Trasformazioni e Simmetrie

Nicola Cabibbo e Omar Benhar

20 maggio 2012

1 Premessa

In questo capitolo vogliamo costruire, a partire dal metodo di Feynman, alcune proprietà generali della meccanica quantistica (MQ) e della teoria dei campi. In particolare:

- Equazioni del moto in forma operatoriale.
- Regole di commutazione canoniche, in MQ: $[q_i, p_k] = i\hbar\delta_{ik}$.
- Simmetrie e grandezze conservate — il teorema di Noether.
- Identità di Ward.

1.1 Somma sui cammini e operatori

Cominciamo con una considerazione molto generale, che mostra la via per ottenere relazioni tra operatori nel linguaggio della somma su cammini. Una relazione tra operatori può sempre essere posta nella forma $E = 0$, ad esempio le regole di commutazione canoniche possono essere scritte: $E = [q^i, p^k] - i\hbar\delta^{ik}$. Si avrà $E = 0$ se $\langle B|E|A\rangle = 0$ per qualunque coppia di stati $|A\rangle$, $|B\rangle$.

Apparentemente il metodo di Feynman non ci permette di accedere direttamente agli elementi di matrice di operatori tra stati arbitrari, ma solamente alle "funzioni di Green", gli elementi di matrice di un prodotto T-ordinato di operatori nello stato fondamentale, che in teoria dei campi coincide con il vuoto, $|0\rangle$. Ad esempio in MQ abbiamo[1]

$$\int [\Pi dq^i(t)] e^{iS(q)/\hbar}\, q^{i_1}(t_1) q^{i_2}(t_2) \ldots q^{i_n}(t_n) = \langle 0|T\left(q^{i_1}(t_1) q^{i_2}(t_2) \ldots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle \tag{1}$$

Possiamo però usare le funzioni di Green per dimostrare relazioni tra operatori. Se

$$\langle 0|T\left(E(t) q^{i_1}(t_1) q^{i_2}(t_2) \ldots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle = 0 \tag{2}$$

[1] Anche in questo caso indicheremo con $|0\rangle$ lo stato fondamentale del sistema. Il caso della MQ di un sistema con un numero finito di gradi di libertà è quì utilizzato per illustrare metodi che saranno poi applicati alla teoria dei campi. Normalmente usiamo unità in cui $\hbar = 1$, ma conviene esplicitarlo, almeno nel caso della MQ, per ottenere le regole di commutazione canoniche nella forma standard.

per qualunque valore di n, e per valori arbitrari di $t_1, t_2 \dots t_n$ ma differenti da t, ne segue che $E(t) = 0$. Infatti se scegliamo $t_1 > t_2 \dots > t_k > t > t_{k+1} \dots > t_n$, la (2) è equivalente a

$$\langle 0|q^{i_1}(t_1)q^{i_2}(t_2)\dots q^{i_k}(t_k)E(t)q^{i_{k+1}}(t_{k+1})\dots q^{i_n}(t_n)|0\rangle = 0$$

che possiamo riscrivere come

$$\langle B|E(t)|A\rangle = 0, \qquad \text{con} \begin{cases} |A\rangle = q^{i_{k+1}}(t_{k+1})\dots q^{i_n}(t_n)\,|0\rangle \\ \langle B| = \langle 0|\, q^{i_1}(t_1)q^{i_2}(t_2)\dots q^{i_k}(t_k) \end{cases}$$

ma dato che le $q^i(t)$ sono un insieme completo di operatori, e che il numero e i tempi delle q^i che appaiono in $|A\rangle$ e $|B\rangle$ sono arbitrari, $|A\rangle$ e $|B\rangle$ sono vettori arbitrari[2], quindi dalla (2) segue $E(t) = 0$.

1.2 Derivate

Per il seguito, in particolare per ricavare la "identità fondamentale" che useremo largamente in questo capitolo, avremo bisogno di stabilire la relazione tra una funzione di Green in cui appare un operatore generico $O(t)$, ad esempio

$$\int [\Pi dq^i(t)] e^{iS(q)/\hbar}\, O(t)\, q^{i_1}(t_1)\dots q^{i_n}(t_n) = \langle 0|T\left(O(t)\, q^{i_1}(t_1)\dots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle \tag{3}$$

ed una in cui appare la sua derivata $dO(t)/dt$. Assumeremo che l'integrale sui cammini è abbastanza regolare da poter scambiare l'integrale con la derivata, per cui

$$\begin{aligned} &\int [\Pi dq^i(t)] e^{iS(q)/\hbar}\, \frac{d}{dt}O(t)\, q^{i_1}(t_1)\dots q^{i_n}(t_n) \\ =&\frac{d}{dt}\int [\Pi dq^i(t)] e^{iS(q)/\hbar}\, O(t)\, q^{i_1}(t_1)\dots q^{i_n}(t_n) \\ =&\frac{d}{dt}\, \langle 0|T\left(O(t)\, q^{i_1}(t_1)\dots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle \end{aligned} \tag{4}$$

2 L'identità fondamentale

I vari risultati che desideriamo ricavare, che spaziano dalle regole di commutazione tra operatori quantistici alle relazioni tra simmetrie e leggi di conservazione fino alle identità di Ward possono essere derivati da una identità che ricaviamo in questa sezione. Per fissare le idee consideriamo il caso della MQ di un sistema con un numero finito di gradi di libertà, che identificheremo con N variabili che chiameremo collettivamente q,

$$q = \{q^1 \dots q_N\}$$

Consideriamo ora una variazione infinitesima,

$$q \to q' = q + \delta q \qquad \text{cioè } q^i \to q^i + \delta q^i \quad (i = 1\dots N)$$

esempi:

[2] In termini semplici pensiamo alla formulazione in termini di funzioni d'onda. Se $\Psi_0(q)$ è la funzione d'onda dello stato fondamentale, qualunque altra funzione d'onda si può ottenere moltiplicando $\Psi_0(q)$ per una funzione $f(q)$, e se $f(q)$ è regolare, può essere approssimata da una serie di potenze in q.

- Una traslazione in q: $\delta q^i(t) = \eta^i(t)$
- Una trasformazione lineare: $q'^i = a_{ik}(t)q^k(t)$. Per una trasformazione infinitesima la matrice a_{ik} può essere scritta come $\delta_{ik}+\epsilon_{ik}$, con ϵ_{ik} infinitesimi, quindi $\delta q^i(t) = \epsilon_{ik}(t)q^k(t)$.

Nel caso di una teoria di campo le variabili sono i campi stessi, $\phi^i(\vec{x}, t)$, e anche in questo caso possiamo considerare:

- Traslazioni, $\delta\phi^i(\vec{x}, t) = \eta^i(\vec{x}, t)$
- Trasformazioni lineari, $\delta\phi^i(\vec{x}, t) = \epsilon_{ik}(\vec{x}, t)\phi^k(\vec{x}, t)$

Sia nel caso della MQ che di una teoria di campo ci limiteremo a considerare trasformazioni che lascino invariata la *misura* dell'integrale sui cammini, $[dq] = [dq']$. Questo è automaticamente vero nel caso di traslazioni, ma nel caso di trasformazioni lineari implica che ci si limiti a matrici di trasformazione di determinante unitario. Infatti il determinante di a_{ik} è lo Jacobiano della trasformazione,

$$dq'^1(t) \dots dq'^N(t) = \left|\frac{\partial q'^i}{\partial q^k}\right| dq^1(t) \dots dq^N(t) = det(a_{ik}) dq^1(t) \dots dq^N(t)$$

Nella forma infinitesima, dato che $det(1+\epsilon) = 1+\mathrm{Tr}(\epsilon)+O(\epsilon^2)$, questo significa limitarsi a trasformazioni infinitesime tali che $\mathrm{Tr}(\epsilon) = 0$.

Esercizio 1 *Dimostrare che* $\det(1 + \epsilon) = 1 + \mathrm{Tr}(\epsilon) + O(\epsilon^2)$

Una trasformazione si dice "simmetria" se lascia invariante l'azione, se cioè $S(q') = S(q)$. In questa sezione consideriamo però trasformazioni arbitrarie, non necessariamente simmetrie. Siamo ora pronti a dimostrare la annunciata identità, che deriva dal fatto che stiamo considerando trasformazioni che lasciano invariante la misura, $[dq'^i(t)] = [dq^i(t)]$. Se consideriamo quindi una trasformazione infinitesima abbiamo, per qualsiasi funzione di Green,

$$\begin{aligned} &\int [dq^i] e^{iS(q+\delta q)} q^{i_1}(t_1) \dots q^{i_n}(t_n) \\ = &\int [d(q^i + \delta q^i)] e^{iS(q+\delta q)} q^{i_1}(t_1) \dots q^{i_n}(t_n) \qquad \text{dato che } [dq'^i(t)] = [dq^i(t)] \end{aligned}$$

e con un cambio di variabili $q^i \to q^i - \delta q^i$

$$= \int [dq^i] e^{iS(q+\delta q)} \left(q^{i_1}(t_1) - \delta q^{i_1}(t_1)\right) \dots \left(q^{i_n}(t_n) - \delta q^{i_n}(t_n)\right)$$

L'identità è chiaramente soddisfatta se $\delta q = 0$. Sviluppando al primo ordine in δq il primo e l'ultimo termine della eguaglianza otteniamo l'identità desiderata:

$$\begin{aligned} & i\int [dq^i] e^{iS(q)}\ \delta S(q)\ q^{i_1}(t_1) \dots q^{i_n}(t_n) \\ = & -\int [dq^i] e^{iS(q)}\ \delta q^{i_1}(t_1) \dots q^{i_n}(t_n) \\ & - \dots \\ & - \int [dq^i] e^{iS(q)}\ q^{i_1}(t_1) \dots \delta q^{i_n}(t_n) \end{aligned} \tag{5}$$

A primo membro dell'eguaglianza appare la variazione di S, che possiamo scrivere in termini di una variazione del Lagrangiano,

$$\delta S(q) = \int dt \;\; \delta L\left(q(t), \dot{q}(t)\right)$$

e possiamo riscrivere la identita (5) (per convenienza abbiamo esplicitato la costante di Planck)

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{\hbar} \int dt \int [dq^i] e^{iS(q)} \; \delta L\left(q(t), \dot{q}(t)\right) \; q^{i_1}(t_1) \ldots q^{i_n}(t_n) \\
= \quad & - \int [dq^i] e^{iS(q)} \; \delta q^{i_1}(t_1) \ldots q^{i_n}(t_n) \\
& - \quad \ldots \\
& - \int [dq^i] e^{iS(q)} \; q^{i_1}(t_1) \ldots \delta q^{i_n}(t_n)
\end{aligned} \tag{6}$$

La trasformazione di questa in relazioni tra funzioni di Green va fatta con attenzione, tenendo conto delle regole stabilite nella sezione 1.2 per il trattamento di derivate rispetto al tempo. Identità di questo tipo vengono dette "identità di Ward", e connettono una funzione di Green con $n+1$ operatori, le n q più il δL a primo membro, a funzioni di Green con n operatori. Come vedremo, la originale identità di Ward della elettrodinamica quantistica, che connette una funzione di Green a tre punti, la funzione vertice, ad una a due punti, la self energia dell'elettrone, è direttamente ottenibile dalla (6).

3 Meccanica quantistica

In questa sezione studiamo conseguenze della identità di Ward (6) alla MQ. Daremo tre esempi: le equazioni del moto in forma operatoriale, le regole di commutazione canonica, la connessione tra simmetrie e grandezze conservate, il caso delle traslazioni nel tempo. I passaggi sembrano a prima lettura macchinosi, ma sono in realtà elementari.

3.1 Equazioni del moto e regole di commutazione

Per i primi due esempi consideriamo una traslazione infinitesima delle variabili $q^i(t)$, $\delta q^i(t) = \eta^i(t)$. Avremo quindi

$$\delta L\left(q(t), \dot{q}(t)\right) = \eta^i(t) \frac{\partial L}{\partial q^i} + \dot{\eta}^i(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \eta^i(t) F^i(t) + \dot{\eta}^i(t) p^i(t) \tag{7}$$

dove abbiamo definito $p^i(t)$, l'impulso coniugato a $q^i(t)$, e $F^i(t)$, la componente i-esima della forza. L'identità (6) diviene:

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{\hbar} \int dt \;\; \dot{\eta}^i(t) \langle 0 | T\left(p^i(t)\, q^{i_1}(t_1) \ldots q^{i_n}(t_n)\right) | 0 \rangle \\
& + \frac{i}{\hbar} \int dt \;\; \eta^i(t) \langle 0 | T\left(F^i(t)\, q^{i_1}(t_1) \ldots q^{i_n}(t_n)\right) | 0 \rangle \\
= \quad & - \eta(t_1) \langle 0 | T\left(q^{i_2}(t_2) \ldots q^{i_n}(t_n)\right) | 0 \rangle \ldots \\
& - \eta(t_n) \langle 0 | T\left(q^{i_1}(t_1) \ldots \delta q^{i_{n-1}}(t_{n-1})\right) | 0 \rangle
\end{aligned}$$

Se assumiamo che

$$\lim_{t\to\pm\infty} \eta^i(t) = 0 \tag{8}$$

possiamo integrare per parti il primo membro, e riorganizzando i termini, otteniamo

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{\hbar}\int dt\ \eta^i(t)\frac{d}{dt}\langle 0|T\left(p^i(t)\ q^{i_1}(t_1)\ldots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle\\
=&\frac{i}{\hbar}\int dt\ \eta^i(t)\ \langle 0|T\left(F^i(t)\ q^{i_1}(t_1)\ldots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle\\
&+\eta(t_1)\ \langle 0|T\left(q^{i_2}(t_2)\ldots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle\ldots\\
&+\eta(t_n)\ \langle 0|T\left(q^{i_1}(t_1)\ldots \delta q^{i_{n-1}}(t_{n-1})\right)|0\rangle
\end{aligned}$$

Poniamo infine $\eta^i(t) = \delta^{im}\delta(t-t_0)$ ed eseguiamo gli integrali:

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{\hbar}\frac{d}{dt_0}\langle 0|T\left(p^m(t_0)\ q^{i_1}(t_1)\ldots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle\\
=&\frac{i}{\hbar}\langle 0|T\left(F^m(t_0)\ q^{i_1}(t_1)\ldots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle\\
&+\delta^{i_1 m}\delta(t_1-t_0)\ \langle 0|T\left(q^{i_2}(t_2)\ldots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle\ldots\\
&+\delta^{i_n m}\delta(t_n-t_0)\ \langle 0|T\left(q^{i_1}(t_1)\ldots \delta q^{i_{n-1}}(t_{n-1})\right)|0\rangle
\end{aligned}\tag{9}$$

La derivata a primo membro richiede una certa cura, perchè il prodotto ordinato nel tempo ha delle singolarità quando due dei tempi sono eguali, in particolare se $t_0 = t_1$, oppure $t_0 = t_2$, e così via. Per semplificare la discussione, assumiamo che $t_1, t_2 \ldots t_n$ siano tutti distinti, con $t_1 > t_2 \ldots > t_n$. Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
&T\left(p^m(t_0)\ q^{i_1}(t_1)q^{i_2}(t_2)\ldots q^{i_n}(t_n)\right) \qquad \text{per } t_1 > t_2 \ldots > t_n\\
=&p^m(t_0)\ q^{i_1}(t_1)q^{i_2}(t_2)\ldots q^{i_n}(t_n)\theta(t_0-t_1)\\
+&q^{i_1}(t_1)p^m(t_0)q^{i_2}(t_2)\ \ldots q^{i_n}(t_n)\theta(t_1-t_0)\theta(t_0-t_2)\\
+&q^{i_1}(t_1)q^{i_2}(t_2)p^m(t_0)\ \ldots q^{i_n}(t_n)\theta(t_2-t_0)\theta(t_0-t_3)+\ldots
\end{aligned}\tag{10}$$

Possiamo adesso eseguire la derivata nel primo membro della (9), che consta della derivata di $p^m(t_0)$ ma anche delle derivate delle funzioni θ. Notiamo che a secondo membro della (10) appare sia $\theta(t_0 - t_1)$ che $\theta(t_1 - t_0)$, le cui derivate sono $\pm\delta(t_0 - t_1)$, e che essendo $t_1 > t_2$, $\delta(t_0 - t_1)\theta(t_0 - t_2) = \delta(t_0 - t_1)$, e così via. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{\hbar}\frac{d}{dt_0}\langle 0|T\left(p^m(t_0)\ q^{i_1}(t_1)q^{i_2}(t_2)\ldots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle \qquad \text{per} t_1 > t_2 \ldots > t_n\\
=&\frac{i}{\hbar}\langle 0|T\left(\dot p^m(t_0)\ q^{i_1}(t_1)q^{i_2}(t_2)\ldots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle\\
+&\frac{i}{\hbar}\delta(t_0-t_1)\ \langle 0|\left[p^m(t_0)\,,\ q^{i_1}(t_1)\right]q^{i_2}(t_2)\ldots q^{i_n}(t_n)|0\rangle\\
+&\frac{i}{\hbar}\delta(t_0-t_2)\ \langle 0|q^{i_1}(t_1)\left[p^m(t_0)\,,\ q^{i_2}(t_2)\right]\ \ldots q^{i_n}(t_n)|0\rangle+\ldots
\end{aligned}$$

Se adesso sostituiamo questa espressione nella (9), troviamo in questa identità dei termini non singolari (senza funzioni δ), termini proporzionali a $\delta(t_0 - t_1)$, $\delta(t_0 - t_2)$, e così via sino a termini $\propto \delta(t_0 - t_n)$. Perchè la (9) sia valida, devono eguagliarsi a primo e secondo membro sia i termini non singolari che i coefficienti di ciascuna funzione δ. Dai termini non singolari troviamo

$$\begin{aligned} &\frac{i}{\hbar}\,\langle 0|T\left(\dot{p}^m(t_0)\; q^{i_1}(t_1)q^{i_2}(t_2)\ldots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle \\ =&\frac{i}{\hbar}\,\langle 0|T\left(F^m(t_0)\; q^{i_1}(t_1)q^{i_2}(t_2)\ldots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle \end{aligned} \tag{11}$$

che sulla base della discussione nella sezione 1, dato che n ed i tempi $t_1 \ldots t_n$ sono arbitrari, esprime la validità delle equazioni del moto in forma operatoriale,

$$\dot{p}^m(t) = F^m(t), \tag{12}$$

e questo giustifica la definizione di $F^m = \frac{\partial L}{\partial q^m}$ come "componente della forza" (eq. 7), mentre eguagliando i coefficienti della generica funzione $\delta(t_0 - t_k)$ otteniamo[3]

$$\begin{aligned} &\frac{i}{\hbar}\,\langle 0|q^{i_1}(t_1)\ldots q^{i_{k-1}}(t_{k-1})\left[p^m(t_0)\,,\, q^{i_k}(t_0)\right] q^{i_{k+1}}(t_{k+1})\;\ldots q^{i_n}(t_n)|0\rangle \\ =&\delta^{m\,i_k}\,\langle 0|q^{i_1}(t_1)\ldots q^{i_{k-1}}(t_{k-1})\; q^{i_{k+1}}(t_{k+1})\;\ldots q^{i_n}(t_n)|0\rangle \end{aligned} \tag{13}$$

e quindi, sempre seguendo la discussione nella sezione 1, questo equivale alle regole di commutazione canoniche,

$$\left[p^m(t_0)\,,\, q^{i_k}(t_0)\right] = -i\hbar\,\delta^{m\,i_k} \tag{14}$$

4 Simmetrie

Consideriamo ora trasformazioni delle variabili dinamiche, $q^i \to q^i + \delta_g q^i$ che lascino invariato il Lagrangiano, e quindi l'azione, cioè delle simmetrie del nostro sistema fisico,

$$\delta_g L = \frac{\partial L}{\partial q^i}\,\delta_g q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\frac{d}{dt}\delta_g q^i = 0 \tag{15}$$

Conviene però, anche nel caso di simmetria, considerare delle variazioni più generali, ottenute moltiplicando $\delta_g q$ per una funzione arbitraria del tempo[4]: $\delta q^i = f(t)\delta_g q^i$. Assumeremo che $f(t)$ tenda a zero all'infinito,

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$$

Questa variazione più generale non è essa stessa una simmetria, e si avrà

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial q^i}\; f\,\delta_g q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\left(f\frac{d}{dt}\delta_g q^i + \dot{f}\delta_g q^i\right) \\ &= f\delta_g L + \dot{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta_g q^i = \dot{f}(t)J_g(t) \\ &\text{dove} \qquad J_g = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta_g q^i \end{aligned} \tag{16}$$

[3] Dato che questi termini sono moltiplicati per $\delta(t_0 - t_k)$, vi possiamo porre $t_k = t_0$.

[4] In teoria dei campi, come vedremo, si userà una funzione arbitraria di $\vec{x}$, t.

Sostituendo nella "identità fondamentale" (6), e con una integrazione per parti,

$$
\begin{aligned}
&\frac{i}{\hbar}\int dt\; f(t)\frac{d}{dt}\,\langle 0|T\left(J_g(t)\; q^{i_1}(t_1)\ldots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle \\
(17)\qquad &= f(t_1)\,\langle 0|T\left(\delta_g q^{i_1}(t_1)\ldots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle \\
&\quad \ldots \\
&\quad f(t_n)\,\langle 0|T\left(q^{i_1}(t_1)\ldots \delta_g q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle
\end{aligned}
$$

A questo punto possiamo seguire i passi della sezione precedente: poniamo $f(t)=\delta(t-t_0)$ ed eseguiamo l'integrale a primo membro:

$$
\begin{aligned}
&\frac{i}{\hbar}\frac{d}{dt_0}\,\langle 0|T\left(J_g(t_0)\; q^{i_1}(t_1)\ldots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle \\
(18)\qquad &= \delta(t_1-t_0)\,\langle 0|T\left(\delta_g q^{i_1}(t_1)\ldots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle \\
&\quad \ldots \\
&\quad \delta(t_n-t_0)\,\langle 0|T\left(q^{i_1}(t_1)\ldots \delta_g q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle
\end{aligned}
$$

Come abbiamo fatto precedentemente assumiamo che $t_1, t_2 \ldots t_n$ siano tutti distinti, con $t_1 > t_2 \ldots > t_n$, esplicitiamo l'ordinamento temporale come fatto nella eq. (10), e riscriviamo il primo membro della (18) come:

$$
\begin{aligned}
&\frac{i}{\hbar}\frac{d}{dt_0}\,\langle 0|T\left(J_g(t_0)\; q^{i_1}(t_1)q^{i_2}(t_2)\ldots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle \qquad \text{per } t_1 > t_2 \ldots > t_n \\
=&\frac{i}{\hbar}\,\langle 0|T\left(\dot{J}_g(t_0)\; q^{i_1}(t_1)q^{i_2}(t_2)\ldots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle \\
+&\frac{i}{\hbar}\delta(t_1-t_0)\,\langle 0|\left[J_g(t_0)\,,\, q^{i_1}(t_1)\right] q^{i_2}(t_2)\ldots q^{i_n}(t_n)|0\rangle \\
+&\frac{i}{\hbar}\delta(t_2-t_0)\,\langle 0|q^{i_1}(t_1)\left[J_g(t_0)\,,\, q^{i_2}(t_2)\right]\ \ldots q^{i_n}(t_n)|0\rangle + \ldots
\end{aligned}
$$

Il primo termine, che non è singolare (non contiene funzioni δ) non ha controparti al secondo membro della (18), e quindi, per gli argomenti della sezione 1, deve essere $\dot{J}_g(t)=0$, cioè la grandezza $J_g(t)$ è conservata. Questo è essenzialmente il teorema di Noether.

Eguagliando adesso i coefficienti della generica funzione δ, $\delta(t_k-t_0)$ a primo e secondo membro otteniamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{i}{\hbar}\,\langle 0|q^{i_1}(t_1)\ldots q^{i_{k-1}}(t_{k-1})\left[J_g(t_0)\,,\, q^{i_k}(t_0)\right] q^{i_{k+1}}(t_{k+1})\ \ldots q^{i_n}(t_n)|0\rangle \\
(19)\qquad &= \langle 0|q^{i_1}(t_1)\ldots q^{i_{k-1}}(t_{k-1})\;\delta_g q^{i_k}(t_0)\; q^{i_{k+1}}(t_{k+1})\ \ldots q^{i_n}(t_n)|0\rangle
\end{aligned}
$$

e quindi, sempre seguendo la discussione nella sezione 1, questo equivale alle regole di commutazione

$$
\left[J_g(t)\,,\, q^{i_k}(t)\right] = -i\hbar\;\delta_g\, q^{i_k}(t_0) \tag{20}
$$

Queste regole di commutazione affermano che $J_g(t)$ è il generatore della trasformazione $q \to q + \delta_g\, q$. Ad una trasformazione δ_g infinitesima corrisponderà un $J_g(t)$ anche infinitesimo, quindi la (20) è equivalente a

$$
\left(1+\frac{i}{\hbar}J_g(t_0)\right)\; q^i(t)\left(1-\frac{i}{\hbar}J_g(t_0)\right) = q^i(t) + \delta_g\, q^i(t) \tag{21}
$$

Potremmo qui continuare con la costruzione di trasformazioni finite, e dell'intero gruppo di invarianza cui le trasformazioni infinitesime δ_g appartengono. Ma rimanendo nel campo delle trasformazioni infinitesime, notiamo che un caso particolare è dato dalla invarianza per traslazioni, cioè dalla situazione in cui la trasformazione $\delta_g q^i(t) = \epsilon\delta^{im}$, con ϵ una costante infinitesima indipendente dal tempo. Se questa è una simmetria — invarianza del sistema per traslazioni lungo la direzione m — possiamo applicare i metodi sviluppati in questa sezione, definendo una trasformazione dipendente dal tempo $\delta q^i = f(t)\delta_g q^i(t) = f(t)\epsilon\delta^{im}$. Ma questa è esattamente la trasformazione che abbiamo considerato nella sezione precedente, con l'unica differenza che essendo δ_g una simmetria, la "forza" F è zero. La grandezza conservata associata a questa simmetria è la componente m-sima dell'impulso, p^m, e le sue regole di commutazione sono quelle della eq. (14).

4.1 L'hamiltoniano

Un sistema è invariante per traslazioni nel tempo se il lagrangiano dipende dal tempo solo implicitamente, tramite la dipendenza dal tempo di q e $\dot{q}$, e in questo caso, se poniamo $\delta_g q = \epsilon\dot{q}$, abbiamo

$$\delta_g L = \epsilon\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i\right) = \epsilon\frac{d}{dt}L \tag{22}$$

Dato che la variazione del lagrangiano è una derivata totale, l'azione è invariante. Anche in questo caso conviene però usare una variazione che dipende dal tempo, moltiplicando δ_g per una funzione $f(t)$ nulla all'infinito, e otteniamo

$$\begin{aligned} \delta q^i &= f(t)\delta_g q^i = f(t)\epsilon\dot{q}^i \\ \delta L &= f(t)\delta_g L + \dot{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta_g q^i = \epsilon\left(f(t)\frac{d}{dt}L + \dot{f}(t)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right) \end{aligned} \tag{23}$$

Se adesso definiamo la funzione hamiltoniana

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L = p^i\dot{q}^i - L, \tag{24}$$

sostituendo nella eq. (6) e con semplici manipolazioni — integrazione per parti, cambiamento di segno, omissione del fattore comune ϵ — otteniamo

$$\begin{aligned} &\frac{i}{\hbar}\int dt f(t)\int [dq^i]e^{iS(q)}\ \frac{d}{dt}H(t)\ q^{i_1}(t_1)\dots q^{i_n}(t_n) \\ = &\int [dq^i]e^{iS(q)}\ f(t_1)\dot{q}^{i_1}(t_1)\dots q^{i_n}(t_n) \\ &\quad\dots \\ &\int [dq^i]e^{iS(q)}\ q^{i_1}(t_1)\dots f(t_n)\dot{q}^{i_n}(t_n) \end{aligned} \tag{25}$$

che, utilizzando la (4) diviene

$$\begin{aligned} &\frac{i}{\hbar}\int dt\ f(t)\frac{d}{dt}\langle 0|T\left(H(t)\ q^{i_1}(t_1)\dots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle \\ = &\ f(t_1)\langle 0|T\left(\dot{q}^{i_1}(t_1)\dots q^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle \\ &\quad\dots \\ &\ f(t_n)\langle 0|T\left(q^{i_1}(t_1)\dots \dot{q}^{i_n}(t_n)\right)|0\rangle \end{aligned} \tag{26}$$

da cui, seguendo gli stessi passi della sezione precedente otteniamo due conseguenze:

1. L'hamiltoniano è indipendente dal tempo.
2. Valgono le regole di commutazione $[H, q^i] = -i\hbar \dot{q}^i$

5 In teoria dei campi

In questa sezione diamo un esempio di applicazione delle idee che abbiamo sviluppato a una teoria dei campo. Per semplicità ci limitiamo a considerare il caso di campi scalari. La relazione tra somme sui cammini e funzioni di Green è data da

$$\int [d\phi^i(x)] e^{iS(\phi)} \; \phi^{i_1}(x_1) \dots \phi^{i_n}(x_n) = \langle 0 | T \left(\phi^{i_1}(x_1) \dots \phi^{i_n}(x_n) \right) | 0 \rangle \tag{27}$$

L'azione si scrive in termini di una densità di lagrangiano $\mathcal{L}(\phi(x), \phi_\mu(x))$ dove adottiamo la notazione $\phi_\mu(x) = \partial_\mu \phi(x)$,

$$S(\phi) = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \phi_\mu(x)) \tag{28}$$

L'identità nella (6) diviene (con $\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} & i \int d^4x \int [d\phi^i] e^{iS(\phi)} \; \delta\mathcal{L}\left(\phi(x), \phi_\mu(x)\right) \; \phi^{i_1}(x_1) \dots \phi^{i_n}(x_n) \\ = \; & - \int [d\phi^i] e^{iS(\phi)} \; \delta\phi^{i_1}(x_1) \dots \phi^{i_n}(x_n) \\ & - \; \dots \\ & - \int [d\phi^i] e^{iS(\phi)} \; \phi^{i_1}(x_1) \dots \delta\phi^{i_n}(x_n) \end{aligned} \tag{29}$$

Anche nel caso delle teorie di campo bisogna trattare con cura il caso in cui si deve calcolare la derivata di un operatore, che abbiamo discusso nella sezione 1.2 nel caso della MQ. La eq (4) diviene

$$\begin{aligned} & \int [\Pi d\phi^i(x)] e^{iS(q)} \; \frac{\partial}{\partial x^\mu} O(x) \; \phi^{i_1}(x_1) \dots \phi^{i_n}(x_n) \\ = & \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int [\Pi d\phi^i(x)] e^{iS(q)} \;\; O(t) \; \phi^{i_1}(x_1) \dots \phi^{i_n}(x_n) \\ = & \frac{\partial}{\partial x^\mu} \; \langle 0 | T \left(O(x) \, \phi^{i_1}(x_1) \dots \phi^{i_n}(x_n) \right) | 0 \rangle \end{aligned} \tag{30}$$

5.1 Simmetrie in teoria dei campi

Ricordiamo anzitutto che qui ci occuperemo di gruppi di trasformazioni continui, che includono trasformazioni infinitesime

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \delta_g \phi(x) \tag{31}$$

e che vengono escluse simmetrie discrete come la parità o la coniugazione di carica. Una trasformazione continua è una simmetria del sistema se lascia invariata l'azione. Possiamo suddividere le simmetrie continue in due grandi classi a secondo che l'invarianza della azione si realizzi o no con la invarianza della densità di lagrangiano. Alla seconda classe appartengono le trasformazioni di coordinate — traslazioni, rotazioni, trasformazioni di Lorentz — che richiedono un trattamento a parte, come nel caso della MQ abbiamo visto per le traslazioni nel tempo. Occupiamoci ora di simmetrie del primo tipo, cioé di trasformazioni $\delta_g \phi(x)$ che lasciano invariata la densità di lagrangiano, tali cioé che

$$\delta_g \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \delta_g \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i_\mu} \partial_\mu \delta_g \phi^i = 0 \tag{32}$$

Come abbiamo fatto nel caso della MQ, conviene considerare una trasformazione $\delta\phi$ ottenuta da $\delta_g \phi$ moltiplicando per una funzione $f(x)$ che si annulla nel limite $|\vec{x}| \to \infty$ o $|t| \to \infty$,

$$\delta \phi^i(x) = f(x) \delta_g \phi \tag{33}$$

in corrispondenza della quale troviamo, tenendo conto della (32),

$$\begin{aligned} &\delta \mathcal{L} = \partial_\mu f(x) \, J^\mu_g(x), \qquad \text{dove} \\ &J^\mu_g = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i_\mu} \delta_g \phi^i, \end{aligned} \tag{34}$$

Sostituendo nella (29), e con una integrazione per parti e un cambiamento di segno, troviamo

$$\begin{aligned} & i \int d^4x f(x) \int [d\phi^i] e^{iS(\phi)} \; \partial_\mu J^\mu_g(x) \; \phi^{i_1}(x_1) \ldots \phi^{i_n}(x_n) \\ = \quad & f(x^1) \int [d\phi^i] e^{iS(\phi)} \; \delta_g \phi^{i_1}(x_1) \ldots \phi^{i_n}(x_n) \\ & + \quad \ldots \\ & + f(x^n) \int [d\phi^i] e^{iS(\phi)} \; \phi^{i_1}(x_1) \ldots \delta_g \phi^{i_n}(x_n) \end{aligned} \tag{35}$$

che, utilizzando la (30) si traduce in

$$\begin{aligned} & i \int d^4x f(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \; \langle 0 | T \left(J^\mu_g(x) \, \phi^{i_1}(x_1) \ldots \phi^{i_n}(x_n) \right) | 0 \rangle \\ = \quad & f(x^1) \; \langle 0 | T \left(\delta_g \phi^{i_1}(x_1) \ldots \phi^{i_n}(x_n) \right) | 0 \rangle \\ & + \quad \ldots \\ & + f(x^n) \; \langle 0 | T \left(\phi^{i_1}(x_1) \ldots \delta_g \phi^{i_n}(x_n) \right) | 0 \rangle \end{aligned} \tag{36}$$

e ponendo $f(x) = \delta^4(x - x_0)$ — stiamo seguendo passo passo la procedura della sezione 4 ma adattandola alla struttura spazio-tempo della teoria dei campi — otteniamo l'identità di Ward nella forma

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial}{\partial x^\mu_0} \; \langle 0 | T \left(J^\mu_g(x_0) \, \phi^{i_1}(x_1) \ldots \phi^{i_n}(x_n) \right) | 0 \rangle \\ = \quad & \delta(x^1 - x_0) \; \langle 0 | T \left(\delta_g \phi^{i_1}(x_1) \ldots \phi^{i_n}(x_n) \right) | 0 \rangle \\ & + \quad \ldots \\ & + \delta(x^1 - x_0) \; \langle 0 | T \left(\phi^{i_1}(x_1) \ldots \delta_g \phi^{i_n}(x_n) \right) | 0 \rangle \end{aligned} \tag{37}$$

e da questa (i dettagli che lasciamo per esercizio seguono i passi della sezione 4) la conservazione della corrente J^μ e le regole di commutazione :

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu_g(x) &= 0 \\ i[J^0_g(\vec{x}_0,t)\,,\,\phi^i(\vec{x}_1,t)] &= \delta^3(\vec{x}_0-\vec{x}_1)\delta_g\phi^i(x_1) \end{aligned} \tag{38}$$

5.2 Identità di Ward

In questa sezione vogliamo verificare che l'identità (38) merita il nome di "identità di Ward", nel senso che da essa si può ricavare la relazione che esiste in QED tra funzione di vertice e self energia dell'elettrone (equazione (9.60) del Mandl-Shaw).

Per illustrare il modo in cui si procede, consideriamo, per cominciare, il campo scalare complesso. In questo caso l'invarianza della densità lagrangiana rispetto a trasformazioni di fase globali implica l'esistenza della corrente conservata

$$j^\mu = i\left(\phi\partial^\mu\phi^\dagger - \phi^\dagger\partial^\mu\phi\right) \tag{39}$$

e la (37) diventa

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle 0|T\left\{j^\mu(x)\phi(x_1)\phi^\dagger(x_2)\right\}|0\rangle &= i\delta(x-x_1)\langle 0|T\left\{\phi(x_1)\phi^\dagger(x_2)\right\}|0\rangle \\ &- i\delta(x-x_2)\langle 0|T\left\{\phi(x_1)\phi^\dagger(x_2)\right\}|0\rangle\ . \end{aligned} \tag{40}$$

Per arrivare a riscrivere l'equazione (40) in una forma più familiare dobbiamo fare una trasformata di Fourier ed utilizzare la definizione del propagatore

$$i\Delta_F(x_1-x_2) = \langle 0|T\left\{\phi(x_1)\phi^\dagger(x_2)\right\}|0\rangle\ . \tag{41}$$

In questo modo dai due termini a secondo membro ottieniamo

$$\begin{aligned} i\int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{-ipx}e^{-ikx_1}e^{iqx_2}\delta(x-x_1)i\Delta_F(x_1-x_2) \\ = -(2\pi)^4\delta(p+k-q)\Delta_F(p+k) \end{aligned} \tag{42}$$

e

$$\begin{aligned} -i\int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{-ipx}e^{-ikx_1}e^{iqx_2}\delta(x-x_2)i\Delta_F(x_1-x_2) \\ = (2\pi)^4\delta(p+k-q)\Delta_F(k)\ . \end{aligned} \tag{43}$$

Consideriamo ora il primo membro della (40). La trasformata di Fourier della quantità

$$\langle 0|T\left\{j^\mu(x)\phi(x_1)\phi^\dagger(x_2)\right\}|0\rangle \tag{44}$$

ha la forma

$$\begin{aligned} \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{-ipx}e^{-ikx_1}e^{iqx_2}\langle 0|T\left\{j^\mu(x)\phi(x_1)\phi^\dagger(x_2)\right\}|0\rangle \\ = -i\Delta_F(k)\Gamma^\mu(k,q)\Delta_F(q)\ (2\pi)^4\delta(p+k-q)\ , \end{aligned} \tag{45}$$

che in teoria delle perturbazioni corrisponde ad un diagramma con una linea entrante ed una uscente, rappresentate dai propagatori, ed un vertice descritto dalla funzione Γ^μ. L'equazione (45), che definisce Γ^μ, si può ottenere facilmente riscrivendo

$$\begin{aligned} &\langle 0| T \left\{ j^\mu(x)\phi(x_1)\phi^\dagger(x_2) \right\} |0\rangle \\ &\qquad = -i \int d^4\xi d^4\eta \Delta_F(x_1-\xi)\Gamma^\mu(\xi - x, x - \eta)\Delta_F(\eta - x_2) \ . \end{aligned} \tag{46}$$

Dalla (45) segue immediatamente che

$$\begin{aligned} &\int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{-ipx} e^{-ikx_1} e^{iqx_2} i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \langle 0| T \left\{ \dots \right\} |0\rangle \\ &\qquad = -i(q-k)_\mu \Delta_F(k)\Gamma^\mu(k,q)\Delta_F(q) \ (2\pi)^4\delta(p+k-q) \ . \end{aligned} \tag{47}$$

Quindi, uguagliando la (47) alla somma delle (42)-(43) otteniamo

$$(q-k)_\mu \Delta_F(k)\Gamma^\mu(k,q)\Delta_F(q) = \Delta_F(q) - \Delta_F(k) \ , \tag{48}$$

ovvero

$$(q-k)_\mu \Gamma^\mu(k,q) = \Delta_F^{-1}(k) - \Delta_F^{-1}(q) \ . \tag{49}$$

Consideriamo ora il caso $q \to k$, in cui possiamo porre $q = k + \delta$ e

$$\Delta_F^{-1}(q) = \Delta_F^{-1}(k) + \left(\frac{\partial \Delta_F^{-1}}{\partial k_\mu} \right)_{k=q} \delta_\mu \tag{50}$$

Dalle (49) e (50), usando $(q-k)_\mu = \delta_\mu$, si otiene finalmente la

$$\Gamma^\mu(k,k) = \frac{\partial \Delta_F^{-1}}{\partial k_\mu} \ . \tag{51}$$

Il procedimento seguito per ottenere la (51) può essere applicato anche al caso della QED, ottenendo come risultato la relazione formalmente analoga

$$\Gamma^\mu(k,k) = \frac{\partial S_F^{-1}}{\partial k_\mu} \ . \tag{52}$$

Confrontando la (51) e la (52) vediamo che $\Delta_F(k)$ è rimpiazzato dal propagatore $S_F(k)$, cioè dalla somma di tutti i diagrammi di Feynman con una linea fermionica entrante ed una uscente, mentre Γ^μ è ora la funzione di vertice della QED, che scriviamo nella forma

$$\Gamma^\mu(k,q) = \gamma^\mu + \Lambda^\mu(k,q) \ . \tag{53}$$

Sostituendo nella (52) la definizione

$$S_F^{-1}(k) = \not{k} - m + \Sigma(k) \ , \tag{54}$$

dove $\Sigma(k)$ è la self energia del fermione, otteniamo finalmente

$$\gamma^\mu + \Lambda^\mu(k,k) = \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(k_\mu \gamma^\mu - m + \Sigma(k) \right) \ , \tag{55}$$

ovvero

$$\Lambda^\mu(k,k) = \frac{\partial \Sigma}{\partial k_\mu} \ , \tag{56}$$

cioè proprio l'identità di Ward dell'equazione (9.60) del Mandl-Shaw.