Esercizi corso TEORIE DI GAUGE 2011, sessione estiva

Omar Benhar [1], **Marco Bochicchio** [2]

I tre esercizi devono essere consegnati entro venerdi' 10 giugno per poter fare l'esame nella prima sessione estiva.

1 esercizio

1. Calcolare il propagatore del gluone nella rappresentazione delle coordinate.

Suggerimento.

$$\frac{1}{p^2} = \int_0^\infty e^{-tp^2} dt \tag{1}$$

2 esercizio

1. Calcolare la funzione beta a 1-loop della teoria di Yang-Mills con gruppo di gauge $SU(N)$ usando il metodo dell'azione effettiva a 1-loop nella **rappresentazione delle coordinate**.

2. Calcolare il contributo alla funzione beta del termine di spin nell'azione effettiva nella **rappresentazione degli impulsi**.

Suggerimento. Eseguire il calcolo confrontandolo con quello svolto da L. Lopez nel sito web di SNS (problema 4), giustificando ogni passaggio.

[1] INFN Roma1 e Universita' La Sapienza
[2] INFN Roma1 e SNS Pisa

Nota bene. Nel calcolo di L. Lopez il contributo orbitale e' calcolato nella rappresentazione degli impulsi ed il contributo di spin in quella delle coordinate.

3 esercizio

1. Calcolare la funzione beta a 1-loop della teoria di Yang-Mills $SU(N)$ accoppiata a N_f specie di fermioni di Dirac di massa nulla nella rappresentazione fondamentale del gruppo di gauge, con il metodo dell'azione effettiva.

2. Determinare il valore critico del rapporto $\frac{N_f}{N}$ per cui la funzione beta cambia di segno.

3. Dire qual e' l'interpretazione fisica del cambiamento di segno in termini delle proprieta' di polarizzazione del vuoto.

La teoria, con metrica euclidea, e' definita dalla seguente funzione di partizione:

$$Z = \int \delta A \; e^{-S_{YM}} Det(\not{D})^{N_f} \tag{2}$$

dove:

$$S_{YM} = \frac{N}{2g^2} \int d^4x \, tr_f (F_{\alpha\beta})^2 = \frac{N}{4g^2} \int d^4x \, (F^a_{\alpha\beta})^2 \tag{3}$$

e

$$\not{D} = \gamma_\alpha D_\alpha \tag{4}$$

con γ_α le matrici di Dirac e D_α la derivata covariante con la connessione di gauge nella rappresentazione fondamentale (vedi sotto). La somma sugli indici ripetuti e' sottointesa.

$$A_\alpha = A^a_\alpha T^a \tag{5}$$

con i generatori nella rappresentazione fondamentale normalizzati come segue:

$$tr_f(T^a T^b) = \frac{1}{2} \, \delta^{ab} \tag{6}$$

La curvatura della connessione di YM e':

$$[D_\alpha, D_\beta] = iF_{\alpha\beta} \tag{7}$$

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + i[A_\alpha, A_\beta] \tag{8}$$

$$F^a_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A^a_\beta - \partial_\beta A^a_\alpha - f^{abc} A^b_\alpha A^c_\beta \tag{9}$$

dove $D_\alpha = \partial_\alpha + iA_\alpha$ e' la derivata covariante.

Suggerimento. Calcolare $Det(\not{D})^{N_f}$ come $Det(\not{D}\ \not{D})^{\frac{N_f}{2}}$. Dopo aver decomposto il prodotto di matrici gamma nella somma del commutatore ed anticommutatore, determinare il contributo orbitale e di spin di quest'ultimo determinante alla funzione beta a 1-loop confrontandolo con il contributo orbitale e di spin della pura teoria di gauge.

Nota bene. Nella pura teoria di gauge le derivate covarianti agiscono tramite commutatori, sono cioe' nella rappresentazione aggiunta. Vedi esercizio precedente e calcolo di L. Lopez nel sito web di SNS:

$$D_\alpha(A)\cdot\delta A_\beta = \partial_\alpha \delta A_\beta + i[A_\alpha, \delta A_\beta] \tag{10}$$

$$(D_\alpha(A)\cdot\delta A_\beta)^a = \partial_\alpha \delta A^a_\beta - f^{abc} A^b_\alpha \delta A^c_\beta = D^{ac}_\alpha(A)\delta A^c_\beta \tag{11}$$

dove

$$\begin{aligned} D^{ac}_\alpha(A) &= \partial_\alpha \delta^{ac} - f^{abc} A^b_\alpha \\ &= \partial_\alpha \delta^{ac} + iA^{ac}_\alpha \end{aligned}$$

con $A^{ac}_\alpha = if^{abc}A^b_\alpha$ e $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$. La derivata covariante associata al contributo fermionico $\not{D}$ agisce invece nella rappresentazione fondamentale.

Nota bene. La costante di accoppiamento di 't Hooft $g^2 = g^2_{YM}N$ e' riscalata di un fattore N rispetto a g^2_{YM} in modo che la funzione beta a 1-loop per g sia N indipendente.