessa, massa che, quindi, *non è la stessa* che la particella avrebbe in assenza di campo, ovvero nel limite in cui mandiamo a zero la sua carica elettrica.

Il problema si ripropone in meccanica quantistica e si risolve con la procedura di rinormalizzazione, vedi l' esempio della funzione a due punti nella Sezione precedente.

[4] ricordiamo che $|0; out\rangle = |0; in\rangle = |0\rangle$.

Le formule di riduzione LSZ Consideriamo, per essere definiti, la funzione di Green a quattro punti connessa:

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) \tag{7.37}$$

che vogliamo collegare alla matrice S della reazione:

$$p_1 + p_2 \to p_3 + p_4 \tag{7.38}$$

Se ricordiamo le regole di Feynman con cui si costruisce G, vediamo che in ogni caso dal punto x_1 origina una linea che lo collega al resto del grafico. In termini di ampiezze, questo vuol dire che, per quanto riguarda la dipendenza da x_1:

$$G = \int d^4x\, \Delta_F(x_1 - x) \times \dots \tag{7.39}$$

dove x è la coordinata di uno dei vertici del grafico. La trasformata di Fourier su x_1 di G, con momento p_1, quindi, deve contenere un fattore corripondente alla trasformata di Fourier di Δ_F, cioè:

$$i\tilde{\Delta}_F(p_1) = \frac{i}{p_1^2 - m^2} \tag{7.40}$$

La trasformata di Fourier di G rispetto ad x_1 ha quindi un polo quando p_1 va sul mass-shell, cioè per $p_1^2 \to m^2$. Possiamo isolare il residuo sul polo moltiplicando la trasformata di Fourier di G per $p_1^2 - m^2$ e passando al limite per $p_1^2 = m^2$.

In realtà, come abbiamo visto nello studio del propagatore, di poli ce ne sono due, in corrispondenza ai due segni possibili della frequenza, $p_1^0 = \pm\omega(\mathbf{p}_1) = \pm\sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m^2}$. Selezioniamo il segno di p^0 scrivendo il fattore esponenziale nella trasformata di Fourier come $e^{-ip_1x_1}$ per una particella entrante, come nella eq. (7.38), ovvero $e^{+ip_1x_1}$ per una particella uscente, con $p^0 = +\omega(\mathbf{p})$ in entrambi i casi. In formule:

$$R(p_1, \dots) = \lim_{p_1^2 \to m^2} (p_1^2 - m^2) \int d^4x_1\, e^{-ip_1x_1} G(x_1, \dots) \tag{7.41}$$

Per collegare il residuo R all' elemento di matrice S, scriviamo esplicitamente la funzione di Green come valore di aspettazione sul vuoto del T prodotto dei campi:

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle 0| T\left[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\right]|0\rangle \tag{7.42}$$

e quindi R:

$$\begin{aligned} R(p_1, \dots) = &\lim_{p_1^2 \to m^2} \\ &(p_1^2 - m^2) \int d^4x_1\, e^{-ip_1x_1} \langle 0| T\left[\phi(x_1)\dots\right]|0\rangle \end{aligned} \tag{7.43}$$

La moltiplicazione per p_1^2, nella (7.43), equivale all' azione di $-\Box$ sull' esponenziale. Integrando per parti, otteniamo (il passaggio al limite è, d' ora in avanti, sottinteso):

$$R(p_1, \dots) = \int d^4x_1\, e^{-ip_1x_1} (-\Box - m^2) \langle 0| T\left[\phi(x_1)\dots\right]|0\rangle \tag{7.44}$$

Nel limite l' esponenziale stesso soddisfa l' equazione di Klein-Gordon, per cui possiamo anche scrivere:

$$R(p_1,\ldots) = -\int d^4x_1\, e^{-ip_1x_1} \overleftrightarrow{\Box} \langle 0|T\left[\phi(x_1)\ldots\right]|0\rangle \tag{7.45}$$

dove $\overleftrightarrow{\Box}$ indica $\overrightarrow{\Box} - \overleftarrow{\Box}$. Inoltre, la differenza di due $\Box$ si puó scrivere come una derivata totale:

$$F(x)\overleftrightarrow{\Box}G(x) = \partial_\mu\left[F(x)\overleftrightarrow{\partial}^\mu G(x)\right] \tag{7.46}$$

Scartando le derivate spaziali che si integrano comunque a zero, otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} R(p_1,\ldots) &= -\int_{-T/2}^{+T/2} dt\,\frac{\partial}{\partial t}\int d^3x_1\, e^{-ip_1x_1}\overleftrightarrow{\partial}_t\,\langle 0|T\left[\phi(x_1)\ldots\right]|0\rangle = \\ &= -\int d^3x_1\, e^{-ip_1x_1}\overleftrightarrow{\partial}_t\,\langle 0|\phi(\vec{x}_1,+T/2)T\left[\phi(x_2)\ldots\right]|0\rangle + \\ &+\int d^3x_1\, e^{-ip_1x_1}\overleftrightarrow{\partial}_t\,\langle 0|T\left[\phi(x_2)\ldots\right]\phi(\vec{x}_1,-T/2)|0\rangle \end{aligned} \tag{7.47}$$

Abbiamo portato fuori del T prodotto i campi $\phi(\vec{x}_1,\pm T/2)$ in quanto i tempi in x_2, x_3, etc. sono sicuramente maggiori di -T/2 e minori di +T/2. I campi valutati in ±T/2 si possono identificare con i campi out e in rispettivamente. Confrontando con la (7.33) vediamo che:

$$\begin{aligned} R(p_1,\ldots) &= i\sqrt{2\omega(2\pi)^3}\,\left[\langle 0|\sqrt{Z}a_{out}(p_1)^\dagger T\left[\phi(x_2)\ldots\right]|0\rangle - \langle 0|T\left[\phi(x_2)\ldots\right]\sqrt{Z}a_{in}(p_1)^\dagger|0\rangle\right] = \\ &= -i\sqrt{Z}\,\sqrt{2\omega(2\pi)^3}\langle 0|T\left[\phi(x_2)\ldots\right]|p_1;in\rangle \end{aligned} \tag{7.48}$$

dove abbiamo usato le relazioni:

$$\langle 0|a_{out}(p_1)^\dagger = 0;\quad a_{in}(p_1)^\dagger|0\rangle = |p_1;in\rangle \tag{7.49}$$

Prendendo il residuo nel polo della funzione di Green di quattro campi per $p_1^2 = m^2$, abbiamo ottenuto l' elemento di matrice del T prodotto di tre campi tra il vuoto e lo stato con una particella di momento p_1. Evidentemente possiamo procedere nel processo di *riduzione* dei campi prendendo i residui nei poli per $p_2^2 = m^2$, etc. (con gli appropriati segni degli esponenziali per particelle iniziali e finali) fino ad eliminare del tutto il T prodotto. Il risultato finale è:

$$\begin{aligned} &\lim_{p_i^2\to m^2}\Pi\frac{(p_i^2-m^2)}{i\sqrt{Z}}\int\Pi\left(d^4x_i e^{\mp ip_ix_i}\right)\,G(x_1,x_2,\ldots) = \\ &= \Pi\left(\mp\sqrt{2\omega(p_i)(2\pi)^3}\right)\langle p_3,p_4;out|p_1,p_2;in\rangle = \Pi\left(\mp\sqrt{2\omega(p_i)(2\pi)^3}\right)S_{i,f} \end{aligned} \tag{7.50}$$

dove il segno - (+) nell' esponenziale si riferisce alle particelle entranti (uscenti) nella reazione (7.38). Il fattore $\sqrt{Z}$ si ottiene dal calcolo della funzione di Green a due punti, Sez. 6.4.

La formula di riduzione (7.50) si può evidentemente estendere ad una reazione con un numero arbitrario di particelle entranti e uscenti.

Le formule di riduzione (7.50) ci danno la relazione desiderata tra funzioni di Green e elementi di matrice S. Alcune osservazioni.

Invarianza di Lorentz, sezione d' urto. La funzione di Green è Lorentz invariante ed inoltre è invariante per traslazioni. Quest' ultima affermazione vuol dire che G dipende solo dalle differenze x_1-x_2, etc. Per la trasformata di Fourier, questo signiifica (cfr. [1]) che:

$$\tilde{G}(p_1, p_2, \ldots) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_{in} - \sum p_{fin}) \mathscr{G}(p_1, p_2, \ldots) \tag{7.51}$$

dove $\mathscr{G}$ è una funzione regolare e Lorentz-invariante dei momenti. Lo stesso si applica evidentemente al residuo di G nei poli. Quindi, trascurando segni inessenziali, possiamo scrivere:

$$S_{fi} = \langle p_3, p_4, \ldots; out | p_1, p_2; in \rangle = \Pi \left[\frac{1}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_{in} - \sum p_{fin}) \mathscr{M}(p_1, p_2, \ldots) \tag{7.52}$$

dove $\mathscr{M}$ è *l' ampiezza di Feynman*, una funzione Lorentz-invariante dei suoi argomenti. Dalla (7.52) si calcola la sezione d' urto del processo $p_1 + p_2 \to p_3 + \ldots$ a partire dalla formula generale, cfr. [1]:

$$(\rho v_{rel} N)\, d\sigma = \sum_{fin} \frac{|S_{fi}|^2}{T} \tag{7.53}$$

I nostri stati *non* sono normalizzati a una particella nel volume V, di qui il fattore N a primo membro, che indica il numero di particelle bersaglio in V. Con la normalizzazione del continuo, $N = V/(2\pi)^3$, cfr. l' eq. (3.92). $\rho = 1/(2\pi)^3$ è la densitá delle particelle proiettile, e v_{rel} la velociá relativa.

Lasciamo al lettore la dimostrazione delle seguenti formule.

- sezione d' urto:

$$d\sigma = \frac{1}{4\omega(\mathbf{p_1})\omega(\mathbf{p_2})\mathbf{v_{rel}}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_{in} - \sum p_{fin})\, \Pi_{i=3,\ldots} \left[\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{p_i})} \right] |\mathscr{M}|^2 \tag{7.54}$$

  dove $v_{rel} = |v_1 - v_2|$ è la velocitá relativa delle particelle iniziali.

- spazio delle fasi invariante:

$$\frac{d^3 p}{2\omega(\mathbf{p}_i)} = d^4 p\, \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) \tag{7.55}$$

- fattore invariante di flusso:

$$\omega(\mathbf{p_1})\omega(\mathbf{p_2})|v_1 - v_2| = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2} \tag{7.56}$$

Le equazioni (7.55) e (7.56), sostituite nella (7.54), mostrano che $d\sigma$ è Lorentz-invariante.

Capitolo 8

DIAGRAMMI DI FEYNMAN PER LA MATRICE S: TEORIA $\lambda\phi^4$

Utilizzando la formula di riduzione possiamo tradurre le regole per il calcolo dei diagrammi di Feynman per le funzioni di Green, discusse nella sezione 6.3 e nella (6.8), in regole per il calcolo di elementi della matrice S. Il punto di partenza è la trasformata di Fourier che appare nella formula di riduzione, eq. (7.50). Per semplificare la notazione consideriamo tutte le particelle come se appartenessero allo stato iniziale; per una particella nello stato finale basta cambiare segno all'impulso e all'energia. Dobbiamo quindi calcolare la seguente espressione

$$\prod_{k=1}^{k=n}\left(\frac{(p_k^2-m^2)}{i\sqrt{Z}}\right)\int\prod_{k=1}^{k=n}d^4x_k\prod_{k=1}^{k=n}e^{-ip_kx_k}\,\langle 0|T\left(\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\right)|0\rangle \tag{8.1}$$

e per ottenere quella della (7.50) basterà porre $p=q$ per le particelle nello stato iniziale, e $p=-q$ per quelle nello stato finale.

8.1 Grafici irriducibili ad una particella

Per quanto riguarda la funzione di Green, dobbiamo considerare solo i grafici di Feynman connessi con n≥ 3 linee esterne. Possiamo dividere ulteriormente questi grafici in due categorie, a seconda che siano *riducibili ad una particella* (1-particle irreducible, 1PI) *sulle linee esterne* o no.

Un grafico è riducibile ad una particella sulle linee esterne se, tagliando una sola linea, possiamo separare un grafico della funzione a due punti con un' interazione non triviale. Nella Fig. 8.1 riportiamo i grafici connessi per la funzione a quattro punti, al secondo ordine in λ^2. I grafici (a) e (c) sono 1PI, mentre il grafico (b) e le corrispondenti permutazioni sono riducibili ad una particella sulle linee esterne. Naturalmente, grafici di ordine superiore possono essere 1P riducibili anche relativamente a piú linee esterne, come quello riportato in Fig. 8.2.

Tenendo conto che l' ampiezza di un grafico è il prodotto delle sue diverse componenti, possiamo rappresentare il complesso di tutti i grafici connessi con un grafico a blocchi in cui ogni linea esterna è rimpiazzata dalla funzione a due punti esatta mentre la funzione di Green restante è 1PI su tutte le linee esterne, vedi Fig. 8.3 nel caso della funzione a quattro punti.

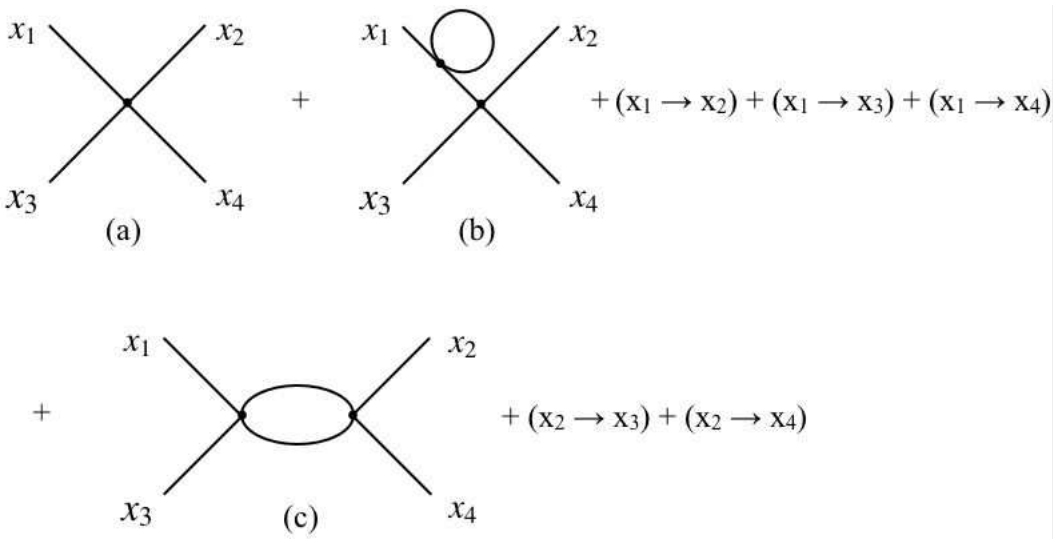


Figura 8.1: Diagrammi connessi per la funzione a quattro punti nella teoria $\lambda\phi^4$, al secondo ordine perturbativo.

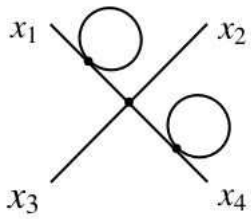


Figura 8.2: Esempio di diagramma connesso, riducibile ad una particella su due linee esterne.

Lo sviluppo della funzione 1PI sulle linee esterne è mostrato in Fig. 8.4 sempre per la funzione a quattro punti.

Riprendendo il risultato della Sez. 6.4, eq. (9.28), possiamo scrivere:

$$G(x,y)|_{conn} = iZ\Delta_F(x-y,m) + i\mathscr{R}(x-y) \tag{8.2}$$

dove m è la massa rinormalizzata e $\mathscr{R}$(x-y) è una funzione la cui trasformata di Fourie è regolare quando $p^2 \to m^2$. Nel diagramma a blocchi della Fig. 8.3, le coordinate dei campi appaiono come terminazione delle linee esterne. Quindi ciascuna linea esterna è rappresentata da (vedi anche eq. 3.60, 3.61)

$$i\Delta_F(v-x_k) = \frac{iZ}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{e^{-ipv}\,e^{ip_kx_k}}{p^2-m^2+i\epsilon} + i\mathscr{R}(v-x_k) \tag{8.3}$$

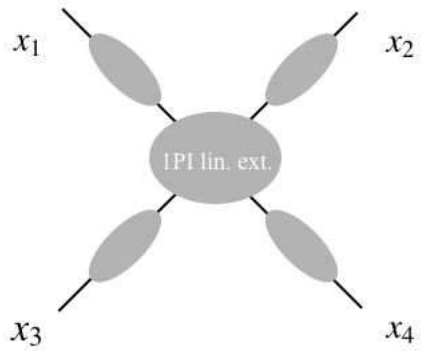


Figura 8.3: Rappresentazione a blocchi della funzione di Green a quattro punti connessa. Le linee esterne rappresentano le funzioni a due punti esatte, il blocco centrale la funzione di Green a quattro punti, 1PI sulle linee esterne.

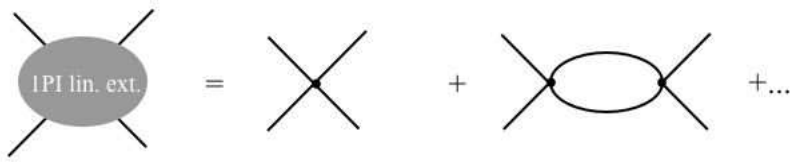


Figura 8.4: Sviluppo della funzione di Green a quattro punti connessa e 1PI sulle linee esterne.

dove v è la coordinata del vertice cui la linea è attaccata, e x_k la coordinata di uno dei punti della funzione di Green. Una volta applicata la trasformata di Fourier e moltiplicato per il fattore $-i(p_k^2 - m^2)/\sqrt{Z}$, si seleziona il residuo nel polo ed otteniamo:

$$\lim_{p_k^2 \to m^2} \frac{(p_k^2 - m^2)}{i\sqrt{Z}} \int d^4 x_k e^{-ip_k x_k} \big(iZ\Delta_F(v - x_k)\big) = \sqrt{Z} e^{-ip_k v} \tag{8.4}$$

Eseguire il limite richiesto dalla formula di riduzione si riduce a moltiplicare per $\sqrt{Z}$ e assegnare alla linea esterna l'impulso della corrispondente particella fisica, con $p_k = q_k$ per particelle nello stato iniziale, $p_k = -q_k$ per particelle nello stato finale. Nell' elemento di matrice S, alla linea esterna resta anche associato il fattore: $1/(\sqrt{2\omega(q)(2\pi)^3})$

I grafici 1PI sulle linee esterne contengono linee interne cui è associato il *propagatore nudo*, $i\Delta_F(x - y, m_0)$. Una linea interna che connette due vertici con coordinate v_1, v_2, corrisponde un fattore

$$i\Delta_F(v_2 - v_1) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \, \frac{e^{-ipv_2} \, e^{ipv_1}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{8.5}$$

Con riferimento a quanto abbiamo visto per le linee esterne, un fattore e^{-ipv_2} corrisponde ad un impulso p che entra nel vertice v_2 ed esce dal vertice v_1. Ad ogni vertice risultano così associati i

fattori $e^{\pm ipv}$ delle linee, interne o esterne che vi confluiscono, e l'integrazione nella coordinata del vertice risulta allora in una funzione δ che garantisce la conservazione dell'energia e dell'impulso portato dalle linee che confluiscono in ciascun vertice,

$$\int d^4x\, e^{ix\sum(\pm p_i)} = (2\pi)^4\delta^4\left(\sum(\pm p_i)\right) \tag{8.6}$$

Per un grafico con n vertici, le n funzioni delta, eq. (8.6), permettono di eliminare l' integrazione su (n-1) momenti interni, in quanto possiamo estrarre da esse una funzione delta che corrisponde alla conservazione del quadri-momento della reazione complessiva e che quindi non dipende dai momenti interni.

8.2 Regole di Feynman per gli elementi della Matrice S

Riassumiamo le regole per i diagrammi che rappresentano gli elementi di matrice S.

- Si devono considerare i grafici di Feynman connessi e 1PI sulle linee esterne;
- ai diversi elementi di ogni grafico, vertici, linee interne, linee esterne, sono associate delle ampiezze come segue:

$$\begin{aligned} &\text{Vertice} && \frac{-i\lambda}{4!}(2\pi)^4\,\delta^4(\textstyle\sum p_{\text{in}} - \sum p_{\text{out}}) \\ &\text{Linea interna} && \frac{i}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p}{p^2-m_0^2+i\epsilon} \qquad (8.7) \\ &\text{Linea esterna} && \frac{\sqrt{Z}}{\sqrt{2\omega_p(2\pi)^3}} \end{aligned}$$

(8.8)

Rimane da definire il coefficiente combinatorio da assegnare a ciascun diagramma, di cui abbiamo visto esempi particolari nella Sezione precedente, ma non discuteremo questo problema in generale, nel caso della teoria $\lambda\phi^4$.

Come esempio, consideriamo l' ampiezza per lo scattering di due particelle.

Dobbiamo partire dai diagrammi della Fig. 8.4. Considereremo p_1, p_2 come particelle iniziali (entranti), p_3, p_4 come particelle finali (uscenti). Il valore del primo diagramma è semplicemente

$$(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)\; Z^2(-i\lambda)\prod\frac{1}{\sqrt{2\omega_{q_i}}} \tag{8.9}$$

Il valore del secondo diagramma risulta:

$$C(-i\lambda)^2\, Z^2\prod\frac{1}{\sqrt{2\omega_{q_i}}}\int\frac{d^4q_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4q_2}{(2\pi)^4}\frac{i}{q_1^2-m_0^2+i\epsilon}\frac{i}{q_2^2-m_0^2+i\epsilon}$$
$$(2\pi)^4\,\delta^4(p_1+p_2-q_1-q_2)(2\pi)^4\,\delta^4(q_1+q_2-p_3-p_4)$$

dove q_1 e q_2 sono i momenti associati alle linee interne e C rappresenta un fattore combinatorio, in cui abbiamo incorporato gli $1/4!$. Le due δ si possono combinare in una che garantisce la conservazione dell'impulso e dell'energia tra particelle entranti e particelle uscenti e una seconda δ che elimina una delle integrazioni, fissando $q_2 = p_1 + p_2 - q_1$. Si ottiene:

$$D_2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)\, Z^2\, C(-i\lambda)^2 \prod \frac{1}{\sqrt{2\omega_{q_i}}}$$
$$\int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{i}{q_1^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 + p_2 - q_1)^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

Notiamo che l'integrale residuo è divergente: per grandi valori di q_1 si comporta come $\int d^4 q / q^4$, una divergenza logaritmica. Delle divergenze in teoria delle perturbazioni, e di come curarle, parleremo nel caso dell'elettrodinamica. In quella occasione discuteremo anche del calcolo della costante di rinormalizzazione Z e di come eliminare in modo sistematico le quantitá *nude*, massa, m_0, e costante di accoppiamento,e_0, in favore delle costanti fisicamente misurabili, le quantitá *rinormalizzate*.

Capitolo 9

ELETTRODINAMICA QUANTISTICA

In questo capitolo applicheremo i metodi sviluppati nei capitoli precedenti alla costruzione della teoria delle perturbazioni applicata alla elettrodinamica quantistica, la teoria delle interazioni tra elettroni, descritti dal campo di Dirac, e il campo elettromagnetico. Questo sistema sarà descritto da un lagrangiano

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}\left[i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - ie_0 A_{\mu}) - m_0\right]\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

Una caratteristica saliente della (9) è la invarianza sotto trasformazioni di gauge, che sono trasformazioni simultanee del campo elettromagnetico e del campo dell'elettrone,

$$A_{\mu}(x) \to A_{\mu}(x) + \partial_{\mu} f(x) \tag{9.1}$$

$$\psi(x) \to e^{ie_0 f(x)}\psi(x) \tag{9.2}$$

L'invarianza di gauge istituisce uno stretto legame tra il campo dell'elettrone e il campo del fotone. Una invarianza sotto trasformazioni del campo dell'elettrone per un fattore di fase che dipende arbitrariamente dal punto — eq. (9.2) — non sarebbe possibile senza il campo elettromagnetico. L'invarianza di gauge non è quindi una caratteristica secondaria del campo elettromagnetico, ma la sua ragione d'essere. Una conseguenza della invarianza di gauge è l'esistenza di una simmetria sotto una trasformazione del campo dell'elettrone con un fattore di fase costante,

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x)$$

Questa è una simmetria "globale" (in contrasto alla simmetria "locale" — la simmetria di gauge completa) da cui, tramite il teorema di Noether, discende la conservazione della corrente,

$$\partial_{\mu}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) = 0 \tag{9.3}$$

che è quindi una conseguenza della invarianza di gauge.

In questo capitolo adotteremo la gauge di Feynman, nella quale il lagrangiano si scrive

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - ie_0 A_{\mu}) - m_0)\psi - \frac{1}{2}\partial_{\nu}A_{\nu}\partial^{\nu}A^{\mu} \tag{9.4}$$

Per costruire una teoria delle perturbazioni possiamo dividere il lagrangiano in due parti:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1 \tag{9.5}$$

dove $\mathscr{L}_0$ descrive campi liberi, ed è quindi totalmente risolvibile, mentre $\mathscr{L}_1$ è un termine di interazione. Potremmo ad esempio porre

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0 &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0)\psi - \frac{1}{2}\partial_\nu A_\nu \partial^\nu A^\mu \\ \mathscr{L}_1 &= e_0(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu\end{aligned}$$

Come vedremo nel seguito m_0 non è la massa fisica dell'elettrone, ma il valore che questa massa assumerebbe in assenza di interazioni, cioé per $e = 0$. La vera massa fisica, m, può essere scritta come

$$m = m_0 + \delta m \tag{9.6}$$

Il termine δm può essere visto come l'energia del campo elettrico (e magnetico) prodotto dalla carica (e momento magnetico) dell'elettrone. Dato che useremo la teoria delle perturbazioni per calcolare le ampiezze di transizione associate a processi d'urto, gli elementi della matrice S, conviene una separazione diversa tra $\mathscr{L}_0$ e $\mathscr{L}_1$, tale che $\mathscr{L}_0$ descriva elettroni di massa m, cioé la stessa massa delle particelle descritte dal lagrangiano completo $\mathscr{L}$, e quindi

$$\mathscr{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu \tag{9.7}$$

$$\mathscr{L}_1 = e_0(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu + \delta m(\bar{\psi}\psi) \tag{9.8}$$

Il termine $\delta m(\bar{\psi}\psi)$ in $\mathscr{L}_1$ è detto un *controtermine*. Mentre la massa dell'elettrone viene modificata dalle interazioni, la massa del fotone, come vedremo nel seguito, è protetta dalla invarianza di gauge e resta eguale a zero. Analogamente il parametro e_0 non è, come vedremo, la carica elettrica dell'elettrone e, la quale si ottiene da e_0 applicando le correzioni che derivano dalla presenza di interazioni. Notiamo che né e_0 né m_0 sono quantità osservabili, ma parametri del lagrangiano. Il processo di rinormalizzazione consiste essenzialmente nelll'esprimere tutti i risultati della teoria in termini delle grandezze misurabili e, m.

La costruzione della serie perturbativa per la matrice S segue i passi illustrati nel caso del campo scalare:

1. Costruire la serie perturbativa per il funzionale generatore delle funzioni di Green in termini di diagrammi di Feynman.

2. Stabilire le formule di riduzione che legano gli elementi di matrice S alle funzioni di Green.

3. Costruire la serie perturbativa per la matrice S.

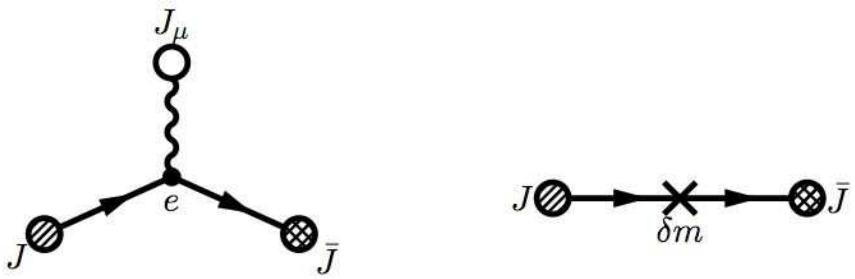


Figura 9.1: I due diagrammi con un singolo vertice

9.1 Grafici di Feynman per il funzionale generatore

Il funzionale generatore per l'elettrodinamica dipenderà da tre funzioni ausiliarie: $J(x)$ e $\bar{J}(x)$ per il campo dell'elettrone, $J_\mu(x)$ per il fotone. Nel limite $e \to 0$, e cioé in assenza di interazioni[1], il funzionale generatore Z è semplicemente il prodotto dei funzionali generatori per gli elettroni e i fotoni,

$$\begin{aligned} Z^0[J,\bar{J},J_\mu] &= Z^0[J,\bar{J}]\, Z^0[J_\mu]; \\ Z^0[J,\bar{J}] &= \exp\left(-i\int d^4x\, d^4y\, \bar{J}(x)\, S_F(x-y)\, J(y)\right) \\ Z^0[J_\mu] &= \exp\left(\frac{i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J^\mu(x)\Delta_F(x-y)\, J_\mu(y)\right) \end{aligned} \tag{9.9}$$

Dove intendiamo che $\Delta_F(x-y)$ sia la funzione di Feynman per $m=0$, $\Delta_F(x-y;0)$. In presenza del lagrangiano di interazione (9.8) possiamo esprimere il funzionale generatore come (vedi la sezione 6.1),

$$Z[J,\bar{J},J_\mu] = e^V Z^0[J,\bar{J},J_\mu] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^n}{n!} Z^0[J,\bar{J},J_\mu] \tag{9.10}$$

dove l'operatore vertice, V, è semplicemente $i\int d^4x\, \mathscr{L}_1$, tradotto con le regole di corrispondenza (5.56), (4.13),

$$i\mathscr{L}_1(x) = ie\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\gamma^\mu\left(i\frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)}\right)\left(i\frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}\right) + i\delta m\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\left(i\frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)}\right) \tag{9.11}$$

Questo sembra più complicato del caso scalare, ma in realtà è più semplice, almeno per un aspetto, infatti ciascuno dei due termini in $\mathscr{L}_1$ ha una sola derivata di ciascun tipo, e questo semplifica drasticamente l'aspetto combinatorio.

Il termine V^n nello sviluppo di Z può essere calcolato direttamente, e risulta in una serie di termini che corrispondono a diagrammi di Feynman. Come nel caso scalare l'azione di ciascuna derivata

[1] In questo caso si ha anche $\delta m = 0$.

può esercitarsi su Z^0, e in questo caso viene calata una "linea con pallino", cioè un termine $\Delta_F J_\mu$, o $S_F J$, o $\bar{J} S_F$, oppure si esercita su una "linea" prodotta da una derivata precedente, e in questo caso la "linea con pallino" diviene una linea interna. Se il pallino non viene catturato da una derivata successiva, quello che rimane è una linea esterna. Tutto questo si può esprimere in termini di diagrammi. Al primo ordine in V abbiamo i due diagrammi della figura 9.1. Notiamo alcune regole per interpretare questi grafici:

- I fotoni sono rappresentati da linee ondulate, e un pallino vuoto rappresenta un J_μ.
- Un pallino tratteggiato rappresenta una J e uno grigliato rappresenta una $\bar{J}$.
- Le linee fermioniche hanno un verso indicato sul diagramma, e si muovono[2] da una J a una $\bar{J}$. Una linea esterna di tipo $\bar{J}$ è detta "uscente" dal diagramma, una di tipo J "entrante".
- Ci sono due tipi di vertice, uno associato alla interazione elettrone-fotone, l'altro al controtermine di massa, rappresentato con una croce.

Osserviamo più in dettaglio la corrispondenza tra vari elementi del diagramma ed elementi del risultato:

Linee fermioniche esterne Una derivata produce una linea esterna,

$$\begin{aligned} \left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) Z^0 &= -\int d^4y\, \bar{J}(y) S(y-x)\, Z^0 \\ \left(-i\frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)}\right) Z^0 &= -\int d^4x\, S(y-x) J(x)\, Z^0 \end{aligned} \tag{9.12}$$

Linee fermioniche interne Applicando una seconda derivata il risultato dipende dall'ordine (come ci aspettiamo dato che le derivate anticommutano),

$$\begin{aligned} &\left(i\frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) Z^0 \quad = iS(y-x)\, Z^0, \qquad \text{ma, scambiando l'ordine,} \\ &\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\left(i\frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)}\right) Z^0 = -iS(y-x)\, Z_0 \end{aligned} \tag{9.13}$$

Linee esterne fotoniche

$$\left(i\frac{\delta}{\delta J^\mu}(x)\right) Z^0 \;=\; -\int d^4y\, \Delta_F(x-y)\, J_\mu(y)\, Z^0 \tag{9.14}$$

Linee fotoniche interne Tenendo presente che $(\delta/\delta J^\nu(y)) J_\mu(x) = g_{\mu\nu}\delta^4(x-y)$,

$$\left(i\frac{\delta}{\delta J^\nu}(x)\right)\left(i\frac{\delta}{\delta J^\mu}(y)\right) Z^0 \;=\; -ig^{\mu\nu}\Delta_F(x-y)\, Z^0 \tag{9.15}$$

[2]Questa definizione del verso è arbitraria — avremmo potuto scegliere il verso da $\bar{J}$ a J — ma è quella standard.

Possiamo direttamente formulare le regole per l'interpretazione dei diagrammi nello spazio degli impulsi. Ricordiamo l'espressione di Δ_F (8.5) e S_F (5.54), da cui per una linea interna fotonica e fermionica abbiamo rispettivamente

$$-i g_{\mu\nu}\Delta_F(x-y) = \frac{-i g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{1}{p^2+i\epsilon}\,e^{-ipx}e^{ipy}, \tag{9.16}$$

$$i S_F(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,e^{-ipx}e^{ipy}\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\epsilon} \tag{9.17}$$

Per una linea esterna che finisce in una J (vedi la seconda delle (9.12)) abbiamo:

$$-\int d^4x\,S(v-x)J(x) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,e^{-ipv}\frac{\not{p}+m}{E^2-\vec{p}^2-m^2+i\epsilon}\int d^4x\,e^{ipx}\,i\,J(x) \tag{9.18}$$

dove v è la coordinata di uno dei vertici del grafico. Analogamente per una linea di tipo $\bar{J}$

$$-\int d^4x\,\bar{J}(x)S(x-v) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,e^{ipv}\int d^4x\,e^{-ipx}\,i\,\bar{J}(x)\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\epsilon} \tag{9.19}$$

e infine per una linea esterna fotonica

$$\int d^4x\,\Delta_F(v-x)\,J_\mu(x) \;=\; \frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{1}{p^2+i\epsilon}\,e^{-ipv}\int d^4x\,e^{ipx}\,i\,J_\mu(x) \tag{9.20}$$

I vari fattori $e^{\pm ipv}$ confluiscono nei vertici in cui le linee terminano, e vanno integrati, producendo un fattore $(2\pi)^4\delta^4(\sum p_i)$ che garantisce la conservazione dell'impulso in ogni singolo vertice.

9.2 Funzioni a due punti

Possiamo facilmente stabilire una rappresentazione spettrale per le funzioni a due punti dei campi fermionici e del potenziale vettore del tutto analoghe a quella trovata per il campo scalare.

Consideriamo esplicitamente il campo fermionico e la funzione a due punti:

$$i(G_F)_{\alpha\beta}(x) = \langle 0|T\left[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(0)\right]|0\rangle \tag{9.21}$$

Consideriamo il caso $x^0 > 0$ e, come prima, inseriamo un sistema completo di stati nel prodotto dei campi, separandi il contributo dello stato ad una particella che, in questo caso, è un elettrone creato dal vuoto da $\bar{\psi}$:

$$\begin{aligned} i(G_F)_{\alpha\beta} = \sum_s\int d^3p e^{-ipx}\,\langle 0|\psi_\alpha(0)|\mathbf{p},s\rangle\langle\mathbf{p},s|\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle\;+ \\ +\;\langle 0|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(0)|0\rangle_{(2+)} \end{aligned} \tag{9.22}$$

Il contributo della singola particella si calcola facilmente (vedi Parte 1, Cap. 4 per il caso scalare):

$$\begin{aligned} &\langle 0|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(0)|0\rangle_1 = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{E(p)}\,e^{-ipx}\,Z_2\sum_s(u_s(p))_\alpha(\bar{u}_s(p))_\beta = \\ &= \frac{Z_2}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E(p)}e^{-ipx}(\not{p}+m)_{\alpha\beta} = \\ &= (i\not{\partial}+m)_{\alpha\beta}\left[\frac{Z_2}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E(p)}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}e^{-iE(p)t}\right]\quad(\theta(x^0)>0) \end{aligned} \tag{9.23}$$

Calcolando in modo analogo il T prodotto ristretto alla singola particella per $x^0 < 0$, troviamo:

$$
\begin{aligned}
&-\langle 0|\bar{\psi}_\beta(0)\psi_\alpha(x)|0\rangle_1 = \\
&= -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{E(p)}\, e^{+ipx}\ \sqrt{Z_2(p^2)}\sum_s (v_s(p))_\alpha(\bar{v}_s(p))_\beta = \\
&= -\frac{Z_2}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E(p)} e^{+ipx}(\not{p}-m)_{\alpha\beta} = \\
&= (i\partial\!\!\!/ + m)_{\alpha\beta}\ frac Z_2 (2\pi)^3 \int \frac{d^3p}{2E(p)}\ e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{+iE(p)t}
\end{aligned}
\tag{9.24}
$$

mettendo tutto insieme, quindi:

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|T\left[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(0)\right]|0\rangle_1 = \\
&= (i\partial\!\!\!/ + m)_{\alpha\beta}\left\{\frac{Z_2}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E(p)}\ e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\left[\theta(x^0)e^{-iE(p)t}\ +\ \theta(-x^0)e^{+iE(p)t}\right]\right\} = \\
&= Z_2 i S_F(x,m)_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{9.25}
$$

dove S_F è il propagatore del fermione libero con massa pari alla massa fisica dell' elettrone, m.

Per il termine con stati intermedi con due o piú particelle, si procede come in Parte 1, Cap. 4 e si trova;

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|T\left[\psi(x)\bar{\psi}(0)\right]|0\rangle_{(2+)} = \\
&\int dM^2\left[i\partial\!\!\!/\rho_1(M^2) + M\rho_2(M^2)\right]_{\alpha\beta} i[\Delta_F(x,M)]
\end{aligned}
\tag{9.26}
$$

In questo caso è necessario introdurre due funzioni spettrali, definite dalla relazione:

$$
\sum_{n,2+}(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_n - p)\ \langle 0|\psi_\alpha(0)|n\rangle\langle n|\bar{\psi}_\beta(0)|0\rangle = (2\pi)\left[\not{p}\rho_1(M^2) + M\rho_2(M^2)\right]_{\alpha\beta}
\tag{9.27}
$$

Le funzioni spettrali, dovendo essere invarianti di Lorentz, sono funzioni di p^2, che è fissato ad essere $p^2 = M^2$.

Mettendo tutto insieme, troviamo la rappresentazione spettrale del propagatore dell' elettrone nella forma:

$$
\begin{aligned}
&i(G_F)_{\alpha\beta}(x) = \langle 0|T\left[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(0)\right]|0\rangle = \\
&= Z_2 i S_F(x)_{\alpha\beta} + \int dM^2\left[i\partial\!\!\!/\rho_1(M^2) + M\rho_2(M^2)\right]_{\alpha\beta} i[\Delta_F(x,M)]
\end{aligned}
\tag{9.28}
$$

La trasformata di Fourier della funzione a due punti ha un polo per $\not{p} = m$ con residuo iZ_2.

Lasciamo al lettore di costruire la rappresentazione spettrale del campo del fotone, della forma:

$$
\begin{aligned}
&i(G_F)^{\mu\nu}(x) = \langle 0|T\left[A^\mu(x)A^\nu(0)\right]|0\rangle = \\
&= -g^{\mu\nu}\left[Z_3 i\Delta_F(x,M=0) + \int dM^2\sigma_3(M^2)i\Delta_F(x,M^2)\right]\ +\ \ldots
\end{aligned}
\tag{9.29}
$$

dove i puntini indicano termini proporzionali alle derivate parziali, rispetto ad x^μ e/o ad x^ν di funzioni di x, che possiamo omettere dal propagatore in virtú della conservazione delle correnti per cui il propagatore stesso viene moltiplicato nelle ampiezze fisiche.

9.3 La formula di riduzione

Gli argomenti che hanno portato alla formula di riduzione (7.50) si applicano direttamente all'elettrodinamica, con l'unica complicazione che proviene dallo spin dell'elettrone e del fotone.

Possiamo definire come prima gli stati in e out, che adesso sono stati con un numero specificato di elettroni, positroni e fotoni, con assegnati valori dei momenti, spin e polarizzazione. Questi stati sono creati o distrutti dal vuoto dai campi in o out che si ottengono nel limite per t→ ±∞ e coinvolgono le costanti di rinormalizzazione[3] dell' elettrone, Z_2, e del fotone, Z_3. Ad esempio:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\psi(x) &= \sqrt{Z_2}\psi_{out}(x)\\ \lim_{t\to+\infty}A^{\mu}(x) &= \sqrt{Z_3}A^{\mu}_{out}(x)\end{aligned} \tag{9.30}$$

I campi in e out si sviluppano in onde piane, con coefficienti che sono gli operatori di annichilazione e distruzione, che a loro volta si possono ottenere proiettando i campi sul sistema di onde piane e di spinori o vettori di polarizzazione appropriata.

Ad esempio, per elettroni e positroni, scriviamo (omettendo i suffissi in o out per brevitá):

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha}(x) &= \int d^3p\sqrt{\frac{m}{E(\mathbf{p})(2\pi)^3}}\left[a_r(\mathbf{p})[u_r(\mathbf{p})]_{\alpha}\,e^{-ipx}+[c_r(\mathbf{p})]^{\dagger}[v_r(\mathbf{p})]_{\alpha}\,e^{+ipx}\right]\\ \bar{\psi}_{\alpha}(x) &= \int d^3p\sqrt{\frac{m}{E(\mathbf{p})(2\pi)^3}}\left[b_r(\mathbf{p})[\bar{v}_r(\mathbf{p})]_{\alpha}\,e^{-ipx}+[a_r(\mathbf{p})]^{\dagger}[\bar{u}_r(\mathbf{p})]_{\alpha}\,e^{+ipx}\right]\end{aligned} \tag{9.31}$$

e troviamo:

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{E(\mathbf{p})(2\pi)^3}{m}}a_r(\mathbf{p}) = \int d^3x\,e^{+ipx}\,[\bar{u}_r(\mathbf{p})]_{\alpha}\,[\gamma^0]_{\alpha\beta}\psi_{\beta}(x) \quad \text{(annich.elettrone)}\\ &\sqrt{\frac{E(\mathbf{p})(2\pi)^3}{m}}[c_r(\mathbf{p})]^{\dagger} = \int d^3x\,e^{-ipx}\,[\bar{v}_r(\mathbf{p})]_{\alpha}\,[\gamma^0]_{\alpha\beta}\psi_{\beta}(x) \quad \text{(creaz.positrone)}\\ &\sqrt{\frac{E(\mathbf{p})(2\pi)^3}{m}}[a_r(\mathbf{p})]^{\dagger} = \int d^3x\,e^{-ipx}\,[\bar{\psi}(\mathbf{p})]_{\alpha}\,[\gamma^0]_{\alpha\beta}[u_r(\mathbf{p})]_{\beta} \quad \text{(creaz.elettrone)}\\ &\sqrt{\frac{E(\mathbf{p})(2\pi)^3}{m}}c_r(\mathbf{p}) = \int d^3x\,e^{+ipx}\,[\bar{\psi}(\mathbf{p})]_{\alpha}\,[\gamma^0]_{\alpha\beta}[v_r(\mathbf{p})]_{\beta} \quad \text{(annich.positrone)}\end{aligned} \tag{9.32}$$

Lasciamo al lettore di dimostrare, utilizzando le (9.32) e l' equazione di Dirac, la formula base di riduzione di un fermione uscente:

$$\begin{aligned}&\lim_{p\!\!\!/\to m}\bar{u}_r(\mathbf{p})_{\alpha}\frac{(p\!\!\!/-m)_{\alpha\beta}}{i}\int d^4x\,e^{ipx}\langle 0|\,T\left[\ldots\psi_{\beta}(x)\ldots\right]|0\rangle =\\ &=\sqrt{\frac{Z_2\,E(\mathbf{p})(2\pi)^3}{m}}\langle p_{out}|T\,(\ldots)\,|0\rangle\end{aligned} \tag{9.33}$$

[3]Questi sono le notazioni standard; Z_1 è la costante di rinormalizzazione del vertice.

La (9.33) permette di ottenere gli elementi di matrice S con elettroni e/o positroni entranti e uscenti dalle corrispondenti funzioni di Green.

Relazioni analoghe si ottengono per gli stati a un fotone, ad esempio:

$$\begin{aligned}&\lim_{p^2\to 0}\epsilon_\mu^{(r)}(\mathbf{p})\frac{p^2}{i}\int d^4x\, e^{ipx}\langle 0|\, T\left[\ldots A^\mu(x)\ldots\right]|0\rangle = \\ &= \sqrt{2\omega(\mathbf{p})(2\pi)^3\, Z_3}\langle p_{out}|T(\ldots)|0\rangle \end{aligned} \tag{9.34}$$

Paragonando queste relazioni a quelle che valgono per un campo scalare vediamo che le differenze nel caso dell'elettrodinamica saranno minime, oltre quelle dovute alla presenza degli spinori o vettori di polarizzazione dobbiamo solo tener conto della differenza nei fattori moltiplicativi nel caso dei fermioni, (9.33), e in quello dei bosoni, (9.34).

In conclusione, possiamo scrivere la formula di riduzione in forma (molto) schematica come

$$\begin{aligned}&\langle f|S|i\rangle = \prod_{\text{bos}}\lim_{q_i^2\to 0}\prod_{\text{ferm}}\lim_{\not q_i\to m} \\ &\left(\prod_{\text{bos}}\sqrt{\frac{1}{Z_3\, 2\omega_q(2\pi)^3}}\right)\left(\prod_{\text{ferm}}\sqrt{\frac{m}{Z_2\, E_q(2\pi)^3}}\right) \\ &\prod_{\text{e}^-\text{ out},\text{e}^+\text{ in}}[\bar u(\not q_k - m)]_\alpha\ldots[\bar v(\not q_s + m)]_\delta\ldots\prod_{\text{bos}}\ldots\epsilon_\mu^{(s)}(q_l)\ldots \\ &\int\prod_{\text{Tutte}}[d^4x]\prod_{\text{Finali}}e^{iq_kx_k}\prod_{\text{Iniziali}}e^{-iq_kx_k}\langle 0|T\left(\psi_\alpha\ldots\bar\psi_\beta\ldots\bar\psi_\gamma\ldots\psi_\delta\ldots A^\mu\right)|0\rangle \\ &\prod_{\text{e}^-\text{in},\text{e}^+\text{out}}[(\not q_l - m)u]_\beta\ldots[(\not q_t + m)v]_\gamma\ldots \end{aligned} \tag{9.35}$$

dove per i vari fattori o manipolazioni è indicato la categoria di particelle cui si applicano. In corrispondenza di ogni particella iniziale o finale la funzione di Green dovrà contenere un campo proiettato sull'appropriato spinore o vettore di polarizzazione:

$u_r(\mathbf{q})$	fermione iniziale
$v_r(\mathbf{q}$	anti-fermione finale
$\bar v_r(\mathbf{q})$	anti-fermione iniziale
$\bar u_r(\mathbf{q})$	fermione finale
$\epsilon_r^\mu(\mathbf{q})$	fotone iniziale o finale

9.4 Grafici di Feynman per la matrice S

Come abbiamo fatto nel caso del campo scalare, possiamo direttamente passare dai diagrammi che descrivono il funzionale generatore a quelli che descrivono elementi di matrice S.

Dobbiamo restringerci alle funzioni di Green che corrispondono ai grafici *connessi*, con linee esterne che corrispondono alle particelle iniziali e finali.

Inserendo le funzioni di Green nelle formule di riduzione e prendendo i residui nei poli corrispondenti ai momenti esterni, eliminiamo completamente i propagatori delle linee esterne ed otteniamo un fattore $\sqrt{Z_2}$ per ogni elettrone o positrone ed un fattore $\sqrt{Z_3}$ per ogni fotone.

Arriviamo cosí alla espressione generale per l'elemento di matrice S,

$$\langle f|S|i\rangle = \left(\prod_{\text{Ferm.}} \sqrt{2m}\right)\left(\prod_{\text{Tutte}} \sqrt{\frac{Z}{2\omega_q(2\pi)^3}}\right)(2\pi)^4\, i\,\delta^4(\sum_{\text{In}} q_i - \sum_{\text{Fin}} q_i)\,\mathscr{M}_{fi} \tag{9.36}$$

Come vedremo, i fattori $\sqrt{Z}$ associati alle linee esterne spariscono quando si esegue la rinormalizzazione. Abbiamo messo in evidenza i fattori cinematici e messo in evidenza un fattore $(2\pi)^4\, i\,\delta^4(\sum_{\text{In}} q_i - \sum_{\text{Fin}} q_i)$ che garantisce la conservazione dell'energia e della quantità di moto. Il fattore "i" segue la convenzione secondo cui la matrice S viene espressa come $1 + iT$, dove T è la matrice di transizione.

In termini di diagrammi dobbiamo limitarci a diagrammi connessi che siano, inoltre, *irriducibili ad una particella sulle linee esterne*. Avremo:

$$(2\pi)^4\, i\,\delta^4(\sum_{\text{In}} q_i - \sum_{\text{Fin}} q_i)\mathscr{M}_{fi} = \sum D_i \tag{9.37}$$

Regole di Feynman. Per definire meglio le regole per il calcolo dei diagrammi dobbiamo dire qualcosa di più sulla loro struttura. Per prima cosa osserviamo che (vedi eq. 9.11) ad ogni vertice afferiscono due linee fermioniche, una di tipo "$\bar{J}$" prodotta dalla derivata $\delta/\delta J$, che possiamo considerare *uscente* dal vertice, l'altra di tipo "J", prodotta da $\delta/\delta\bar{J}$, che possiamo considerare *entrante*. Come risulta dalla (9.13) una linea uscente da un primo vertice risulterà entrante in un secondo. Quindi se, partendo da un vertice, seguiamo di vertice in vertice una linea fermionica secondo il suo verso, si possono realizzare due situazioni: o arriviamo a una linea uscente dal diagramma (e seguendola all'indietro a una linea entrante nel diagramma), oppure torniamo al punto di partenza. Nel primo caso avremo una linea aperta, nel secondo una linea chiusa (in inglese *loop*). Dato che si tratta di fermioni, dobbiamo stare attenti ai segni. Nei due termini del vertice (9.11) la derivata $\delta/\delta\bar{J}$ (linea entrante) è a destra di $\delta/\delta J$ (linea uscente). Per una linea aperta possiamo ordinare gli operatori V che vi contribuiscono in modo che siano contigui e che le contrazioni avvengano sempre tra il fattore $\delta/\delta\bar{J}$ in uno dei vertici e il $\delta/\delta J$ in quello alla sua destra, una situazione che chiameremo *normale*. Ad esempio, per una linea aperta con tre vertici in x, y, z,

$$\left[\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\gamma^\mu\left(-i\frac{\delta}{\delta\bar{J}(x)}\right)\right]\left[\left(i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\gamma^\nu\left(-i\frac{\delta}{\delta\bar{J}(y)}\right)\right]\left[\left(i\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)\gamma^\sigma\left(-i\frac{\delta}{\delta\bar{J}(z)}\right)\right]$$

di modo che siamo sempre nel caso della prima delle (9.13). Nel caso di una linea fermionica chiusa troviamo necessariamente un numero dispari di casi in cui vengono contratte due derivate nell'ordinamento inverso, $\delta/\delta\bar{J}$ alla destra di $\delta/\delta J$, e in questi casi si applica la seconda (9.13), che ha il segno opposto alla prima. Ad esempio per una linea chiusa con due vertici,

$$\left[\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\gamma^\mu\left(-i\frac{\delta}{\delta\bar{J}(x)}\right)\right]\left[\left(i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\gamma^\nu\left(-i\frac{\delta}{\delta\bar{J}(y)}\right)\right]$$

la contrazione interna è nell'ordine normale, quella esterna nell'ordine opposto. Possiamo quindi usare sempre la prima delle (9.13) aggiungendo un ulteriore fattore (-1) per ciascuna linea chiusa.

Abbiamo omesso l'indicazione degli indici spinoriali, dato che gli indici contigui sono sommati. Nelle linee chiuse abbiamo anche una somma tra il primo e l'ultimo indice, una traccia: l'esempio che abbiamo dato corrisponde, includendo il fattore (-1), a

$$(-1)\,Tr\left[\gamma^{\mu} i S_F(x-y)\gamma^{\nu} i S_F(y-x)\right]$$

Per quanto riguarda le linee aperte, l'espressione corrispondente si scrive da sinistra a destra *cominciando con la linea uscente*, che può rappresentare un fermione nello stato finale , o un antifermione nello stato iniziale, e finice con la linea entrante — un fermione iniziale o un antifermione nello stato finale. Quindi per una linea fermionica aperta la regola è RISALIRE LA LINEA FERMIONICA COMINCIANDO DALLA FINE. Per una linea chiusa si può partire da qualunque vertice, dato che la traccia è invariante rispetto a permutazioni circolari, RISALENDO LA LINEA. Detto questo, gli elementi di un diagramma sono:

Vertice elettrone-fotone	$ie\,(2\pi)^4\,\delta^4(\sum q_i)\,\gamma^{\mu}$	
Vertice controtermine	$i\delta m\,(2\pi)^4\,\delta^4(\sum q_i)$	
Linea interna fermionica	$\dfrac{1}{(2\pi)^4}\displaystyle\int d^4p\,\dfrac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}$	
Linea interna fotonica	$\dfrac{1}{(2\pi)^4}\displaystyle\int d^4p\,\dfrac{-i g_{\mu\nu}}{p^2+i\epsilon}$	
Linea esterna fotonica	ϵ_{μ}	(9.38)
Linea Fermionica entrante	$\begin{cases}\text{Fermione iniziale} & u_r(\vec{q})\\ \text{Antiferm. finale} & v_r(\vec{q})\end{cases}$	
Linea Fermionica uscente	$\begin{cases}\text{Fermione finale} & \bar{u}_r(\vec{q})\\ \text{Antiferm. iniziale} & \bar{v}_r(\vec{q})\end{cases}$	
Linea Fermionica chiusa	Aggiungere un fattore (-1)	

È importante notare che il segno *relativo* tra diagrammi differenti che contribuiscono allo stesso processo sono fisicamente rilevanti. È questo il caso del fattore (-1) associato alle linee fermioniche chiuse, dato che diversi diagrammi per lo stesso processo possono avere un diverso numero di linee chiuse.

Nota. A titolo di esercizio, riportiamo nella Fig. 9.2 i diagrammi di Feynman del secondo ordine perturbativo, relativi alla funzione a quattro punti:

$$G(x_1,x_2;y_1,y_2) = <0|T\left[\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)A^{\mu}(y_1)A^{\nu}(y_2)\right]|0> \tag{9.39}$$

Tutti i grafici devono avere una linea fermionica aperta e si possono ordinare a seconda del numero di vertici $V = 0,1,2$ che cadono su di essa.

Notiamo che, come sottografici connessi, appaiono le correzioni al secondo ordine alla propagazione del fotone (primo diagramma con $V = 0$) e dell'elettrone (primo diagramma con $V = 2$). Nel terzo diagramma con $V = 0$ compare come sottodiagramma connesso la prima correzione perturbativa all'ampiezza della transizione *vuoto-vuoto*. Il secondo grafico con $V = 0$ ed il grafico con $V = 1$

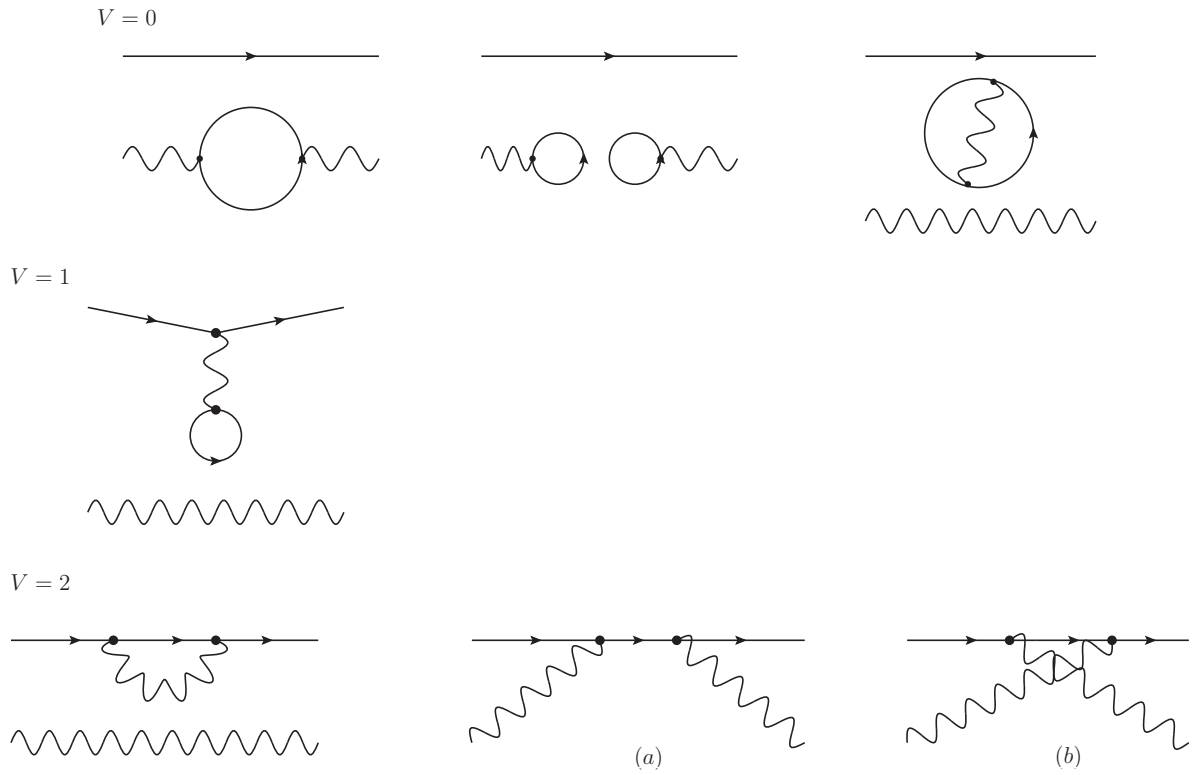


Figura 9.2: Diagrammi con numero di vertici V=0, 1, 2 lungo la linea aperta fermionica. I diagrammi che contribuiscono ad un processo di diffusione sono i diagrammi connessi, (a) e (b).

contengono entrambi un'ampiezza relativa alla transizione di un fotone nel vuoto. Questa ampiezza si annulla, dovuto ad una particolare simmetria della QED, la simmetria per Coniugazione di carica, che studieremo nel prossimo volume[4].

I diagrammi che contribuiscono ad un processo di diffusione, ad esempio la diffusione Compton:

$$e(p) + \gamma(k) \to e(p') + \gamma(k') \tag{9.40}$$

(tra parentesi i momenti delle particelle) sono solo i diagrammi connessi, indicati con (a) e (b).

Lasciamo al lettore di calcolare esplicitamente l' ampiezza invariante $\mathcal{M}_{fi}$, eq. (9.37), per la diffusione Compton usando le regole di Feynman appena date, applicate ai grafici (a) e (b) della Fig. 9.2. Il risultato è:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi}^{(a)} &= e^2\ \bar{u}(p')\gamma_\mu \epsilon^\mu(k') \frac{i}{p+k-m} \gamma_\nu \epsilon^\nu(k) u(p) \\ \mathcal{M}_{fi}^{(b)} &= e^2\ \bar{u}(p')\gamma_\nu \epsilon^\nu(k) \frac{i}{p-k'-m} \gamma_\mu \epsilon^\mu(k') u(p) \end{aligned} \tag{9.41}$$

dove per semplicità abbiamo assunto vettori di polarizzazione reali e abbiamo lasciato sottintesi gli indici di spin.

9.5 Combinatoria.

In poche parole: *non ci sono problemi di combinatoria.* Il fattore $1/n!$ che appare nello sviluppo di Z in potenze dell'operatore differenziale V (eq. 9.10) si compensa esattamente per i diagrammi connessi non di tipo vuoto-vuoto (i soli che ci interessano) dell'elettrodinamica quantistica. La ragione è che in un diagramma connesso ogni vertice ha una suo ruolo unico rispetto a quelli degli altri vertici. Supponiamo di avere dimostrato questo fatto, e di avere assegnato agli n vertici dei "ruoli" $\{r_1, r_2, \cdots r_n\}$. Il diagramma con n vertici sarà prodotto dal termine $V^n/n!$, ed esistono $n!$ modi di assegnare gli n ruoli alle n copie di V. Questo cancella esattamente il fattore $1/n!$.

Resta da far vedere che in ogni diagramma i ruoli dei vertici sono tutti diversi. Per far questo basta far vedere che esiste un algoritmo per assegnare a ciascun vertice un numero d'ordine progressivo, ad esempio

Passo (1) Supponiamo che ci siano $a > 0$ linee fermioniche aperte ed $l \geq 0$ linee fermioniche chiuse. Prima di tutto diamo un ordine alle linee aperte, ciascuna delle quali ha una identità definita dagli impulsi entranti e uscenti. Se $A_1, A_2, \cdots A_a$ sono le linee aperte, possiamo aprire la lista dei vertici mettendo prima quelli di A_1 cominciando (per non perdere l'allenamento) dalla fine della linea, poi quelli di A_2, e così via. Così abbiamo una lista che contiene tutti i vertici sulle linee aperte, ciascuno con il suo numero d'ordine.

Passo (2) Se $l > 0$ la lista deve ancora essere completata con i vertici di l linee chiuse. Almeno qualcuno di questi sarà connesso da un fotone con uno dei vertici già nella lista, altrimenti il diagramma sarebbe sconnesso, e tra questi scegliamo come prossimo nella lista quello connesso

[4] L'annullarsi di tutte le ampiezza con un numero dispari di fotoni esterni (uno nel nostro caso) va sotto il nome di Teorema di Furry.

al vertice con il numero d'ordine più basso. Partendo dal vertice appena aggiunto alla lista, aggiungiamo alla lista gli altri vertici che si incontrano sulla stessa linea chiusa, risalendo la linea (sempre per l'allenamento).

Se $l-1>0$ la lista deve ancora essere completata con i vertici di $l-1$ linee chiuse. Almeno qualcuno di questi sarà connesso da un fotone con uno dei vertici già nella lista, altrimenti il diagramma sarebbe sconnesso, e tra questi scegliamo come prossimo nella lista quello connesso al vertice con il numero d'ordine più basso. Partendo dal vertice appena aggiunto alla lista, aggiungiamo alla lista gli altri vertici che si incontrano sulla stessa linea chiusa, risalendo la linea (sempre per l'allenamento).

$\cdots$ [Continuare fino a che restano vertici fuori dalla lista.]

Se non ci sono linee aperte (ad esempio $\gamma+\gamma \rightarrow \gamma+\gamma$) diamo un ordine alle particelle entranti (necessariamente fotoni) , e apriamo la lista con il vertice su cui arriva la prima di queste. Aggiungiamo i vertici che si trovano sulla stessa linea chiusa del primo (dobbiamo dire in che ordine?). Se rimangono $l>0$ linee chiuse con vertici non catalogati, tornare al passo (2).

A questo punto ogni vertice ha il suo ruolo, ad esempio: "il vertice 7 è il terzo a partire dalla fine della seconda linea aperta" e la dimostrazione è completa.

Capitolo 10

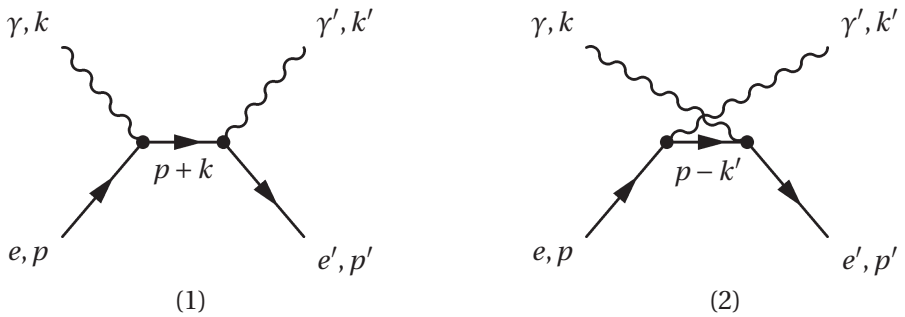
Effetto Compton

10.1 Calcolo del modulo quadrato dell'ampiezza

Consideriamo il processo

$$e + \gamma \to e' + \gamma' \,, \tag{10.1}$$

che all'ordine più basso della teoria della perturbazioni è descritto dai diagrammi di Feynman (1) e (2) rappresentati nella figura.



Per scrivere le ampiezze corrispondenti è conveniente introdurre le variabili di Mandelstam[1]

$$s = (p + k)^2 = (p' + k')^2 = E_{cm}^2 \,, \tag{10.2}$$

$$t = (p' - p)^2 = (k - k')^2 \,, \tag{10.3}$$

$$u = (p - k')^2 = (k - p')^2 \,, \tag{10.4}$$

dove E_{cm}^2 è l'energia totale nel sistema di riferimento del centro di massa, definito dalla relazione $\mathbf{p} + \mathbf{k} = 0$, e $\mathbf{p}$ e $\mathbf{k}$ sono gli impulsi, rispettivamente, dell'elettrone e del fotone presenti nello stato iniziale.

[1] Per completezza diamo anche la definizione della variabile t, che non verrà utilizzata nei calcoli discussi in questa Sezione

La sezione d'urto del processo è proporzionale al modulo quadrato della somma delle ampiezze associate ai diagrammi (1) e (2), mediato sugli stati di spin delle particelle nello stato iniziale e sommato sugli stati di spin delle particelle nello stato finale

$$\sigma \propto \overline{|M_1 + M_2|^2} = \overline{|M_1|^2} + \overline{|M_2|^2} + \overline{M_1 M_2^*} + \overline{M_1^* M_2} \,. \tag{10.5}$$

Il contributo del diagramma (1) vale

$$M_1 = \bar{u}' \epsilon'^{\,*}_\mu (ie\gamma^\mu) i \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2} (ie\gamma^\nu) \epsilon_\nu u \,, \tag{10.6}$$

dove $u = u_s(\mathbf{p})$ e $u' = u_{s'}(\mathbf{p}')$ sono i quadrispinori associati agli elettroni e ed e', e $\epsilon^\mu = \epsilon^\mu_r(\mathbf{k})$ e $\epsilon' = \epsilon^\mu_{r'}(\mathbf{k}')$ i vettori di polarizzazione dei fotoni γ e γ'.

Dalla (10.6), usando la (10.2), si ottiene

$$\overline{|M_1|^2} = \frac{e^4}{(s-m^2)^2} \frac{1}{4} \sum_{r,r'} \sum_{s,s'} \bar{u}' \epsilon'^{\,*}_\mu \gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu \epsilon_\nu u \bar{u} \epsilon_\sigma^{\,*} \gamma^\sigma (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\rho \epsilon'_\rho u' \,. \tag{10.7}$$

Le somme sugli stati di polarizzazione dei fotoni si effettuano facilmente ricordando che il risultato finale del nostro calcolo deve essere invariante per trasformazioni di gauge e notando che l'ampiezza di qualsiasi processo che coinvolge un fotone con polarizzazione r nello stato iniziale o finale si può mettere nella forma

$$M = \epsilon_{r,\mu} \mathcal{M}^\mu \,. \tag{10.8}$$

Il vettore di polarizzazione ϵ_r dipende dalla gauge, come si vede facilmente considerando la trasformazione

$$A_\mu(x) \to A_\mu{}'(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \tag{10.9}$$

dove

$$A_\mu(x) = \epsilon_{r,\mu} \mathrm{e}^{ikx} \,. \tag{10.10}$$

Scegliendo $\Lambda(x) = C\mathrm{e}^{ikx}$ troviamo quindi

$$A_\mu{}'(x) = (\epsilon_{r,\mu} + iCk_\mu)\mathrm{e}^{ikx} = \epsilon_{r,\mu}{}' \mathrm{e}^{ikx} \,, \tag{10.11}$$

cioè che la trasformazione di gauge cambia il vettore di polarizzazione ϵ_r in $\epsilon_r{}'$.

La condizione che l'ampiezza (10.8) resti invariante sotto la trasformazione del vettore di polarizzazione implica che deve essere

$$\epsilon_{r,\mu} \mathcal{M}^\mu = \epsilon_{r,\mu}{}' \mathcal{M}^\mu = (\epsilon_{r,\mu} + iCk_\mu) \mathcal{M}^\mu \,, \tag{10.12}$$

cioè

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu = 0 \,. \tag{10.13}$$

Questo risultato ci permette di effettuare la somma

$$\sum_r |M|^2 = (\mathcal{M}^\mu)^* \mathcal{M}^\nu \sum_{r=1}^{2} \epsilon^*_{r,\mu} \epsilon_{r,\nu} \,. \tag{10.14}$$

dove (si vedano gli appunti del corso di Meccanica Quantistica Relativistica)

$$\sum_{r=1}^{2} \epsilon^*_{r,\mu}\epsilon_{r,\nu} = -g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu - (kn)(k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu)}{(kn)^2} \,, \tag{10.15}$$

con $n^\mu \equiv (1,0,0,0)$. Dalla (10.13) segue infatti che

$$\sum_{r=1}^{2} |M|^2 = (\mathcal{M}^\mu)^* \mathcal{M}^\nu \sum_{r=1}^{2} \epsilon^*_{r,\mu}\epsilon_{r,\nu} = -(\mathcal{M}^\mu)^* \mathcal{M}^\nu \; g_{\mu\nu} = -|\mathcal{M}|^2 \,. \tag{10.16}$$

In conclusione, le somme sugli stati di polarizzazione dei fotoni nella (10.7) si effettuano facilmente con le sostituzioni

$$\sum_r \epsilon_r^{\sigma\,*}\epsilon_r^\nu = -g^{\sigma\nu} + \dots \;\;,\;\; \sum_{r'} \epsilon_r^{\mu\,*}\epsilon_r^\rho = -g^{\mu\rho} + \dots, \tag{10.17}$$

dove i puntini di sospensione indicano la presenza di termini il cui contributo alle ampiezze si annulla, e può quindi essere omesso.

Per sommare sugli spin degli elettroni si utilizzano le relazioni

$$\sum_s u_s(\mathbf{p})\overline{u}_s(\mathbf{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m} \,,\; \sum_{s'} u_{s'}(\mathbf{p}')\overline{u}_{s'}(\mathbf{p}') = \frac{\not{p}' + m}{2m} \,. \tag{10.18}$$

Si ottiene così,

$$\begin{aligned} \overline{|M_1|^2} &= \frac{e^4}{(s-m^2)^2}\frac{1}{4}\sum_{s,s'} \bar{u}'\gamma^\mu(\not{p}' + \not{k} + m)\gamma^\nu u \bar{u}\gamma_\nu(\not{p} + \not{k} + m)\gamma_\mu u' \\ &= \frac{e^4}{(s-m^2)^2}\frac{1}{16m^2}\mathrm{Tr}\,(\not{p}' + m)\gamma^\mu(\not{p}' + \not{k} + m)\gamma^\nu(\not{p} + m)\gamma_\nu(\not{p} + \not{k} + m)\gamma_\mu \,. \end{aligned} \tag{10.19}$$

Dobbiamo ora calcolare la traccia a secondo membro della (10.19) applicando le regole riassunte negli appunti del corso di Meccanica Quantistica Relativistica. Per prima cosa, usando la proprietà di invarianza della traccia sotto permutazioni cicliche degli argomenti, possiamo spostare la matrice γ_μ a sinistra del fattore $(\not{p}' + m)$. Sfruttando poi la relazione, valida per ogni quadrivettore a,

$$\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = a_\rho \gamma_\mu \gamma^\rho \gamma^\mu = a_\rho \gamma_\mu (2g^{\rho\mu} - \gamma^\mu\gamma^\rho) = -2\not{a} \tag{10.20}$$

possiamo porre la traccia da calcolare nella forma

$$\mathrm{Tr}\,(4m - 2\not{p}')(\not{p} + \not{k} + m)(4m - 2\not{p})(\not{p} + \not{k} + m) = A + B + C + D \,, \tag{10.21}$$

con

$$\begin{aligned} A &= 16m^2\mathrm{Tr}\,(\not{p} + \not{k} + m)(\not{p} + \not{k} + m) && (10.22)\\ B &= 4\mathrm{Tr}\,\not{p}'(\not{p} + \not{k} + m)\not{p}(\not{p} + \not{k} + m) && (10.23)\\ C &= -8m\mathrm{Tr}\,\not{p}'(\not{p} + \not{k} + m)(\not{p} + \not{k} + m) && (10.24)\\ D &= -8m\mathrm{Tr}\,(\not{p} + \not{k} + m)\not{p}(\not{p} + \not{k} + m) && (10.25)\\ & && (10.26) \end{aligned}$$

Definendo $\tilde{s} = p + k = p' + k'$, da cui segue che $\tilde{s}^2 = s$, e ricordando che la traccia del prodotto di un numero dispari di matrici γ si annulla, possiamo calcolare subito il termine A, col risultato

$$A = 16m^2 \mathrm{Tr}\,(\not{\tilde{s}}\not{\tilde{s}} + m^2) = 64m^2(s + m^2)\,, \tag{10.27}$$

che si ottiene facilmente notando che, dati due quadrivettori a e b

$$\mathrm{Tr}\; \not{a}\not{b} = a_\rho b_\sigma \mathrm{Tr}\,(\gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4a_\rho b_\sigma g^{\rho\sigma} = 4(ab)\,. \tag{10.28}$$

Il contributo dei termini C e D si ottiene procedendo in modo analogo. Per esempio, troviamo per C l'espressione

$$C = -8m \mathrm{Tr}\; \not{p}'(\not{\tilde{s}} + m)(\not{\tilde{s}} + m) = -16m^2 \mathrm{Tr}\; \not{p}'\not{\tilde{s}} = -64m^2(p'\tilde{s}) \tag{10.29}$$

che, sostituendo

$$(p'\tilde{s}) = p'(p' + k') = m^2 + (p'k')\,, \tag{10.30}$$

con $(p'k') = (s - m^2)/2$ diventa

$$C = -32m^2(s + m^2)\,. \tag{10.31}$$

Il calcolo del termine D è analogo, e il risultato che si ottiene è lo stesso

$$D = -64m^2(p\tilde{s}) = -32m^2(s + m^2)\,. \tag{10.32}$$

Sommando insieme le (10.27), (10.31) e (10.32) troviamo

$$A + C + D = 0\,, \tag{10.33}$$

da cui segue che l'unico termine che contribuisce alla traccia (10.21) è B, che possiamo riscrivere

$$B = \mathrm{Tr}\,(\not{p}'\not{\tilde{s}}\not{p}\not{\tilde{s}} + m^2\not{p}'\not{p})\,. \tag{10.34}$$

Il calcolo si effettua utilizzando la relazione

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) &= a_\lambda b_\mu c_\nu d_\rho \mathrm{Tr}\,(\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) \\ &= 4a_\lambda b_\mu c_\nu d_\rho (g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho} + g^{\lambda\rho}g^{\mu\nu} - g^{\lambda\nu}g^{\mu\rho}) \\ &= 4[(ab)(cd) + (ad)(bc) - (ac)(bd)]\,. \end{aligned} \tag{10.35}$$

Il risultato che si ottiene

$$B = 16[2(p'\tilde{s})(p\tilde{s}) - (pp')s + m^2(pp')] = 32\{(pk)(pk') + m^2[(pp') + (p'k)]\}\,, \tag{10.36}$$

si può scrivere in termini delle variabili s e u notando che

$$(pk') = \frac{m^2 - u}{2}\;,\;\; [(pp') + (p'k)] = \frac{s - m^2}{2}\,. \tag{10.37}$$

In conclusione troviamo la

$$B = 8\left[4m^4 + (s - m^2)(m^2 - u) + 2m^2(s - m^2)\right]\,. \tag{10.38}$$

Dalle equazioni (10.19) e (10.21) segue quindi che

$$\overline{|M_1|^2} = \frac{1}{4m^2}\,\frac{2e^4}{(s-m^2)^2}\left[4m^4-(s-m^2)(u-m^2)+2m^2(s-m^2)\right] . \tag{10.39}$$

Il modulo quadrato dell'ampiezza associata al grafico (2) si ottiene facilmente da $\overline{|M_1|^2}$ con la sostituzione $s \rightleftharpoons u$, col risultato

$$\overline{|M_2|^2} = \frac{1}{4m^2}\,\frac{2e^4}{(u-m^2)^2}\left[4m^4-(u-m^2)(s-m^2)+2m^2(u-m^2)\right] . \tag{10.40}$$

Dal calcolo del termine di interferenza, che si effettua in modo analogo, si ottiene

$$\overline{M_1 M_2^*} + \overline{M_1^* M_2} = \frac{1}{4m^2}\,\frac{4e^4}{(s-m^2)(u-m^2)}\left[4m^4-m^2(s-m^2)+m^2(u-m^2)\right] . \tag{10.41}$$

Finalmente, mettendo insieme i risultati (10.39), (10.40) e (10.41) troviamo

$$\begin{aligned}\overline{|M_1+M_2|^2} &= \frac{1}{4m^2}8e^4\left[\left(\frac{m^2}{s-m^2}+\frac{m^2}{u-m^2}\right)^2\right. \\ &+ \left.\left(\frac{m^2}{s-m^2}+\frac{m^2}{u-m^2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{u-m^2}{s-m^2}+\frac{s-m^2}{u-m^2}\right)\right] .\end{aligned} \tag{10.42}$$

10.2 Sezione d'urto di Klein-Nishina

Vogliamo ora utilizzare il risultato (10.42) per ottenere la sezione d'urto nel sistema del laboratorio, definito dalle relazioni

$$p \equiv (m,\mathbf{0}) \quad , \quad p' \equiv (E',\mathbf{p}') ,$$
$$k \equiv (\omega,\mathbf{k}) \quad , \quad k' \equiv (\omega',\mathbf{k}') ,$$

con $|\mathbf{k}| = \omega$ e $|\mathbf{k}|' = \omega'$, dalle quali segue che

$$s = (p+k)^2 = m^2+2m\omega \quad , \quad u = (p-k')^2 = m^2-2m\omega' . \tag{10.43}$$

Inoltre, la $p-p' = k'-k$ implica

$$1-\cos\theta = m\left(\frac{1}{\omega'}-\frac{1}{\omega}\right) , \tag{10.44}$$

dove θ è l'angolo compreso tra i vettori $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$.

Sostituendo le (10.43) e (10.44) nella (10.42) otteniamo

$$\overline{|M_1+M_2|^2} = \frac{1}{4m^2}2e^4\left(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right) . \tag{10.45}$$

La sezione d'urto è definita come

$$d\sigma = \frac{1}{F}\frac{W}{T}\frac{V}{(2\pi^3)}d^3p'\frac{V}{(2\pi^3)}d^3k' , \tag{10.46}$$

dove il flusso dei fotoni incidenti, F, vale

$$F = \frac{1}{V}\frac{|\mathbf{k}|}{\omega} = \frac{1}{V}\,, \tag{10.47}$$

mentre la probabilità di transizione per unità di tempo è

$$\begin{aligned}\frac{W}{T} &= \frac{1}{T}\,VT(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k-p'-k') \\ &\quad\times\frac{1}{2V\omega}\frac{1}{2V\omega'}\frac{m}{Vm}\frac{m}{VE'}\,\overline{|M_1+M_2|^2}\,.\end{aligned} \tag{10.48}$$

Sostituendo le (10.45) (10.47) e (10.48) nella (10.46) e effettuando l'integrazione su $\mathbf{p}'$ sfruttando la funzione δ associata alla conservazione dell'impulso otteniamo

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{\omega\omega' mE'}\,2e^4\left(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right)\delta(m+\omega-E'-\omega')d^3k'\,, \tag{10.49}$$

ovvero, ricordando che $d^3k' = d\Omega'\omega'^2 d\omega'$, dove Ω' è l'angolo solido che individua la direzione del vettore $\mathbf{k}'$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{e^4}{32\pi^2}\frac{\omega'}{\omega}\frac{1}{mE'}\left(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right)\,\delta(m+\omega-E'-\omega')d\omega'\,. \tag{10.50}$$

L'integrazione su ω' con la funzione δ si effettua usando la regola

$$\delta[F(\omega')] = \left|\frac{dF}{d\omega'}\right|^{-1}\delta(\omega'-\omega'_0)\,, \tag{10.51}$$

con $F(\omega'_0) = 0$. Ricordando che $E' = \sqrt{m^2+|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|^2}$ troviamo

$$\left|\frac{d}{d\omega'}(m+\omega-E'-\omega')\right| = \frac{1}{E'}(\omega'-\omega\cos\theta)+1 = \frac{(p'k')}{E'\omega'} = \frac{(pk)}{E'\omega'} = \frac{m\omega}{E'\omega'} \tag{10.52}$$

e quindi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{e^4}{32\pi^2}\frac{\omega'}{\omega}\frac{1}{mE'}\frac{E'\omega'}{m\omega}\left(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right) \tag{10.53}$$

ovvero

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{\alpha}{2m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}-\sin^2\theta\right)\,. \tag{10.54}$$

La sezione d'urto (10.54), ottenuta nel Klein e Nishina nel 1929, fornisce una descrizione accurata dell'effetto Compton, osservato sperimentalmente per la prima volta nel 1923.

Consideriamo ora la (10.54) nel limite non relativistico, in cui $\omega/m \ll 1$. Risolvendo la (10.44) per ω' si ottiene la relazione

$$\omega' = \frac{\omega}{1+\frac{\omega}{m}(1-\cos\theta)}\,, \tag{10.55}$$

che mostra come, nel limite che ci interessa, $\omega/\omega' \to 1$ e la (10.54) diventa

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{\alpha}{2m^2}\,(1+\cos^2\theta)\,. \tag{10.56}$$

Per ottenere la sezione d'urto totale effettuiamo l'integrale angolare

$$\sigma = 2\pi \frac{\alpha}{2m^2} \int d\cos\theta \, (1+\cos^2\theta) = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha}{m^2} \, . \tag{10.57}$$

La (10.57) è la sezione d'urto di Thomson, che descrive l'interazione del campo elettromagnetico classico con un elettrone.

10.3 Diffusione Compton su elettroni relativistici

Nelle Sezioni precedenti abbiamo considerato la sezione d'urto di diffusione fotone-elettrone nel sistema di riferimento del laboratorio, nel quale l'elettrone è in quiete. L'espressione che abbiamo ottenuto per il modulo quadrato dell'ampiezza di transizione non dipende però dalla scelta particolare del sistema di riferimento e può essere utilizzata anche nel caso in cui gli elettroni siano relativistici, cioè abbiano energia molto maggiore della massa a riposo. Come vedremo, in queste condizioni è possibile ottenere nello stato finale fotoni con energia $\omega' \gg \omega$.

Definendo le variabili cinematiche come

$$p \equiv (E, \mathbf{p}) \quad , \quad p' \equiv (E', \mathbf{p}') \, ,$$

$$k \equiv (\omega, \mathbf{k}) \quad , \quad k' \equiv (\omega', \mathbf{k}') \, ,$$

dalla conservazione del quadrimpulso totale, che implica

$$(pk) = (p'k') = (p+k-k')k' = (pk') + (kk') \, , \tag{10.58}$$

otteniamo la relazione

$$E\omega - \mathbf{p}\cdot\mathbf{k} = E\omega' - \mathbf{p}\cdot\mathbf{k}' \, , + \omega\omega'(1-\cos\theta) \tag{10.59}$$

che e possiamo riscrivere

$$\omega(1-\beta\cos\phi) = \omega'(1-\beta\cos\phi') + \frac{\omega\omega'}{E}(1-\cos\theta) \, , \tag{10.60}$$

dove ϕ e ϕ' sono gli angoli compresi tra la direzione di $\mathbf{p}$ e quelle, rispettivamente, di $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$, e $\beta = |\mathbf{p}|/E$ è la velocità dell'elettrone (nel sistema di in unità di misura nel quale la velocità della luce è $c = 1$).

Risolvendo la (10.60) rispetto ad ω' otteniamo la

$$\omega' = \omega \, \frac{1-\beta\cos\phi}{1-\beta\cos\phi' + \frac{\omega}{E}(1-\cos\theta)} \, , \tag{10.61}$$

che si riduce ovviamente alla (10.55) nel limite $\beta \to 0$. Per elettroni relativistici $\beta \approx 1$ e possiamo usare l'espansione, valida per $1/\gamma^2 \ll 1$,

$$\beta = \frac{|\mathbf{p}|}{E} = \sqrt{\frac{E^2-m^2}{E^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \, , \tag{10.62}$$

dove $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ è il fattore di Lorentz.

Consideriamo ora il caso in cui **p** e **k** hanno direzione circa uguale e verso opposto, cioè $\phi \approx \pi$, e gli impulsi delle particelle nello stato finale sono tali che $\theta \approx \pi$ e $\phi' \approx 0$. In queste condizioni la (10.61) si può riscrivere nella forma

$$\omega' \approx E \frac{z}{1+x+z} \,, \tag{10.63}$$

dove

$$z = \frac{4\gamma^2\omega}{E} \quad , \quad x = \gamma^2 \phi'^2 \,. \tag{10.64}$$

Per ω fissato, il valore massimo di ω', ω'_{max}, corrisponde a $\phi' = 0$ e vale

$$\omega'_{max} = E^2 \frac{4}{m^2} \frac{\omega}{1+z} \,. \tag{10.65}$$

Nella diffusione Compton di elettroni ottenuti da una macchina acceleratrice su fotoni con energie dell'ordine di un eV, ottenuti da un laser, si possono produrre fotoni di energia massima dell'ordine del GeV la cui distribuzione, illustrata dalla Figura 10.1, presenta un picco per $\omega \approx \omega'_{max}$ la cui larghezza decresce all'aumentare di E e ω.

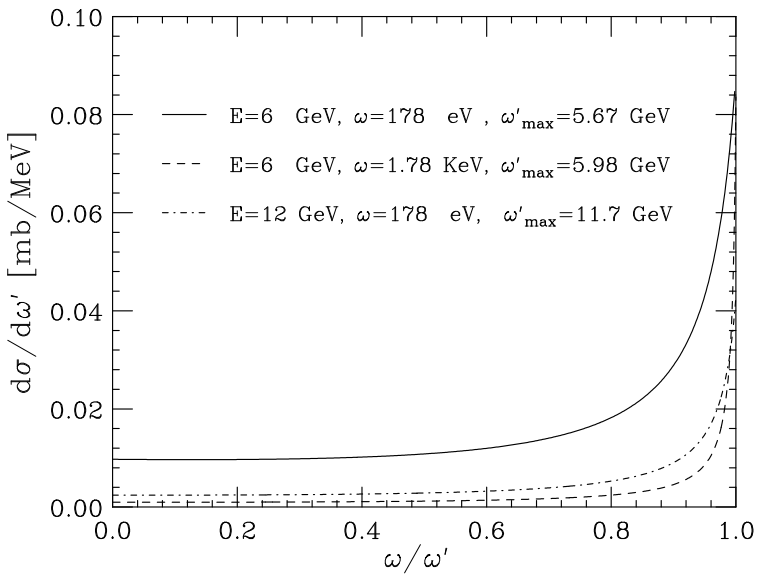


Figura 10.1: Distribuzione in energia di fotoni prodotti con diffusione Compton di eletroni relativistici.

Questa tecnica viene utilizzata per la produzione di fasci di fotoni utilizzabili per esperimenti di fisica dei nuclei. Il primo fascio di questo tipo, di energia ~ 80 MeV, è stato ottenuto alla fine degli anni settanta ai Laboratori di Frascati, utilizzando gli elettroni dell'anello di accumulazione Adone, di energia $E = 1.5$ GeV e fotoni di energia $\omega = 2.45$ eV. Il fascio di fotoni che si ottiene possiede anche l'importante proprietà di avere la stessa polarizzazione dei fotoni prodotti dal laser, in quanto gli elettroni, essendo ultrarelativistici, conservano la loro elicità nel processo di diffusione.

Capitolo 11

Simmetrie P, C, T

Discutiamo in questo Capitolo le simmetrie discrete della QED, che riguardano le tre trasformazioni:

- inversione degli assi coordinati spaziali ad un dato tempo:

$$\mathbf{x} \to -\mathbf{x}, \; t \to t \tag{11.1}$$

  la *Paritá*, che indicheremo con $\mathscr{P}$;

- sostituzione di ogni particella con la sua antiparticella e viceversa, la *Coniugazione di carica*, $\mathscr{C}$;

- inversione del tempo, *Time-reversal*

$$t \to -t, \; \mathbf{x} \to \mathbf{x} \tag{11.2}$$

  che indicheremo con $\mathscr{T}$.

Le prime due trasformazioni sono rappresentate, nello spazio di Hilbert degli stati, da operatori unitari mentre l' inversione temporale deve agire come un operatore anti-unitario. Tutti questi operatori lasciano invariante la lagrangiana della QED e sono quindi delle *simmetrie esatte* di questa teoria.

11.1 Paritá

L' azione della Paritá sugli operatori di campo segue dalla (11.1): le componenti del campo in $\mathbf{x}$ trasformato devono essere una sovrapposizione delle componenti del campo in $-\mathbf{x}$. L' applicazione due volte dell' operazione di paritá ci riporta al punto di partenza, quindi imporremo la condizione:

$$\mathscr{P}\mathscr{P} = 1 \tag{11.3}$$

Per il campo elettromagnetico, sappiamo dal limite classico che le componenti spaziali del potenziale vettore sono dei vettori polari, mentre il potenziale scalare è, appunto, uno scalare. Quindi:

$$\mathscr{P} A^{\mu}(\mathbf{x}, t)\mathscr{P} = g^{\mu\mu} A^{\mu}(-\mathbf{x}, t) \tag{11.4}$$

(gli indici ripetuti tre volte *non* sono sommati). Di qui, troviamo:

$$\mathscr{P}\partial^{\lambda} A^{\mu}(\mathbf{x}, t)\mathscr{P} = g^{\mu\mu} g^{\lambda\lambda}\partial^{\lambda} A^{\mu}(-\mathbf{x}, t) \tag{11.5}$$

da cui segue la legge di trasformazione del tensore di Maxwell

$$\mathscr{P} F^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)\mathscr{P} = g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} F^{\mu\nu}(-\mathbf{x}, t) \tag{11.6}$$

Nel caso dello spinore, la legge generale si scrive:

$$\mathscr{P}\psi(\mathbf{x}, t)_{\alpha}\mathscr{P} = [P\psi(-\mathbf{x}, t)]_{\alpha} = P_{\alpha\beta}\psi(-\mathbf{x}, t)]_{\beta} \tag{11.7}$$

dove P è una matrice nello spazio degli spinori di Dirac da determinare in modo tale che le osservabili costruite con i campi si trasformino correttamente sotto la paritá.

Per rispettare il limite classico, la corrente si deve trasformare come il potenziale vettore:

$$\mathscr{P}\bar{\psi}(\mathbf{x}, t)\gamma^{\mu}\psi(\mathbf{x}, t)\mathscr{P} = g^{\mu\mu}\bar{\psi}(-\mathbf{x}, t)\gamma^{\mu}\psi(-\mathbf{x}, t) \tag{11.8}$$

Sostituendo la (11.7), troviamo:

$$\mathscr{P}\bar{\psi}(\mathbf{x}, t)\gamma^{\mu}\psi(\mathbf{x}, t)\mathscr{P} = g^{\mu\mu}\bar{\psi}(-\mathbf{x}, t)P^{\dagger}\gamma^{0}\gamma^{\mu}P\psi(-\mathbf{x}, t) \tag{11.9}$$

- Per $\mu = 0$, troviamo:

$$P^{\dagger}P = 1 \tag{11.10}$$

- Per $\mu = i$ (i=1, 2, 3), troviamo:

$$P^{\dagger}\gamma^{0}\gamma^{i}P = P^{\dagger}\alpha^{i}P = -\alpha^{i} \tag{11.11}$$

In conclusione, P deve anticommutare con tutte le α^{i} e questo implica:

$$P = c\gamma^{0} \tag{11.12}$$

Se chiediamo che sia P^2=1, segue $|c|^2$=1. Senza perdere in generalitá, possiamo fissare c=1, per cui:

$$P = \gamma^{0};\ \ P = P^{\dagger} = P^{-1} \tag{11.13}$$

Come abbiamo visto in [1], le osservabili si costruiscono dalle espressioni bilineari nei campi di Dirac, che a loro volta sono organizzati nei *bilineari covarianti* di Dirac. Le relazioni (11.7,11.13) determinano le proprietá di traformazione sotto paritá di ciascun bilineare.

Bilineari covarianti. Lasciamo al lettore il compito di generalizzare la (11.9), mostrando che i bilineari S, P, V, A, T trasformano sotto paritá come scalare, pseudoscalare, vettore polare, vettore assiale, tensore.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{S}: \mathscr{P}\bar{\psi}(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{x},t)\mathscr{P} = -\bar{\psi}(-\mathbf{x},t)\psi(-\mathbf{x},t);\\
&\mathrm{P}: \mathscr{P}\bar{\psi}(\mathbf{x},t)i\gamma_5\psi(\mathbf{x},t)\mathscr{P} = -\bar{\psi}(-\mathbf{x},t)i\gamma_5\psi(-\mathbf{x},t);\\
&\mathrm{V}: \mathscr{P}\bar{\psi}(\mathbf{x},t)\gamma^\mu\psi(\mathbf{x},t)\mathscr{P} = g^{\mu\mu}\,\bar{\psi}(-\mathbf{x},t)\gamma^\mu\psi(-\mathbf{x},t)\\
&\mathrm{A}: \mathscr{P}\bar{\psi}(\mathbf{x},t)\gamma^\mu\gamma_5\psi(\mathbf{x},t)\mathscr{P} = -g^{\mu\mu}\,\bar{\psi}(-\mathbf{x},t)\gamma^\mu\gamma_5\psi(-\mathbf{x},t);\\
&\mathrm{T}: \mathscr{P}\bar{\psi}(\mathbf{x},t)\sigma^{\mu\nu}\psi(\mathbf{x},t)\mathscr{P} = g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}\,\bar{\psi}(-\mathbf{x},t)\sigma^{\mu\nu}\psi(-\mathbf{x},t).
\end{aligned} \tag{11.14}$$

Un corollario delle relazioni che abbiamo dimostrato è che l' azione della QCD è invariante per paritá. Infatti, nella:

$$\mathscr{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) \;+\; eA_\mu(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x) \tag{11.15}$$

compaiono solo grandezze scalari o comunque prodotti tra vettori polari. Quindi:

$$\mathscr{P}S\mathscr{P} = \mathscr{P}\int d^4x\mathscr{L}_{QED}(\mathbf{x},t)\mathscr{P} = \int d^4x\mathscr{L}_{QED}(-\mathbf{x},t) = \int d^4x\mathscr{L}_{QED}(\mathbf{x},t) = S \tag{11.16}$$

L' invarianza resta valida se aggiungiamo all' azione i termini non minimali che descrivono un eventuale momento magnetico anomalo [1], della forma:

$$\mathscr{L}_{non\ min.} = \frac{\kappa}{2m}\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi\, F^{\mu\nu} \tag{11.17}$$

11.2 Coniugazione di carica

Il campo ψ distrugge un elettrone e crea un positrone, mentre $\psi^\dagger$ crea un elettrone e distrugge un positrone. Come abbiamo piú volte osservato, l' affermazione che il positrone è l' antiparticella dell' elettrone è puramente convenzionale ed i ruoli di elettrone e positrone, in QED, sono perfettamente simmetrici. In altre parole, dovremmo poter formulare la QED in termini di un nuovo campo che distrugge il positrone e crea l' elettrone. Se chiamiamo ψ_c il nuovo campo, da quanto appena detto segue che: *le componenti di ψ_c devone essere combinazioni lineari delle componenti di $\psi^\dagger$.*

In formule (non indichiamo le coordinate, che sono le stesse nel primo e nel secondo membro della relazione):

$$[\psi_c]_\alpha = \mathscr{C}\psi_\alpha\mathscr{C} = \left[C\psi^\dagger\right]_\alpha = C_{\alpha\beta}\psi^\dagger_\beta \tag{11.18}$$

dove, come prima, C è una matrice da determinare in modo tale che la trasformazione $\mathscr{C}$ sugli osservabili corrisponda alla sostituzione di ciascun elettrone con un positrone e viceversa. Prendendo l' hermitiano coniugato della (11.18), troviamo anche:

$$[\psi_c]^\dagger_\alpha = \mathscr{C}\psi^\dagger_\alpha\mathscr{C} = \left[\psi C^\dagger\right]_\alpha \tag{11.19}$$

Come nel caso della paritá, ripetendo $\mathscr{C}$ due volte si ottiene la trasformazione identica. Possiamo quindi richiedere che sia C^2=1, per cui:

$$\psi = (\psi_c)^\dagger C^\dagger; \;\; \psi^\dagger = C\psi_c \tag{11.20}$$

Affinché la lagrangiana di Dirac libera sia invariante sotto $\mathscr{C}$, deve essere, in primo luogo:

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_c\psi_c \tag{11.21}$$

Ci mettiamo nella rappresentazione di Pauli delle matrici gamma, in cui γ^0 è reale e simmetrica. I prodotti dei campi in queste formule vanno tutti intesi come prodotti normali, all' interno dei quali i campi fermionici anticommutano. Abbiamo quindi:

$$\bar{\psi}\psi = -\,\psi(\gamma^0)^T\psi^\dagger = -\,(\psi_c)^\dagger C^\dagger\gamma^0 C\psi_c \tag{11.22}$$

da cui:

$$C^\dagger\gamma^0 C = -\gamma^0 \tag{11.23}$$

Imponiamo adesso che il termine con le derivate nell' azione di Dirac, S_{kin}, mantenga la stessa forma quando espresso nei campi coniugati:

$$\begin{aligned} S_{kin} &= \int d^4x\; i\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi = -\int d^4x\; i(\partial_\mu\psi^\dagger)\gamma^0\gamma^\mu\psi = \\ &= +\int d^4x\; i\psi(\gamma^0\gamma^\mu)^T(\partial_\mu\psi^\dagger) = +\int d^4x\; i\bar{\psi}_c\gamma^0 C^\dagger(\gamma^\mu)^T\gamma^0 C(\partial_\mu\psi_c) \end{aligned} \tag{11.24}$$

Dobbiamo avere quindi:

$$\gamma^0 C^\dagger(\gamma^\mu)^T\gamma^0 C = \gamma^\mu \tag{11.25}$$

Se poniamo μ=0, la relazione precedente diventa:

$$C^\dagger C = 1 \;\;\rightarrow\;\; C^\dagger = C = C^{-1} \tag{11.26}$$

e dalla relazione (11.23) vediamo che C deve anticommutare con γ^0. Se usiamo inoltre la relazione generale:

$$\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu \tag{11.27}$$

la (11.25) diventa:

$$C\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^* \tag{11.28}$$

Nella rappresentazione di Pauli, $\gamma^{0,1,3}$ sono reali mentre γ^2 è immaginaria. La (11.28) ci dice che C anticommuta con $\gamma^{0,1,3}$ e commuta con γ^2, quindi C deve essere proporzionale a γ^2. Se imponiamo che abbia quadrato pari ad uno, troviamo, a meno di un segno inessenziale:

$$C = i\gamma^2 \tag{11.29}$$

C è quindi una matrice *reale, simmetrica.* Con questa determinazione di C, possiamo determinare il comportamento sotto $\mathscr{C}$ dei bilineari di Dirac. Scriviamo, genericamente:

$$\mathscr{O}(\Gamma) = \bar{\psi}\Gamma\psi = -\psi(\Gamma)^T\gamma^0\psi^\dagger \tag{11.30}$$

Usando le (11.18,11.19), abbiamo:

$$\mathscr{C}\Gamma\mathscr{C} = -\,\bar{\psi}_c\gamma^0 C(\Gamma)^T\gamma^0 C\psi_c = \bar{\psi}_c C\Gamma^* C\psi_c \tag{11.31}$$

dove abbiamo assunto che i bilineari siano definiti in modo da soddisfare le relazioni di hermiticitá:

$$\gamma^0\Gamma\gamma^0 = \Gamma^\dagger \tag{11.32}$$

(questo è il motivo del fattore i che compare nella densitá pseudoscalare). In conclusione, troviamo che, sotto coniugazione di carica:

$$\mathscr{O}(\Gamma) \;\rightarrow\; \mathscr{O}(C\Gamma^* C) \tag{11.33}$$

Dalla (11.33), si deriva facilmente che i bilineari di Dirac prendono ciascuno un segno caratteristico sotto $\mathscr{C}$, che indichiamo con η_C, dove

$$\begin{aligned} \eta_C &= +1, \quad \text{per} \quad S, P, A \\ \eta_C &= -1, \quad \text{per} \quad V, T \end{aligned} \tag{11.34}$$

La lagrangiana della QED, (11.15), incluse le sue estensioni non minimali, è invariante sotto C.

11.3 Inversione del tempo

In Meccanica classica, possiamo cambiare segno alla velocitá di tutte le particelle del sistema al tempo $t = 0$. Nei tempi successivi, il nuovo sistema ripercorre all' indietro tutte le configurazioni da cui era passato il sistema originale. Indichiamo con A=(q, p) il punto nello spazio delle fasi di un sistema Hamiltoniano classico e con

$$A = (q, p) \rightarrow A_T = (q, -p) \tag{11.35}$$

la trasformazione che chiamiamo *Inversione Temporale.* Se confrontiamo il comportamento del sistema che parte da A al tempo t=0 con quello che parte da A_T, possiamo esprimere in formule l' affermazione che abbiamo fatto all' inizio al modo seguente:

$$\begin{aligned} &A(t) \qquad \text{(stato al tempo t con A(0) = A)} \\ &A_T(t) \qquad \text{(stato al tempo t con } A_T(0) = A_T\text{)} \\ &A_T(t) = T\,[A(-t)] \qquad \text{(Inversione del tempo in MeccanicaClassica)} \end{aligned} \tag{11.36}$$

La relazione (11.36) è illustrata graficamente nella Fig. 11.1, nel caso del moto di un oscillatore armonico.

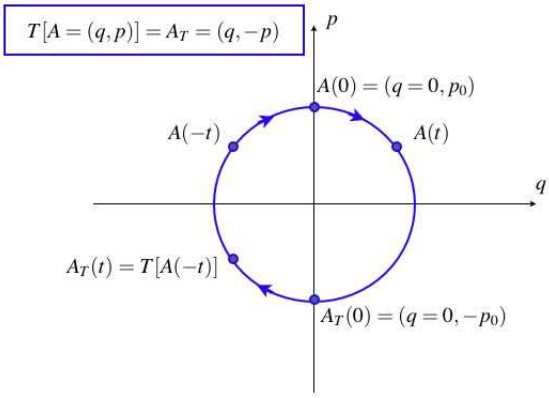


Figura 11.1: Inversione temporale nel moto di un oscillatore armonico classico

Cosa succede nella Meccanica Quantistica? La trasformazione di inversione temporale deve essere eseguita sugli stati quantistici da un operatore, che indichiamo con $\mathscr{T}$, tale che (ci mettiamo nella rappresentazione di Schroedinger):

$$\begin{aligned} &|A;t=0\rangle \to |A_T;t=0\rangle = \mathscr{T}|A;t=0\rangle \\ &|A_T;t\rangle = \mathscr{T}|A;-t\rangle \quad \text{(Inversione del tempo in MeccanicaQuantistica)} \end{aligned} \tag{11.37}$$

Tuttavia, l'operatore $\mathscr{T}$ deve avere proprietá del tutto speciali, come si vede dal seguente argomento. Supponiamo che lo stato A sia un autostato dell' energia con autovalore E. Ci aspettiamo che anche A_T abbia la stessa energia (come avviene in Meccanica Classica). In questo caso:

$$|E;t\rangle = e^{-iEt}|E;t=0\rangle;\ \ |E_T;t\rangle = e^{-iEt}|E_T;t=0\rangle \tag{11.38}$$

Tuttavia dovrebbe essere

$$|E_T;t\rangle = e^{-iEt}|E_T;t=0\rangle = \mathscr{T}[e^{-i(-t)E}|E;t=0\rangle] = \mathscr{T}(e^{+itE}|E;t=0\rangle) \tag{11.39}$$

che è impossibile da realizzare se $\mathscr{T}$ è un operatore lineare, poiché in questo caso le fasi degli esponenziali nei due membri avrebbero segno opposto.

La soluzione proposta da Wigner è di usare un operatore che sia *antilineare*:

$$\mathscr{T}\left(\alpha|A\rangle + \beta|B\rangle\right) = \alpha^*\mathscr{T}|A\rangle + \beta^*\mathscr{T}|B\rangle \tag{11.40}$$

In questo caso abbiamo:

$$\mathscr{T}(e^{+iEt}|E;t=0\rangle) = e^{-itE}\mathscr{T}|E;t=0\rangle = e^{-itE}|E_T;t=0\rangle_T \tag{11.41}$$

come richiesto.

Simmetrie e operatori unitari o antiunitari La condizione posta da Wigner per avere una simmetria, è che l' operatore che la rappresenta lasci invariate le relazioni mutue tra stati quantistici. A loro volta, queste relazioni sono rappresentate dai *moduli quadri dei prodotti scalari*, che ci danno le probabilitá delle misure quantistiche. Se:

$$|A_T\rangle = \mathcal{T}|A\rangle;\ |B_T\rangle = \mathcal{T}|B\rangle;\ \ldots \tag{11.42}$$

deve essere:

$$|\langle A_T|B_T\rangle|^2 = |\langle A|B\rangle|^2 \tag{11.43}$$

che ci da due possibilitá per l' operatore che esegue la trasformazione$|A\rangle \to |A_T\rangle$:

$$\langle A_T|B_T\rangle = \langle A|B\rangle\ :\ \text{operatore unitario} \tag{11.44}$$

$$\langle A_T|B_T\rangle = \langle A|B\rangle^*\ :\ \text{operatore antiunitario} \tag{11.45}$$

Per trasformazioni dipendenti da uno o piú parametri, che siano connesse alla trasformazione identica (Lorentz proprie, traslazioni) deve valere la prima condizione, per continuitá. Per l' argomento che abbiamo dato prima, la seconda è quella che deve applicarsi a tutte le simmetrie che coinvolgono l' inversione temporale.

Azione di $\mathcal{T}$ sui campi Richiediamo che sia:

$$\mathcal{T}^\dagger = \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T} \tag{11.46}$$

L' azione dell' operatore $\mathcal{T}$ sul potenziale vettore è fissata dal limite classico. Se T lascia invariata la posizione delle cariche ed inverte la loro velocitá, deve essere:

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}A^0(\mathbf{x},t)\mathcal{T} = +A^0(\mathbf{x},-t);\ \mathcal{T}A^i(\mathbf{x},t)\mathcal{T} = -A^i(\mathbf{x},-t)\\ &\text{ovvero}\\ &\mathcal{T}A^\mu(\mathbf{x},t)\mathcal{T} = A^\mu(\mathbf{x},-t)\end{aligned} \tag{11.47}$$

L' operatore $\mathcal{T}$ deve trasformare $\psi_\alpha(\mathbf{x},t)$ in una combinazione lineare dei campi $\psi_\beta(\mathbf{x},t)$:

$$\mathcal{T}\psi_\alpha(\mathbf{x},t)\mathcal{T} = T_{\alpha\beta}\psi_\beta(\mathbf{x},-t) = [T\psi(\mathbf{x},-t)]_\alpha \tag{11.48}$$

da cui, anche:

$$\mathcal{T}\psi(\mathbf{x},t)^\dagger\mathcal{T} = [\psi(\mathbf{x},-t)T]^\dagger \tag{11.49}$$

La forma della matrice T si determina richiedendo che la corrente si trasformi come A^μ nella (11.47). Tenendo conto dell' antilinearitá di $\mathcal{T}$, abbiamo:

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}\bar{\psi}(\mathbf{x},t)\gamma^\mu\psi(\mathbf{x},t)\mathcal{T} = \mathcal{T}\psi(\mathbf{x},t)^\dagger\mathcal{T}\mathcal{T}\left[\gamma^0\gamma^\mu\right]\psi(\mathbf{x},t)\mathcal{T} =\\ &= \mathcal{T}\psi(\mathbf{x},t)^\dagger\mathcal{T}\left[\gamma^0\gamma^\mu\right]^*\mathcal{T}\psi(\mathbf{x},t)\mathcal{T} = \psi(\mathbf{x},-t)^\dagger T^\dagger\left[\gamma^0\gamma^\mu\right]^* T\psi(\mathbf{x},-t)\end{aligned} \tag{11.50}$$

da cui troviamo:

$$\begin{aligned} \mu = 0: \;& T^\dagger T = 1 \\ \mu = i: \;& T^\dagger (\alpha^i)^* T = -\alpha^i \end{aligned} \tag{11.51}$$

dove abbiamo introdotto le matrici di Dirac, $\alpha^i = \gamma^0\gamma^i$. Se richiediamo, come al solito, $T^2 = 1$, le condizioni precedenti ci danno:

$$\begin{aligned} & T^\dagger T = T^{-1} = T \\ \mu = i: \;& T(\alpha^i)^* T = -\alpha^i \end{aligned} \tag{11.52}$$

Nella rappresentazione di Pauli, $\alpha^{1,3}$ sono reali e α^2 immaginario, quindi T deve anticommutare con $\alpha^{1,3}$ e commutare con α^2. Dalle (11.52) otteniamo quindi:

$$T = i\gamma^1\gamma^3 = \sigma_2 \tag{11.53}$$

La trasformazione con la matrice σ_2 lascia γ^0, che ̀reale, e cambia segno alle γ^i, quindi:

$$T(\gamma^\mu)^* T = g^{\mu\mu}\gamma^\mu \tag{11.54}$$

Di qui si trovano immediatamente le leggi di trasformazione dei bilineari di Dirac, che sono formati con i prodotti delle matrici gamma. Si trova:

$$\begin{aligned} & \mathcal{O}(\Gamma)((\mathbf{x}, t) = \bar{\psi}(\mathbf{x}, t)\Gamma\psi(\mathbf{x}, t) \\ & \mathcal{T}\mathcal{O}(\Gamma)(\mathbf{x}, t)\mathcal{T} = \mathcal{O}(T\Gamma^* T)(\mathbf{x}, -t) = \eta_T \mathcal{O}(\Gamma)(\mathbf{x}, -t) \end{aligned} \tag{11.55}$$

dove:

$$\begin{aligned} \eta_T &= +1 \quad \text{(S, P)} \\ \eta_T &= g^{\mu\mu} \quad \text{(V, A)} \\ \eta_T &= -g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} \quad \text{(T)} \end{aligned} \tag{11.56}$$

11.4 Trasformazione degli stati

Consideriamo le proprietá di trasformazione degli stati dell' elettrone e del positrone. Ci restringiamo al caso dei campi liberi che descrivono gli stati asintotici in e out. Per comoditá del lettore, riportiamo la forma delle soluzioni ad energia positiva e negativa dell' equazione di Dirac, vedi [1]. Lo spin è quantizzato in una direzione fissa che scegliamo lngo l' asse z.

$$\begin{aligned} u_s(p) &= \sqrt{\frac{E(p)+m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{E(p)+m}\chi_s \end{pmatrix}; \quad \sigma_3\chi_s = s\chi_s \;\; (s = \pm 1) \\ v_s(p) &= \sqrt{\frac{E(p)+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{E(p)+m}\xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix}; \quad \sigma_3\xi_s = s\xi_s \;\; (s = \mp 1) \end{aligned} \tag{11.57}$$

Dalle proprietá delle matrici di Pauli troviamo:

$$\begin{aligned}
&\sigma_2(\sigma^i)^*\sigma_2 = -\sigma^i \quad (\mathrm{i} = 1,\ 2,\ 3)\\
&\sigma_3(\sigma_2\xi_s^*) = -\sigma_2(\sigma_3\xi_s)^* = \mp(\sigma_2\xi_s^*)\\
&\text{ovvero :}\\
&(\sigma_2\xi_s^*) = \xi_{-s} = \chi_s\\
&\text{ed anche}\\
&(\sigma_2\chi_s^*) = \chi_{-s} = \xi_s
\end{aligned} \tag{11.58}$$

Paritá. Dalle (11.7,11.13) troviamo:

$$\mathscr{P}\psi(\mathbf{x}, t)\mathscr{P} = \gamma^0\psi(-\mathbf{x}, t) \tag{11.59}$$

- Primo membro, sviluppato sulle soluzione dell' equazione di Dirac:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E(p)}}\left[\mathscr{P}a_s(p)\mathscr{P}e^{-ipx}u_s(p) \ + \ \mathscr{P}b_s(p)^\dagger\mathscr{P}e^{+ipx}v_s(p)\right] \tag{11.60}$$

- Secondo membro:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E(p)}}\left[a_s(p)e^{-ipx_P}(\gamma^0u_s)(p) \ + \ b_s(p)^\dagger e^{+ipx_P}(\gamma^0v_s)(p)\right] \tag{11.61}$$

dove

$$x_P = (-\mathbf{x}, t) \quad px_P = Et + \mathbf{x}\cdot\mathbf{p} = p_Px \tag{11.62}$$

cambiando variabile di integrazione, $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$, il secondo membro diventa:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E(p)}}\left[a_s(p_P)e^{-ipx}(\gamma^0u_s)(p_P) \ + \ b_s(p_P)^\dagger e^{+ipx}(\gamma^0v_s)(p_P)\right] \tag{11.63}$$

Dalle (11.57) otteniamo:

$$\gamma^0u_s(p_P) = +u_s(p);\ \ \gamma^0v_s(p_P) = -v_s(p) \tag{11.64}$$

In conclusione, confrontando i due membri della (11.59) ed eguagliando i termini dello sviluppo, troviamo:

$$\mathscr{P}a_s(p)\mathscr{P} = +a_s(p_P);\ \ \mathscr{P}b_s(p)\mathscr{P} = -b_s(p_P) \tag{11.65}$$

Il segno assoluto in queste relazioni potrebbe essere cambiato con una diversa definizione del segno di P. Il fatto importante è il segno relativo tra elettrone e antielettrone:

Elettrone e positrone hanno paritá opposta.

Coniugazione di carica. Dalla (11.18) troviamo:

$$\mathscr{C}\psi(x)\mathscr{C} = i\gamma^2[\psi(x)^\dagger] \tag{11.66}$$

Procediamo come prima.

- Secondo membro:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E(p)}}\left[b_s(p)e^{-ipx}(i\gamma^2)_{\alpha\beta}[(v_s)_\beta(p)]^* \;+\; a_s(p)^\dagger e^{+ipx}(i\gamma^2)_{\alpha\beta}[(u_s)_\beta(p)]^*\right]$$

- Usando le (11.57,11.58) si trova:

$$\begin{aligned}
&i\gamma_2 v_s(p)^* = \\
&= \sqrt{\frac{E(p)+m}{2m}}\begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{E(p)+m}\xi_s \\ \\ \xi_s \end{pmatrix}^* = \sqrt{\frac{E(p)+m}{2m}}\begin{pmatrix} i\sigma_2\xi_s^* \\ \\ -i\sigma_2\frac{(\sigma\cdot\mathbf{p})^*}{E(p)+m}\xi_s^* \end{pmatrix} = \\
&= i\sqrt{\frac{E(p)+m}{2m}}\begin{pmatrix} \chi_s \\ \\ \frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{E(p)+m}\chi_s \end{pmatrix} = i\,u_s(p)
\end{aligned} \tag{11.67}$$

  e, similmente:

$$i\gamma_2 u_s(p)^* = -i\,v_s(p) \tag{11.68}$$

Confrontando i due membri, si ottiene:

$$\mathscr{C}\,a_s(p)\mathscr{C} = i\,b_s(p);\;\; \mathscr{C}\,b_s(p)\mathscr{C} = -i\,a_s(p) \tag{11.69}$$

Inversione del tempo. Partiamo dalla (11.48):

$$\mathscr{T}\psi(\mathbf{x},t)\mathscr{T} = [\sigma_2\psi(\mathbf{x},-t)] \tag{11.70}$$

- Primo membro, ricordando l' antilinearitá di $\mathscr{T}$:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E(p)}}\left[\mathscr{T}\,a_s(p)\mathscr{T}\,e^{+ipx}u_s(p)^* \;+\; \mathscr{T}\,b_s(p)^\dagger\mathscr{T}\,e^{-ipx}v_s(p)^*\right] \tag{11.71}$$

- Secondo membro:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E(p)}}\left[a_s(p)e^{-ipx_T}[\sigma_2 u_s(p)]^\dagger \;+\; b_s(p)^\dagger e^{+ipx_T}[\sigma_2 v_s(p)]^\dagger\right] \tag{11.72}$$

  dove

$$x_T = (\mathbf{x},-t);\quad px_T = -Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = p_T x \tag{11.73}$$

  Se cambiamo variabile di integrazione, la (11.72) diventa:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E(p)}}\left[a_s(p_T)e^{+ipx}[\sigma_2 u_s(p_T)]^\dagger \;+\; b_s(p_T)^\dagger e^{-ipx}[\sigma_2 v_s(p_T)]^\dagger\right] \tag{11.74}$$

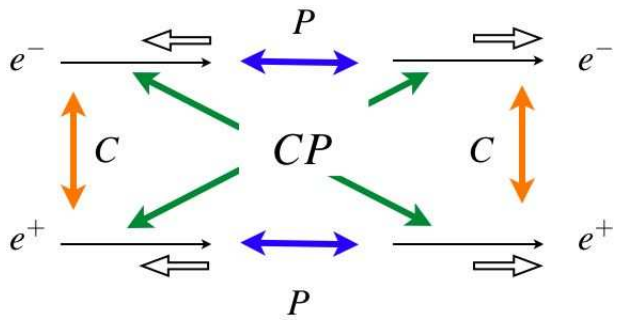


Figura 11.2: Azione della paritá, $\mathscr{P}$, e della coniugazione di carica $\mathscr{C}$ sugli stati di elettrone e positrone con diverse elicitá. La trasformazione $\mathscr{T}$ non cambia l' elicitá in quanto ribalta sia il momento che lo spin.

- Usiamo ancora la (11.57), da cui:

$$\{[\sigma_2 u_s(p_T)]^\dagger\} = \{u_s(p_T)^\dagger \sigma_2\} = \sqrt{\frac{E(p)+m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s^\dagger, & \chi_s^\dagger \frac{-\sigma\cdot\mathbf{p}}{E(p)+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \sqrt{\frac{E(p)+m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s^\dagger \sigma^2, & \chi_s^\dagger \frac{-\sigma\cdot\mathbf{p}}{E(p)+m}\sigma^2 \end{pmatrix} \tag{11.75}$$

- Usando le (11.58) troviamo:

$$(\chi_s^\dagger \sigma^2)_\alpha = (\sigma^2 \chi_s^*)_\alpha = (\chi_{-s})_\alpha;$$
$$(\chi_s^\dagger \frac{-\sigma\cdot\mathbf{p}}{E(p)+m}\sigma^2)_\alpha = (\sigma^2 \frac{-\sigma\cdot\mathbf{p}}{E(p)+m}\chi_s^*)_\alpha = (\frac{+\sigma\cdot\mathbf{p}}{E(p)+m}\chi_{-s})_\alpha \tag{11.76}$$

  ovvero:

$$\{[\sigma_2 u_s(p_T)]^\dagger\}_\alpha = [u_{-s}(p)]^*_\alpha; \tag{11.77}$$

  e analogamente:

$$\{[\sigma_2 v_s(p_T)]^\dagger\}_\alpha = [v_{-s}(p)]^*_\alpha; \tag{11.78}$$

Possiamo adesso confrontare i due membri e troviamo:

$$\mathscr{T} a_s(\mathbf{p})\mathscr{T} = a_{-s}(-\mathbf{p}); \quad \mathscr{T} b_s(\mathbf{p})\mathscr{T} = b_{-s}(-\mathbf{p}) \tag{11.79}$$

La Fig. 11.2 mostra l' azione delle tre simmetrie sugli stati di elettrone e positrone.

11.5 Alcune applicazioni

11.5.1 Il teorema di Furry

Il teorema, una conseguenza dell' invarianza della QED sotto $\mathscr{C}$, riguarda le funzioni di Green che *coinvolgono solo* A^μ ed afferma che:

le funzioni con un numero dispari di linee fotoniche esterne sono identicamente nulle.
Il teorema si puó enunciare anche in termini di elementi di matrice S:
le reazioni $n\gamma \to n'\gamma$ sono nulle se $n + n'$ = dispari.

Dim. Usiamo l' invarianza del vuoto sotto $\mathscr{C}$ per ottenere:

$$\begin{aligned}
&G^{\mu_1 \dots \mu_N}(x_1, \dots x_N) = \\
&= \langle 0| T\left[A^{\mu_1}(x_1) \dots A^{\mu_N}(x_N)\right]|0\rangle = \langle 0|\mathscr{C}\, T\left[\mathscr{C} A^{\mu_1}(x_1)\mathscr{C}\mathscr{C} \dots \mathscr{C} A^{\mu_N}(x_N)\mathscr{C}\right]\mathscr{C}|0\rangle = \\
&= (-1)^N \langle 0| T\left[A^{\mu_1}(x_1) \dots A^{\mu_N}(x_N)\right]|0\rangle
\end{aligned} \tag{11.80}$$

evidentemente, se N è dispari l'ãmpiezza deve essere ugale alla sua opposta e quindi nulla.

11.5.2 Simmetrie del positronio

Il *positronio* è un sistema formato da un elettrone ed un positrone legati tra loro dalla forza Coulombiana. I livelli del positronio sono ben descritti, nell' approssimazione non-relativistica, con quattro numeri quantici:

- il numero quantico radiale, n=0, 1, 2, ...;
- il momento angolare orbitale, L=0,1, 2, ...;
- il momento totale di spin, S=0, 1;
- il momento angolare totale, J, che prende anch' esso valori interi.

Il positronio è in tutto simile all' atomo di idrogeno, tranne per il fatto che la *massa ridotta* del sistema, μ, è circa metá della massa ridotta nell' idrogeno:

$$\begin{aligned}
&\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \\
&\mu_{e^+e^-} \simeq 1/2 m_e \simeq 1/2 \mu_H
\end{aligned} \tag{11.81}$$

Poiché la massa ridotta determina la scala delle energie di legame, lo spettro del positronio è scalato in energia di un fattore circa due rispetto a quello dell' idrogeno.

Il positronio si forma tutte le volte che un positrone si arresta nella materia. A fine corsa, il positronio cattura un elettrone dagli atomi circostanti e forma un positronio in uno stato eccitato. A differenza dell' idrogeno, il positronio non è stabile. Una volta che elettrone e positrone sono finiti nel livello fondamentale con L=0, la probabilitá di annichilazione mutua è apprezzabile ed il positronio decade in due o piú fotoni (cfr. Landau e Lifshitz [13] per il calcolo della sezione d' urto).

Alla scala inferiore di energia ci sono due livelli con n=1, L=0 ed S=0, 1, indicati col nome di *parapositronio* ed *ortopositronio*, rispettivamente. La differenza di energia dei due livelli è molto piccola, perché dovuta all' interazione magnetica tra gli spin.

Sulla base dei risultati della Sezione precedente, possiamo determinare le proprietá dei livelli del positronio per quanto riguarda paritá e coniugazione. Poiché queste operazioni commutano con l' Hamiltoniana, esse forniscono dei buoni numeri quantici e determinano le regole di selezione dei decadimenti.

Stati del positronio. Gli stati del positronio sono sovrapposizioni lineari degli stati ottenuti applicando al vuoto un operatore di creazione dell' elettrone ed uno del positrone. I coefficienti della sovrapposizione sono le funzioni che proiettano sugli stati con dato L, le armoniche sferiche, con dato S, i coefficienti di Clebsh-Gordon, e sullo stato con numero quantico radiale n:

$$|n,L,S,J\rangle = \int dp R^{(n,L,S,J)}(p) \int d\Omega_p Y^L_m(\hat{\mathbf{p}}) \sum_{s,s'} C(S,s_3 \mid 1/2s;1/2s')\; a_s(\mathbf{p})^\dagger b_{s'}(-\mathbf{p})^\dagger |0\rangle \tag{11.82}$$

dove $p = |\mathbf{p}|$ e $\hat{\mathbf{p}}$ è il versore di $\mathbf{p}$.

Paritá dei livelli. Applichiamo l' operatore $\mathscr{P}$ allo stato (11.82) e usiamo la (11.65) e l' invarianza del vuoto:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{P}|n,L,S,J\rangle = \\
&= \int dp R^{(n,L,S,J)}(p) \int d\Omega_p Y^L_m(\hat{\mathbf{p}}) \sum_{s,s'} C(S,s_3 \mid 1/2s;1/2s')\; \mathscr{P} a_s(\mathbf{p})^\dagger \mathscr{P}\mathscr{P} b_{s'}(-\mathbf{p})^\dagger \mathscr{P}\mathscr{P}|0\rangle = \\
&= \int dp R^{(n,L,S,J)}(p) \int d\Omega_p Y^L_m(\hat{\mathbf{p}}) \sum_{s,s'} C(S,s_3 \mid 1/2s;1/2s')\; (-1) a_s(-\mathbf{p})^\dagger b_{s'}(+\mathbf{p})^\dagger |0\rangle
\end{aligned} \tag{11.83}$$

dove il segno meno nasce dalla paritá opposta di elettrone e positrone. Adesso possiamo mandare $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$ nell' integrale ed usare la paritá delle armoniche sferiche per ottenere:

$$\mathscr{P}|n,L,S,J\rangle = (1)^{L+1} \tag{11.84}$$

Coniugazione di carica dei livelli. Applichiamo l' operatore $\mathscr{C}$ e usiamo la (11.69) e l' invarianza del vuoto:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{C}|n,L,S,J\rangle = \\
&= \int dp R^{(n,L,S,J)}(p) \int d\Omega_p Y^L_m(\hat{\mathbf{p}}) \sum_{s,s'} \mathscr{C}\; C(S,s_3 \mid 1/2s;1/2s')\; a_s(\mathbf{p})^\dagger \mathscr{C}\mathscr{C} b_{s'}(-\mathbf{p})^\dagger \mathscr{C}\mathscr{C}|0\rangle = \\
&= \int dp R^{(n,L,S,J)}(p) \int d\Omega_p Y^L_m(\hat{\mathbf{p}}) \sum_{s,s'} C(S,s_3 \mid 1/2s;1/2s')\; b_s(\mathbf{p})^\dagger a_{s'}(-\mathbf{p})^\dagger |0\rangle
\end{aligned} \tag{11.85}$$

Per riportarci all' espressione di partenza dobbiamo: (i) scambiare a con b , (ii) mandare $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$, (iii) scambiare s con s$'$.

Nell' ultima operazione ricordiamo che i coefficienti di Clebsch-Gordon relativi alla composizione di due spin 1/2 sono *simmetrici* per lo scambio di s ed s$'$ nel caso S=1, mentre sono *antisimmetrici* per S=0.

Le tre operazioni introducono un fattore (i) -1; (ii) $(-1)^L$; (iii) $(-1)^{S+1}$ rispettivamente e quindi un fattore complessivo η_C:

$$\mathscr{C}|n,L,S,J\rangle = \eta_C|n,L,S,J\rangle; \quad \eta_C = (-1)(-1)^L(-1)^{S+1} = (-1)^{L+S} \tag{11.86}$$

Regole di selezione Per i livelli fondamentali del positronio otteniamo:

$$\begin{aligned} &\text{parapositronio}: \quad J^{PC} = 0^{-+} \\ &\text{ortopositronio}: \quad J^{PC} = 1^{--} \end{aligned} \tag{11.87}$$

Come abbiamo visto a proposito del teorema di Furry, uno stato con N fotoni ha C=±1 a seconda che N sia pari o dispari. Seguono quindi le regole di selezione:

$$\begin{aligned} &\text{parapositronio} \to 2\gamma; \ \not\to 3\gamma \\ &\text{ortopositronio} \not\to 2\gamma; \ \to 3\gamma \end{aligned} \tag{11.88}$$

L' ampiezza per l' annichilazione in due fotoni è di ordine e^2, quella per tre di ordine e^3 e le corrispondenti probabilitá di ordine α^2 e α^3, rispettivamente, con $\alpha \simeq 1/137$. Ci aspettiamo quindi due componenti nel positronio che si forma nella materia, una a vita media breve, il parapositronio, ed una a vita media considerevolmente piú lunga, l' ortopositronio.

I valori osservati soddisfano bene questa regola. Si trova:

$$\Gamma(para \to 2\gamma)_{expt} = 7990.9(1.7)\mu s^{-1} \tag{11.89}$$

$$\Gamma(orto \to 3\gamma)_{expt} = 7.0404(10)(8)\mu s^{-1} \tag{11.90}$$

un fattore circa mille tra le due probabilitá di decadimento, in accordo con la regola di selezione (11.87) e con le previsioni della QED.

Il test di Yang

11.6 Il teorema CPT

Riassumiamo le trasformazioni dei covarianti di Dirac sotto $\mathscr{P}$, $\mathscr{C}$ e $\mathscr{T}$, generalizzando le considerazioni delle Sezz. 11.1, 11.2, 11.3 al caso di bilineari costruiti con due campi fermionici diversi, ψ_a e ψ_b. Nel caso della densitá scalare troviamo, ad esempio:

$$\begin{aligned} &\mathscr{P} S_{ab}(\mathbf{x}, t)\mathscr{P} = \mathscr{P}\bar{\psi}_a(\mathbf{x}, t)\psi_b(\mathbf{x}, t)\mathscr{P} = \eta_P(S) S_{ab}(-\mathbf{x}, t); \\ &\mathscr{C} S_{ab}(\mathbf{x}, t)\mathscr{C} = \eta_C(S) S_{ba}(\mathbf{x}, t); \\ &\mathscr{T} S_{ab}(\mathbf{x}, t)\mathscr{T} = \eta_T(S) S_{ab}(\mathbf{x}, -t) \end{aligned} \tag{11.91}$$

dove le η sono dei segni ± caratteristici della trasformazione e del particolare covariante. Riportiamo nella Tab. 11.1 i valori di η per le tre trasformazioni e per l' operazione combinata θ=CPT.

L' operazione CPT è evidentemente rappresentata da un operatore antilineare e agisce secondo la semplice regola:

$$\theta\left[g_{\mathscr{O}}\mathscr{O}_{ab}(x)\right]\theta^\dagger = (-1)^N (g_{\mathscr{O}})^* (S_{ab}(-x))^\dagger \tag{11.92}$$

se $g_{\mathscr{O}}$ é un coefficiente complesso. N è il numero di indici di Lorentz del covariante.

La stessa regola si applica al potenziale vettore, N=1, ed al tensore di Maxwell, N=2 e si estende immutata ad operatori di campo scalari o vettoriali. Nel caso di campi complessi, la natura antilineare di θ implica che, ad esempio,

$$\theta\left(\phi_1 + i\phi_2\right)(x)\theta^\dagger = (\phi_1 - i\phi_2)(-x) \tag{11.93}$$

Quindi, anche per questi operatori, θ implica la coniugazione hermitiana.

Tabella 11.1: Tabella riassuntiva delle proprietá dei covarianti di Dirac e del campo elettromagnetico sotto trasformazioni di $\mathscr{P}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{T}$ e θ= CPT.

	S	P	V	A	T	A^μ	$F^{\mu\nu}$
η_P	+1	- 1	$g^{\mu\mu}$	$-g^{\mu\mu}$	$g^{\mu\mu}\, g^{\nu\nu}$	$g^{\mu\mu}$	$g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}$
η_C	+1	+ 1	-1	+1	-1	-1	-1
η_T	+1	- 1	$g^{\mu\mu}$	$+g^{\mu\mu}$	$-g^{\mu\mu}\, g^{\nu\nu}$	$g^{\mu\mu}$	$+g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}$
η_{CPT}	+1	+ 1	-1	-1	+1	-1	+1

Per non scordare piú... È utile derivare i risultati della Tab. 11.1 direttamente dalle trasformazioni dei campi sotto CPT. Raccogliendo le formule (11.59, 11.66, 11.70) e le corrispondenti per gli hermitiani coniugati, troviamo:

$$(\mathscr{C}\mathscr{P}\mathscr{T})\psi(x)(\mathscr{T}\mathscr{P}\mathscr{C}) = \theta\psi(x)\theta^\dagger = \sigma_2\gamma^0(i\gamma^2)\psi^\dagger(-x) = i\gamma_5\psi^\dagger(-x) \tag{11.94}$$

e, per il campo hermitiano coniugato:

$$\theta\psi^\dagger(x)\theta^\dagger = -i\gamma_5\psi(-x) \tag{11.95}$$

Per il generico bilineare, troviamo quindi:

$$\begin{aligned}\theta\bar{\psi}_a\Gamma\psi_b\theta^\dagger &= \theta\psi_a^\dagger(x)\theta^\dagger(\gamma^0\Gamma)^*\theta\psi_b(x)\theta^\dagger = [\gamma_5\psi_a(-x)](\gamma^0\Gamma)^*\gamma_5\psi_b^\dagger(-x) = \\ &= -\psi_b^\dagger(-x)\gamma_5(\gamma^0\Gamma)^\dagger\gamma_5\psi_a(-x) = +\left[\bar{\psi}_b\gamma^0\gamma_5\Gamma^\dagger\gamma_5\gamma^0\psi_a\right](-x)\end{aligned} \tag{11.96}$$

dove abbiamo ripetutamente usato il fatto che γ_5 è hermitiano e anticommuta con γ^0.

La coniugazione con γ_5 produce un segno meno per ogni fattore γ^μ presente in Γ, quindi troviamo:

$$\begin{aligned}&\gamma^0\left(\gamma_5\Gamma^\dagger\gamma_5\right)\gamma^0 = \gamma^0\left(\gamma_5\Gamma\gamma_5\right)^\dagger\gamma^0 = \\ &= (-1)^N\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0 = (-1)^N\Gamma\end{aligned} \tag{11.97}$$

dove N è il numero di indici vettoriali di Γ. In conclusione:

$$\theta\left[\bar{\psi}_a\Gamma\psi_b(x)\right]\theta^\dagger = (-1)^N\left[\bar{\psi}_b\Gamma\psi_a(-x)\right] = (-1)^N\left[\bar{\psi}_a\Gamma\psi_b(-x)\right]^\dagger \tag{11.98}$$

come riportato nella Tab. 11.1.

Il Teorema CPT Il segno (-1)^N è quello che compete all' operazione di *Inversione Totale* delle coordinate:

$$IT: \quad x^\mu \to -x^\mu \tag{11.99}$$

In uno spazio 4-dimensionale euclideo, l' inversione degli assi ha determinante uguale ad uno ed è raggiungibile con continuitá dalla trasformazione identica. Nello spazio euclideo, l' Inversione è una trasformazione *propria* quindi una simmetria necessaria. Questo non è vero nello spazio di Minkowski, in cui le trasformazioni proprie devono anche avere $\Lambda^{00} > 0$, condizione che non è soddisfatta da IT.

Tuttavia, come abbiamo visto a proposito della definizione degli integrali di Feynman, la teoria quantistica nello spazio di Minkowski è il prolungamento analitico della teoria definita con un tempo complesso, e non c' e alcun ostacolo a partire da un tempo puramente immaginario, cioé dalla teoria nello spazio 4-dimensionale euclideo. Questa è l' origine del *Teorema CPT* che, sotto condizioni molto generali, afferma che l' operazione θ, l' inversione totale degli assi supplementata dalla operazione di coniugazione hermitiana, è una simmetria esatta di qualsiasi teoria di campo quantistica e relativistica.

Il Teorema CPT è dovuto a W. Pauli e a G. Luders [**?**]. Noi daremo una dimostrazione molto prossima a quella del Bjorken-Drell. Successivamente illustreremo le conseguenze piú immediate del Teorema CPT.

Consideriamo una teoria descritta da un densitá di Lagrangiana $\mathscr{L}$(x). Le condizioni caratterizzanti una teoria quantistica relativistica, sotto le quale costruire la lagrangiana sono le seguenti. La Lagrangiana deve essere:

- hermitiana;
- funzione locale dei campi e delle loro derivate, fino ad un ordine finito, calcolati nello stesso punto;
- un operatore bosonico: campi fermionici possono apparire in numero pari e si possono quindi organizzare in bilineari di Dirac, $\bar{\psi}_a \Gamma \psi_b$ dove ψ_a, ψ_b sono i campi associati a fermioni di tipo diverso (ad es. elettrone e neutrino)[1];
- invariante sotto trasformazioni di Lorentz proprie;
- un prodotto normale di campi.

Sotto queste condizioni, dimostriamo che deve essere necessariamente:

$$\theta \mathscr{L}(x) \theta^\dagger = \mathscr{L}(-x) \tag{11.100}$$

Di qui segue che l' azione è invariante sotto CPT:

$$\theta S \theta^\dagger = \int d^4x \, \theta \mathscr{L}(x) \theta^\dagger = \int d^4x \, \mathscr{L}(-x) = \int d^4(-x) \, \mathscr{L}(-x) = S \tag{11.101}$$

e quindi che CPT è una simmetria esatta.

[1] le Γ sono un sistema completo di matrici nello spazio di Dirac, vedi [1].

Dim. La forma generale di una densitá di Lagrangiana che soddisfi le condizioni di cui sopra puó essere scritta al modo seguente:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x) &= \sum_i c_i\, \mathscr{O}_i(x);\\ \mathscr{O}_i(x) &=: \ldots A^\mu(x)\ldots(\bar\psi_a\Gamma\psi_b)(x)\ldots\partial^\nu\ldots :\end{aligned} \tag{11.102}$$

dove c_i sono coefficienti complessi. Applichiamo adesso l' operazione CPT. Sulla base della Tab. 11.1 e dell' antilinearitá di θ otteniamo:

$$\theta\mathscr{L}(x)\theta^\dagger = \sum_i (c_i)^*(-1)^{N_{tot}} :\ldots A^\mu(-x)\ldots\left[(\bar\psi_a\Gamma\psi_b)(-x)\right]^\dagger\ldots\partial^\nu\ldots : \tag{11.103}$$

dove N_{tot} è il numero totale di indici di Lorentz che compaiono nell' espressione (11.102).

All' interno del prodotto normale, possiamo commutare gli operatori bosonici e porli in ordine opposto a quello in cui compaiono nella (11.102), per cui possiamo riscrivere la (11.103) come:

$$\theta\mathscr{L}(x)\theta^\dagger = \sum_i (-1)^{N_{tot}}\,[c_i\,\mathscr{O}_i(-x)]^\dagger \tag{11.104}$$

Se la lagrangiana deve essere Lorentz-invariante, gli indici di Lorentz devono essere sommati sui tensori invarianti. In uno spazio-tempo 4-dimensionale, ci sono solo due operazioni invarianti: la saturazione con $g_{\mu\nu}$ e la saturazione con $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, vedi [1]. Entrambe queste operazioni riducono gli indici liberi di un numero pari. Quindi, affinché la (11.102) sia invariante (non contenga cioé indici liberi) il numero di indici vettoriali che vi appaiono deve essere pari, ovvero $(-1)^{N_{tot}}$=+1. Concludiamo dunque che:

$$\theta\mathscr{L}(x)\theta^\dagger = \sum_i [c_i\,\mathscr{O}_i(-x)]^\dagger = [\mathscr{L}(-x)]^\dagger = \mathscr{L}(-x) \tag{11.105}$$

dove l' ultimo passaggio segue dal fatto che $\mathscr{L}$ è hermitiana.

Interazione di Fermi È interessante applicare le cosiderazioni ora fatte all' interazione di Fermi per il decadimento beta del neutrone, che abbiamo scritto come, cfr. [1]:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_F = \frac{G}{\sqrt{2}}&\left[\bar\psi_P\left(\gamma^\mu + \frac{g_A}{g_V}\gamma^\mu\gamma_5\right)\psi_N\,\bar\psi_e\left(\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma_5\right)\psi_{\nu_e}\right] +\\ + \frac{G}{\sqrt{2}}&\left[\bar\psi_N\left(\gamma^\mu + (\frac{g_A}{g_V})^*\gamma^\mu\gamma_5\right)\psi_P\,\bar\psi_{\nu_e}\left(\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma_5\right)\psi_e\right]\end{aligned} \tag{11.106}$$

Abbiamo riportato esplicitamente l' hermitiano coniugato del primo termine, necessario per rendere la Lagrangiana reale.

L' interazione (11.106) evidentemente NON è invariante sotto paritá, in quanto prodotto di sovrapposizioni di vettori polari e assiali, che cambiano il segno relativo sotto paritá. Ad esempio:

$$\mathscr{P}\bar\psi_P\left(\gamma^\mu + \frac{g_A}{g_V}\gamma^\mu\gamma_5\right)\psi_N(\mathbf{x},t)\mathscr{P} = g^{\mu\mu}\,\bar\psi_P\left(\gamma^\mu - \frac{g_A}{g_V}\gamma^\mu\gamma_5\right)\psi_N(-\mathbf{x},t) \tag{11.107}$$

La trasformazione CP, invece, agisce allo stesso modo sulle correnti vettoriali e assiali:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{C}\bar{\psi}_P\left(\gamma^\mu + \frac{g_A}{g_V}\gamma^\mu\gamma_5\right)\psi_N\mathscr{C} = (-g^{\mu\mu})\bar{\psi}_N\left(\gamma^\mu + \frac{g_A}{g_V}\gamma^\mu\gamma_5\right)\psi_P \\
&\mathscr{C}\bar{\psi}_e\left(\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma_5\right)\psi_{\nu_e}\mathscr{C} = (-g^{\mu\mu})\bar{\psi}_{\nu_e}\left(\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma_5\right)\psi_e
\end{aligned} \tag{11.108}$$

L' invarianza sotto CP si puó avere se il primo termine della (11.106) va nel secondo, che è il suo hermitiano coniugato. Questo, a sua volta, richiede

$$g_A/g_V = \text{reale} \quad \text{(invarianza per CP)} \tag{11.109}$$

Tuttavia, se applichiamo θ al primo termine della (11.106), anche g_A/g_V va nel suo complesso coniugato e si ha l' invarianza per qualsiasi valore, reale o complesso, della costante che appare nella (11.106).

11.6.1 Eguaglianza delle masse di particella e antiparticella

È la conseguenza piú diretta del Teorema CPT. Dall' invarianza della Lagrangiana, eq. (11.100), segue facilmente quella dell' Hamiltoniana:

$$\theta\mathbf{H}\theta^\dagger = \mathbf{H} \tag{11.110}$$

Inoltre, dalla Tab. 11.1 segue che θ cambia segno ai 3-vettori, come il momento, e cambia il segno di ciascuna carica conservata che sia presente nella nostra teoria (ad es. la carica elettrica):

$$\theta\mathbf{P}\theta^\dagger = -\mathbf{P}; \;\; \theta Q\theta^\dagger = -Q \tag{11.111}$$

al contrario, il momento angolare resta invariato[2]:

$$\theta\mathbf{J}\theta^\dagger = \mathbf{J} \tag{11.112}$$

dove $\mathbf{P}$, $\mathbf{J}$, Q sono gli operatori del momento, momento angolare e carica.

Caso $M \neq 0$. Consideriamo il caso di una particella con massa diversa da zero. Possiamo metterci nel sistema di quiete della particella, in cui $\mathbf{P} = 0$ e il momento angolare coincide con lo spin. In genere, oltre che dalla massa e dallo spin, lo stato è caratterizzato dal valore della carica conservata, che indichiamo con q. Scriviamo quindi il ket che rappresenta lo stato come:

$$|A\rangle = |M, \mathbf{P} = 0, s_z; q\rangle \tag{11.113}$$

Tenendo conto delle (11.111), lo stato $\theta|A\rangle$ deve avere stessa massa, stesso valore di $\mathbf{s}^2 = s(s+1)$ e della componente dello spin ma carica elettrica opposta:

$$\theta|A\rangle = |M, \mathbf{P} = 0, s_z; -q\rangle \tag{11.114}$$

[2]classicamente, $\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$ non cambia segno sotto inversione totale in quanto $\mathbf{x}$ e $\mathbf{v}$ cambiano entrambi di segno.

Dobbiamo distinguere due casi, a seconda che sia $q \neq 0$ ovvero $q = 0$.

Se $q \neq 0$, come ad es. per l' elettrone, lo stato CPT-coniugato, (11.114), evidentemente non puó concidere con lo stato di partenza. Deve esistere un' altra particella di uguale massa e spin ma con carica opposta: il positrone. Visto che $\theta^2 = 1$, la relazione tra particella e antiparticella è perfettamente simmetrica, l' elettrone è l' antiparticella del positrone.

Se invece $q = 0$, lo stato coniugato (11.114) è identico a quello di partenza. Naturalmente, l' invarianza sotto rotazioni dell' hamiltoniana nel sistema di quiete richiede la presenza di tutti i 2s+1 stati associati allo spin s. In questo caso abbiamop una particella di spin s, assolutamente neutra nel senso che essa coincide con la sua particella. Questo, ad esempio, è il caso del mesone π^0 (spin zero) o dei mesoni ρ^0 e ω^0 (spin uno).

Caso $M = 0$. In questo caso, ci poniamo nel sistema in cui la particella ha il momento lungo l' asse z ed elicitá λ. Scriviamo lo stato come:

$$|A\rangle = |P_3, \lambda; q\rangle \tag{11.115}$$

Come osservato in [1], l' invarianza di Lorentz, che si riduce all' invarianza sotto rotazioni intorno all' asse z, non richiede che ci siano altri stati oltre a quello in (11.115).

Lo stato CPT coniugato deve avere momento opposto e stessa componente dello spin, ovvero elicitá opposta:

$$\theta|A\rangle = |-P_3, -\lambda; -q\rangle \tag{11.116}$$

Anche qui distinguiamo due casi.

Se $q \neq 0$, lo stato coniugato rappresenta una particella con carica opposta, antiparticella di quella di partenza, ed elicitá opposta. Questo è il caso delle particelle della teoria a due componenti (il neutrino di Weyl [1]). Abbiamo uno stato di neutrino con elicitiá negativa ed uno di antineutrino con elicitá positiva, distinti dal valore di una carica conservata: il numero leptonico. Non sono necessari altri stati per avere una teoria relativisticamente e CPT invariante.

Se $q = 0$, abbiamo una particella assolutamente neutra che, sulla base della (11.116), si deve presentare con *due stati elicitá* pari a $\pm\lambda$. È il caso del fotone. Sulla base della pura invarianza relativistica, esso potrebbe avere un solo stato, ad esempio quello con elicitá pari ad uno. L´ invarianza CPT richiede tutti e due gli stati osservati del fotone, con elicitá ± 1.

Verifiche sperimentali. Oltre all' eguaglianza delle masse, si puó facilmente vedere che particella e antiparticella devono avere momento magnetico opposto e eguale vita media, se instabili. Queste relazioni sono verificate sperimentalmente con estrema precisione in alcuni casi fortunati. Ricordiamo i piú importanti, vedi [**?**].

- La massa dell' antiprotone coincide con quella del protone entro una precisione relativa di 10^{-8};
- massa e le vita media dei mesoni K^0 e anti-K^0 coincidono entro qualche parte in 10^{-18};
- elettrone e positrone hanno massa uguale entro una parte in 10^{-8}, i loro momenti magnetici, a parte il segno che è opposto, coincidono entro una parte in 10^{-12}

- i momenti magnetici di muone e antimuone coincidono entro due parti in10^{-8}.

La rivelazione di una violazione del teorema CPT indicherebbe la necessitá di superare il paradigma della teoria di campo relativistica e quantistica ed avrebbe un valore concettuale grandissimo.

Capitolo 12

Rinormalizzazione della QED

Questo capitolo tratta della rinormalizzazione della elettrodinamica quantistica (QED). La rinormalizzazione permette di risolvere il problema delle divergenze che si incontrano nel calcolo di diagrammi di Feynman che contengono circuiti chiusi (in inglese, *loop*), ma è un concetto più generale che si incontrerebbe anche in assenza di divergenze. La necessità di rinormalizzare discende infatti dalla esistenza di interazioni, che fa sì che le masse che compaiono nel lagrangiano non siano quelle delle particelle che i vari campi descrivono, e che i campi stessi non siano "ben normalizzati", come messo in evidenza dalla presenza di fattori Z nel contributo degli stati a singola particella ai rispettivi propagatori.

Nelle teorie di campo la presenza di divergenze rappresenta la norma, ma si possono verificare due situazioni radicalmente differenti. La più interessante è quella delle teorie rinormalizzabili, tra cui la elettrodinamica quantistica e più in generale il Modello Standard delle interazioni fondamentali. Alla seconda categoria appartengono teorie non rinormalizzabili.

In una teoria rinormalizzabile si incontrano divergenze solo quando si cerca di stabilire la relazione tra grandezze che appaiono nel lagrangiano, nel caso della QED la massa m_0 o la carica e_0, e le corrispondenti grandezze fisiche m ed e. In teorie di questo tipo le divergenze possono essere nascoste "sotto il tappeto", esprimendo i risultati in termini di grandezze fisicamente osservabili. Se consideriamo ad esempio il caso della massa dell'elettrone, lo spostamento di massa δm, introdotto nel precedente capitolo, risulta divergente in teoria delle perturbazioni. Come abbiamo visto, però, è possibile riorganizzare la teoria delle perturbazioni in modo che il termine δm sia esattamente cancellato da un apposito controtermine, di modo che esso non appaia, ad esempio, nel calcolo degli elementi di matrice S.

Un esempio di teoria non rinormalizzabile è la teoria di Fermi delle interazioni deboli. In una teoria non rinormalizzabile le divergenze sono presenti nel calcolo di qualsiasi grandezza fisica, ad esempio nel calcolo di qualsiasi elemento della matrice S.

In ogni caso le divergenze appaiono in integrali su impulsi di particelle virtuali estesi sino ad infinito. Per quanto riguarda il significato delle divergenze si possono fare due ipotesi: la prima è che queste divergenze siano una caratteristica del metodo perturbativo, che non si presenterebbero in ipotetici metodi non perturbativi. La seconda è che la teoria sia solo una prima approssimazione della realtà fisica, non valida per impulsi estremamente alti, il ché per il principio di indeterminazione corrisponde a distanze estremamente piccole. Per integrali convergenti, al contrario, il risultato di-

pende dal comportamento degli integrandi (e quindi dal comportamento della teoria cui gli integrali si riferiscono) per valori finiti degli impulsi. In una teoria rinormalizzabile, quindi, una volta eliminate le divergenze con una ridefinizione dei parametri della teoria, il risultati del calcolo perturbativo dipenderanno dal comportamento della teoria per impulsi finiti (distanze non infinitesimamente piccole), e possono dare una buona approssimazione anche se la teoria perdesse la sua validità nel limite di impulsi infiniti.

Questi ragionamenti, necessariamente qualitativi a questo stadio, possono essere resi quantitativi una volta che si sia approfondita la conoscenza della teoria. Per fare un esempio tratto da ricerche in corso, esiste attualmente una lieve discrepanza tra il valore della anomalia magnetica[1] del muone misurato sperimentalmente e la previsione teorica ottenuta sulla base del Modello Standard. L'entità della deviazione potrebbe essere un indizio della esistenza di nuovi fenomeni fisici ad una scala di energia di circa un TeV, esplorabile con gli esperimenti di LHC.

Nascondere le divergenze nella ridefinizione di alcuni parametri della teoria (masse, carica elettrica, etc.) costituisce la cosidetta *rinormalizzazione* ed è un procedimento che richiede una qualche cura. La manipolazione di grandezze divergenti è matematicamente sospetta e va chiaramente evitata. Il metodo per evitare manipolazioni sospette consiste nella cosidetta *regolarizzazione* della teoria. L'idea è molto semplice: Se T è la teoria cui siamo interessati (nel nostro caso la QED), costruire una famiglia di teorie $T(\eta)$ che dipendono da un parametro η, e tali che:

1. Nel limite $\eta \to 0$, $T(\eta) \to T$.
2. $T(\eta)$ gode di tutte le proprietà "importanti" di T. Nel caso della QED (o del Modello Standard) la preoccupazione principale è il mantenimento della invarianza di gauge.
3. Per $\eta \neq 0$, $T(\eta)$ non ha divergenze.

In questo caso $T(\eta)$ viene detta una versione *regolarizzata* di T. In $T(\eta)$ le manipolazioni necessarie per la rinormalizzazione riguardano grandezze finite, e sono legittime. Solo dopo aver eseguito la rinormalizzazione si prende il limite $\eta \to 0$. Dato che la rinormalizzazione ha nascosto tutte le potenziali divergenze, il limite è finito.

Il metodo di regolarizzazione attualmente usato è quello della "regolarizzazione dimensionale". In termini semplici si tratta di questo: possiamo considerare la QED come definita dall'insieme di diagrammi di Feynman che descrivono a ciascun ordine in α i vari processi, e dalle regole che permettono di calcolare ciascun diagramma. Nel calcolo dei diagrammi con circuiti chiusi appaiono integrali logaritmicamente divergenti, cioè integrali del tipo

$$\int d^4k\, I(k); \qquad I(k) \sim \frac{1}{k^4} \quad \text{per } |k| \to \infty \tag{12.1}$$

Questi integrali *non* sarebbero divergenti in uno spazio con meno di quattro dimensioni, ad esempio in tre dimensioni dove avremmo d^3k invece di d^4k. La regolarizzazione dimensionale consiste nel considerare una teoria descritta dagli stessi diagrammi della QED, con l'unica differenza che tutti gli integrali del tipo (12.1) vanno eseguiti non in 4 dimensioni ma in $4-\eta$ dimensioni. Si tratta in un

[1] L'anomalia magnetica di una particella di spin 1/2 rappresenta la deviazione del momento magnetico dal valore (eguale ad un magnetone di Bohr) previsto dalla equazione di Dirac. Nel seguito daremo una definizione più esatta di questa grandezza e la calcoleremo in primo ordine nella teoria delle perturbazioni.

certo senso di una continuazione analitica nel numero di dimensioni dello spazio. Per $\eta > 0$ la teoria è priva di divergenze. Dopo avere eseguito la rinormalizzazione si può prendere il limite $\eta \to 0$. Per una illustrazione di questo metodo, ancora elementare ma più dettagliata, rimandiamo al testo di Mandl e Shaw [2].

L'interesse della regolarizzazione dimensionale è che essa non disturba la validità di alcune relazioni fondamentali quali la identità di Ward. Anche se nel caso della QED esistono metodi alternativi di regolarizzazione, la regolarizzazione dimensionale è l'unico metodo che ha permesso il trattamento perturbativo di teorie basate su invarianze di gauge non abeliane, come ad esempio nella descrizione unificata delle interazioni elettromagnetiche e deboli del Modello Standard.

Le divergenze che appaiono negli integrali per impulsi $p \to \infty$ prendono il nome di divergenze *ultraviolette*. Esiste nella QED un secondo tipo di divergenza, detta divergenza *infrarossa*, che si manifesta quando l'impulso di un fotone, sia reale (fotone emesso) che virtuale (propagatore) tende a zero. Le divergenze infrarosse hanno un significato fisico ben preciso: ad ogni processo, ad esempio di scattering, in cui una particella carica cambia direzione in maniera impulsiva, è associata, già a livello classico, l'emissione di onde elettromagnetiche con uno spettro di energia $dW/d\nu$ che tende ad una costante per $\nu \to 0$. Ma dato che questa radiazione è composta da fotoni di energia $h\nu$, lo densità spettrale nel numero di fotoni si comporta come $dN/d\nu = (1/h\nu)dW/d\nu$, e tende ad infinito per $\nu \to 0$. La divergenza infrarossa non è presente nelle grandezze effettivamente misurate, dato che qualsiasi apparato sperimentale ha una risoluzione energetica finita: una misura, ad esempio, di un processo di scattering non è in grado di distinguere il processo di scattering vero e proprio da quello in cui esso è accompagnato dalla (inevitabile) emissione di uno o più fotoni di bassa energia. La probabilità (o sezione d'urto) del processo di scattering, sommata a quelle per lo stesso processo accompagnato da uno o più fotoni di bassa energia, risulta finita. La presenza delle divergenze infrarosse introduce notevoli complicazioni tecniche nel paragone tra teoria ed esperimento, ma nessun problema a livello concettuale.

In questo capitolo discutiamo brevemente delle tre divergenze ultraviolette presenti nella QED. Esse appaiono nel calcolo dei propagatori per il fotone e l'elettrone, e nel vertice elettrone-elettrone-fotone. Discuteremo anche della identità di Ward che lega le correzioni al propagatore dell'elettrone e al vertice. Il trattamento di questo capitolo riguarda in ciascun caso le correzioni di ordine α. Esistono dimostrazioni valide a tutti gli ordini perturbativi — rinormalizzabilità della teoria, identità di Ward — ma questi argomenti vanno oltre il livello introduttivo di questo corso. Conchiuderemo con un calcolo esplicito della correzione di ordine α al momento magnetico dell'elettrone.

12.1 Il propagatore del fotone

Le correzioni all'ordine α al propagatore del fotone sono descritte dalla figura 12.1. Questa correzione va aggiunta al propagatore di ordine zero, quindi il propagatore corretto all'ordine α può essere scritto come:

$$iD_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \to \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} + \frac{-ig_{\mu\alpha}}{k^2 + i\epsilon}\, ie_0^2 \Pi^{\alpha\beta}(k) \frac{-ig_{\beta\nu}}{k^2 + i\epsilon} \tag{12.2}$$

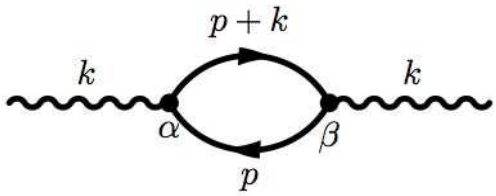


Figura 12.1: Il propagatore del fotone all'ordine α.

dove $\Pi^{\alpha\beta}(k)$ rappresenta il circuito chiuso dell'elettrone, ed è definito da

$$i e_0^2 \Pi^{\alpha\beta}(k) = \frac{(-1)(i e_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \, \mathrm{Tr}\left[\gamma^\alpha \frac{i(\not{p}+m)}{(p)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\beta \frac{i(\not{p}+\not{k}+m)}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon}\right]$$

Notiamo il fattore (-1) e la traccia, tipici dei circuiti fermionici chiusi, e che abbiamo risalito la linea fermionica. Semplificando l'espressione (fattori i, -1, e_0^2) otteniamo

$$\Pi^{\alpha\beta}(k) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p \, \frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma^\alpha(\not{p}+m)\gamma^\beta(\not{p}+\not{k}+m)\right]}{\left((p)^2 - m^2 + i\epsilon\right)\left((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon\right)} \tag{12.3}$$

Questa espressione è divergente, e dovremo ricorrere alla regolarizzazione. Applichiamo quindi una regolarizzazione dimensionale, che consiste nel passare dallo spazio 4-dimensionale ad uno a D dimensioni,

$$\Pi^{\alpha\beta}(k) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^Dp \, \frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma^\alpha(\not{p}+m)\gamma^\beta(\not{p}+\not{k}+m)\right]}{\left((p)^2 - m^2 + i\epsilon\right)\left((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon\right)} \tag{12.4}$$

dove è sottintesa una continuazione analitica a valori non interi di D, eseguita ad esempio con i metodi delineati nella Appendice D. L'integrale risulterà allora finito, tranne per valori interi di D, in particolare per $D = 4$, dove l'integrale diverge come $1/(D-4)$. Per qualsiasi valore non intero di D divengono legittime le usuali manipolazioni, come ad esempio il cambiamento di variabili che useremo per dimostrare una importante proprietà di $\Pi^{\alpha\beta}(k)$,

$$k_\beta \Pi^{\alpha\beta}(k) = 0 \tag{12.5}$$

Questà identità è in effetti un'altra conseguenza della invarianza di gauge, o più semplicemente della conservazione della corrente $j^\beta = \bar{\psi}\gamma^\beta\psi$. Infatti il vertice γ^β nella (12.3), o nel diagramma 12.1, rappresenta l'azione di una corrente j^β, e moltiplicare per k_β equivale a prenderne la divergenza. La dimostrazione della (12.5) nasce dalla identità

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left[\gamma^\alpha(\not{p}+m)\not{k}(\not{p}+\not{k}+m)\right] &= \mathrm{Tr}\left[\gamma^\alpha(\not{p}+m)\left((\not{p}+\not{k}-m)-(\not{p}-m)\right)(\not{p}+\not{k}+m)\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left[\gamma^\alpha(\not{p}+m)\right]\left((p+k)^2 - m^2\right) - \mathrm{Tr}\left[\gamma^\alpha(\not{p}+\not{k}+m)\right]\left((p)^2 - m^2\right) \\
&= 4p^\alpha\left((p+k)^2 - m^2\right) - 4(p+k)^\alpha\left((p)^2 - m^2\right)
\end{aligned}$$

da cui

$$k_\beta \Pi^{\alpha\beta}(k) = \frac{4i}{(2\pi)^4}\left[\int d^D p \frac{p^\alpha}{\left((p)^2 - m^2 + i\epsilon\right)} - \int d^D p \frac{(p+k)^\alpha}{\left((p+k)^2 - m^2 i\epsilon\right)}\right] = 0$$

come si dimostra con un cambiamento di variabili, $(p+k) \to p$, nel secondo integrale[2]. Questo risultato è confermato da un calcolo esplicito di $\Pi^{\alpha\beta}(k)$, per il quale rimandiamo gli interessati al cap. 10 del Mandl e Shaw [2].

$\Pi^{\alpha\beta}(k)$ è un tensore simmetrico a due indici, funzione del vettore k, quindi la sua forma più generale è necessariamente

$$\Pi^{\alpha\beta}(k) = g^{\alpha\beta} A(k^2) + k^\alpha k^\beta B(k^2) \tag{12.6}$$

dove $A(k^2)$, $B(k^2)$ sono funzioni dello scalare k^2, ma la condizione (12.5) stabilisce una relazione tra le due funzioni,

$$A(k^2) = k^2 B(k^2)$$

Quindi[3] $A(0) = 0$, e sviluppando in potenze di k^2,

$$A(k^2) = k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2) \tag{12.7}$$

dove $\Pi_c(k^2)$ contiene gli ordini superiori nello sviluppo in potenze di k^2, e quindi

$$\Pi_c(0) = 0 \tag{12.8}$$

La divergenza di $\Pi^{\alpha\beta}(k)$ è quadratica: per alti valori di p l'integrale (12.3) si comporta come $\int d^4 p / p^2$. Nello sviluppo in potenze di k, tuttavia, il grado di divergenza decresce di una unità per ogni potenza di k, ovvero di due unità per ogni potenza di k^2. Per ottenere ad esempio il valore di A' dobbiamo eseguire la derivata seconda di Π rispetto a k, e si ottiene di conseguenza un integrando che si comporta come p^{-4}, il ché comporta una divergenza logaritmica. I termini successivi dello sviluppo raccolti in $\Pi_c(k^2)$ sono convergenti. Questa considerazione si applica a qualunque diagramma di Feynman: anche se un diagramma diverge, in uno sviluppo in potenze degli impulsi esterni le divergenze si riscontrano solamente nei coefficienti dei primi termini dello sviluppo.

Una ulteriore semplificazione dell'espressione di $\Pi^{\alpha\beta}(k)$ si ottiene dalla considerazione che, dato che in qualsiasi diagramma il propagatore (12.2)si connette alle correnti che scorrono lungo le linee fermioniche,

$$j^\mu D_{\mu\nu}(k)\, j^\nu$$

e che queste correnti sono conservate, il termine di $\Pi^{\alpha\beta}(k)$ proporzionale a $k^\alpha k^\beta$ dà contributo nullo e può essere omesso. In conclusione possiamo scrivere

$$\Pi^{\alpha\beta}(k) = g^{\alpha\beta}\left(k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2)\right) \tag{12.9}$$

e quindi il propagatore del fotone, corretto all'ordine α risulta

$$i D_{\mu\nu}(k) = \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}\left(1 + e_0^2 A'(0)\right) + \frac{-i g_{\mu\nu} e_0^2 \Pi_c(k^2)}{k^2 + i\epsilon} \tag{12.10}$$

[2]Notiamo che questa manipolazione è legittima nella teoria regolarizzata, in cui l'integrale è divergente.

[3]Come mostrato nel Mandl e Shaw, da $A(0) = 0$ segue che la massa del fotone rimane nulla anche in seguito alle correzioni radiative, un'altra conseguenza della invarianza di gauge.

In questa espressione il primo termine corrisponde al propagatore del fotone, ma moltiplicato per un fattore $\left(1+e_0^2 A'(0)\right)$, mentre il secondo, grazie alla (12.8) non ha una singolarità per $k^2 = 0$. Se paragoniamo questa situazione con la rappresentazione spettrale discussa in *Interazioni Elettrodeboli* [9], cfr. anche la Sezione 6.4, vediamo che il primo termine corrisponde alla propagazione del fotone libero, mentre il secondo corrisponde a stati intermedi con più particelle, in questo caso una coppia elettrone-positrone. Il fattore $\left(1+e_0^2 A'(0)\right)$ va quindi interpretato come una costante di rinormalizzazione,

$$Z_3 = 1 + e_0^2 A'(0) \tag{12.11}$$

12.2 La rinormalizzazione della carica

Trascurando per un momento l'effetto delle rinormalizzazioni dovute alle correzioni al vertice o al propagatore dell'elettrone, che come vedremo si compensano grazie alla identità di Ward, discutiamo brevemente della rinormalizzazione della carica dovuta alle correzioni al propagatore del fotone.

Il significato fisico della costante di rinormalizzazione si ottiene ricordando che il propagatore del fotone, con la sua singolarità in $k^2 = 0$ descrive non solamente lo scambio di fotoni tra due elettroni, ma anche la loro interazione coulombiana. La correzione al propagatore che abbiamo trovato è equivalente a modificare la interazione coulombiana,

$$\frac{e_0^2}{r} \to \frac{e_0^2 Z_3}{r}$$

La carica elettrica dell'elettrone è operativamente definita tramite l'intensità della interazione coulombiana, quindi la carica effettiva dell'elettrone non è e_0, ma $e = e_0\sqrt{Z_3}$.

Conviene riesprimere la serie perturbativa in potenze della carica fisica e, e per far questo notiamo che il propagatore del fotone appare sempre nella combinazione $e_0^2 D_{\mu\nu}(k)$ che possiamo riscrivere come

$$e_0^2 D_{\mu\nu}(k) = e^2 D_{R\mu\nu}(k) \tag{12.12}$$

dove $D_{R\mu\nu}(k)$ è il propagatore "rinormalizzato",

$$D_{R\mu\nu}(k) = \frac{1}{Z_3} D_{\mu\nu}(k) = \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} - \frac{-i g_{\mu\nu} e^2 \Pi_c(k^2)}{k^2 + i\epsilon} + \mathcal{O}(e^4) \tag{12.13}$$

Resta da verificare che questa regola si applica anche a linee fotoniche esterne, corrispondenti a fotoni presenti nello stato iniziale o finale del processo.

Ricordiamo che nella espressione della matrice S in termini di diagrammi, (9.36), dobbiamo considerare solo grafici irriducibili ad una particella sulle linee esterne ed associare ad ogni linea fotonica esterna un fattore $\sqrt{Z_3}$. Questo fattore origina dalla parziale semplificazione del fattore $1/\sqrt{Z_3}$ nella formula di riduzione, con il numeratore della funzione a due punti del fotone, termine di polo, che, come abbiamo appena visto, è pari a Z_3, eqq. (12.10) e (12.11). Naturalmente, la linea corrispondente al fotone esterno finisce su un vertice del diagramma da cui partono due linee fermioniche (di cui almeno una interna). L' ampiezza: linea fotonica esterna-vertice si puó scrivere come:

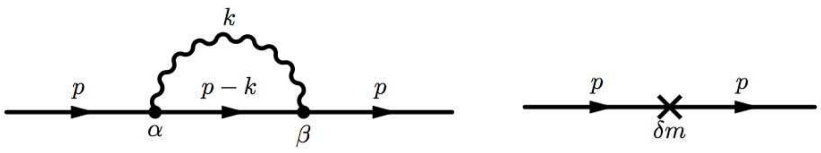


Figura 12.2: Correzioni di ordine α al propagatore di un elettrone.

$$(\cdots e_0 \gamma^\mu \cdots)\epsilon_\mu \sqrt{Z_3} = (\cdots e \gamma^\mu \cdots)\epsilon_\mu \tag{12.14}$$

anche in questo caso il fattore $\sqrt{Z_3}$ trasforma il parametro e_0 nella carica fisica e.

Notiamo che quanto abbiamo fatto equivale ad aggiungere le seguenti regole per il calcolo dei diagrammi:

- Nel calcolo dei diagrammi usare la carica fisica e invece del parametro e_0 che appare nel lagrangiano.
- Dopo aver calcolato (in una teoria regolarizzata) il valore di $\Pi^{\alpha\beta}(k)$, sottrarre il contributo di $A'(0)$, o in altre parole porre a zero il valore di $A'(0)$.
- Eliminare i fattori $\sqrt{Z_3}$ dalla (9.36)

12.3 Il propagatore dell'elettrone

In questa sezione studiamo le correzioni di ordine α al propagatore dell'elettrone, descritte dai due diagrammi della figura 12.2. Notiamo che δm rappresenta lo spostamento di massa dovuto alle interazioni, che in teorie perturbativa può essere espresso come serie di potenze in $\alpha = e^2/4\pi$,

$$\delta m = \delta_2 e_0^2 + \delta_4 e_0^4 + \dots \tag{12.15}$$

Per calcolare le correzioni di ordine α al propagatore dovremo includere il termine $\mathcal{O}(e^2)$ di δm, trascurando i termini di ordine superiore. Per effetto di questa correzione il propagatore dell'elettrone risulterà modificato,

$$iS_F(p) \to \frac{i}{\not p - m + i\epsilon} + \frac{i}{\not p - m + i\epsilon}[ie_0^2\Sigma(p) + i\delta m]\frac{i}{\not p - m + i\epsilon} \tag{12.16}$$

dove $\Sigma(p)$ è dato dalla seguente espressione,

$$ie_0^2\Sigma(p) = \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon}\left[\gamma^\alpha \frac{i}{\not p - \not k - m + i\epsilon}\gamma^\beta\right]$$

che con alcune semplificazioni diviene

$$\Sigma(p) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{k^2 + i\epsilon}\left[\gamma^\alpha \frac{1}{\not p - \not k - m + i\epsilon}\gamma_\alpha\right] \tag{12.17}$$

Abbiamo usato una notazione compatta per il propagatore dell'elettrone; in forma un poco più esplicita il fattore in parentesi quadre nell'integrando può essere riscritto, usando note proprietà delle matrici γ, come

$$[\cdots] = \frac{\gamma^\alpha(\not{p}-\not{k}+m)\gamma_\alpha}{(p-k)^2-m^2+i\epsilon} = \frac{-2(\not{p}-\not{k})+4m}{(p-k)^2-m^2+i\epsilon}$$

Quindi possiamo scrivere $\Sigma(p) = s(p) + v_\mu(p)\gamma^\mu$ dove $s(p)$ è uno scalare, quindi necessariamente una funzione di p^2, e $v_\mu(p)$ un vettore, necessariamente della forma $v_\mu(p) = p_\mu s'(p)$, dove $s'(p)$ è anch'esso uno scalare, funzione di p^2. Dato però che $p^2 = \not{p}^2$ possiamo combinare i due termini in una singola funzione di $\not{p}$, che conviene sviluppare in potenze di $\not{p}-m$,

$$\Sigma(p) = A + B(\not{p}-m) + \Sigma_c(p)(\not{p}-m), \tag{12.18}$$

e dato che l'espressione di $\Sigma(p)$ è linearmente divergente, i primi due coefficienti A, B di questo sviluppo sono divergenti, mentre i termini successivi, raccolti in $\Sigma_c(p)$, risulteranno convergenti. Dato che $\Sigma_c(p)(\not{p}-m)$ raccoglie le potenze ≥ 2 di $(\not{p}-m)$, deve essere

$$\Sigma_c(p)\Big|_{\not{p}=m} = 0 \tag{12.19}$$

Sostituendo nella (12.16), e conservando solo il termine di ordine e_0^2 in δm (eq. 12.15),

$$S_F(p) \to \frac{1}{\not{p}-m+i\epsilon} - \left(\frac{1}{\not{p}-m+i\epsilon}\right)^2 e_0^2(A+\delta_2) - \frac{e_0^2 B}{\not{p}-m+i\epsilon} - \frac{e_0^2\Sigma_c(p)}{\not{p}-m+i\epsilon}$$

La correzione $\propto\ (A+\delta_2)$ rappresenta un cambiamento di massa, come si vede ad esempio considerandola come il primo termine di uno sviluppo[4]

$$\frac{1}{\not{p}-m+e_0^2(A+\delta_2)+i\epsilon} = \frac{1}{\not{p}-m+i\epsilon} - \left(\frac{1}{\not{p}-m+i\epsilon}\right)^2 e_0^2(A+\delta_2)+\ldots \tag{12.20}$$

ma dato che m è la massa "vera" dell'elettrone, dobbiamo scegliere δ_2 in modo che cancelli esattamente il termine A,

$$A+\delta_2 = 0 \tag{12.21}$$

In conclusione il propagatore all'ordine e^2 diventa

$$S_F(p) \to \frac{1-e_0^2 B}{\not{p}-m+i\epsilon} - \frac{e_0^2\Sigma_c(p)}{\not{p}-m+i\epsilon} \tag{12.22}$$

Notiamo che il primo termine è singolare per $\not{p} = m$, e quindi corrisponde alla propagazione di una singola particella di massa m, mentre grazie alla (12.19) il secondo termine è regolare in $\not{p} = m$, e deve corrispondere alla propagazione di stati con più di una particella — nel nostro caso un elettrone più un fotone, come si vede dal diagramma nella figura 12.2. Se paragoniamo questa espressione con la

[4] Sulla giustificazione di questo passaggio torneremo nell sezione seguente.

formula generale per le funzioni di Green a due punti, (9.28), vediamo che il fattore $(1 - e_0^2 B)$ va interpretato come costante di rinormalizzazione dell'elettrone, Z_2, o meglio come la sua approssimazione di ordine α,

$$Z_2 = 1 - e_0^2 B + \mathcal{O}(e_0^4) \tag{12.23}$$

Le correzioni della figura 12.2 si applicano anche al caso di una linea esterna. La discussione delle correzioni segue le linee della analoga discussione delle correzioni ad una linea esterna fotonica nella sezione precedente:

1. Nella espressione della matrice S in termini di diagrammi, (9.36), dobbiamo considerare solo grafici irriducibili ad una particella sulle linee esterne

2. ad ogni linea elettronica esterna è associato un fattore $\sqrt{Z_2}$, che origina dalla parziale semplificazione del fattore $1/\sqrt{Z_2}$ nella formula di riduzione, con il numeratore della funzione a due punti dell' elettrone, termine di polo, che è pari a Z_2, eq. (9.28)

3. La linea corrispondente all' elettrone esterno finisce su un vertice del diagramma da cui partono una linea fermionica ed una fotonica (di cui almeno una interna).

Possiamo interpretare le correzioni alle linee fermioniche, sia interne che esterne, come una ulteriore rinormalizzazione della carica. Per una linea esterna che confluisce in un vertice la correzione è di un fattore $\sqrt{Z_2}$. Per una linea interna il fattore Z_2 va suddiviso tra i due vertici cui la linea si appoggia, quindi un fattore $\sqrt{Z_2}$ (trascurando termini $\propto e^4$) per ciascun vertice. In conclusione, dato che su ogni vertice insistono due linee fermioniche, esterne o interne, per effetto delle correzioni alle linee fermioniche il vertice $e_0\gamma^\mu$ risulterà moltiplicato per $1 - e_0^2 B = Z_2$. Questo equivale ad una ulteriore rinormalizzazione della carica elettrica

$$e_0 \to e_0 Z_2 = e_0(1 - e_0^2 B) \tag{12.24}$$

Grazie alla identità di Ward, come vedremo, questa correzione sarà esattamente compensata dalla analoga correzione alla funzione vertice, per cui la carica elettrica viene solamente rinormalizzata dalla correzione al propagatore del fotone studiata nella sezione precedente.

12.3.1 Il propagatore a tutti gli ordini

In questa sezione discutiamo brevemente della struttura generale del propagatore dell'elettrone come si ottiene dalla teoria delle perturbazioni. Questi risultati sono importanti per una discussione della rinormalizzazione a tutti gli ordini, ma nel contesto di queste lezioni li useremo solamente per giustificare la identificazione del termine A nello sviluppo della Σ (eq. 12.18) come spostamento di massa.

È possibile riordinare la serie perturbativa per il propagatore sommando i contributi dei diagrammi che, come quelli della figura 12.3, rappresentano una iterazione di correzioni già incontrate ad ordini inferiori. Diremo che i diagrammi della figura 12.3 hanno due *inserzioni*, mentre quelli della figura 12.2 hanno una singola inserzione, ed è chiaro che ad ordini superiori troveremo diagrammi con tre o più inserzioni.

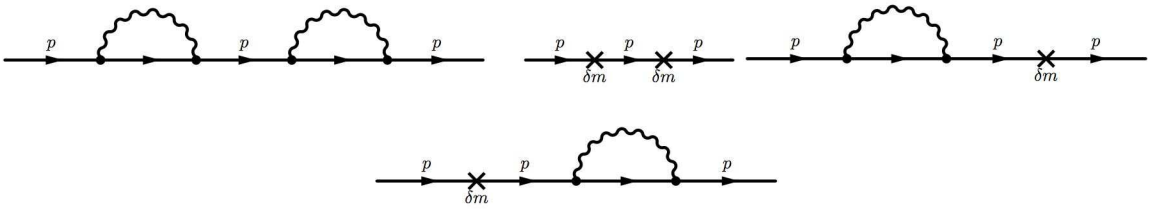


Figura 12.3: Correzioni con due inserzioni al propagatore di un elettrone.

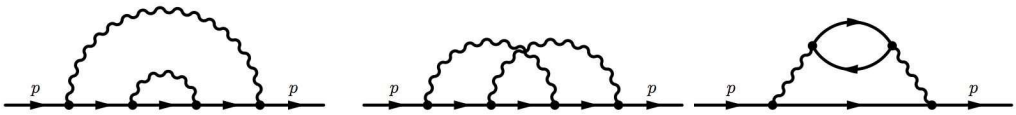


Figura 12.4: Inserzioni di ordine e_0^4.

Sempre al quarto ordine troviamo tre diagrammi con una singola inserzione, mostrati nella figura 12.4, e in analogia con quanto fatto per l'inserzione del secondo ordine nella (12.16) indicheremo il loro contributo con $e_0^4\Sigma_4(p)$. È possibile sommare i contributi dei diagrammi con inserzioni multiple: se definiamo $\Delta(p)$ come la somma di tutte le inserzioni singole,

$$\Delta(p) = e_0^4\Sigma(p) + e_0^4\Sigma_4(p) + \ldots + \delta m, \tag{12.25}$$

per effetto dei diagrammi con inserzioni singole o multiple il propagatore diverrà[5] :

$$\begin{aligned} iS_F(p) \to & \frac{i}{\not p - m + i\epsilon} + \frac{i}{\not p - m + i\epsilon} i\Delta(p) \frac{i}{\not p - m + i\epsilon} \\ & + \frac{i}{\not p - m + i\epsilon} i\Delta(p) \frac{i}{\not p - m + i\epsilon} i\Delta(p) \frac{i}{\not p - m + i\epsilon} + \ldots \\ & = \frac{i}{\not p - m + \Delta(p) + i\epsilon} \end{aligned} \tag{12.26}$$

[5]Questo risultato deriva dalla seguente identità, una generalizzazione della serie geometrica, valida per due operatori X, Y,

$$S = \frac{1}{X} + \frac{1}{X} Y \frac{1}{X} + \frac{1}{X} Y \frac{1}{X} Y \frac{1}{X} + \ldots = \frac{1}{X} + \frac{1}{X} Y S$$

da cui, moltiplicando da sinistra per X,

$$XS = 1 + YS; \qquad \text{e quindi,} \qquad S = \frac{1}{X - Y}.$$

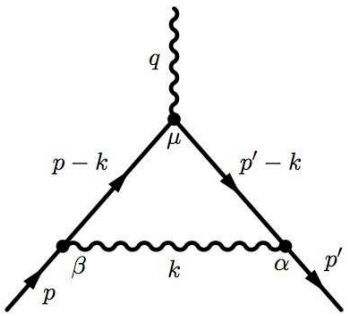


Figura 12.5: Correzione al vertice di ordine e_0^2.

Se in analogia con la (12.18) sviluppiamo $\Delta(p)$ in potenze[6] di $\not{p} - m$,

$$\Delta(p) = \tilde{A} + \tilde{B}(\not{p} - m) + \Delta_c(p)(\not{p} - m), \tag{12.27}$$

dalla (12.26) si ottiene

$$S_F(p) = \frac{i}{(\not{p} - m)\big(1 + \tilde{B} + \Delta_c(p)\big) + \tilde{A} + i\epsilon}, \tag{12.28}$$

che è singolare in $\not{p} = m$ solo se $\tilde{A} = 0$. La condizione che m sia la massa dell'elettrone si traduce quindi nella condizione $\tilde{A} = 0$, che all'ordine e_0^2 si riduce alla (12.21).

12.4 Il vertice

La correzione al vertice di ordine e_0^2 è data dal diagramma della figura 12.5. Con questa correzione il vertice è

$$i e_0 \gamma^\mu \to i e_0 \left(\gamma^\mu + e_0^2 \Lambda^\mu(p', p)\right) \tag{12.29}$$

dove

$$i e_0^3 \Lambda^\mu(p', p) = \frac{(i e_0)^3}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{-i g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \frac{i}{\not{p}' - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\beta$$

e con qualche semplificazione,

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma_\alpha$$

Per grandi valori di k l'integrale si comporta come $\int d^4 k / k^4$, ed è quindi logaritmicamente divergente. Sorge quì una ulteriore complicazione perché l'integrale non è solamente divergente per $k \to \infty$, ma anche per $k \to 0$, e presenta quindi una divergenza infrarossa.

[6] Si può dimostrare che i termini raccolti in $\Delta_c(p)$ sono privi di divergenze. Questo si verifica facilmente all'ordine e_0^2.

La divergenza infrarossa verrà discussa separatamente. Sin d'ora diciamo che essa richiede un processo di regolarizzazione che consiste nell'attribuire al fotone una piccola massa λ che viene posta a zero solamente alla conclusione dei calcoli relativi a grandezze fisiche. Scriveremo quindi

$$\Lambda^\mu(p',p) = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{k^2-\lambda^2+i\epsilon}\gamma^\alpha \frac{1}{\not p' - \not k - m + i\epsilon}\gamma^\mu \frac{1}{\not p - \not k - m + i\epsilon}\gamma_\alpha \tag{12.30}$$

Si dimostra facilmente che il termine divergente è proporzionale a γ^μ. Se infatti scriviamo

$$\Lambda^\mu = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{k^2-\lambda^2+i\epsilon}\gamma^\alpha \frac{\not p' - \not k + m}{(p'-k)^2-m^2+i\epsilon}\gamma^\mu \frac{\not p - \not k + m}{(p-k)^2-m^2+i\epsilon}\gamma_\alpha$$

il termine divergente è quello che contiene $\not k \ldots \not k$ al numeratore, quindi esplicitando $\not k = k_\delta\gamma^\delta = k_\theta\gamma^\theta$ e omettendo p, p', m al denominatore, trascurabili nel limite $k \to \infty$,

$$\Lambda^\mu\Big|_{\text{divergente}} = \gamma^\alpha\gamma^\delta\gamma^\mu\gamma^\theta\gamma_\alpha \frac{-i}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{k^2-\lambda^2+i\epsilon}\frac{k_\delta\, k_\theta}{\left(k^2+i\epsilon\right)^2}$$

La parte divergente di questo ultimo integrale è un tensore costante (nell'integrale non appare nessun vettore); esso deve quindi avere la forma $Kg_{\delta\theta}$, dove K è una costante (divergente, ma come al solito dobbiamo immaginare di eseguire il calcolo in modo *regolarizzato*). Quindi

$$\Lambda^\mu\Big|_{\text{divergente}} = Kg_{\delta\theta}\gamma^\alpha\gamma^\delta\gamma^\mu\gamma^\theta\gamma_\alpha = K\gamma^\alpha\gamma^\delta\gamma^\mu\gamma_\delta\gamma_\alpha = 4K\gamma^\mu$$

dove abbiamo usato due volte la nota identità $\gamma^\delta\gamma^\mu\gamma_\delta = -2\gamma^\mu$. Dato che la parte divergente di Λ^μ è proporzionale a γ^μ possiamo scrivere

$$\Lambda^\mu(p',p) = L\gamma^\mu + \Lambda^\mu_c(p',p) \tag{12.31}$$

dove $\Lambda^\mu_c(p',p)$ è privo di divergenze. Dato che $\Lambda^\mu_c(p',p)$ può esso stesso contenere termini $\propto \gamma^\mu$ occorre una seconda condizione che fissi la separazione tra parte divergente e parte non divergente. Una possibile sceltà di questa condizione parte dalla considerazione che $e_0\bar u(\vec p)\gamma^\mu u(\vec p)$ rappresenta la corrente elettrica di un elettrone di impulso $\vec p$. Per effetto delle correzioni al vertice questa diviene[7]

$$e_0\bar u(\vec p)\gamma^\mu u(\vec p) \to e_0\bar u(\vec p)\left(\gamma^\mu + e_0^2\Lambda^\mu(p,p)\right)u(\vec p) \tag{12.32}$$

[7]Trascuriamo per un momento le correzioni alle linee esterne, e la correzione al propagatore del fotone, ciascuna delle quali produce una rinormalizzazione della carica elettrica.

Si dimostra facilmente[8] che $\bar{u}(\vec{p})\Lambda^\mu(p,p)u(\vec{p})$ è proporzionale a $\bar{u}(\vec{p})\gamma^\mu u(\vec{p})$. Possiamo quindi definire la separazione tra parte divergente e parte non divergente di $\Lambda^\mu(p',p)$, eq. (12.31), tramite la condizione

$$\bar{u}(\vec{p})\Lambda^\mu(p,p)u(\vec{p}) = L\bar{u}(\vec{p})\gamma^\mu u(\vec{p}), \qquad \text{ovvero:} \qquad \bar{u}(\vec{p})\Lambda_c^\mu(p,p)u(\vec{p}) = 0 \tag{12.33}$$

Dato che la (12.32) rappresenta la corrente di un elettrone come modificata dalla correzione al vertice, ne segue che questa correzione implica una ulteriore rinormalizzazione della carica

$$e_0 \to \frac{1}{Z_1}e_0 = (1+e_0^2 L)e_0 \tag{12.34}$$

Come vedremo nella prossima sezione l'identità di Ward stabilisce una realazione tra la correzione al propagatore dell'elettrone e la correzione al vertice, di modo che le due rinormalizzazioni della carica, (12.24) e (12.34), si cancellano esattamente.

12.5 L'identità di Ward

L'identità di Ward afferma che

$$\frac{d\Sigma(p)}{dp_\mu} = \Lambda(p,p) \tag{12.35}$$

Ne daremo una dimostrazione all'ordine α. Una dimostrazione valida in generale può essere ottenuta a partire dalla formulazione della QCD in termini della somma sui cammini. Usando la (12.18) otteniamo

$$\frac{d\Sigma(p)}{dp_\mu} = B\gamma^\mu + \frac{d\Sigma_c(p)}{dp_\mu}(\not{p}-m) + \Sigma_c(p)\gamma^\mu$$

Se prendiamo l'elemento di matrice di questa tra spinori $u(p)$ tenendo presente che $\Sigma_c(p)$ è esso stesso proporzionale a $\not{p}-m$ e che $(\not{p}-m)u(p) = \bar{u}(p)(\not{p}-m) = 0$ otteniamo che

$$\bar{u}(p)\frac{d\Sigma(p)}{dp_\mu}u(p) = B\bar{u}(p)\gamma^\mu u(p)$$

[8]Assumiamo $\vec{p}=0$, da cui il caso generale segue con una trasformazione di Lorentz. Se poniamo

$$u(0) = \begin{pmatrix}\phi\\0\end{pmatrix},$$

l'unica grandezza scalare, candidata al ruolo di $\bar{u}(0)\Lambda^0 u(0)$, è $\phi^\star\phi = u^\star u = \bar{u}\gamma^0 u$, e quindi $\bar{u}(0)\Lambda^0(p,p)\big|_{\vec{p}=0}u(0) \propto \bar{u}(0)\gamma^0 u(0)$. L'unica grandezza vettoriale è $\phi^\star\vec{\sigma}\phi$, ma si tratta di un vettore assiale mentre $\vec{\Lambda}$ dovrebbe essere un vettore polare. Quindi $\bar{u}(0)\vec{\Lambda}(p,p)\big|_{\vec{p}=0}u(0) = 0$. Infine, da

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ -\vec{\sigma} & 0\end{pmatrix} \qquad \text{segue che} \qquad \bar{u}(0)\vec{\gamma}u(0) = 0.$$

In conclusione $\bar{u}(0)\Lambda^\mu(p,p)\big|_{\vec{p}=0}u(0) \propto \bar{u}(0)\gamma^\mu u(0)$, come dovevamo dimostrare.

mentre dalla (12.33) otteniamo

$$\bar{u}(\vec{p})\Lambda^{\mu}(p,p)u(\vec{p}) = L\bar{u}(\vec{p})\gamma^{\mu}u(\vec{p})$$

Paragonando le ultime due equazioni con l'identità (12.35) otteniamo

$$B = L \qquad \text{cioé} \qquad Z_1 = Z_2 \tag{12.36}$$

quindi la cancellazione delle rinormalizzazioni della carica dovute alle correzioni alla parte vertice — eq. (12.34)— e al propagatore dell'elettrone — eq. (12.24).

Questo è un risultato di estrema importanza, perchè le correzioni al propagatore o al vertice dipendono evidentemente dalla massa della particella, e ancora più dalle interazioni cui la particella è sottoposta. Sarebbe infatti ragionevole attendersi che le correzioni al propagatore dell'elettrone, del μ, del τ, per non parlare delle correzioni ai propagatori dei quark o dei mesoni W, siano tutte diverse tra loro. In questa situazione, senza l'identità di Ward, sarebbe estremamente difficile capire l'universalità della costante e che descrive la carica sia dell'elettrone che del protone, che sono sperimentalmente eguali con precisione estrema. Notiamo viceversa che la rinormalizzazione della carica dovuta alle correzioni del propagatore del fotone sono le stesse per tutte le particelle cariche cui il fotone si accoppia.

All'ordine e_0^2 si può dimostrre l'identità di Ward calcolando direttamente la derivata di $\Sigma(p)$ come risulta dalla eq. (12.17). Naturalmente questa operazione è priva di senso dato che l'integrale nella è eq. (12.17) divergente, come del resto quello nella (12.30) con cui ci dobbiamo confrontare. Dobbiamo quindi immaginare di aver regolarizzato la teoria, ad esempio con una regolarizzazione dimensionale, scrivendo

$$\Sigma(p) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int \frac{d^{4-\eta}k}{k^2+i\epsilon}\left[\gamma^{\alpha}\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon}\gamma_{\alpha}\right]$$

Dato che questo integrale è ora regolare, possiamo applicare la derivata all'integrando. Possiamo allora utilizzare l'identità[9]

$$\frac{d}{dp_{\mu}}\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon} = -\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon}\gamma^{\mu}\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon}$$

da cui

$$\frac{d\Sigma(p)}{dp_{\mu}} = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int \frac{d^{4-\eta}k}{k^2+i\epsilon}\left[\gamma^{\alpha}\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon}\gamma^{\mu}\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon}\gamma_{\alpha}\right]$$

che coincide con l'espressione regolarizzata di $\Lambda(p,p)$ (eq. 12.30), completando la dimostrazione.

[9]Questa si deriva moltiplicando per $1/(\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon)$ da sinistra la seguente identità:

$$0 = \frac{d}{dp_{\mu}}\left[(\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon)\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon}\right] = \gamma^{\mu}\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon} + (\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon)\frac{d}{dp_{\mu}}\frac{1}{\not{p}-\not{k}-m+i\epsilon}$$

Capitolo 13

Diffusione in un campo esterno

In questo capitolo discutiamo della diffusione di un elettrone in un campo esterno. Prendiamo questo processo come occasione per rivedere in pratica il processo di rinormalizzazione e per discutere su un esempio concreto il problema delle divergenze infrarosse cui abbiamo solo accennato nel capitolo precedente.

La "diffusione da campo esterno" è in realtà solo una idealizzazione della diffusione di un elettrone nell'urto con un bersaglio di grande massa, tipicamente un nucleo pesante, che possiamo con buona approssimazione considerare come una carica elettrica localizzata in una precisa zona dello spazio. Un nucleo di carica Ze immobile in $\vec{x} = 0$ può ad esempio essere descritto da una corrente "classica" $j^\mu(x)$ indipendente dal tempo tale che

$$j^\mu(x) = \{\rho(\vec{x}), \vec{j} = 0\}; \qquad \int d^3x\, \rho(x) = Ze \tag{13.1}$$

Con questa idealizzazione evitiamo di fornire una descrizione quantistica di questa corrente, ma naturalmente perdiamo anche la possibilità di descrivere fenomeni legati alla sua struttura, come ad esempio l'esistenza di stati eccitati del nucleo. In questo capitolo useremo questo metodo per descrivere una carica elettrica, ma lo potremmo anche usare per descrivere l'emissione di onde elettromagnetiche da un'antenna radio, o la radiazione di sincrotrone emessa da elettroni circolanti in un anello di accumulazione.

L'effetto di una tale corrente "classica" può essere descritto introducendo nel lagrangiano di interazione (9.8) un nuovo termine, che descrive l'interazione del campo elettromagnetico A^μ con la corrente classica j_μ,

$$\mathscr{L}_1 = e_0(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu - j^\mu A_\mu + \delta m(\bar{\psi}\psi) \tag{13.2}$$

Con questa aggiunta il lagrangiano del fotone viene modificato,

$$\frac{-1}{2}(\partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu) \to \frac{-1}{2}(\partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu) - j^\mu A_\mu \tag{13.3}$$

Per descrivere l'effetto della corrente j^μ in termini di diagrammi è sufficiente una semplice modifica del procedimento che porta dal funzionale generatore ai diagrammi di Feynman per la matrice S. Infatti paragonando la (13.3) con la (4.12) vediamo che il cambiamento dell'azione prodotto dalla

corrente esterna j^μ è identico a quello prodotto dalla funzione ausiliaria J^μ se $J^\mu = j^\mu$. Supponiamo che l'elemento di matrice S che ci interessa sia connesso dalla formula di riduzione ad una funzione di Green $\langle 0|T(\cdots\psi\cdots\bar{\psi}\cdots A^\mu\cdots)|0\rangle$; il calcolo richiede allora quattro passi:

(1) Calcolare $Z[J,\bar{J},j_\mu]$ come somma di diagrammi.

(2) Calcolarne la derivata parziale che corrisponde alla funzione di Green

$$(\cdots\frac{i\delta}{\delta\bar{J}},\cdots\frac{-i\delta}{\delta J}\cdots\frac{i\delta}{\delta J_\mu}\cdots)Z[J,\bar{J},j_\mu].$$

dopo il passo (2) sopravvivono solamente i diagrammi che avevano un numero di "pallini", cioé fattori J, $\bar{J}$, J_μ eguale o superiore al numero delle derivate di ciascuna specie.

(3) Porre $J = \bar{J} = J_\mu = 0$

Per calcolare la stessa funzione di Green in presenza della corrente classica j_μ basta modificare il terzo passo:

(3') Porre $J = \bar{J} = 0$ e porre $J_\mu = j_\mu$.

(4) Applicare la formula di riduzione per passare dalla funzione di Green all'elemento di matrice S.

Guardiamo alla differenza tra (3) e (3'): il passo (3) mette a zero tutti i diagrammi in cui alcuni "pallini" (fattori J, $\bar{J}$, J_μ) sopravvivono dopo l'applicazione delle derivate parziali. Nel caso (3'), in presenza di una corrente classica j_μ, i diagrammi in cui esistono (dopo le derivate) fattori di tipo J, o $\bar{J}$ vengono messi a zero, mentre rimangono in vita tutti i diagrammi provvisti di linee esterne che terminano in un pallino di tipo J_μ, ma con J_μ sostituita dalla corrente classica j_μ. La figura 13.1 rappresenta il

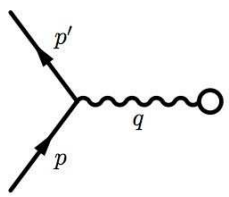


Figura 13.1: Diagramma per la diffusione di un elettrone in un campo esterno.

diagramma di ordine più basso per la diffusione di un elettrone in un campo esterno generato dalla corrente j_μ, e in questo caso p, p' sono gli impulsi dell'elettrone entrante e di quello uscente. La stessa figura può anche essere considerata come una porzione di un diagramma più complesso, in cui p, o p' (o ambedue) sono impulsi di linee interne al diagramma. Alla linea con pallino in questa figura corrisponde un fattore

$$\begin{aligned}\int d^4y\,\Delta_F(x-y)\,j_\mu(y) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\,\frac{1}{q^2+i\epsilon}\,e^{-iqx}\,j_\mu(q)\\ j_\mu(q) &= \int d^4y\,e^{iqy}\,j_\mu(y),\end{aligned} \tag{13.4}$$

lo stesso dell'eq. (9.20), ma con la corrente classica j_μ al posto della funzione ausiliaria J_μ . Il fattore e^{-iqx} si combina con gli analoghi fattori delle due linee fermioniche a produrre il fattore $(2\pi)^4\delta^4(p'-p-q)$ associato al vertice. In conclusione alle regole di Feynman (9.38) dobbiamo aggiungere

$$\text{Linea di campo esterno} \qquad \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\,\frac{j_\mu(q)}{q^2+i\epsilon} \tag{13.5}$$

notando però che il fattore $(2\pi)^4\delta^4(p'-p-q)$ associato al vertice elimina l'integrazione in q fissando il valore di $q = p'-p$, e che anche i fattori $(2\pi)^4$ si semplificano.

Consideriamo l'esempio della quadricorrente associata ad una sferetta carica con il centro in $\vec{x} = 0$,

$$j_0 = \rho(|\vec{x}|); \qquad \int d^3x\,\rho(|\vec{x}|) = Ze_0; \qquad \vec{j} = 0 \tag{13.6}$$

Avremo allora

$$j_0(q) = \int d^4y\,e^{iqy}\,j_0(y) = 2\pi\,\delta(q_0)\,Ze_0\,F(\vec{q}^2) \tag{13.7}$$

dove il fattore di forma $F(\vec{q}^2)$, definito dalla trasformata di Fourier sulle coordinate spaziali della distribuzione di carica,

$$Ze\,F(\vec{q}^2) = \int d^3y\,e^{-i\vec{q}\vec{y}}\rho(|\vec{x}|) \tag{13.8}$$

è normalizzato in modo che $F(0) = 1$. L'ampiezza di scattering per la diffusione di un elettrone su un campo esterno risulta quindi, all'ordine più basso, con $q = p'-p$,

$$\begin{aligned}\langle\vec{p}',s|S|\vec{p},r\rangle &= \frac{m}{(2\pi)^3\sqrt{EE'}}\frac{ie_0}{q^2}j_\mu(q)\left(\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\right)\\ &= \frac{m}{(2\pi)^3E}\,2\pi\,\delta(E'-E)\frac{iZe_0^2\,F(\vec{q}^2)}{q^2}\left(\bar{u}(p')\,\gamma^0\,u(p)\right)\end{aligned} \tag{13.9}$$

Notiamo che dato che il valore di $q^2 = (\vec{p}'-\vec{p})^2$ è fissato, possiamo omettere il termine $i\epsilon$ nel denominatore. Il fattore $\delta(E'-E)$ garantisce la conservazione dell'energia degli elettroni, mentre la quantità di modo non è conservata, dato che la presenza di un campo esterno causa una violazione dell'invarianza per traslazioni[1].

Può anche essere interessante esprimere il risultato ottenuto in termini del campo classico $\tilde{A}_\mu$ prodotto dalla corrente j_μ. L'equazione $\Box\tilde{A}_\mu = j_\mu$ porta a

$$\tilde{A}_\mu(q) = \frac{-1}{q^2}\,j_\mu(q)$$

[1]In una trattazione realistica dell'urto tra elettroni e un nucleo di massa M, se nello stato inizaile il nucleo è in quiete, dopo l'urto esso avrà assorbito dall'elettrone un impulso $\vec{p}'-\vec{p}$, e quindi una energia di rinculo $(\vec{p}'-\vec{p})^2/2M$. Chiaramente la schematizzazione del nucleo come carica fissa è solamente valida se l'energia dell'elettrone, e quindi il momento trasferito, è molto minore del'energia di riposo del nucleo bersaglio.

e possiamo quindi riscrivere l'elemento di matrice S come

$$\langle \vec{p}\,', s|S|\vec{p}, r\rangle = \frac{-i e_0\, m}{(2\pi)^3)\sqrt{E\,E'}} \tilde{A}_\mu(q) \left(\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\right) \tag{13.10}$$

Utilizzeremo questa forma per discutere delle correzioni radiative al momento magnetico dell'elettrone.

Capitolo 14

Il momento magnetico anomalo dell'elettrone

In questo capitolo calcoliamo il momento magnetico anomalo dell'elettrone (o di qualsiasi leptone) all'ordine α. Il calcolo è delineato nel Mandl e Shaw, ma vogliamo qui eseguirlo interamente, introducendo qualche semplificazione che rende il calcolo particolarmente compatto. Si assume che il lettore abbia presente la discussione del Cap. 9.1 delle dispense di Meccanica Quantistica Relativistica [1] e del capitolo 9 del Mandl e Shaw[1] [2].

14.1 Preliminari

Cominciamo con una premessa: tenendo presente la identità di Gordon ([1], Cap. 9.1, MS-A.80),

$$2m\,\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')((p+p')^\mu + i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)u(p) \tag{14.1}$$

dove $q = p' - p$, possiamo scrivere l'elemento di matrice $\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p',p)u(p)$ come (vedi ad esempio (MS-10.66,10.67))

$$\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p',p)u(p) = \bar{u}(p')(F_1(q^2)\gamma^\mu + F_2(q^2)\frac{1}{2m}i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)u(p) \tag{14.2}$$

D'altra parte (cfr. l' eq. (12.31)):

$$\Lambda^\mu(p',p) = L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p',p) \tag{14.3}$$

e, se p', p corrispondono a momenti fisici ($p^2 = p'^2 = m^2$), si ha, nel limite di $q = 0$, $p = p'$, vedi la (12.33) e (MS-9.54):

$$\bar{u}(p)\Lambda_c^\mu(p,p)u(p) = 0 \tag{14.4}$$

Paragonando con la (14.2), dato che il termine in F_2 è esplicitamente proporzionale a q si vede che $F_1(0) = L$. Se quindi calcoliamo l'espressione in (14.2) omettendo termini di ordine $O(q^2)$ abbiamo

$$\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p',p)u(p) = \bar{u}(p')(L\gamma^\mu + F_2(0)\frac{1}{2m}i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)u(p) + O(q^2) \tag{14.5}$$

[1] indicheremo con (MS-...) le equazioni tratte dal Mandl e Shaw.

Data l'identità di Ward, il termine L sarà esattamente cancellato dalla correzione alle linee esterne, per cui, (vedi par. 9.5 del Mandl e Shaw) la funzione vertice incluse *tutte* le correzioni del secondo ordine diviene:

$$ie_0\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \to i[e\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) + \frac{e}{2m}\bar{u}(p')e^2F_2(0)\, i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)u(p)] + O(q^2)$$

e, usando la identità di Gordon (14.1),

$$= ie\bar{u}(p')\frac{p^\mu + p'^\mu}{2m}u(p) \; + \; \frac{e}{2m}\bar{u}(p')\left(1 + e^2F_2(0)\right)(i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)u(p)] + O(q^2) \tag{14.6}$$

In questa espressione abbiamo incluso l'effetto delle correzioni del secondo ordine alla linea fotonica che rinormalizzano la carica, $e_0 \to e$. Il primo termine $\propto\ (p+p')^\mu$ rappresenta l'interazione della carica elettrica (è lo stesso che avremmo per una particella di spin 0), il secondo descrive l'interazione del momento magnetico. Questo risultato mostra quindi che il momento magnetico del leptone è pari a $(1 + e^2F_2(0))$ magnetoni di Bohr. Per ottenere il valore di $F_2(0)$ dobbiamo calcolare i termini lineari in q nella eq. (14.2). Il calcolo si semplifica notevolmente se seguiamo le seguenti regole:

1. Omettere i termini che sono esplicitamente di ordine q^2.
2. Omettere i termini che sono $\propto \gamma^\mu$ Questi termini confluiscono nel parametro (divergente) L e sono eliminati dalla rinormalizzazione.

Notiamo che questa procedura ha due importanti vantaggi:

- Con la seconda regola abbiamo omesso i termini divergenti ultravioletti.
- Abbiamo anche eliminato la divergenza infrarossa, che è anche (MS-9.96a) $\propto \gamma^\mu$.
- Con la prima regola l'integrale si semplifica notevolmente.

Possiamo quindi eseguire il calcolo senza ricorrere a regolarizzazioni ultraviolette o infrarosse, Ovvero più correttamente, ma in maniera del tutto equivalente, immaginare che si esegua la regolarizzazione, e che si omettano i termini $\propto \gamma^\mu$ (che nella teoria regolarizzata sono finiti). I termini che restano (cioè $F_2(0)$) sono finiti nel limite in cui si elimina la regolarizzazione. Questa via leggermente più complessa è seguita nel Mandl e Shaw.

14.2 Il calcolo

La grandezza da calcolare (vedi ad esempio (MS-9.48)) può essere scritta come

$$\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p',p)u(p) = \bar{u}\left(\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{N^\mu(k,p,p')}{(k^2+i\epsilon)((p'-k)^2-m^2+i\epsilon)((p-k)^2-m^2+i\epsilon)}\right)u \tag{14.7}$$

Dove il numeratore è dato da

$$N^\mu(k,p,p') = \gamma^\alpha(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma_\alpha \tag{14.8}$$

Cominciamo con lo stabilire alcune relazioni tra le variabili:

$$q^2 = (p' - p)^2 = 2m^2 - 2(pp'); \qquad (p' + p)^2 = 2m^2 + 2(pp') = 4m^2 - q^2 \tag{14.9}$$

Possiamo combinare i due ultimi fattori del denominatore scrivendo:

$$p' = Q + \frac{q}{2}; \quad p = Q - \frac{q}{2}; \qquad \text{dove: } Q = \frac{p + p'}{2} \tag{14.10}$$

Notiamo anche che $Q^2 = m^2 + q^2/4$ che, dato che vogliamo omettere termini $O(q^2)$, possiamo riscrivere come $Q^2 = m^2 + O(q^2)$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned}((p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\epsilon) &= (k^2 - 2(p'k) + i\epsilon)(k^2 - 2(pk) + i\epsilon) \\ &= \left((k^2 - 2(Qk) + i\epsilon)^2 - (kq)^2\right) = (k^2 - 2(Qk) + i\epsilon)^2 + O(q^2)\end{aligned} \tag{14.11}$$

Quindi, trascurando termini $O(q^2)$, possiamo riscrivere la (14.7) come

$$\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p', p)u(p) = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{\bar{u}\, N^\mu(k, p, p')u}{(k^2 + i\epsilon)(k^2 - 2(Qk) + i\epsilon)^2} + O(q^2) \tag{14.12}$$

Il prossimo passo consiste nel combinare i denominatori in uno singolo, usando il trucco di Feynman (MS-10.13):

$$\begin{aligned}\bar{u}\Lambda^\mu(p', p)u &= \frac{-i}{(2\pi)^4}\int_0^1 2z\,dz \int d^4k \frac{\bar{u}\, N^\mu(k, p, p')u}{(k^2 - 2z(Qk) + i\epsilon)^3} + O(q^2) \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4}\int_0^1 2z\,dz \int d^4k \frac{\bar{u}\, N^\mu(k, p, p')u}{((k - zQ)^2 - z^2Q^2 + i\epsilon)^3} + O(q^2) \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4}\int_0^1 2z\,dz \int d^4k \frac{\bar{u}\, N^\mu(k, p, p')u}{((k - zQ)^2 - z^2m^2 + i\epsilon)^3} + O(q^2)\end{aligned} \tag{14.13}$$

Dove nell'ultimo passo abbiamo utilizzato il fatto che $Q^2 = m^2 + O(q^2)$. Possiamo ora eseguire un cambiamento di variabili[2]: $t = k - zQ$; $k = t + z(p + p')/2$, di modo che

$$\bar{u}\Lambda^\mu(p', p)u = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int_0^1 2z\,dz \int d^4t \frac{\bar{u}\, N^\mu(t + zQ, p, p')u}{(t^2 - z^2m^2 + i\epsilon)^3} + O(q^2) \tag{14.14}$$

A questo punto notiamo che in $N^\mu(t + zQ, p, p')$, eq. (14.8) compariranno termini di ordine zero in t, oltre a termini lineari e quadratici in t. I termini lineari si annullano (MS-10.2). I termini quadratici in t danno un contributo proporzionale a γ^μ e possono essere omessi. A questo proposito vedere la discussione delle eq. (MS-10.62 ÷ 10.65). Possiamo allora scrivere, indicando esplicitamente i termini omessi con ($\propto \gamma^\mu$):

$$\bar{u}\Lambda^\mu(p', p)u = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int_0^1 2z\,dz \int d^4t \frac{\bar{u}\, N^\mu(\frac{z(p+p')}{2}, p, p')u}{(t^2 - z^2m^2 + i\epsilon)^3} + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu) \tag{14.15}$$

[2]Questo passo è legittimo solo se l'integrale è convergente; per questo immaginiamo di aver fatto una regolarizzazione e di passare al limite alla fine del calcolo.

Dato che il numeratore non dipende da t possiamo ora eseguire l'integrale in t che risulta (MS-10.1)

$$\int \frac{d^4 t}{(t^2 - z^2 m^2 + i\epsilon)^3} = -i \frac{\pi^2}{2z^2 m^2} \tag{14.16}$$

di modo che

$$\bar{u}\Lambda^\mu(p', p)u = \frac{-1}{16\pi^2 m^2} \int_0^1 \frac{dz}{z}\, \bar{u}\, N^\mu(\frac{z(p+p')}{2}, p, p')u + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu) \tag{14.17}$$

Calcoliamo ora il fattore (vedi eq. 14.8)

$$X = \bar{u}\, N^\mu(\frac{z(p+p')}{2}, p, p')u = \bar{u}\gamma^\alpha(\not{p}' - \frac{z(\not{p} + \not{p}')}{2} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \frac{z(\not{p} + \not{p}')}{2} + m)\gamma_\alpha u$$

che con le identità (MS-A14a,b) riscriviamo

$$X = \bar{u}(p')\left(-2(\not{p} - \frac{z(\not{p} + \not{p}')}{2})\gamma^\mu(\not{p}' - \frac{z(\not{p} + \not{p}')}{2}) + 4m(1-z)(p+p')^\mu - 2m^2\gamma^\mu\right)u(p)$$

L'ultimo termine è $(\propto \gamma^\mu)$ e può essere omesso. Nel primo termine utilizziamo l'equazione di Dirac usando a sinistra $\not{p} = \not{p}' - \not{q} = m - \not{q}$ ed a destra $\not{p}' = \not{p} + \not{q} = m + \not{q}$:

$$\begin{aligned} X &= \bar{u}(p')\left[-2\left(m(1-z) - \not{q}(1-\frac{z}{2})\right)\gamma^\mu\left(m(1-z) + \not{q}(1-\frac{z}{2})\right) + 4m(1-z)(p+p')^\mu\right]u(p) + (\propto \gamma^\mu) \\ &= \bar{u}(p')\left[4m(1-z)(1-\frac{z}{2})\frac{1}{2}[\not{q}, \gamma^\mu] + 4m(1-z)(p+p')^\mu\right]u(p) + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu) \end{aligned}$$

e usando la relazione $[\not{q}, \gamma^\mu] = 2i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$, e l'identità di Gordon, otteniamo

$$\bar{u}\, N^\mu(\frac{z(p+p')}{2}, p, p')u = -2m\, z(1-z)\bar{u}(p')i\sigma^{\mu\nu}q_\nu u(p) + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu) \tag{14.18}$$

Infine, sostituendo nella (14.17), ed eseguendo l'integrale su z,

$$\bar{u}e^2\Lambda^\mu(p', p)u = \frac{e^2}{8\pi^2}\, \bar{u}\, \frac{1}{2m}\sigma^{\mu\nu}q_\nu\, u + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu) \tag{14.19}$$

Paragonando con la eq. (14.5) otteniamo che

$$e^2 F_2(0) = \frac{e^2}{8\pi^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \tag{14.20}$$

Quindi all'ordine α il momento magnetico di un leptone è $1 + \frac{\alpha}{2\pi}$ magnetoni di Bohr.

Bibliografia

[1] Meccanica Quantistica Relativistica, Appunti AA 2009-2010.

[2] F. Mandl e G. Shaw, *Quantum Field Theory*, Wiley, 1984.

[3] R. P. Feynman e A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, 1965.

[4] P. A. M. Dirac, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion, Band 3, Heft 1 (1933), Ristampato in *Quantum Electrodynamics*, a cura di J. Schwinger, Dover, 1958.

[5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, 1994.

[6] J.D.Bjorken, S.Drell, op. cit. l Cap. 2

[7] Claude Itzykson e Jean-Bernard Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1980.

[8] L.Landau, E.Lifchitz, Mecanique Quantique, Theorie Non Relativiste, ed. Mir, 1967, Cap,1.

[9] L. Maiani, Interazioni Elettrodeboli, AA. 2009-2010

[10] H. Lehman, K. Symanzik, W. Zimmermann, *Nuovo Cimento* **1**, 205 (1955).

[11] Michael E. Peskin e Daniel V Schroeder *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books, 1995.

[12] P. A. M. Dirac, *Quantum Mechanics*, Cap. VI, Oxford University Press.

[13] L Landau e E. Lifschitz, *Teoria Quantistica Relativistica*, Editori Riuniti.

[14] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol.II, Cambridge University Press, 1995.

[15] V. N. Gribov, Nucl. Phys. **B 139** (1978) 1.

[16] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol.I, Cambridge University Press, 1995.

[17] H. Jeffreys e M. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, 1972

[18] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathemathical Functions*, Dover, 1972.

Appendice A

Ampiezza di Transizione in assenza di Potenziale

Calcoliamo l'elemento di matrice $\langle q_2|e^{-i\frac{Tp^2}{2m}}|q_1\rangle$. Assumiamo che gli autostati di q e di p siano normalizzati in modo che

$$\langle q'|q\rangle = \delta(q'-q), \qquad \int dq|q\rangle\langle q| = \mathbf{1}$$

Se normalizziamo gli stati $|p\rangle$ in modo che

$$\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ipq} \qquad \text{troviamo che}$$

$$\langle p'|p\rangle = \delta(p'-p), \qquad \int dp|p\rangle\langle p| = \mathbf{1}$$

Avremo quindi

$$\begin{aligned}\langle q_2|e^{-i\frac{Tp^2}{2m}}|q_1\rangle &= \int dk\langle q_2|e^{-i\frac{Tp^2}{2m}}|k\rangle\langle k|q_1\rangle \\ &= \int dk e^{-i\frac{Tk^2}{2m}}\langle q_2|k\rangle\langle k|q_1\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi}\int dk e^{-i\frac{Tk^2}{2m}}e^{i(q_2-q_1)k}\end{aligned}$$

l'integrale si semplifica costruendo un quadrato perfetto all'esponente,

$$= \frac{1}{2\pi}e^{i\frac{m(q_2-q_1)^2}{2T}}\int dk e^{-i\frac{T(k-k_{\rm cl})^2}{2m}}; \qquad k_{\rm cl} = \frac{m(q_2-q_1)}{T}$$

e converge nel semipiano complesso inferiore di T, $\mathrm{Im}\,T < 0$. Per valori reali di T possiamo definirlo, con un cambiamento di variabili, $k' = k - k_{\rm cl}$, come

$$\int dk' e^{-i\frac{T(k')^2}{2m}} = \lim_{\eta\to 0^+}\int dk' e^{-i\frac{(T-i\eta)(k')^2}{2m}} = \sqrt{\frac{2\pi m}{iT}}$$

dove la notazione $\eta \to 0^+$ indica che il limite va preso partendo da valori positivi di η. La necessità di passare al limite verso valori reali del tempo partendo da valori complessi nel semipiano inferiore, si riflette come vedremo nella famosa "regola dell'$i\epsilon$" nel calcolo dei propagatori e dei diagrammi di Feynman. Sostituendo nella espressione precedente si ottiene il risultato della eq. (2.3).

Appendice B

Grafici connessi

Vogliamo dimostrare che il funzionale generatore $Z[J]$ può essere scritto come

$$Z[J] = \exp(W[J]) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} W[J]^k \tag{B.1}$$

dove $W[J]$ è la somma di tutti i diagrammi connessi. La dimostrazione si applica egualmente allo sviluppo perturbativo di qualsiasi teoria di campo.

Possiamo scrivere la $Z[J]$ in termini dell'operatore "vertice" V,

$$Z[J] = e^V Z^0[J] = \sum \frac{V^k}{k!} Z^0[J] \tag{B.2}$$

dove l'operatore V si ottiene direttamente dal lagrangiano di interazione,

$$V = i \int d^4x \mathscr{L}^1 \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \tag{B.3}$$

e dipende dalla teoria. Nella $\lambda\phi^4$ (vedi eq. (6.5)) questo operatore è

$$V = \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4$$

e in teorie diverse può prendere una forma più complessa, eventualmente con più funzioni J in corrispondenza dei diversi campi. $Z^0[J]$, il funzionale generatore della teoria libera, può essere scritto come

$$Z^0[J] = \exp W^0[J] \tag{B.4}$$

dove $W^0[J]$ è la somma dei diagrammi connessi privi di vertici. Nella teoria $\lambda\phi^4$ l'unico diagramma di questo tipo è il diagramma (d) della figura 6.2, e troviamo (vedi eq. 6.4)

$$W_0[J] = \frac{-i}{2} \iint d^4x\, d^4y\, J(x)\, \Delta_F(x-y)\, J(y) \tag{B.5}$$

Ciascuna derivata funzionale della Z (vedi ad esempio le eq. (6.6), (6.7)) contiene un fattore $Z^0[J]$, quindi possiamo scrivere

$$Z[J] = \tilde{Z}[J]\, Z^0[J] = \tilde{Z}[J]\, \exp(W^0[J]) \tag{B.6}$$

e notare che la $\tilde{Z}[J]$ si può esprimere mediante la somma di tutti quei diagrammi G, connessi e non connessi, *in cui ciascuna componente connessa ha almeno un vertice*

$$\tilde{Z} = 1 + \sum G \tag{B.7}$$

Per dimostrare la (B.1) occorre quindi dimostrare che

$$\tilde{Z} = \exp(\tilde{W}[J]) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{W}[J]^n \tag{B.8}$$

dove $\tilde{W}[J]$ è la somma di tutti i diagrammi *connessi, con uno o più vertici*, che immaginiamo ordinati in una lista $\{D_1, D_2, \ldots\}$:

$$\tilde{W}[J] = \sum_{i=1}^{\infty} D_i[J] \tag{B.9}$$

La lista potrebbe cominciare con i diagrammi con un $v_i = 1$, poi quelli con $v_i = 2$ e via di seguito. Possiamo quindi scrivere

$$\exp(\tilde{W}[J]) = e^{D_1} e^{D_2} \cdots e^{D_k} \cdots = \sum_{n_1, n_2 \ldots n_k \ldots} \frac{D_1^{n_1}}{n_1!} \cdots \frac{D_k^{n_k}}{n_k!} \cdots \tag{B.10}$$

Per ciascun diagramma D_i indicheremo con v_i il numero dei vertici in esso contenuti. Il termine $V^k/k!$ nella (B.2) produrrà i diagrammi connessi con k vertici (un sottoinsieme della lista $\{D_1, D_2, \ldots\}$) oltre a diagrammi non connessi che indicheremo con G

$$\frac{V^k}{k!} Z^0[J] = \left[\sum_i D_i\, \delta_{k\, v_i} + (\text{diagrammi } G \text{ non connessi}) \right] Z^0[J] \tag{B.11}$$

Consideriamo ora un diagramma G non connesso che contiene n_1 copie del diagramma connesso D_1, n_2 copie di D_2, e così via, quindi

$$G = K_G\, (D_1)^{n_1} (D_2)^{n_2} \cdots \tag{B.12}$$

dove K_G è un coefficiente combinatorio. Per dimostrare la (B.8) dobbiamo dimostrare che K_G è lo stesso coefficiente con cui questo termine compare nella (B.10), cioé

$$K_G = \frac{1}{n_1!} \cdots \frac{1}{n_k!} \cdots \tag{B.13}$$

Per calcolare K_G dobbiamo partire dalla (B.2). Se $v_i \geq 1$ è il numero dei vertici nel grafico D_i, il numero totale delle componenti e dei vertici in G, n e v, saranno rispettivamente[1]

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \qquad\qquad v = \sum_{i=1}^{\infty} n_i v_i$$

[1]Notiamo che anche se le somme sono estese sino ad infinito, stiamo considerando diagrammi con un numero finito di componenti, per cui solo alcune n_k saranno differenti da zero.

quindi G sarà prodotto dal termine $V^v/v!$ nella (B.2). In questo termine dovremo scegliere i v_1 fattori V che producono ciascuna delle n_1 copie di D_1, i v_2 fattori che producono le copie di D_2 e così via (vedi la B.11). Questa scelta si può fare in

$$\frac{1}{\prod(n_i!)}\frac{v!}{\prod(v_i!)^{n_i}}$$

modi diversi. Infatti ci sono $v!$ permutazioni dei fattori V, ma questo numero va diviso per il numero di permutazioni delle V che contribuiscono a ciascuna componente connessa di G, e quindi dividiamo per $\prod(v_i!)^{n_i}$, e per il numero di permutazioni tra gli n_1 gruppi che danno le n_1 copie di D_1 e cosi via, e quindi dividiamo per $\prod(n_i!)$. Il fattore $v!$ si semplifica con il fattore $1/v!$ che accompagna il termine V^v nello sviluppo della $Z[J]$, eq. (B.2). Analogamente ciascuno dei fattori $v_i!$ a denominatore si combinano (vedi la eq. B.11) con un V^{v_i} a generare le componenti D_i.

In conclusione il valore del diagramma G, composto da n_1 copie di D_1, n_2 copie di D_2, e così via, è dato da

$$G[J] = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{(D_i[J])^{n_i}}{n_i!}. \tag{B.14}$$

Il coefficiente K_G è dunque quello della (B.13), e questo conchiude la dimostrazione.

Appendice C

Invarianza di Lorentz e stati a una particella.

Nella sezione 3.4 abbiamo visto che gli elementi di matrice di un campo scalare tra vuoto e stati ad una particella sono dati, nella teoria senza interazioni, da espressioni del tipo della eq. (3.74) in cui appare un caretteristico fattore $1/\sqrt{2\omega}$. In questa appendice vogliamo dimostrare che questo fattore è determinato dalla invarianza del campo ϕ sotto trasformazioni di Lorentz, e dal fatto che abbiamo scelto per gli stati a una particella la normalizzazione

$$\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \tag{C.1}$$

Anche in presenza di interazioni la forma dell'elemento di matrice tra vuoto e stati a una particella è interamente determinato a meno di una costante moltiplicativa, detta *costante di rinormalizzazione*. Nel caso di un campo scalare reale, deve essere

$$\langle 0 | \phi(\vec{x}, t) | \vec{p} \rangle = \frac{\sqrt{Z}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_p}} e^{i(\vec{p}\vec{x} - \omega_p t_x)} \tag{C.2}$$

Questo risultato è utilizzato nella sezione **??** per ottenere la forma generale della funzione di Green a due punti e nella sezione **??** per stabilire la relazione tra funzioni di Green e elementi di matrice S. Notiamo che la dipendenza da $\vec{x}, t$ è fissata dal valore dell'impulso e dell'energia della particella, quindi basterà verificare la (C.3) per $\vec{x} = t = 0$,

$$\langle 0 | \phi(0) | \vec{p} \rangle = \frac{\sqrt{Z}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_p}} \tag{C.3}$$

Per $\vec{p} = 0$ la (C.3) può essere considerata una definizione della *costante di rinormalizzazione* Z,

$$\langle 0 | \phi(0) | \vec{p} = 0 \rangle = \frac{\sqrt{Z}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2m}} \tag{C.4}$$

e resta solo da dimostrare che una trasformazione di Lorentz porta dalla (C.4) alla (C.3) Consideriamo una trasformazione di Lorentx di velocità v lungo l'asse x (un *boost*) applicata al quadrivettore $q \equiv \{E, \vec{q}\}$,

$$q'_x = (Ev + q_x)/\sqrt{1 - v^2}; \qquad q'_y = q_y; \qquad q'_z = q_z; \qquad E' = (E + q_x v)/\sqrt{1 - v^2} \tag{C.5}$$

che sarà rappresentata da una trasformazione unitaria $\mathbf{B}_v$ sullo spazio di Hilbert. L'azione di $\mathbf{B}_v$ sugli stati a una particella deve essere data da

$$\mathbf{B}_v|\vec{q}\rangle = h(\vec{q},\vec{q}\,')|\vec{q}\,'\rangle \tag{C.6}$$

mentro lo stato vuoto $|0\rangle$ deve essere invariante,

$$\mathbf{B}_v|0\rangle = |0\rangle \tag{C.7}$$

Partendo da un impulso nullo si otterrà un impulso $p = \{\omega_p = m/\sqrt{1-v^2}, \vec{p}\}$, e possiamo scrivere

$$\mathbf{B}_v|\vec{p}=0\rangle = k(p)|\vec{p}\rangle; \qquad \big(k(p) \equiv h(0,\vec{p})\big) \tag{C.8}$$

l'invarianza per rotazioni garantisce che $k(p)$ dipenda solo dal modulo di $\vec{p}$, e possiamo scegliere la fase dello stato $|\vec{p}\rangle$ in modo che $k(p)$ sia reale e positiva.

Il valore di $k(p)$ si determina nel modo seguente (vedi eq. C.1)

$$\delta^3(\vec{q}) = \langle\vec{q}|\vec{p}=0\rangle = \langle\vec{q}|\mathbf{B}_v^\dagger\mathbf{B}_v|\vec{p}=0\rangle = h^*(\vec{q},\vec{q}\,')k(p)\langle\vec{q}\,'|\vec{p}\rangle = k^2(p)\delta^3(\vec{q}\,'-\vec{p})$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la prima $\delta^3(\vec{q})$, che garantisce che $\vec{q}=0$, e quindi abbiamo sostituito $h(\vec{q},\vec{q}\,')$ con $h(0,\vec{p}) = k(p)$ che è reale. Il $\vec{q}\,'$ che appare come argomento dell'ultima δ è funzione di $\vec{q}$ tramite la trasformazione di Lorentz, quindi

$$\delta^3(\vec{q}) = k^2(p)\delta^3(\vec{q}\,'(\vec{q})-\vec{p}) = k^2(p)\left|\frac{\partial q_i'}{\partial q_k}\right|^{-1}_{\vec{q}=0}\delta^3(\vec{q})$$

e con un semplice calcolo dello jacobiano della trasformazione di Lorentz,

$$k^2(p) = \left|\frac{\partial q_i'}{\partial q_k}\right|_{\vec{q}=0} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\omega_p}{m}$$

e la (C.8) si può riscrivere

$$\mathbf{B}_v|\vec{p}=0\rangle = \sqrt{\frac{\omega_p}{m}}|\vec{p}\rangle \tag{C.9}$$

Dato che $\phi(x)$ è un campo scalare deve essere

$$\mathbf{B}_v^\dagger\phi(0)\mathbf{B}_v = \phi(0) \tag{C.10}$$

da cui

$$\langle 0|\phi(0)|\vec{p}=0\rangle = \langle 0|\mathbf{B}_v^\dagger\phi(0)\mathbf{B}_v|\vec{p}=0\rangle = \sqrt{\frac{\omega_p}{m}}\langle 0|\phi(0)|\vec{p}\rangle$$

e quindi dalla (C.4) si ottiene la (C.3) e, per valori arbitrari di $\vec{x}$, t, la (C.2).

Appendice D

Integrali

D.1 Integrazione in D dimensioni

Vogliamo derivare il seguente risultato per integrali che compaiono in teoria delle perturbazioni, citato senza dimostrazione nel Mandl e Shaw, [2], eq. (MS-10.23):

$$I(s,D,n) = \int \frac{d^D k}{[k^2 - s + i\epsilon]^n} = i\pi^{D/2}(-1)^n \frac{\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}} \tag{D.1}$$

Gli integrali si estendono su uno spazio con D dimensioni, $k = \{k_0, k_1, ...k_{D-1}\}$, con metrica di Minkowski: $k^2 = k_0^2 - k_1^2 .... - k_{D-1}^2$. Assumeremo che s sia reale[1] e positivo.

La funzione Γ è definita da

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dy\, y^{x-1} e^{-y}; \qquad \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1); \qquad \Gamma(n) = (n-1)! \tag{D.2}$$

Nella realtà siamo interessati al caso $D = 4$, ma vogliamo anche considerare una continuazione analitica a valori arbitrari di D definita dal risultato nella (D.1) che è una funzione analitica di D, a parte poli in $D/2 = n, n+1, \ldots$.

Infatti $\Gamma(x)$ è analitica per $\Re(x) > 0$, e può essere continuata a valori $\Re(x) \leq 0$ usando la relazione $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/(x)$, con la quale si dimostra facilmente che $\Gamma(x)$ è analitica in tutto il piano complesso con l'eccezione di poli per $x = 0, x = -1, \cdots$. Ad esempio, partendo dallo sviluppo in serie di Taylor nei dintorni di $x = 1$, dove $\Gamma(x)$ è analitica (vedi ad esempio il manuale di Abramowitz e Stegun [18]),

$$\Gamma(1+\eta) = 1 + \gamma\eta + \mathcal{O}(\eta^2)$$

dove γ è la costante di Eulero, $\gamma = 0.5772\ldots$, otteniamo, nei dintorni di $x = 0$

$$\Gamma(\eta) = \frac{1}{\eta} + \gamma + \mathcal{O}(\eta)$$

Per ottenere il risultato in (D.1) conviene prima di tutto ruotare il cammino di integrazione nella variabile k_0, dalla posizione orizzontale a quella verticale. Se si ruota in senso antiorario non si incontrano

[1] Il valore di $I(t,D,n)$ per valori complessi di s, qualora interessi, può essere ottenuto per continuazione analitica del risultato ottenuto.

singolarità, come mostrato dalla figura D.1. Questa operazione è detta rotazione di Wick. Dopo la rotazione possiamo passare al limite $\epsilon \to 0$ dato che le due singolarità in $k_0 = \pm\omega = \pm\sqrt{s + k_1^2 .... + k_{D-1}^2}$ sono distanti dal nuovo cammino di integrazione. Possiamo quindi porre: $k_0 = i k_D$ e $d k_0 = i\, d k_D$, e

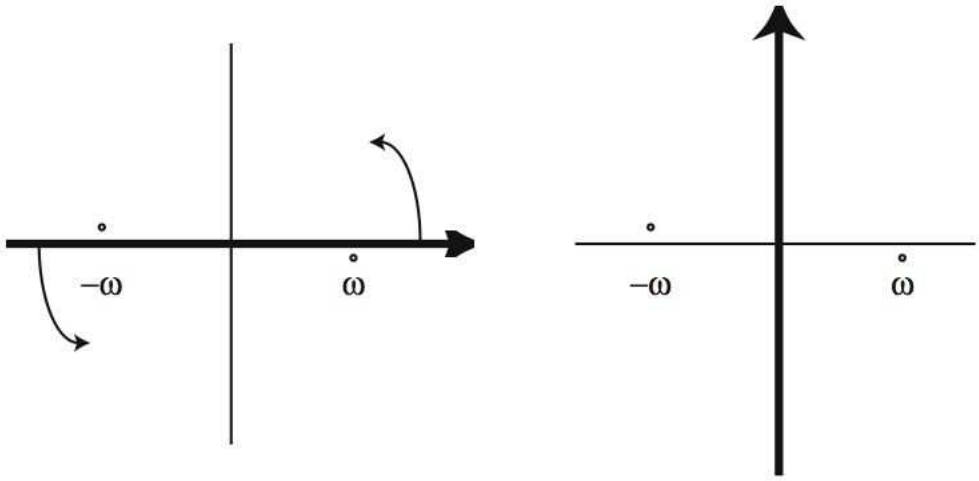


Figura D.1: La rotazione di Wick

possiamo riscrivere l'integrale come

$$I(t, D, n) = i(-1)^n \int \frac{d^D p}{[p^2 + s]^n} \tag{D.3}$$

dove $p = \{k_1, \dots k_{D-1}, k_D\}$ è un vettore a D dimensioni con metrica euclidea, $p^2 = k_1^2 + k_2^2 \dots + k_D^2$. Per calcolare l'integrale passiamo a coordinate polari nello spazio a D dimensioni. Dato che l'integrando non dipende dalle variabili angolari, queste possono essere integrate direttamente, e con il cambiamento di variabili $x = p^2/s$, $p\, dp = s\, dx/2$ otteniamo:

$$I(t, D, n) = i(-1)^n \int \frac{p^{D-1} dp\, d\Omega_D}{[p^2 + s]^n} = i(-1)^n \frac{\Omega_D}{2 s^{n-D/2}} \int_0^\infty \frac{x^{(D-2)/2} dx}{(1+x)^n} \tag{D.4}$$

L'integrale è convergente in $x \to \infty$ se $n > D/2$. L'angolo solido in D dimensioni è dato[2] da

$$\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \tag{D.5}$$

Che riproduce i noti risultati: $\Omega_2 = 2\pi$ e, dato che $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}/2$, $\Omega_3 = 4\pi$. In quattro dimensioni si ottiene $\Omega_4 = 2\pi^2$. L'integrale residuo si esprime mediante la funzione Beta (Vedi [17],

[2] Come si dimostra facilmente considerando un integrale gaussiano.

cap. 15 per una dimostrazione, ma usiamo la notazione di [18]),

$$B(z,w) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1}dx}{(1+x)^{z+w}} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \tag{D.6}$$

e ritroviamo infine il risultato della (D.1).

D.2 Parametri di Feynman

Consideriamo l'integrale:

$$I(p) = \int d^D k \, \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \, \frac{1}{(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{D.7}$$

Possiamo esprimere l' integrale in termini di un'integrazione parametrica su una variabile reale α ($0 \le \alpha \le 1$) con un procedimento introdotto da R. P. Feynman.

Si parte dall'identità:

$$\frac{1}{D_1 D_2} = \int_0^1 d\alpha \frac{1}{[\alpha D_1 + (1-\alpha) D_2]^2} \tag{D.8}$$

che si dimostra direttamente calcolando il secondo membro:

$$\int_0^1 d\alpha \frac{1}{[\alpha D_1 + (1-\alpha) D_2]^2} = \int_0^1 d\alpha \frac{1}{[\alpha(D_1 - D_2) + D_2]^2} = \frac{1}{D_1 - D_2}\left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1}\right) = \frac{1}{D_1 D_2} \tag{D.9}$$

Applicando (D.8), troviamo:

$$\begin{aligned} I(p) &= \int_0^1 d\alpha \int d^D k \, \frac{1}{\left[\alpha(k-p)^2 + (1-\alpha)k^2 - m^2\right]^2} = \int_0^1 d\alpha \int d^D k \, \frac{1}{\left[k^2 - 2\alpha k \cdot p + \alpha p^2 - m^2\right]^2} = \\ &= \int_0^1 d\alpha \int d^D k \, \frac{1}{\left[(k-\alpha p)^2 + \alpha(1-\alpha)p^2 - m^2\right]^2} \end{aligned} \tag{D.10}$$

Dopo il cambiamento di variabile: $k - \alpha p = k'$, l'integrale (D.10) prende la forma in (D.1) con:

$$s = m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2; \;\; n = 2 \tag{D.11}$$

da cui:

$$I(p) = i\pi^{D/2}\Gamma(2 - D/2) \int_0^1 d\alpha \frac{1}{\left[m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2\right]^{2-D/2}} \tag{D.12}$$

Poniamo adesso $D = 4 - \eta$, con l'idea di passare al limite $\eta \to 0^+$. Otteniamo:

$$\begin{aligned} I(p) &= i\pi^{2-\eta/2}\Gamma(\eta/2) \int_0^1 d\alpha \; e^{-\frac{\eta}{2}\ln\left[m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2\right]} = \\ &= i\pi^2 \left\{ \frac{2}{\eta} - \ln\pi - \int_0^1 d\alpha \ln\left[m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2\right] + \mathcal{O}(\eta) \right\} = \\ &= I(0) - i\pi^2 \int_0^1 d\alpha \; \ln\left[1 - \alpha(1-\alpha)\frac{p^2}{m^2}\right] \end{aligned} \tag{D.13}$$

con $I(0)$ una costante, divergente nel limite $\eta \to 0^+$.

D.3 Calcolo del tensore di polarizzazione del vuoto a 1 loop

Partiamo dalla formula (12.4) che fornisce il tensore di polarizzazione del vuoto nella regolarizzazione dimensionale:

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^D p \frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu (\not{p} + m)\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m)\right]}{\left((p)^2 - m^2 + i\epsilon\right)\left((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon\right)} \tag{D.14}$$

Usando la parametrizzazione di Feynman, possiamo riscrivere la (D.14):

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu}(k) &= \int_0^1 d\alpha \left[\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^D p \frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu (\not{p} + m)\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m)\right]}{\left[(p+\alpha k)^2 - m^2 + \alpha(1-\alpha)k^2 + i\epsilon\right]^2}\right] = \\ &= \int_0^1 d\alpha \left[\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^D p \frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu (\not{p} - \alpha\not{k} + m)\gamma^\nu (\not{p} + (1-\alpha)\not{k} + m)\right]}{\left[(p)^2 - m^2 + \alpha(1-\alpha)k^2 + i\epsilon\right]^2}\right]\end{aligned} \tag{D.15}$$

dove abbiamo cambiato variabile di integrazione ponendo $p + \alpha k = p'$, che continuiamo, per semplicità di notazione ad indicare con p.

La traccia al numeratore si calcola con le solite regole, visto che, in generica dimensione D, valgono ancora le regole dell' algebra di Dirac:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g^{\mu\nu} \tag{D.16}$$

con:

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = D \tag{D.17}$$

Poniamo inoltre, nello spazio degli indici delle matrici gamma:

$$\mathrm{Tr}\,(1) = f(D); \quad f(4) = 4 \tag{D.18}$$

(come vedremo, non serve sapere altro di f).

Con queste regole, la traccia al numeratore della (D.15) ci dà:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu (\not{p} - \alpha\not{k} + m)\gamma^\nu (\not{p} + (1-\alpha)\not{k} + m)\right] = \\ &= f(D)\left[2p^\alpha p^\beta - g^{\alpha\beta} p^2 - 2\alpha(1-\alpha)k^\alpha k^\beta + g^{\alpha\beta}\left[\alpha(1-\alpha)k^2 + m^2\right]\right\} + \\ &+ (\text{termini lineari in } p)\end{aligned} \tag{D.19}$$

Inserendo il risultato della traccia nella (D.15), i termini lineari in p si integrano a zero, ed incontriamo due nuovi integrali, che si riconducono alla formula (D.1) come segue:

$$I_2 = \int d^D p \frac{p^2}{[p^2 - s + i\epsilon]^2} = I(s, D, 1) + sI(s, D, 2) \tag{D.20}$$

$$I_2^{\alpha\beta} = \int d^D p \frac{p^\alpha p^\beta}{[p^2 - s + i\epsilon]^2} = \frac{g^{\alpha\beta}}{D} I_2 \tag{D.21}$$

L'ultimo risultato si ottiene dal fatto che $I_2^{\alpha\beta}$ deve essere proporzionale a $g^{\alpha\beta}$ ed usando la (D.17).

Mettendo tutto insieme, si ottiene:

$$\int d^D p \frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu(\not{p}-\alpha\not{k}+m)\gamma^\nu(\not{p}+(1-\alpha)\not{k}+m)\right]}{\left[(p)^2-m^2+\alpha(1-\alpha)k^2+i\epsilon\right]^2} = \frac{2-D}{D} g^{\alpha\beta}\left(I(s,D,1)+sI(s,D,2)\right)+$$
$$+g^{\alpha\beta}\left(m^2+\alpha(1-\alpha)k^2\right)I(s,D,2)-2\alpha(1-\alpha)k^\alpha k^\beta I(s,D,2) \tag{D.22}$$

Usando la relazione (D.2) otteniamo:

$$\frac{2-D}{D} I(s,D,1) = -\frac{2s}{D} I(s,D,2) \tag{D.23}$$

e, infine:

$$\Pi^{\alpha\beta} = \int_0^1 d\alpha \left[\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^D p \frac{\mathrm{Tr}\left[\gamma^\alpha(\not{p}-\alpha\not{k}+m)\gamma^\beta(\not{p}+(1-\alpha)\not{k}+m)\right]}{\left[(p)^2-m^2+\alpha(1-\alpha)k^2+i\epsilon\right]^2}\right] =$$
$$= \left[-\frac{f(D)}{2^3\pi^{4-D/2}}\int_0^1 d\alpha\, \alpha(1-\alpha)\frac{\Gamma(2-D/2)}{s^{2-D/2}}\right]\left(g^{\alpha\beta}k^2-k^\alpha k^\beta\right) \tag{D.24}$$

con: $s = m^2-\alpha(1-\alpha)k^2$. Da notare che abbiamo ottenuto la struttura richiesta dalla (12.5), come conseguenza del fatto che la regolarizzazione dimensionale rispetta l'invarianza per trasformazioni di gauge.

Confrontando con le definizioni date in (12.1) e (12.7), ed usando le formule (D.13) otteniamo [3]:

$$e_0^2\Pi_c(k^2) = \left(\frac{e_0^2}{2\pi^2}\right)\int_0^1 d\alpha\, \alpha(1-\alpha)\, \ln\left[1-\alpha(1-\alpha)\frac{k^2}{m^2}\right] \tag{D.25}$$

In conclusione, ripartendo dalla (12.2):

$$iD_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon} \to \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon} + \frac{-ig_{\mu\alpha}}{k^2+i\epsilon}\, ie_0^2\Pi^{\alpha\beta}(k)\frac{-ig_{\beta\nu}}{k^2+i\epsilon} \tag{D.26}$$

con:

$$\Pi^{\alpha\beta}(k) = g^{\alpha\beta}A(k^2)+k^\alpha k^\beta B(k^2);$$
$$A(k^2) = k^2A'(0)+k^2\Pi_c(k^2) \tag{D.27}$$

otteniamo:

$$iD_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}Z_3}{k^2+i\epsilon}\left[1+e^2\Pi_c(k)\right];$$
$$e^2\Pi_c = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 d\alpha\, \alpha(1-\alpha)\, \ln\left[1-\alpha(1-\alpha)\frac{k^2}{m^2}\right] \tag{D.28}$$

[3] la formula (D.13) mostra che il termine proporzionale a η nello sviluppo di termini come $\pi^{D/2}$ contribuisce al risultato finale con un termine costante, che si ingloba nel valore a $k=0$ e non influenza il valore di $\Pi_c(k)$; un simile ragionamento vale per la funzione $f(D)$, di cui quindi conta solo il valore per $D=4$, come avevamo anticipato.

A questo ordine della teoria delle perturbazioni possiamo identificare la *carica nuda*, e_0 con la *carica fisica* o rinormalizzata, e. Nella (D.25) abbiamo evidenziato, come si fa di solito, la combinazione:

$$(\frac{e^2}{4\pi}) = \alpha = \text{costante di struttura fina} \simeq \frac{1}{137} \tag{D.29}$$

Appendice E

Il metodo di deWitt-Faddeev-Popov.

Per semplificare le notazioni, indichiamo con $f(A(x))$, o semplicemente $f(A)$, la funzione di A^μ che fissa la gauge, ad esempio:

$$f(A(x)) = \partial_\mu A^\mu(x), \quad \text{(gauge di Lorentz)} \tag{E.1}$$

e con $B[f(A)]$ un funzionale di f che introduce un fattore di convergenza lungo le orbite di gauge : $A^\mu = A_0^\mu + \partial^\mu \Lambda$, con $f(A_0) = 0$, Fig. E.1.

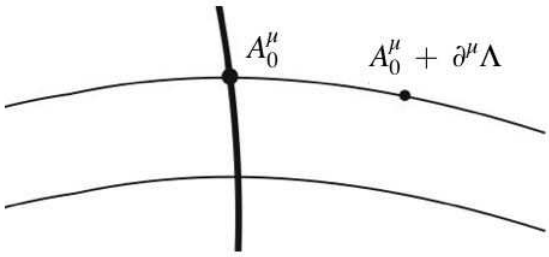


Figura E.1: Spazio delle funzioni $A^\mu(x)$. Sono indicate le traiettorie composte da cammini connessi da trasformazioni di gauge (linee orizzontali) . Lungo le coordinate ortogonali alle traiettorie di gauge (linea verticale) troviamo cammini fisicamente distinti.

Per restringere l' integrazione alla linea verticale in Fig. E.1, potremmo usare una funzione delta:

$$B[f] = \delta[f(A)] \tag{E.2}$$

Per una trattazione piú generale, conviene adottare il funzionale gaussiano:

$$B[f] = e^{\frac{-i}{2\alpha}\int d^4x\, f(x)^2} = e^{\frac{-i}{2\alpha}\int d^4x\, (\partial_\mu A^\mu)^2} \tag{E.3}$$

(la funzione delta si puó riottenere dalla (E.3) passando al limite $\alpha \to 0$).

Indichiamo inoltre con A^Λ il potenziale trasformato di gauge di A con una trasformazione Λ:

$$(A^\Lambda)_\mu = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \tag{E.4}$$

Introduciamo infine il determinante jacobiano:

$$\Delta[A] = det\left[\frac{\delta\, f(A^{\lambda}(x))}{\delta\lambda(y)}|_{\lambda=0}\right] = det\left[K_{FP}(x,y)\right] \tag{E.5}$$

Il determinante nella (E.5) è comunemente indicato come determinante di Faddeev-Popov.

Possiamo adesso dimostrare il:

Teorema1. L' integrale funzionale:

$$\int \mathscr{D}[\Lambda]\ \Delta[A^{\Lambda}]B[f(A^{\Lambda})] = \mathscr{C} \tag{E.6}$$

è una costante indipendente dal valore di A (ma dipendente dalla particolare scelta di f e di $B[f]$).

Dim. Usando la trasformazione (E.4) due volte, possiamo scrivere:

$$[(A^{\Lambda})^{\lambda}]_{\mu} = (A^{\Lambda})_{\mu} + \partial_{\mu}\lambda = A_{\mu} + \partial_{\mu}\Lambda + \partial_{\mu}\lambda = A_{\mu} + \partial_{\mu}(\Lambda+\lambda) = (A^{\Lambda+\lambda})_{\mu} \tag{E.7}$$

e quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} det\left[\frac{\delta\, f((A^{\Lambda})^{\lambda}(x))}{\delta\lambda(y)}|_{\lambda=0}\right] &= det\left[\frac{\delta\, f(A^{\Lambda+\lambda)}}{\delta\lambda(y)}|_{\lambda=0}\right] = \\ &= det\left[\frac{\delta\, f(A^{\Lambda}(x))}{\delta\Lambda(y)}\right] \end{aligned} \tag{E.8}$$

e quindi la (E.6) diventa:

$$\mathscr{C} = \int \mathscr{D}[\Lambda]\ det\left[\frac{\delta\, f(A^{\Lambda}(x))}{\delta\Lambda(y)}\right] B[f(A^{\Lambda})] = \int \mathscr{D}[f]\ B[f] = \text{indipendente da A} \tag{E.9}$$

Quello che succede è che possiamo parametrizzare l' orbita di gauge nella Fig. 4.1 con la funzione f invece che con Λ, e lo jacobiano nella (E.6) trasforma l' integrazione funzionale su Λ in una integrazione su f con un risultato che adesso non dipende piú dal valore di A.

Nota Affinché il cambiamento di variabile sia valido occorre che la relazione tra f e Λ sia univoca. Questo implica che, al variare di Λ il punto sull' orbita di gauge nella Fig. 4.1 non ritorni mai allo stesso valore di A. In altri termini, non devono esistere soluzioni multiple dell' equazione:

$$f(A_0) = \partial_{\mu}A_0^{\mu} = 0 \tag{E.10}$$

La possibilitá di soluzioni multiple della condizione di gauge, per teorie di gauge non abeliane, è stata considerata da V. N. Gribov [15] e le eventuali soluzioni diverse prendono il nome di *copie di Gribov* che si pensa possano giocare un ruolo nella teoria del confinamento dei quark. Noi resteremo nell' ambito della teoria delle perturbazioni in cui ci muoviamo in un intorno infinitesimo di A_0, dove non si incontrano copie di Gribov, e possiamo quindi ignorare il problema.

Sulla base del risultato precedente possiamo dimostrare il seguente

Teorema 2. Se $\mathscr{O}[A]$ è un funzionale invariante di gauge, vale la seguente formula ($\mathscr{C}$ è la costante introdotta nella (E.9)):

$$\mathscr{C}\int \mathscr{D}[A_\mu]\; e^{iS[A]}\mathscr{O}[A] = \text{Cost}\cdot\int \mathscr{D}[A_\mu]\; e^{iS[A]}\mathscr{O}[A]\Delta[A]B[f(A)] \tag{E.11}$$

dove $S[A]$ è l' azione di Maxwell e Cost una costante inessenziale.

Dim. Scriviamo esplicitamente la costante $\mathscr{C}$ come integrale funzionale sull' orbita di gauge, usando la (E.9) e usiamo l' invarianza di gauge dell' azione di Maxwell e di $\mathscr{O}[A]$:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{C}\int \mathscr{D}[A_\mu]\; e^{iS[A]}\,\mathscr{O}[A] = \int \mathscr{D}[\Lambda]\int \mathscr{D}[A_\mu]\; e^{iS[A]}\,\mathscr{O}[A]\;\Delta[A^\Lambda]B[f(A^\Lambda)] = \\
&= \int \mathscr{D}[\Lambda]\int \mathscr{D}[A_\mu]\; e^{iS[A^\Lambda]}\,\mathscr{O}[A^\Lambda]\;\Delta[A^\Lambda]B[f(A^\Lambda)] = \\
&= \int \mathscr{D}[\Lambda]\int \mathscr{D}[A^\Lambda_\mu]\; e^{iS[A^\Lambda]}\,\mathscr{O}[A^\Lambda]\;\Delta[A^\Lambda]B[f(A^\Lambda)]
\end{aligned} \tag{E.12}$$

dove abbiamo ulteriormente usato l' invarianza di gauge della misura su A (il cambiamento A→A^Λ corrisponde ad una traslazione nello spazio delle funzioni di x). Adesso la sostituzione A^Λ →A nell' integrale su A equivale ad un (inessenziale) cambiamento di nome alla variabile di integrazione e quindi dalla (E.12) otteniamo la (E.11), come richiesto, con Cost=$\left[\int \mathscr{D}[\Lambda]\right]$.

In conclusione, se consideriemo l' elemento di matrice sul vuoto dell' osservabile $\mathscr{O}[A]$ e semplifichiamo costanti comuni al numeratore e al denominatore, otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\mathscr{O}[A]|0\rangle = \frac{\int \mathscr{D}[A]\; e^{iS[A]}\,\mathscr{O}[A]}{\int \mathscr{D}[A]\; e^{iS[A]}} = \frac{\int \mathscr{D}[A_\mu]\; e^{iS[A]}\,\mathscr{O}[A]\;\Delta[A]B[f(A)]}{\int \mathscr{D}[A_\mu]\; e^{iS[A]}\;\Delta[A]B[f(A)]} = \\
&= \frac{\int \mathscr{D}[A_\mu]\;\Delta[A]\; e^{iS_{new}[A]}\,\mathscr{O}[A]}{\int \mathscr{D}[A_\mu]\;\Delta[A]\; e^{iS_{new}[A]}}
\end{aligned} \tag{E.13}$$

La prima frazione corrisponde alla prescrizione originale, eq. (4.5), derivata per analogia con il caso del campo scalare, e soddisfa formalmente l' invarianza di gauge, se $\mathscr{O}[A]$ è gauge-invariante. Tuttavia il numeratore ed il denominatore sono entrambi separatamente divergenti a causa del volume delle orbite di gauge. Nella seconda frazione, il funzionale B[f] fornisce un fattore di convergenza lungo le orbite di gauge e sia il numeratore sia il denominatore sono separatamente convergenti. Nella terza frazione abbiamo inglobato, per convenienza, il funzionale B[f] in un' azione complessiva, S_{new}:

$$e^{iS_{new}[A]} = e^{iS[A]}\; B[f(A)] \tag{E.14}$$

L' azione complessiva, S_{new} è diversa dall' azione di Mazxwell e *non è invariante di gauge*. Tuttavia, l' eguaglianza (E.13) che abbiamo appena derivato, mostra che *per grandezze gauge invarianti* la terza frazione dá il risultato gauge-invariante desiderato.

Nel caso considerato nelle (E.1) e (E.3) possiamo esplicitare le formule di cui sopra come segue.

- Il determinante di Faddev-Popov si calcola dalla legge di trasformazione dei campi (E.4):

$$\partial_\mu (A^\lambda)^\mu = \partial_\mu (A)^\mu + \Box\lambda;$$
$$det\left[\frac{\delta\, f(A^\lambda(x))}{\delta\lambda(y)}|_{\lambda=0}\right] = det(\Box). \tag{E.15}$$

  Il determinante di Faddev-Popov è, in questo caso, indipendente dal campo di gauge, puó essere portato fuori dell' integrale funzionale e contribuisce con una costante moltiplicativa inessenziale. La sparizione del determinante è conseguenza della linearitá delle trasformazioni di gauge abeliane. Nel caso non-abeliano il formalismo generale resta immutato ma il determinante di Faddev-Popov dipende dai campi e dá un contributo assolutamente non banale.

- L' azione modificata è:

$$S_{new}[A] = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu)\right] =$$
$$= \int d^4x\, \frac{1}{2}A_\mu \left[g^{\mu\nu}\Box + (\frac{1}{\alpha} - 1)\partial^\mu\partial^\nu\right] A_\nu \tag{E.16}$$

  Notiamo che per $\alpha = 1$ otteniamo l' azione di Fermi, S_F, eq. (4.10).

La scelta di α è arbitraria. Noi sceglieremo frequentemente il valore $\alpha = 1$. Questa scelta di gauge prende anche il nome di "gauge di Feynman".