“SAPIENZA” UNIVERSITÀ DI ROMA

Dipartimento di Fisica

Elettrodinamica Quantistica

Anno Accademico 2012-2013

Appunti basati sulle lezioni di

Nicola Cabibbo, Luciano Maiani e Omar Benhar

WORK IN PROGRESS

Commenti, correzioni e suggerimenti, in particolare da parte degli studenti del Corso, sono particolarmente apprezzati.

Indice

4

1 Integrali sui cammini di Feynman **5**

1.1 Calcolo dell'ampiezza di transizione 5

1.2 L'approssimazione reticolare 7

1.3 Il limite classico 8

1.4 Il tempo come variabile complessa 8

1.5 La meccanica statistica 10

1.6 Le funzioni di Green 10

2 Passaggio alla teoria dei campi **15**

2.1 Il funzionale generatore 17

2.2 L'oscillatore armonico 20

2.3 Campi scalari liberi 24

2.4 Campi scalari liberi: stati a una particella 27

2.5 Operatori di creazione e di distruzione, normalizzazione del continuo 28

3 Sviluppo perturbativo delle funzione di Green. Teoria $\lambda\phi^4$ **31**

3.1 Lo sviluppo perturbativo 32

3.2 Diagrammi e regole di Feynman per le funzioni di Green 35

3.3 Parti connesse e diagrammi vuoto-vuoto 40

3.4 Rappresentazione spettrale della funzione di Green a due punti. 42
3.5 Funzione di Green a due punti in teoria delle perturbazioni. 46

A Ampiezza di transizione in assenza di potenziale **51**

B Grafici connessi **53**

BIBLIOGRAFIA **55**

Capitolo 1

Integrali sui cammini di Feynman

In questo Capitolo deriveremo l'espressione della somma sui cammini dalla formulazione usuale della meccanica quantistica, considerando il caso particolarmente semplice di un sistema quantistico con un solo grado di libertà. Dopo avere ricavato l'espressione delle ampiezze di transizione mediante la somma sui cammini, dimostreremo come questo metodo permetta anche il calcolo delle funzioni di Green in meccanica quantistica. Concluderemo il Capitolo indicando come questi risultati possono essere estesi al caso di sistemi con più gradi di libertà e alle teoria di campo.

Come ulteriore dimostrazione della equivalenza tra le differenti formulazioni della meccanica quantistica, in un successivo Capitolo useremo la formulazione basata sulla somma sui cammini per dedurre le regole di commutazione canoniche,

$$\left[p^m(t_0)\,,\, q^k(t_0)\right] = -i\hbar\,\delta^{mk}\,.$$

1.1 Calcolo dell'ampiezza di transizione

Per introdurre il metodo degli integrali di Feynmann, consideriamo per primo il caso più semplice: un sistema quantistico unidimensionale descritto dalla variabile dinamica q e dall'impulso coniugato p. L'hamiltoniana è quindi

$$H = K(p) + V(q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)\,, \tag{1.1}$$

dove abbiamo indicato indichiamo con K l'energia cinetica e V l'energia potenziale.

Vogliamo calcolare l'ampiezza di transizione da uno stato $|q_1\rangle$ al tempo $t = t_1$ ad uno stato $|q_2\rangle$ al tempo $t = t_2 = t_1 + T$. Usando la rappresentazione di Schrödinger [1] e il sistema di unità di misura in cui $\hbar = 1$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
&|q_1\rangle = \text{stato al tempo } t = t_1\,,\\
&e^{-iHT}|q_1\rangle = \text{stato al tempo } t = t_1 + T\,,\\
&\langle q_2|e^{-iHT}|q_1\rangle = \text{ampiezza di transizione a } |q_2\rangle\,.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Conoscere l'ampiezza di transizione in funzione di q_1, q_2 e T è equivalente ad avere una descrizione completa del nostro sistema quantistico. Vedremo qualche esempio di questa affermazione, rimandando però al testo di Feynman e Hibbs [2] per maggiori dettagli. Ricordiamo sin d'ora che nella fisica delle particelle elementari siamo interessati proprio al calcolo delle ampiezze di transizione e in particolare agli elementi di matrice S.

Consideriamo anzitutto il caso $V(q) = 0$, in cui si ottiene allora direttamente (per i dettagli del calcolo si veda l'Appendice A):

$$\langle q_2|e^{-iKT}|q_1\rangle = \langle q_2|e^{-i\frac{p^2}{2m}T}|q_1\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i T}}e^{i\frac{m(q_2-q_1)^2}{2T}} \quad , \quad \mathrm{V(q)} = 0\,. \tag{1.3}$$

Notiamo anche che il risultato può essere riscritto in termini della velocità media $v = (q_2 - q_1)/T$

$$\langle q_2|e^{-i\frac{p^2}{2m}T}|q_1\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i T}}e^{i\frac{mv^2}{2}T}\,. \tag{1.4}$$

Questo risultato ha una interpretazione molto semplice: nel limite classico la particella si muove a velocità costante v. La fase dell'ampiezza di transizione è quindi data dall'*azione lungo la traiettoria classica*:

$$\langle q_2|e^{-i\frac{Tp^2}{2m}}|q_1\rangle \propto e^{iS_{\mathrm{cl}}}\,,$$

con

$$S_{\mathrm{cl}} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q,\dot{q}) = \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{m\dot{q}^2}{2} = \frac{mv^2}{2}T\,.$$

La corrispondenza tra l' ampiezza di transizione quantistica e l' azione classica è stata per la prima volta messa in evidenza da Dirac [3].

Nel caso generale, cioè con un potenziale $V(q) \neq 0$ arbitrario, possiamo calcolare la ampiezza di transizione mediante un processo di limite che ci porterà a definire l'integrale di Feynman, o integrale sui cammini. Suddividendo l'intervallo di tempo T in N intervalli $\epsilon = T/N$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\langle q_N|e^{-iHT}|q_0\rangle &= \langle q_N|\left(e^{-iH\epsilon}\right)^N|q_0\rangle \\ &= \int dq_1\ldots dq_{N-1}\langle q_N|e^{-iH\epsilon}|q_{N-1}\rangle\langle q_{N-1}|e^{-iH\epsilon}|q_{N-2}\rangle\ldots\langle q_1|e^{-iH\epsilon}|q_0\rangle\end{aligned} \tag{1.5}$$

Notiamo che, siccome K e V non commutano,

$$e^{-i(K+V)\epsilon} = 1 - i(K+V)\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2}(K^2+V^2+KV+VK)\,, \tag{1.6}$$

mentre

$$e^{-iV\epsilon}e^{-iK\epsilon} = 1 - i(K+V)\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2}(K^2+V^2+2VK)\,. \tag{1.7}$$

Possiamo quindi scrivere

$$e^{-iH\epsilon} = e^{-iV\epsilon}e^{-iK\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,, \tag{1.8}$$

osservando che un errore $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ ripetuto N volte equivale ad un errore globale $\mathcal{O}(\epsilon)$, che diventerà comunque trascurabile nel limite $\epsilon \to 0$. Ciascuno dei fattori nella (1.5) può quindi essere approssimato come

$$\langle q_k|e^{-iH\epsilon}|q_{k-1}\rangle \approx \langle q_k|e^{-iV\epsilon}e^{-iK\epsilon}|q_{k-1}\rangle = e^{-iV(q_k)\epsilon}\langle q_k|e^{-iK\epsilon}|q_{k-1}\rangle\,, \tag{1.9}$$

e, usando la (1.3), otteniamo

$$\langle q_k|e^{-i\epsilon H}|q_{k-1}\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\epsilon}}e^{i\left(\frac{m(q_k-q_{k-1})^2}{2\epsilon^2}-V(q_k)\right)\epsilon} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\epsilon}}e^{i\left(\frac{mv_k^2}{2}-V(q_k)\right)\epsilon} . \tag{1.10}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo definito la velocità nell'intervallo k-mo come

$$v_k = \frac{(q_k - q_{k-1})}{\epsilon} , \tag{1.11}$$

di modo che possiamo riconoscere nel fattore di fase la lagrangiana $L = mv^2/2 - V(q)$. Se adesso sostituiamo nella (1.5) otteniamo

$$\langle q_N|e^{-iHT}|q_0\rangle \approx \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i\epsilon}}\right)^N \int \prod_{k=1}^{N-1} dq_k \exp\left(i\sum_k \left[\frac{mv_k^2}{2} - V(q_k)\right]\epsilon\right) + \mathcal{O}(\epsilon) . \tag{1.12}$$

Nel limite $\epsilon \to 0$ l'insieme di punti $\{q_N, q_{N-1}, \dots q_1, q_0\}$ formano una traiettoria $q(t)$ dal punto iniziale q_0 al punto finale q_N. La fase nella (1.12) diviene semplicemente l'azione classica lungo questa traiettoria,

$$\sum_k \left[\frac{mv_k^2}{2} - V(q_k)\right]\epsilon \to \int dt L\big(q(t), \dot{q}(t)\big) = S\big(q(t)\big) ,$$

mentre l'integrale della (1.12) si può interpretare come una *somma sulle traiettorie*. Nel limite $\epsilon \to 0$ la somma diventa un integrale nello spazio delle traiettorie $q(t)$. La misura di integrazione è *definita* dall'equazione

$$\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i\epsilon}}\right)^N \int \prod_{k=1}^{N-1} dq_k \to \int d[q(t)] .$$

Passando al limite $\epsilon \to 0$, otteniamo infine

$$\langle q_N|e^{-iTH}|q_0\rangle = \int d[q(t)]e^{iS(q(t))} , \tag{1.13}$$

dove l' integrale è esteso su tutte le traiettorie $q(t)$ tali che $q(t_0) = q_0$, e $q(t_0 + T) = q_N$.

1.2 L'approssimazione reticolare

L'integrale di Feynman è un *integrale funzionale*, cioè un integrale che si estende su tutte le funzioni $q(t)$ definite nell'intervallo $[t_0, t_0+T]$. È interessante considerare la (1.12) come una espressione approssimata che, almeno in linea di principio, si può prestare ad un calcolo esplicito. Questo tipo di approssimazione, che chiameremo approssimazione reticolare, è largamente utilizzata nella teoria dei campi, in quanto si presta alla esecuzione di calcoli numerici in situazioni in cui non è possibile ottenere risultati esatti, e dove falliscono i metodi perturbativi che illustreremo nel caso della elettrodinamica quantistica. L'approssimazione reticolare si è rivelata di particolare utilità nello studio della teoria fondamentale delle interazioni forti, la cromodinamica quantistica (Quantum Chromo Dynamics, o QCD), che non si presta a calcoli perturbativi se non in casi particolari. Ad esempio, nella

(1.12) il tempo t è rappresentato tramite un reticolo di punti, $t_k = t_0 + k\epsilon$, e la funzione $q(t)$ tramite il valore che essa assume ai tempi t_i, $q_i = q(t_i)$.

L'approssimazione all'ampiezza di transizione fornita dalla (1.12) ha errori $\mathcal{O}(\epsilon)$, e tanto bastava nella discussione precedente per indicare una convergenza al risultato della (1.13). Se l'interesse è centrato su metodi di calcolo numerico, diviene però di grande importanza pratica la *velocità* con cui il risultato approssimato converge a quello esatto. Ad esempio, come il lettore potrà facilmente dimostrare, la semplice modifica della eq. (1.8)

$$e^{-iH\epsilon} = e^{-i(V/2)\epsilon} e^{-iK\epsilon} e^{-i(V/2)\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \,, \tag{1.14}$$

permette di costruire uno schema di calcolo che converge molto più rapidamente al risultato esatto.

1.3 Il limite classico

La formulazione della meccanica quantistica mediante la somma sui cammini dell'eq. (1.13) si presta particolarmente alla discussione del limite classico di una teoria quantistica. Teniamo presente che in ogni caso la teoria "vera" è quella quantistica e che la teoria classica non è che un particolare limite di questa. Poichè il limite classico si ottiene quando $\hbar \to 0$, conviene riscrivere la (1.13) esplicitando la presenza di $\hbar$,

$$\langle q_N | e^{-iTH/\hbar} | q_0 \rangle = \int d[q(t)] e^{iS(q(t))/\hbar} \tag{1.15}$$

La situazione diviene approssimativamente classica se il valore dell'azione è molto grande rispetto ad $\hbar$. Supponiamo che esista una traiettoria $q_c(t)$, tale che $q_c(t_0) = q_0$, e $q_c(t_0 + T) = q_N$ che renda estrema l'azione. La condizione $\delta S = 0$ implica che traiettorie vicine alla $q_c(t)$ contribuiscano all'integrale (1.15) con la stessa fase (o fasi vicine), e quindi interferiscono in modo costruttivo. Al contrario, vicino ad ogni traiettoria che *non* estremizza l'azione ve ne sono altre con fase differente e che interferiscono distruttivamente. Quindi l'integrale sarà dominato dal contributo delle traiettorie vicine a $q_c(t)$, traiettorie la cui azione differisce da $S(q_c(t))$ per meno di $\hbar$.

Nel limite $\hbar \to 0$ il moto del sistema quantistico sarà quindi descritto dalla traiettoria "classica" $q_c(t)$.

È certo interessante notare che questo argomento permetta di spiegare un fatto altrimenti piuttosto misterioso. Il principio d'azione $\delta S = 0$ viene normalmente dimostrato partendo dalle equazioni del moto di Newton, ma questa derivazione non spiega la ragione della sua esistenza. L'origine del principio d'azione invece è chiara se ricordiamo che la meccanica classica altro non è che un particolare limite della meccanica quantistica.

1.4 Il tempo come variabile complessa

Sinora abbiamo discusso della somma sui cammini senza preoccuparci eccessivamente della convergenza degli integrali, ad esempio quello che appare nella eq. (1.13). In realtà, guardando la (1.13) si vede subito che c'è un problema: l'integrando $\exp[iS\big(q(t)\big)]$ è di modulo 1, quindi la definizione dell'integrale richiede qualche cura. In realtà avevamo già incontrato lo stesso problema nel

calcolare l'ampiezza di transizione in assenza di forze, Eq. (1.3) (si veda l'Appendice A). In quel caso abbiamo visto che occorre definire l'ampiezza di transizione relativa ad un tempo T come limite, per $\eta \to 0^+$, dell'ampiezza relativa ad un intervallo di tempo $T - i\eta$. Applicheremo lo stesso metodo per definire l'integrale sui cammini della (1.13), che riscriviamo ancora una volta in forma più esplicita,

$$\langle q_2|e^{-iHT}|q_1\rangle = \int d[q(t)]\exp(iS) = \int d[q(t)]\exp\left(i\int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q)\right]\right). \tag{1.16}$$

Per dare al tempo una parte immaginaria negativa scriviamo $t = (1 - i\chi)\tau$, con τ reale e χ costante positiva e piccola, di modo da poter approssimare $(1 - i\chi)^{-1}$ con $(1 + i\chi)$. Abbiamo quindi che

$$t = (1 - i\chi)\tau, \qquad \text{di modo che} \quad \begin{cases} dt = (1 - i\chi)\tau \\ \\ \dot{q} = \frac{dq}{dt} = (1 + i\chi)\frac{dq}{d\tau} \end{cases}. \tag{1.17}$$

e l'integrando della (1.16) diviene $\exp(iS_\chi)$, dove S_χ è l'azione calcolata con il tempo modificato:

$$\exp(iS_\chi) = \exp\left(i\int d\tau\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 - V(q)\right]\right)\cdot\exp\left(-\chi\int d\tau\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q)\right]\right). \tag{1.18}$$

A questo punto l'integrando $\exp(iS_\chi)$ ha modulo eguale a $\exp(-\chi I)$ dove I è l'integrale

$$I = \int d\tau\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q)\right] = \int d\tau\mathscr{H}(q,\dot{q}),$$

dove $\mathscr{H}(q,\dot{q})$ è l'energia della particella. Per chiarezza notiamo che, dato che $q(t)$ è una traiettoria arbitraria, in generale $\mathscr{H}(q,\dot{q})$ non è indipendente dal tempo. Per quanto riguarda la convergenza dell'integrale funzionale nella eq. (1.16) possiamo distinguere vari casi a seconda del comportamento della energia potenziale $V(q)$:

V(q) = 0 Questo è il caso della particella libera, dove si può esplicitamente calcolare l'integrale funzionale con il processo di limite delineato nella Sezione 1.1 e i metodi elementari sviluppati nella Appendice A. L'integrale funzionale risulta convergente

V(q) definito positivo In questo caso $I > I_0$, dove I_0 è il valore di I calcolato a parità di traiettoria per $V(q) = 0$. Quindi si ha almeno la stessa convergenza del caso precedente.

V(q) limitato inferiormente In questo caso, se $V(q) > V_0$, $I > I_0 + V_0 T$. L'aggiunta di una costante $V_0 T$ non muta la convergenza rispetto ai due casi precedenti.

V(q) non limitato inferiormente Bisogna valutare caso per caso. Se ad esmpio $V(q) = -q^n$ la convergenza dell'integrale funzionale dipende dal valore dell'esponente n. Si può dimostrare che l'integrale funzionale converge se $0 \geq n \geq -1$, e non converge se $n > 0$ o $n < -1$. Quindi il potenziale coulombiano è un caso limite.

Notiamo che i casi esclusi sono quelli in cui falliscono anche le formulazioni alternative della meccanica quantistica, ad esempio quella basata sulla meccanica ondulatoria.

1.5 La meccanica statistica

Nelle considerazioni precedenti, abbiamo sostituito l' integrazione sull'asse reale del tempo, con una integrazione nel piano complesso di t, lungo la retta individuata da:

$$t = (1 - i\chi)\tau \simeq e^{-i\chi}\tau = (\cos\chi - i\sin\chi)\tau \tag{1.19}$$

Il risultato converge anche per valori di χ non infinitesimi e possiamo spingerci al caso estremo in cui $\chi = \pi/2$, cioè $t = -i\tau$. Troviamo allora la seguente espressione per l'ampiezza di transizione tra tempi immaginari (!) $t_1 = 0, t_2 = -i\beta$

$$\begin{aligned}\langle q_2|e^{-\beta H}|q_1\rangle &= \int d[q(\tau)]\exp\left(-\int_0^\beta d\tau\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q)\right]\right)\\ &= \int d[q(\tau)]\exp\left(-\int_0^\beta d\tau\,\mathscr{H}(q,\dot{q})\right)\end{aligned} \tag{1.20}$$

dove l'integrale è sui cammini che vanno da q_1 per $\tau = 0$ a q_2 per $\tau = \beta$. Questa espressione ricorda stranamente la funzione di partizione in meccanica statististica. Per capire questa relazione restringiamo l' integrale funzionale ai *cammini periodici*, tali cioè che $q_1 = q(0) = q_2 = q(-i\beta)$.

Assumiamo che gli autostati dell'hamiltoniana della nostra particella quantistica siano $|m\rangle$ e i corrispondenti autovalori E_m. Con l'aiuto della (1.20) la funzione di partizione della particella in equilibrio termico ad una temperatura inversa[1] β si può esprimere come integrale sui cammini,

$$\begin{aligned}Z(\beta) &= \sum_m e^{-\beta E_m}\\ &= \sum_m \langle m|e^{-\beta H}|m\rangle \qquad \text{(cioè una traccia...)}\\ &= \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H} = \int dq\langle q|e^{-\beta H}|q\rangle \qquad (1.21)\\ &= \int d[q(\tau)]\exp\left(-\int_0^\beta d\tau\,\mathscr{H}(q,\dot{q})\right) \qquad \text{(...un integrale sui cammini)} \qquad (1.22)\end{aligned}$$

dove l'integrale è su tutti i cammini ciclici, che partono da un arbitrario valore di q a $t = 0$ e tornano allo stesso punto per $t = -i\beta$. Così definito l'integrale sui cammini assorbe l'integrazione che proviene dalla traccia (penultimo passo della eq. 1.21).

Notiamo anche che nel limite $\beta \to \infty$ la funzione di partizione è dominata dallo stato fondamentale:

$$Z(\beta) \xrightarrow[\beta\to\infty]{} \exp(-\beta E_0)(1 + \text{termini esponenzialmente piccoli in}\,\beta)\,. \tag{1.23}$$

1.6 Le funzioni di Green

Definiamo come funzioni di Green i valori di aspettazione nello stato fondamentale del prodotto di operatori, ad esempio, nel caso della particella in moto unidimensionale, i prodotti della variabile

[1] Ricordiamo che $\beta = 1/k_B T$, dove T è la temperatura assoluta e k_B è la costante di Boltzman. Per non fare confusione con il tempo, nel testo usiamo β anzichè la temperatura.

$q(t)$ presa a tempi diversi, $t_1, t_2, \dots t_N$ *in ordine decrescente*,

$$\langle 0| q(t_1)\, q(t_2) \dots q(t_N) |0\rangle \qquad (t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_N)\,.$$

Abbiamo adottato la rappresentazione di Heisenberg, cioè

$$q(t_1) = e^{iHt} q e^{-iHt}\,.$$

Come vedremo una espressione di questo tipo può essere semplicemente scritta come somma sui cammini.

Per estendere la definizione anche al caso di tempi arbitrari $t_1, t_2, \dots t_N$, introduciamo il concetto di prodotto ordinato nel tempo, $T\big(q(t_1)\, q(t_2) \dots q(t_N)\big)$, che è semplicemente il prodotto degli stessi operatori ordinati *in ordine di tempo decrescente*. Ad esempio, nel caso di due operatori:

$$T(q(t_1)\, q(t_2)) = \begin{cases} q(t_1)\, q(t_2) & \text{se } t_1 \geq t_2 \\ q(t_2)\, q(t_1) & \text{se } t_2 \geq t_1 \end{cases}\,. \tag{1.24}$$

Possiamo allora definire la funzione di Green ad N tempi come

$$G_N(t_1, t_2, \dots t_N) = \langle 0| T\big(q(t_1)\, q(t_2) \dots q(t_N)\big) |0\rangle\,. \tag{1.25}$$

Questa definizione va in qualche modo motivata: perchè dare particolare importanza al valore di aspettazione nello stato fondamentale $|0\rangle$? Perchè l'ordinamento temporale? La risposta a queste domande si troverà nella teoria dei campi a cui ci stiamo preparando. In termini semplici lo stato fondamentale della teoria dei campi è lo stato "vuoto", cioè privo di particelle. Il vuoto ha varie caratteristiche che lo rendono unicamente degno di interesse: dal vuoto si possono creare tutti gli altri stati mediante operatori di creazione; il vuoto è l'unico stato di una teoria di campo che sia invariante sotto traslazioni nello spazio e nel tempo e sotto trasformazioni di Lorentz e rotazioni, e si potrebbe continuare. Per quanto riguarda l'ordinamento temporale vedremo che esiste un rapporto diretto tra le funzioni di Green così definite e gli elementi della matrice S. Peraltro. già sappiamo (cfr. la formula di Dyson, in [1]) che il prodotto T-ordinato assume un ruolo centrale nella teoria delle perturbazioni.

Dimostriamo adesso che la (1.25) può essere trasformata nella seguente somma sui cammini

$$G_N(t_1, t_2, \dots t_N) = \frac{\int d[q(t)] \exp(iS)\, q(t_1)\, q(t_2) \dots q(t_N)}{\int d[q(t)] \exp(iS)}\,. \tag{1.26}$$

Nel numeratore e nel denominatore, l'integrale è esteso su tutti cammini tra $t = -\infty$ e $t = \infty$, tali che $q(+\infty) = q(-\infty)$. Si deve intendere, inoltre, che i tempi si ottengono come limite di tempi complessi, secondo quanto discusso nella Sezione 1.4. Più precisamente:

$$G_N(t_1, t_2, \dots t_N) = \lim_{\chi \to 0^+} \lim_{T \to \infty} \left[\frac{\int d[q(t')] \exp(iS)\, q(t'_1)\, q(t'_2) \dots q(t'_N)}{\int d[q(t')] \exp(iS)} \right]\,, \tag{1.27}$$

e gli integrali sono estesi su tutti i cammini *periodici* tra $t = -T' = -T(1 - i\chi)$ e $t = T' = T(1 - i\chi)$, tali cioè che $q(T') = q(-T')$, e $t'_{1,2,\dots} = (1 - i\chi)\, t_{1,2,\dots}$.

Per dimostrare l'equivalenza tra (1.27) e (1.25) consideriamo per semplicità il caso di due operatori, ed esplicitiamo la dipendenza dal tempo degli operatori in (1.25). Consideriamo il caso in cui $t_1 \geq t_2$

$$\begin{aligned} G_2(t_1, t_2) &= \langle 0|q(t_1)\, q(t_2)|0\rangle = \langle 0|e^{iHt_1}\, q\, e^{-iH(t_1-t_2)}\, q\, e^{-iHt_2}|0\rangle \qquad (t_1 \geq t_2) \\ &= \frac{\langle 0|e^{-iH(T-t_1)}\, q\, e^{-iH(t_1-t_2)}\, q\, e^{-iH(t_2+T)}|0\rangle}{\langle 0|e^{-2iHT}|0\rangle} \,. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Nel secondo passo T è un tempo arbitrario, ma tale che $T > t_1 > t_2 > -T$. Il termine a denominatore, $\langle 0|e^{-2iHT}|0\rangle = \exp(-2iE_0T)$ compensa l'introduzione di due fattori e^{-iHT} nel numeratore, di modo che il risultato non dipende da T. A questo punto introduciamo i tempi complessi, e scriviamo:

$$G_2(t_1, t_2) = \lim_{\chi\to 0^+} \lim_{T\to\infty} \left[\frac{\langle 0|e^{-i(T'-t_1')H}\, q\, e^{-i(t_1'-t_2')H}\, q\, e^{-i(t_2'+T')H}|0\rangle}{\langle 0|e^{-2iT'H}|0\rangle} \right] ,$$

dove $T' = (1-i\chi)T$, $t_{1,2}' = (1-i\chi)\, t_{1,2}$. Il limite $T \to \infty$ è in apparenza inutile, dato che come abbiamo osservato il termine in parentesi quadra è indipendente da T. Tuttavia esso ci permette di passare dal valore di aspettazione in $|0\rangle$ alla traccia degli operatori sia a numeratore che a denominatore:

$$G_2(t_1, t_2) = \lim_{\chi\to 0^+} \lim_{T\to\infty} \left[\frac{\sum_m \langle m|e^{-i(T'-t_1')H}\, q\, e^{-i(t_1'-t_2')H}\, q\, e^{-i(t_2'+T')H}|m\rangle}{\sum_m \langle m|e^{-2iT'H}|m\rangle} \right] .$$

Infatti per ogni $\chi > 0$ e per T "grande" il contributo degli stati eccitati $|m\rangle \neq |0\rangle$ è depresso sia a numeratore che a denominatore per un fattore $\exp\big(-2\chi(E_m - E_0)T\big)$ rispetto a quello dello stato fondamentale, e svanisce nel limite $T \to \infty$, che è eseguito *prima* di quello $\chi \to 0^+$. Notiamo che l'ordine dei limiti è importante!

Dato che la traccia è indipendente dalla base scelta per descrivere gli stati, possiamo usare la base degli autostati della posizione, $|q\rangle$,

$$G_2(t_1, t_2) = \lim_{\chi\to 0^+} \lim_{T\to\infty} \left[\frac{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q}|e^{-i(T'-t_1')H}\, q\, e^{-i(t_1'-t_2')H}\, q\, e^{-i(t_2'+T')H}|\tilde{q}\rangle}{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q}|e^{-2iT'H}|\tilde{q}\rangle} \right] .$$

Per completare la dimostrazione basta mostrare che l'espressione tra parentesi quadre è identica a quella che otterremmo dalla (1.27) nel caso di due operatori,

$$\frac{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q}|e^{-iH(T'-t_1')}\, q\, e^{-iH(t_1'-t_2')}\, q\, e^{-iH(t_2'+T')}|\tilde{q}\rangle}{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q}|e^{-2iHT'}|\tilde{q}\rangle} = \frac{\int d[q(t')] \exp(iS)\, q(t_1')\, q(t_2')}{\int d[q(t')] \exp(iS)} \,. \tag{1.29}$$

In effetti il numeratore e il denominatore nelle due espressioni sono separatamente eguali. Per quanto riguarda il denominatore, $\langle \tilde{q}|e^{-2iT'H}|\tilde{q}\rangle$ è una ampiezza di transizione, che possiamo esprimere come $\int d[q(t')] \exp(iS)$, dove l'integrazione è su tutti i cammini che partono da $\tilde{q}$ a $t = -T'$ e tornano allo stesso punto per $t = T'$. Per eseguire l'integrazione su $\tilde{q}$ basta estendere l'integrale sui cammini a tutti quelli che, partendo da *qualsiasi* punto per $t = -T'$, tornano al punto di partenza per $t = T'$. I due denominatori sono quindi eguali.

Per il numeratore, assumiamo che sia $T > t_1 > t_2 > -T$, e introduciamo accanto ai due operatori q due somme sul sistema completo di stati, $\int dq|q\rangle\langle q| = 1$

$$\begin{aligned}
&\int d\tilde{q}\langle\tilde{q}|e^{-iH(T'-t_1')}\, q\, e^{-iH(t_1'-t_2')}\, q\, e^{-iH(t_2'+T')}|\tilde{q}\rangle \\
&= \iiint d\tilde{q}\, dq_1\, dq_2 \langle\tilde{q}|e^{-iH(T'-t_1')}|q_1\rangle\langle q_1|q\, e^{-iH(t_1'-t_2')}|q_2\rangle\langle q_2|q\, e^{-iH(t_2'+T')}|\tilde{q}\rangle \\
&= \iiint d\tilde{q}\, dq_1\, dq_2\; q_1 q_2 \langle\tilde{q}|e^{-iH(T'-t_1')}|q_1\rangle\langle q_1|\, e^{-iH(t_1'-t_2')}|q_2\rangle\langle q_2|\, e^{-iH(t_2'+T')}|\tilde{q}\rangle\ .
\end{aligned}$$

L'ultima espressione contiene il prodotto di tre ampiezze di transizione, che possiamo scrivere come una singola somma sui cammini che passano rispettivamente per q_1 al tempo t_1' e per q_2 a t_2':

$$[q(-T') = \tilde{q}] \to [q(t_2') = q_2] \to [q(t_1') = q_1] \to [q(T') = \tilde{q}]\ .$$

L'integrazione su $\tilde{q}$, q_1, q_2 significa estendere l'integrale funzionale su tutti i cammini periodici tali cioè che $[q(T') = q(-T')]$, sostituendo il fattore $q_1 q_2$ con $q(t_1')q(t_2')$, e si ottiene così il numeratore del secondo membro della eguaglianza (1.29). Lasciamo come esercizio la dimostrazione che il risultato è corretto anche per l'altro possibile ordinamento dei tempi, $t_2 > t_1$. La dimostrazione si estende facilmente, seguendo gli stessi passi, al caso in cui siano presenti più di due operatori.

Capitolo 2

Passaggio alla teoria dei campi

La procedura che abbiamo descritto per il caso di un grado di libertà si può estendere immediatamente al caso di un numero finito di gradi di libertà. Tutti i risultati ottenuti valgono direttamente per un sistema con n gradi di libertà, purchè si intenda che il simbolo q deve essere interpretato come un vettore ad n componenti, $q = \{q_1 \dots q_n\}$. Ad esempio una funzione di Green può essere definita come

$$G_{k_1,k_2\dots,k_N}(t_1,\, t_2, \dots\, t_N) = \langle 0| T\left(q_{k_1}(t_1)\, q_{k_2}(t_2) \dots q_{k_N}(t_N)\right)|0\rangle \ . \tag{2.1}$$

Per "cammino" si intende la traiettoria del vettore $q_k(t)$ tra il tempo iniziale t_1 e il tempo finale t_2, cioè l'insieme delle funzioni $q_k(t)$ nell'intervallo $t_1 \geq t \geq t_2$.

Queste idee si estendono facilmente, almeno dal punto di vista formale, ad una teoria di campo. Considerando, ad esempio, il caso di un campo scalare reale $\phi(\vec{x}, t)$, possiamo definire la lagrangiana L come integrale di una densità di lagrangiana e l'azione come integrale sul tempo della lagrangiana

$$\begin{aligned} &\mathscr{L} = \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad , \quad L = \int d^3x\, \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \\ &S = \int d\,t\, L = \int d^4x\, \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \ . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Possiamo pensare questo sistema come limite di un campo definito su un reticolo di punti $\vec{x}_k$ a distanza a, il *passo reticolare*, che coprono un cubo di lato L. Si tratta di un doppio limite $a \to 0$, $L \to \infty$. Per ogni valore di a, L abbiamo un numero finito $n = (L/a)^3$ di punti, e il campo risulta descritto dalle n variabili dinamiche $\phi_k(t) = \phi(\vec{x}_k, t)$. Nella versione discretizzata, scriveremo l'azione come

$$S = \int d\,t \sum_k a^3\ \mathscr{L}[\phi(\vec{x}_k, t), \partial_\mu \phi(\vec{x}_k, t)] = \int d\,t \sum_k a^3 \mathscr{L}_k \ ,$$

dove $\mathscr{L}_k$ è la densità di lagrangiano nel punto $\vec{x}_k$, calcolata approssimando le derivate del campo con differenze, ad esempio

$$\frac{\partial \phi(\vec{x}_k,\, t)}{\partial x} \approx \frac{\phi(x_k + a,\, y_k,\, z_k,\, t) - \phi(x_k,\, y_k,\, z_k,\, t)}{a} \ .$$

La descrizione di un campo mediante un reticolo di punti, e un passaggio al limite del continuo, può essere usata per definire formalmente una teoria di campo, ma anche per eseguire calcoli numerici

di grandezze interessanti, ad esempio le funzioni di Green. In questo secondo caso conviene di solito rappresentare anche il tempo come variabile discreta, come abbiamo accennato nella Sezione 1.2.

In conclusione una teoria di campo può essere considerata come caso limite di un sistema a molti gradi di libertà, e la corrispondente teoria quantistica può essere definita mediante la somma sui cammini. Per "cammino", con valori fissati di a e L, si intende l'insieme delle funzioni $\phi_k(t)$ nell'intervallo temporale assegnato. Nel limite $a \to 0$, $L \to \infty$ questo diviene il valore della funzione $\phi(\vec{x}, t)$ per tutti i valori di $\vec{x}$ e per t nell'intervallo dato. Rimane da dimostrare la convergenza del processo di limite, cosa che non si sa fare in generale se non nel caso più semplice, quello di campi liberi, e in pochi altri casi. Per campi in interazione si può ricorrere alla teoria delle perturbazioni, che discuteremo nel seguito. Vedremo allora che un passo essenziale è costituito dalla procedura di rinormalizzazione, necessaria per eliminare (o meglio interpretare) le divergenza che emergono nel limite di piccole distanze, $a \to 0$.

Supponendo di avere risolto i problemi relativi al passaggio al limite, quello che abbiamo detto nelle sezioni precedenti si applica direttamente a una teoria di campo. Ad esempio possiamo definire la funzione di Green ad N punti come

$$G(x_1, x_2, \dots x_N) = \langle 0| T\left(\phi(x_1)\,\phi(x_2)\dots\phi(x_N)\right)|0\rangle \,, \tag{2.3}$$

dove $|0\rangle$ indica lo stato vuoto, e x_k il quadrivettore $(\vec{x}_k, t_k$. Come nel caso finito-dimensionale, G può essere espressa come integrale funzionale:

$$G(x_1, \dots x_N) = \frac{\int d[\phi(x)]\exp(iS)\,\phi(x_1)\,\phi(x_2)\dots\phi(x_N)}{\int d[\phi(x)]\exp(iS)} \,, \tag{2.4}$$

dove $d[\phi(x)]$ rappresenta la misura nello spazio delle funzioni $\phi(x)$. Anche in questo caso, come nella Sezione 1.6, questa espressione va intesa come limite,

$$G(x_1, \dots x_N) = \lim_{\chi\to 0^+}\lim_{\substack{T\to\infty\\ L\to\infty}}\left[\frac{\int d[\phi(\vec{x}, t')]\exp(iS)\,\phi(\vec{x}_1, t_1')\,\phi(\vec{x}_2, t_2')\dots\phi(\vec{x}_N, t_N')}{\int d[\phi(\vec{x}, t')]\exp(iS)}\right], \tag{2.5}$$

e l'integrale in parentesi quadra si estende su tutte le funzioni $\phi(\vec{x}, t')$, con $t' = (1 - i\chi)\,t$ compreso tra $\pm(1 - i\chi)\,T$, e periodiche sia nel tempo che nello spazio, cioè tali che

$$\begin{gathered}\phi\left[\vec{x}, (1 - i\chi)\,T\right] = \phi\left[\vec{x}, -(1 - i\chi)\,T\right] \,, \\ \phi(x, y, z, t) = \phi(x + L, y, z, t) = \phi(x, y + L, z, t) = \phi(x, y, z + L, t) \,.\end{gathered} \tag{2.6}$$

La periodicità sia nella direzione temporale che nella direzione spaziale permette di eseguire liberamente integrazioni per parti. Ad esempio

$$\int d^4x\,(\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi) = -\int d^4x\,(\phi\,\partial_\mu\partial^\mu\phi) \,. \tag{2.7}$$

Queste espressioni si generalizzano al caso di più campi, $\phi_k(x)$, $(k = 1\dots n)$:

$$\begin{aligned} G_{k_1\dots,k_N}(x_1, \dots x_N) &= \langle 0| T\left(\phi_{k_1}(x_1)\dots\phi_{k_N}(x_N)\right)|0\rangle \\ &= \frac{\int \prod_{k=1}^n d[\phi_k(x)]\exp(iS)\,\phi_{k_1}(x_1)\dots\phi_{k_N}(x_N)}{\int \prod_{k=1}^n d[\phi_k(x)]\exp(iS)} \,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Il caso di un campo complesso si può ricondurre a quello di due campi reali[1],

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2); \qquad \phi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)\,. \tag{2.9}$$

Il fattore $1/\sqrt{2}$ è scelto in modo che $d[\phi(x)]d[\phi^\dagger(x)] = d[\phi_1(x)]d[\phi_2(x)]$ come si verifica dallo Jacobiano. Usando questa relazione il calcolo delle funzione di Green si riconduce alla (2.8), e si ottiene in generale

$$\begin{aligned}&\langle 0|T\Big(\phi(x_1)\dots\phi(x_N)\,\phi^\dagger(y_1)\dots\phi^\dagger(y_M)\Big)|0\rangle\\ &\qquad = \frac{\int d[\phi(x)]d[\phi^\dagger(x)]\exp(iS)\,\phi(x_1)\dots\phi(x_N)\,\phi^\dagger(y_1)\dots\phi^\dagger(y_M)}{\int d[\phi(x)]d[\phi^\dagger(x)]\exp(iS)}\,.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Nel caso semplice di una funzione a due punti,

$$\begin{aligned}&\langle 0|T\Big(\phi(x)\,\phi^\dagger(y)\Big)|0\rangle\\ &\qquad = \frac{\int d[\phi(x)]d[\phi^\dagger(x)]\exp(iS)\,\phi(x)\,\phi^\dagger(y)}{\int d[\phi(x)]d[\phi^\dagger(x)]\exp(iS)}\,.\end{aligned} \tag{2.11}$$

La dimostrazione delle eqq. (2.10) e (2.11) è elementare, basta notare che le funzioni di Green definite tramite i valori di aspettazione sono lineari nei campi in ciascun punto, e che questo è ovviamente vero per la loro definizione in termini di somma sui cammini, per cui

$$\begin{aligned}\langle 0|T\big(\cdots(\phi_1(x)\pm i\phi_2(x))\cdots\big)|0\rangle &= \langle 0|T\big(\cdots\phi_1(x)\cdots\big)|0\rangle \pm i\langle 0|T\big(\cdots\phi_2(x)\cdots\big)|0\rangle\\ &= \frac{\int d[\phi(x)]d[\phi^\dagger(x)]\exp(iS)\,\cdots(\phi_1(x)\pm i\phi_2(x))\cdots}{\int d[\phi(x)]d[\phi^\dagger(x)]\exp(iS)}\,.\end{aligned}$$

2.1 Il funzionale generatore

In questa Sezione introduciamo il formalismo basato sull'uso del *funzionale generatore*, che permette di esprimere in modo compatto l'insieme delle funzioni di Green. Consideriamo il caso di un sistema con n gradi di libertà $q_k(t)$, $(k = 1\dots n)$. Definiamo il funzionale generatore Z come $[\mathbf{q} \equiv (q_1,\dots,q_n)]$

$$Z[J] \equiv Z[J_1(t),\dots J_n(t)] = \int d[\mathbf{q}(t)]\exp\left(iS\big(\mathbf{q}(t)\big) - i\int dt\sum_k q_k(t)J_k(t)\right), \tag{2.12}$$

dove le $J_k(t)$ sono n funzioni del tempo, e l'integrale funzionale va definito come limite

$$Z[J] \equiv Z[J_1(t),\dots J_n(t)] = \lim_{\chi\to 0^+}\lim_{T\to\infty}\int d[\mathbf{q}(t')]\exp\left(iS\big(\mathbf{q}(t')\big) - i\int dt'\sum_k q_k(t')J_k(t')\right), \tag{2.13}$$

[1] Useremo il simbolo † sia per indicare la coniugazione hermitiana nel caso di operatori, che la coniugazione complessa delle funzioni numeriche che rappresentano le traiettorie delle stesse grandezze.

e gli integrali nella parentesi sono estesi su tutti i cammini *periodici* tra $t = -T' = -T(1-i\chi)$ e $t = T' = T(1-i\chi)$, tali cioè che $q(T') = q(-T')$, e $t' = (1-i\chi)t$.

Dalla definizione, segue subito che $Z[0]$ è proprio il denominatore che compare nella espressione delle funzioni di Green nel formalismo degli integrali sui cammini. Dimostreremo ora che le funzioni di Green si ottengono come derivate funzionali di $Z[J]$.

Il concetto di "derivata funzionale" è molto semplice. Consideriamo una funzione $f(x)$, e un funzionale $X\left[f(x)\right]$. Consideriamo poi una variazione della funzione $f(x)$ nel punto $x = y$, cioè $f(x) \to f(x) + \epsilon\delta^{(4)}(x-y)$. La derivata funzionale $\delta X[f(x)]/\delta f(y)$ è definita, in analogia con la derivata di una ordinaria funzione di una variable, come

$$\frac{\delta X[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left\{X[f(x)+\epsilon\delta^{(4)}(x-y)] - X[f(x)]\right\} . \tag{2.14}$$

Utilizzando la (2.14) vediamo ora come si ottiene il numeratore che compare nell'espressione della funzione di Green nel caso del campo scalare libero, nel quale il funzionale generatore si scrive

$$Z[J] = \int d[\phi]\; e^{S - i\int d^4x\phi(x)J(x)} . \tag{2.15}$$

Consideriamo la derivata funzionale

$$\begin{aligned} i\,\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)} &= i\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int d[\phi]\; e^{\{iS - i\int d^4x\phi(x)[J(x)-\epsilon\delta^{(4)}(x-x_2))\}} - \int d[\phi]\; e^{\{iS - i\int d^4x\phi(x)J(x)\}}\right\} \\ &= i\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int d[\phi]\; e^{\{iS - i\int d^4x\phi(x)J(x)\}} e^{-i\epsilon\int d^{(4)}\phi(x)\delta^{(4)}(x-x_2)} - \int d[\phi]\; e^{\{iS - i\int d^4x\phi(x)J(x)\}}\right\} . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Utilizzando la funzione delta per effettuare l'integrazione, e sviluppando l'esponenziale in serie di potenze di ϵ si ottiene

$$i\,\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)} = \int d[\phi]\; \phi(x_2)\; e^{\{iS - i\int d^4x\phi(x)J(x)\}} , \tag{2.17}$$

e derivando una seconda volta

$$\frac{i\delta}{\delta J(x_1)}\frac{i\delta}{\delta J(x_2)}Z[J] = \int d[\phi]\; \phi(x_1)\,\phi(x_2)\; e^{\{iS - i\int d^4x\phi(x)J(x)\}} . \tag{2.18}$$

Abbiamo quindi dimostrato che la funzione di Green a due punti si puo' scrivere nella forma

$$G(x_1, x_2) = \frac{1}{Z[0]}\left[\frac{i\delta}{\delta J(x_1)}\frac{i\delta}{\delta J(x_2)}Z[J]\right]_{J=0} . \tag{2.19}$$

Il risultato ottenuto si estende facilmente al caso di funzioni di Green a più punti e a teorie di campo più complesse. Nel caso di N campi $\phi_1(x)\ldots\phi_N(x)$, il funzionale generatore dipenderà da N funzioni di x, $J_k(x)$, $(k = 1\ldots N)$ secondo la

$$Z[J] = \int d[\phi(x)]\exp\left(iS\big(\phi(x)\big) - i\int d^4x\sum_k \phi_k(x)J_k(x)\right) . \tag{2.20}$$

La definizione di questo integrale richiede le prescrizioni di limite e periodicità specificate nella Sezione precedente, eqs. (2.5), (2.6). Le funzioni di Green a N punti risultano allora

$$\begin{aligned} G_{k_1,\dots k_N}(x_1,\cdots x_N) &= \langle 0|T\left(\phi_1(x_1)\cdots\phi_N(x_N)\right)|0\rangle \\ &= \frac{\int d[\phi(x)]\phi(x_1)\dots\phi(x_N)\exp\left(iS\left(\phi(x)\right)\right)}{\int d[\phi(x)]\exp\left(iS\left(\phi(x)\right)\right)} = \\ &= (i)^N\frac{1}{Z[0]}\left[\frac{\delta^N Z[J]}{\delta J_1(x_1)\cdots\delta J_N(x_N)}\right]_{J=0} . \end{aligned} \tag{2.21}$$

Notiamo che la (2.21) si ottiene con la semplice regola di sostituzione

$$\phi_k(x)\to i\frac{\delta}{\delta J_k(x)} , \tag{2.22}$$

che possiamo ad esempio utilizzare nel modo seguente: se $F[\phi]$ è un arbitrario funzionale dei campi, otteniamo che

$$\int d[q(t)]\ F[\phi]\exp(iS) = \left[F\left[i\frac{\delta}{\delta J}\right]\ Z[J]\right]_{J=0} , \tag{2.23}$$

un risultato che utilizzeremo per ricavare lo sviluppo perturbativo di una teoria di campo in presenza di interazioni.

Per un campo complesso possiamo definire un funzionale generatore mediante due funzioni reali J_1, J_2 o, meglio, in termini di una funzione complessa J e della sua coniugata $J^\dagger$,

$$Z(J,J^\dagger) = \int d[\phi(x)]d[\phi^\dagger(x)]\exp\left(iS\left(\phi(x),\phi^\dagger(x)\right) - i\int d^4x\left(\phi^\dagger(x)J(x)+J^\dagger(x)\phi(x)\right)\right) . \tag{2.24}$$

Le funzioni di Green si ottengono allora dalla regola di sostituzione (vedi eq. 2.22)

$$\phi(x)\to i\frac{\delta}{\delta J^\dagger(x)}, \qquad \phi^\dagger(x)\to -i\frac{\delta}{\delta J(x)} \tag{2.25}$$

che si estende in modo ovvio al caso di più campi reali o complessi.

Invarianza per traslazioni e conservazione del quadri-momento. La forma delle funzioni di Green data nella seconda riga della (2.21) permette di discutere in modo molto semplice l' invarianza per traslazioni. Se consideriamo una traslazione di a^μ, possiamo scrivere:

$$G_{k_1,\dots k_N}(x_1+a,\cdots x_N+a) = \frac{\int d[\phi(x)]\phi(x_1+a)\dots\phi(x_N+a)\exp\left(iS\left(\phi(x)\right)\right)}{\int d[\phi(x)]\exp\left(iS\left(\phi(x)\right)\right)} \tag{2.26}$$

$$= \frac{\int d[\phi(x)]\phi(x_1+a)\dots\phi(x_N+a)\exp\left(iS\left(\phi(x+a)\right)\right)}{\int d[\phi(x)]\exp\left(iS\left(\phi(x)\right)\right)} \tag{2.27}$$

$$= \frac{\int d[\phi(x)]\phi(x_1)\dots\phi(x_N)\exp\left(iS\left(\phi(x)\right)\right)}{\int d[\phi(x)]\exp\left(iS\left(\phi(x)\right)\right)} \tag{2.28}$$

$$= G_{k_1,\dots k_N}(x_1,\cdots x_N) , \tag{2.29}$$

dove abbiamo usato l'invarianza per traslazioni dell'azione e l' ultimo passaggio segue dall'invarianza della misura di integrazione funzionale per la sostituzione: $\phi(x) \to \phi(x+a)$.

Per concludere notiamo che, siccome le funzioni di Green dipendono solo delle differenze delle x_k, la loro trasformata di Fourier deve contenere una funzione delta che esprime la conservazione del quadrimpulso

$$\int \ldots \int d^4x_1 \ldots d^4x_N \, e^{i[(p_1x_1)+\cdots+(p_Nx_N)]} = G_{k_1,\ldots k_N}(x_1, \cdots x_N) \tag{2.30}$$

$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + \ldots p_N) \, \tilde{G}(p_1, \ldots, p_N) \, , \tag{2.31}$$

dove $\tilde{G}$ è una funzione regolare dei quadrimpulsi. Lasciamo al lettore di dimostrare la (2.31) a partire dalla (2.26) (si veda, ad esempio la Ref. [1], Cap. 12).

2.2 L'oscillatore armonico

In questa Sezione applicheremo i concetti che abbiamo illustrati ad un caso particolarmente semplice, quello di un oscillatore armonico di massa $m = 1$. L'hamiltoniana e la lagrangiana di questo sistema sono, rispettivamente

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) \quad , \quad L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) \, . \tag{2.32}$$

Vogliamo usare la tecnica del funzionale generatore, Z, per calcolare le funzioni di Green. Descriveremo i calcoli in dettaglio, perchè la stessa procedura si applica in contesti interessanti, come ad esempio alla teoria dei campi. Prima di procedere con il funzionale Z, calcoliamo la funzione di Green a due punti partendo dalla normale formulazione della Meccanica Quantistica, in modo da poter verificare la equivalenza delle due formulazioni.

Ricordiamo che, in termini degli operatori di creazione e distruzione (si veda, ad esempio [4]), possiamo scrivere le relazioni

$$\begin{aligned} & q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger) \, , \\ & a^\dagger|0\rangle = |1\rangle \quad , \quad a^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle \quad , \quad a|1\rangle = |0\rangle \, , \\ & H|0\rangle = \frac{\omega}{2}|0\rangle \quad , \quad H|1\rangle = \frac{3\omega}{2}|1\rangle \, , \end{aligned} \tag{2.33}$$

dalle quali segue che

$$q|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}|1\rangle \, , q|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(|0\rangle + \sqrt{2}|2\rangle\right) \, . \tag{2.34}$$

Consideriamo per primo l'ordinamento temporale $t_1 > t_2$. In questo caso

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2) &= \langle 0|q(t_1)\, q(t_2)\, |0\rangle \qquad , \qquad (t_1 > t_2) \\ &= \langle 0|e^{iHt_1} q \, e^{-iH(t_1-t_2)} q \, e^{-iHt_2}|0\rangle \\ &= \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega(t_1-t_2)} \, , \end{aligned}$$

e, combinando il risultato con quello che si ottiene per $t_2 > t_1$, troviamo

$$G(t_1, t_2) = \frac{1}{2\omega}\left(e^{-i\omega(t_1-t_2)}\theta(t_1-t_2) + e^{-i\omega(t_2-t_1)}\theta(t_2-t_1)\right) . \tag{2.35}$$

Per quanto riguarda il metodo della somma sui cammini, notiamo anzitutto che con una integrazione per parti

$$S = \frac{1}{2}\int dt\left(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2\right) = -\frac{1}{2}\int dt\left(q\ddot{q} - \omega^2 q^2\right) = -\frac{1}{2}\int dt\left(q\mathcal{O}q\right) , \tag{2.36}$$

dove $\mathcal{O}$ è l'operatore differenziale

$$\mathcal{O} = \partial_t^2 + \omega^2 . \tag{2.37}$$

Il funzionale generatore sarà quindi

$$Z[J] = \int d[q(t)] \exp\left[-\frac{i}{2}\int dt\left(q\mathcal{O}q + 2qJ\right)\right] . \tag{2.38}$$

La strategia per eseguire l'integrale è quella standard per integrare funzioni del tipo $\exp(-ax^2 + bx)$, usata, per esempio, nell'Appendice A. Consiste nel riscrivere l'esponente come un quadrato perfetto, per ottenere un integrale gaussiano. Procediamo formalmente, riscrivendo la (2.38) come[2]

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int d[q(t)] \exp\frac{-i}{2}\int dt\left((q+\mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(q+\mathcal{O}^{-1}J) - (\mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J)\right) \\ &= \exp\left[\frac{i}{2}\int dt(\mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J)\right]\int d[q(t)]\exp\left[\frac{-i}{2}\int dt(q+\mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(q+\mathcal{O}^{-1}J)\right] . \end{aligned} \tag{2.39}$$

L'integrale funzionale nell'ultima espressione è in realtà una costante indipendente da J, come si vede con un cambiamento di variabili[3] $q \to q' = q + \mathcal{O}^{-1}J$, e in conclusione

$$Z[J] = K\exp\left[\frac{i}{2}\int dt(\mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J)\right] . \tag{2.40}$$

Una costante moltiplicativa non ha alcun effetto sul valore delle funzioni di Green, per cui possiamo semplicemente scrivere

$$Z[J] = \exp\left[\frac{i}{2}\int dt\, J\mathcal{O}^{-1}J\right] . \tag{2.41}$$

[2] Per verificare questo risultato, notare che, con due integrazioni per parti,

$$\int dt(\mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}\phi = \int dt\left(\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J)\right)\phi = \int dt\, J\phi$$

.

[3] Ricordiamo che l'integrale funzionale si estende su tutte le orbite periodiche, $q(+\infty) = q(-\infty)$, quindi vogliamo che anche q' sia periodico. Occorre quindi imporre qualche restrizione su $J(t)$, ad esempio che le funzioni $J(t)$ ammissibili tendano abbastanza rapidamente a zero per $t \to \pm\infty$. Una analoga restrizione si dovrà applicare nel caso della teoria dei campi.

L'inverso dell'operatore differenziale $\mathcal{O}$ sarà un operatore integrale

$$(\mathcal{O}^{-1}J)(t) = -\int dt' G(t-t')\, J(t') \,, \tag{2.42}$$

dove la funzione G è detta "propagatore". Il segno è stato scelto in vista degli sviluppi successivi in teoria dei campi e delle convenzioni esistenti. e Ovviamente deve essere verificata la relazione

$$\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J)(t) = J(t) \,,$$

che implica che la funzione $G(t)$ deve essere soluzione dell'equazione differenziale

$$\mathcal{O}\, G(t) = -\delta(t) \,. \tag{2.43}$$

Dobbiamo però ricordare che, nell'Eq. (2.13) la $Z[J]$ è definita come limite partendo da valori del tempo con una piccola[4] parte immaginaria negativa, $t' = (1-i\chi)\,t$. Per χ piccolo ma non nullo, l'operatore differenziale $\mathcal{O}$ diventa

$$\mathcal{O} = \partial^2_{t'} + \omega^2 = (1+2i\chi)\partial^2_t + \omega^2 \,, \tag{2.44}$$

e il propagatore $G(t)$ sarà il limite per $\chi \to 0$ di una funzione $G(t,\chi)$ che soddisfa l'equazione[5](si veda l'Eq. (1.17))

$$\left((1+2i\chi)\partial^2_t + \omega^2\right) G(t,\chi) = -\delta(t) \,. \tag{2.45}$$

La soluzione generale di questa equazione è la somma di una soluzione particolare e della soluzione generale della equazione omogenea, che possiamo scrivere, sempre trascurando termini $\mathcal{O}(\chi^2)$,

$$\partial^2_t G = -\left[(1-i\chi)\omega\right]^2 G \quad , \quad G = a\, e^{-i\omega(1-i\chi)t} + b\, e^{i\omega(1-i\chi)t} \,.$$

Per trovare una soluzione della (2.45) passiamo alle trasformate di Fourier,

$$G(t,\chi) = \frac{1}{2\pi}\int dE\, G(E,\chi) e^{-iEt} \qquad \delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int dE e^{-iEt} \,. \tag{2.46}$$

Troviamo così

$$G(E,\chi) = \frac{-1}{\omega^2 - E^2(1+2i\chi)} = \frac{(1-2i\chi)}{E^2 - \omega^2(1-2i\chi)} \,, \tag{2.47}$$

e trascurando il fattore moltiplicativo $(1-2i\chi)$,

$$G(E,\chi) = \frac{1}{E^2 - \omega^2 + i\epsilon} \qquad \text{ovvero} \qquad = \frac{1}{E^2 - (\omega - i\eta)^2} \tag{2.48}$$

dove $\epsilon = 2\chi\omega^2$, $\eta = \chi\omega$.

[4]Nelle seguenti manipolazioni trascureremo termini $\propto \chi^2$.

[5]Stiamo trascurando fattori moltiplicativi che tendono ad uno quando $\chi \to 0$. Ad esempio avremmo dovuto scrivere $\delta(t') = \delta(t)/(1-i\chi)$, ma questo fattore è irrilevante nel limite.

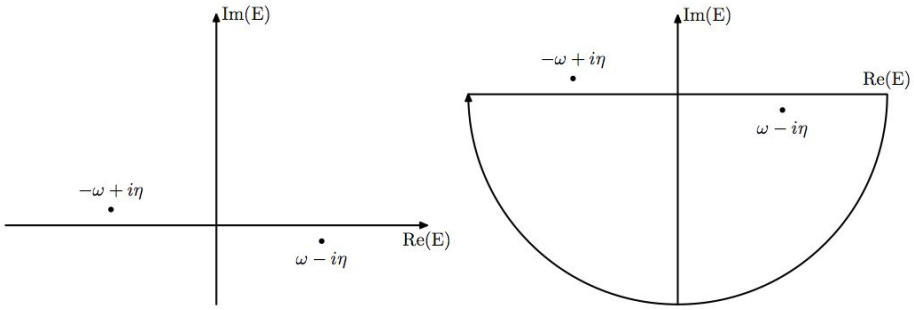

Figura 2.1: Posizione dei poli nella funzione $G(x,\chi)$ e cammino di integrazione per tempi positivi.

Possiamo adesso calcolare $G(t,\chi)$,

$$G(t,\chi) = \frac{1}{2\pi}\int dE\,\frac{e^{-iEt}}{E^2-(\omega-i\eta)^2}\,. \tag{2.49}$$

Per $t>0$ il cammino di integrazione può essere completato sul semipiano inferiore (si veda la Fig. 2.2) e comprende il polo di destra, mentre per $t<0$ il cammino di integrazione va chiuso nel semipiano superiore e comprende il polo di sinistra. Notiamo che la presenza di una parte immaginaria del tempo risulta in una selezione del polo che contribuisce all'integrazione. Applicando il teorema dei residui in ciascuno dei due casi, $t>0$ e $t<0$, otteniamo quindi una soluzione particolare della (2.45)

$$G(t,\chi) = -\frac{i}{2\omega}\left(e^{-i\omega(1-i\chi)t}\theta(t) + e^{i\omega(1-i\chi)t}\theta(-t)\right)\,. \tag{2.50}$$

La soluzione generale è

$$G(t,\chi) = \frac{-i}{2\omega}\left(e^{-i\omega(1-i\chi)t}\theta(t) + e^{i\omega(1-i\chi)t}\theta(-t)\right) + a\,e^{-i\omega(1-i\chi)t} + b\,e^{i\omega(1-i\chi)t}\,. \tag{2.51}$$

Per determinare le costanti a, b ricordiamo che, per eseguire il calcolo che porta alla (2.41) abbiamo effettuato un cambiamento di variabili nella integrazione sui cammini

$$q(t) \to q'(t) = q(t) - \delta q(t) \quad , \quad \delta q(t) = \int dt' G(t-t')\,J(t') = q(t)\,.$$

Dato che l'integrale è esteso su tutti i cammini periodici tra $t=\pm\infty$, anche i cammini trasformati devono essere periodici, qualunque sia la funzione $J(t)$. Quindi $\delta q(t)$ deve essere periodica. La soluzione particolare soddisfa questa condizione, dato che tende a zero sia per $x\to\infty$ che per $x\to-\infty$ (ricordiamo che questo limite va preso prima di mandare $\chi\to 0$) grazie alla presenza delle funzioni $\theta(\pm t)$. Quindi dobbiamo considerare l'effetto dei termini aggiuntivi. Se prendiamo $J(t)=\delta(t-t_1)$, con t_1 un tempo arbitrario, dai termini aggiuntivi a, b della (2.51) otteniamo

$$\delta q(t) = a\,e^{-i\omega(1-i\chi)(t-t_1)} + b\,e^{i\omega(1-i\chi)(t-t_1)}\,.$$

Poichè il primo termine diverge per $t \to -\infty$ e il secondo per $t \to +\infty$, la sola soluzione accettabile per la (2.45) è quella con $a = b = 0$, cioè la soluzione (2.50), che passando al limite $\chi \to 0$ diviene

$$G(t) = -\frac{i}{2\omega}\left(e^{-i\omega t}\theta(t) + e^{i\omega t}\theta(-t)\right) . \tag{2.52}$$

Il funzionale generatore — Eq. (2.41), (2.42) — può essere scritto nella forma

$$Z[J] = \exp\left[\frac{-i}{2}\iint dt\,dt'\,J(t)\,G(t-t')\,J(t')\right] , \tag{2.53}$$

che implica

$$G(t,\,t') = \langle 0|T\left(q(t)\,q(t')\right)|0\rangle = -\frac{1}{Z(0)}\left[\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(t)\delta J(t')}\right]_{J=0} . \tag{2.54}$$

Abbiamo apparentemente fatto molto più lavoro che nella formulazione usuale — ma in quel caso avevamo dato per conosciute le proprietà degli operatori di creazione e distruzione, quindi il paragone non è interamente calzante — ma abbiamo ottenuto di più, dato che nel funzionale generatore della eq. (2.53) sono racchiuse tutte le possibili funzioni di Green dell'oscillatore armonico. Ad esempio potremmo calcolare in due righe — lo lasciamo come esercizio — il valore della funzione di Green a quattro punti, $\langle 0|T\left(q(t_1)\,q(t_2)\,q(t_3)\,q(t_4)\right)|0\rangle$.

E' interessante a questo punto fingere di non sapere nulla sulla struttura degli stati eccitati dell'oscillatore armonico e vedere cosa possiamo direttamente imparare dalla conoscenza delle funzioni di Green, cioè dalla (2.35), che riscriviamo per comodità, nel caso $t_1 > t_2$

$$\langle 0|q(t_1)\,q(t_2)\,|0\rangle = \frac{1}{2\omega}e^{-i\omega(t_1-t_2)} \qquad (t_1 > t_2) . \tag{2.55}$$

D'altra parte, introducendo un insieme completo di stati,

$$\langle 0|q(t_1)\,q(t_2)\,|0\rangle = \sum_X \langle 0|q(t_1)|X\rangle\langle X|q(t_2)\,|0\rangle \qquad (t_1 > t_2) , \tag{2.56}$$

e paragonando con il risultato precedente concludiamo che deve esistere uno stato $|1\rangle$ tale che

$$\langle 0|q(t_1)|X\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}e^{-i\omega\,t_1} , \tag{2.57}$$

e quindi $E_1 = E_0 + \omega$. Dalla funzione di Green a quattro punti possiamo imparare qualcosa del secondo stato eccitato, e così via. Il funzionale $Z[J]$ contiene quindi informazioni sull'intero spettro degli stati.

2.3 Campi scalari liberi: propagatore e funzionale generatore

Il lavoro svolto nella precedente Sezione ci permette di passare direttamente alla teoria dei campi, senza introdurre novità concettuali. Consideriamo quì il caso più semplice, cioè quello di un campo

scalare reale $\phi(x)$, dove x denota il quadrivettore $\{\vec{x}, t\}$. Ricordiamo anche che nel sistema di unità di misura che adottiamo la velocità della luce è $c = 1$. La densità di lagrangiana è, per un campo in assenza di interazioni

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\phi(x)\,\partial^\mu\phi(x) - m^2\phi^2\right] . \tag{2.58}$$

In analogia con quanto fatto per l'oscillatore armonico vogliamo calcolare il valore di aspettazione nel vuoto del prodotto ordinato nel tempo di due operatori di campo, $\langle 0|\, T\left(\phi(x)\,\phi(y)\right)|0\rangle$. Seguendo i passi eseguiti nel caso dell'oscillatore armonico, calcoliamo il funzionale generatore (eq. 2.20). Con una integrazione per parti[6] possiamo scrivere la azione come

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x\,\frac{1}{2}\left[\partial_\mu\phi(x)\,\partial^\mu\phi(x) - m^2\phi^2\right] \\ &= -\int d^4x\,\frac{1}{2}\left[\phi(x)\,\partial_\mu\partial^\mu\phi(x) + m^2\phi^2\right] = -\int d^4x\,\frac{1}{2}\left(\phi K\phi\right) , \end{aligned} \tag{2.59}$$

dove K è l'operatore differenziale di Klein Gordon,

$$K = \partial_\mu\partial^\mu + m^2 = \Box + m^2 . \tag{2.60}$$

Possiamo allora calcolare il funzionale generatore (2.20), notando l'analogia con il metodo usato nella Sezione precedente

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int d[\phi(x)]\,\exp\left(iS\left(\phi(x)\right) - \int d^4x\phi(x)J(x)\right) \\ &= \int d[\phi(x)]\,\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x\,\left[\phi K\phi + 2\phi(x)J(x)\right]\right) \\ &= \int d[\phi(x)]\,\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x\,\left[(\phi + K^{-1}J)K(\phi + K^{-1}J) - (JK^{-1}J)\right]\right) \\ &= \exp\left(\frac{i}{2}\int d^4x(JK^{-1}J)\right)\int d[\phi(x)]\,\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x\,\left[(\phi + K^{-1}J)K(\phi + K^{-1}J)\right]\right) . \end{aligned}$$

Il residuo integrale funzionale può essere eseguito con un cambiamento di variabili, $\phi \to \phi' = \phi + K^{-1}J$ e contribuisce al risultato con una costante che può essere omessa. Possiamo quindi scrivere semplicemente

$$Z[J] = \exp\left(\frac{i}{2}\int d^4x(JK^{-1}J)\right) .$$

L'inverso dell'operatore differenziale K sarà un operatore integrale, che (per riprodurre l'usuale convenzione di segno sulla funzione Δ_F) possiamo definire attraverso la relazione

$$K^{-1}J(x) = -\int dy\,\Delta_F(x-y)J(y) , \tag{2.61}$$

dove Δ_F deve soddisfare l'equazione

$$(\Box + m^2)\Delta_F(x) = -\delta^4(x) . \tag{2.62}$$

[6] Nel fare integrazioni per parti assumiamo una periodicità di $\phi(x)$ sia nel tempo che nello spazio, come descritto in dettaglio nella Sezione 2.

Anche questa volta, come nel caso dell'oscillatore armonico, dobbiamo considerare valori complessi del tempo, per cui riscriviamo l'operatore K come (vedi eq. 2.44)

$$K = (1+2i\chi)\partial_t^2 - (\vec{\nabla})^2 + m^2 \,. \tag{2.63}$$

Passando alle trasformate di Fourier troviamo quindi

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, \Delta_F(p) e^{-ipx} \quad , \quad \delta^4(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{-ipx} \,, \tag{2.64}$$

dove p il quadrivettore $\{E, \vec{p}\}$, e (si veda la discussione nella Sezione precedente)

$$\Delta_F(p) = \frac{1}{E^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \,. \tag{2.65}$$

Come abbiamo visto, il termine $i\epsilon$ nel denominatore specifica il cammino di integrazione.

Naturalmente, lo stesso risultato per la funzione di Green a due punti, inclusa la prescrizione dell' $i\epsilon$, si ottiene a partire dalla quantizzazione canonica del campo scalare, discussa in [1].

In conclusione, abbiamo dimostrato che il funzionale generatore per un campo scalare reale ha la forma

$$Z[J] = \exp\left(\frac{-i}{2}\iint d^4x\, d^4y\, J(x)\, \Delta_F(x-y)\, J(y)\right) \,, \tag{2.66}$$

dalla quale possiamo ricavare le differenti funzioni di Green. In particolare, quella a due punti è

$$\langle 0|\, T\left(\phi(x)\,\phi(y)\right)|0\rangle = i\Delta_F(x-y) \,. \tag{2.67}$$

La funzione $\Delta_F(x)$ è detta il propagatore del campo ϕ.

Il risultato che abbiamo ottenuto si estende semplicemente al caso di un campo complesso (ovvero di due due campi reali, Eq.(2.9)) di massa m in assenza di interazioni, la cui densità di lagrangiana si può scrivere

$$\mathscr{L} = \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2}\left[\partial_\mu\phi_k(x)\,\partial^\mu\phi_k(x) - m^2\phi_k^2\right] = \partial_\mu\phi^\dagger(x)\,\partial^\mu\phi(x) - m^2\phi^\dagger\phi \,. \tag{2.68}$$

Anche in questo caso il funzionale generatore $Z[J]$, definito dalla Eq. (2.24)), si calcola esplicitamente usando la procedura descritta. Si trova così il risultato

$$Z[J,J^\dagger] = \exp\left(-i\iint d^4x\, d^4y\, J^\dagger(x)\, \Delta_F(x-y)\, J(y)\right) \,. \tag{2.69}$$

La funzione a due punti, che si ottiene utilizzando le regole di sostituzione (2.25), ha la foma

$$\langle 0|\, T\left(\phi(x)\,\phi^\dagger(y)\right)|0\rangle = i\Delta_F(x-y) \,, \tag{2.70}$$

mentre

$$\langle 0|\, T\left(\phi(x)\,\phi(y)\right)|0\rangle \;= \langle 0|\, T\left(\phi^\dagger(x)\,\phi^\dagger(y)\right)|0\rangle = 0 \,. \tag{2.71}$$

Lasciamo la derivazione di questi ultimi risultati come esercizio.

2.4 Campi scalari liberi: stati a una particella

Possiamo usare le Eq. (2.70) e (2.71) per studiare lo spettro degli stati nella teoria scalare, come abbiamo fatto precedentemente nel caso dell'oscillatore armonico. Troveremo così che un campo scalare complesso descrive due particelle della stessa massa, che potremo chiamare la *particella P* e la *antiparticella A*. Ciascuna delle due può esistere in stati caratterizzati da una quantità di moto $\vec{p}$ e energia $\omega_p = \sqrt{(\vec{p}^2 + m^2)}$.

Riscriviamo la (2.70) usando le Eq. (2.64) e (2.65)

$$\langle 0| T\left(\phi(x)\phi^\dagger(y)\right)|0\rangle = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3p e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\left[\frac{1}{(2\pi)}\int dE \frac{e^{-iE(t_x-t_y)}}{E^2-\omega_p^2+i\epsilon}\right] .$$

L'integrale in parentesi quadre è quello dell'Eq. (2.49), che già conosciamo ((2.52)). Possiamo quindi scrivere

$$\langle 0| T\left(\phi(x)\phi^\dagger(y)\right)|0\rangle = i\Delta_F(x-y) \tag{2.72}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{2\omega_p}\left(e^{-i\omega_p(t_x-t_y)}\theta(t_x-t_y) + e^{-i\omega_p(t_y-t_x)}\theta(t_y-t_x)\right) . \tag{2.73}$$

Se consideriamo la trasformata di Fourier sulla variabile $\vec{y}$, definendo

$$\phi(\vec{q},t_y) = \int d^3y e^{-i\vec{q}y}\phi(\vec{y},t_y) \ , \ \phi^\dagger(\vec{q},t_y) = \int d^3y e^{i\vec{q}y}\phi^\dagger(\vec{y},t_y) , \tag{2.74}$$

otteniamo

$$\langle 0| T\left(\phi(\vec{x},t_x)\phi^\dagger(\vec{q},t_y)\right)|0\rangle = \frac{e^{i\vec{q}\vec{x}}}{2\omega_q}\left(e^{-i\omega_q(t_x-t_y)}\theta(t_x-t_y) + e^{-i\omega_q(t_y-t_x)}\theta(t_y-t_x)\right) .$$

Analizziamo separatamente i casi $t_x > t_y$ e $t_y > t_x$,

$$\langle 0|\phi(\vec{x},t_x)\phi^\dagger(\vec{q},t_y)|0\rangle = \frac{e^{i\vec{q}\vec{x}}}{2\omega_q}e^{-i\omega_q(t_x-t_y)} \qquad (t_x > t_y) , \tag{2.75}$$

$$\langle 0|\phi^\dagger(\vec{q},t_y)\phi(\vec{x},t_x)|0\rangle = \frac{e^{i\vec{q}\vec{x}}}{2\omega_q}e^{-i\omega_q(t_y-t_x)} \qquad (t_y > t_x) . \tag{2.76}$$

definendo due famiglie di stati $|P,\vec{q}\rangle$ e $|A,\vec{q}\rangle$,

$$|P,\vec{q}\rangle = \frac{\sqrt{2\omega_q}}{(2\pi)^{3/2}}\phi^\dagger(\vec{q},0)|0\rangle , \tag{2.77}$$

$$|A,\vec{q}\rangle = \frac{\sqrt{2\omega_q}}{(2\pi)^{3/2}}\phi(-\vec{q},0)|0\rangle . \tag{2.78}$$

Dalla (2.75) otteniamo

$$\langle 0|\phi(\vec{x},t_x)|P;\vec{q}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_q}}e^{i(\vec{q}\vec{x}-\omega_q t_x)} , \tag{2.79}$$

e dal complesso coniugato della (2.76),

$$\langle 0|\,\phi^\dagger(\vec{x},t_x)\,|A;\vec{q}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_q}}e^{i(\vec{q}\vec{x}-\omega_q t_x)}\,. \tag{2.80}$$

Questo ci dice già[7] che gli stati $|P,\vec{q}\rangle$ e $|A,\vec{q}\rangle$ hanno energia $\omega_q = \sqrt{m^2+\vec{q}^2}$ ed impulso $\vec{q}$, e sono quindi interpretabili come stati[8] di una particella libera di massa m.

Con una seconda trasformata di Fourier su $\vec{x}$ ricaviamo anche i prodotti scalari di due stati P, o due stati A

$$\langle P;\vec{p}|P;\vec{q}\rangle = \langle A;\vec{p}|A;\vec{q}\rangle = \delta^3(\vec{p}-\vec{q})\,. \tag{2.81}$$

Se ora ripetiamo l'esercizio a partire dalla funzione di Green con due ϕ, (2.71), possiamo dimostrare che gli stati $|P\rangle$ e $|A\rangle$ sono ortogonali tra loro, cioè che

$$\langle P;\vec{p}|A;\vec{q}\rangle = 0\,. \tag{2.82}$$

Si tratta quindi di stati di due particelle differenti, ambedue di massa m.

Che i due tipi di particella siano in rapporto particella–antiparticella non si vede in una teoria così semplice, che descrive particelle prive di interazione. Introducendo però l'interazione con un campo elettromagnetico potremmo facilmente dimostrare che le due particelle hanno carica elettrica opposta. Quale chiamare particella e quale antiparticella rimane tuttavia sempre una scelta arbitraria. Ovviamente, nel caso di un campo scalare reale la situazione è più semplice, e abbiamo un solo tipo di particella.

2.5 Operatori di creazione e di distruzione, normalizzazione del continuo

È utile collegare la discussione della Sezione precedente alla formulazione della teoria del campo scalare libero in termini di operatori di creazione e distruzione, discussa in [1]. Ci poniamo inizialmente in un volume finito, per poi introdurre una normalizzazione degli stati e degli operatori di creazione e distruzione appropriata nel limite di volume infinito.

Consideriamo i campi in un volume cubico V con condizioni periodiche ai bordi, e definiamo un insieme di soluzioni dell' equazione di Klein-Gordon (K-G) a frequenza positiva

$$\begin{aligned} f_q(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{q})V}}e^{-iqx} \quad , \quad (\Box+m^2)f_q = 0\,, \\ \mathbf{q} &= \frac{2\pi}{L}(n_1,n_2,n_3) \quad , \quad \omega(\mathbf{q}) = +\sqrt{\mathbf{q}^2+m^2}\,, \end{aligned} \tag{2.83}$$

[7] Possiamo scrivere $\phi(\vec{x},t) = e^{i(Ht-\vec{P}\vec{x})}\phi(0,0)e^{-i(Ht-\vec{P}\vec{x})}$ dove H è l'hamiltoniano e $\vec{P}$ l'operatore impulso.

[8] la normalizzazione dei ket che compaiono nelle Eq.(2.77) e (2.78) corrisponde al limite di volume infinito, e sará discussa in dettaglio nella prossima Sezione.

dove $n_{1,2,3}$ sono numeri interi e L è il lato del cubo, cioè $V = L^3$. Le funzioni (2.83) sono normalizzate in V secondo la

$$\int_V d^3x\, f_q^*(x)\, i\overleftrightarrow{\partial}_t f_{q'}(x) = \delta_{q,q'}\,, \tag{2.84}$$

dove abbiamo introdotto la notazione abbreviata

$$f\overleftrightarrow{\partial}_t g = f(\partial_t\, g) - (\partial_t\, f)g\,. \tag{2.85}$$

Possiamo costruire gli operatori di creazione e distruzione a partire da ϕ e dalle f_q nella forma

$$\begin{aligned} a_q &= \int d^3x \left[f_q(x)^*\, i\overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x))\right] \quad \text{(distruzione)}\,, \\ a_q^\dagger &= (a_q)^\dagger \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(creazione)}\,, \end{aligned}$$

con

$$\left[a_q, a_{q'}^\dagger\right] = i\delta_{q,q'}\,. \tag{2.86}$$

Dopo l' integrazione spaziale, gli operatori a_q potrebbero dipendere dal tempo ma è immediato mostrare che di fatto sono costanti, come segue dalla

$$\begin{aligned} \partial_t a_q &= i\int d^3x\, \left[f_q(x)^*(\partial_t^2\phi(x)) - (\partial_t^2 f_q(x)^*)\phi(x)\right] = \\ &= i\int d^3x\, \left[f_q(x)^*(\Box\phi(x)) - (\Box f_q(x)^*)\phi(x)\right] = \\ &= i\int d^3x\, \left[f_q(x)^*(\Box + m^2)\phi(x)\right] = 0\,, \end{aligned} \tag{2.87}$$

poiché sia f_q che ϕ soddisfano l'equazione di K-G.

Per effettuare il limite al continuo, introduciamo l'operatore di proiezione sugli stati con momento compreso in un intervallo tridimensionale, $\Delta^3 n$

$$P = \sum_{\Delta^3 n} |p\rangle\langle p|\,, \tag{2.88}$$

con $P^2 = P$ in virtú della ortonormalitá degli stati $|p\rangle$. Se adesso passiamo al limite otteniamo la

$$P = \int_{\Delta^3 p} |p\rangle \frac{V\, d^3p}{(2\pi)^3}\langle p|\,, \tag{2.89}$$

che suggerisce di definire i ket normalizzati

$$|\tilde{p}\rangle = \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}}|p\rangle\,, \tag{2.90}$$

per i quali:

$$P = \int_{\Delta^3 p} |\tilde{p}\rangle\, d^3p\, \langle\tilde{p}|\,. \tag{2.91}$$

Notiamo che la condizione $P^2 = P$ richiede, come condizione di normalizzazione dei nuovi ket

$$\langle \tilde{p}' | \tilde{p} \rangle = \delta^{(3)}(p' - p) \ . \tag{2.92}$$

Gli operatori di distruzione e creazione che corrispondono ai nuovi stati sono, evidentemente,

$$\tilde{a}_p = \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}} a_p \ \ , \ \ \tilde{a}_p^\dagger = (\tilde{a}_p)^\dagger \ , \tag{2.93}$$

e le nuove regole di commutazione si ottengono dalla (2.92)

$$\delta^{(3)}(p' - p) = \langle 0 | \tilde{a}_{p'} \tilde{a}_p^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \left[\tilde{a}_{p'}, \tilde{a}_p^\dagger \right] | 0 \rangle \ , \tag{2.94}$$

che implica

$$\left[\tilde{a}_{p'}, \tilde{a}_p^\dagger \right] = \delta^{(3)}(p' - p) \ . \tag{2.95}$$

Lo sviluppo del campo si scrive ora nella forma

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p}) V}} \left[a_p \, e^{-ipx} + a_p^\dagger \, e^{ipx} \right] = \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p})}} \left[\tilde{a}_p \, e^{-ipx} + \tilde{a}_p^\dagger \, e^{ipx} \right] \ . \end{aligned} \tag{2.96}$$

I nuovi stati sono normalizzati in modo di avere, invece che una particella nel volume di riferimento, una densitá di particelle costante. Questa proprietà si verifica calcolando l'energia del campo, che risulta pari a (usiamo il prodotto normale degli operatori, definito in [1])

$$\begin{aligned} H &= \int d^3 x \, \frac{1}{2} \left[: (\partial_t \phi)^2 : + : (\nabla \phi)^2 : + m^2 : \phi^2 : \right] \\ &= \int d^3 p \, \omega(\mathbf{p}) \, \tilde{a}_p^\dagger \tilde{a}_p ; \ , \end{aligned}$$

con

$$E_p = \langle \tilde{p} | H | \tilde{p} \rangle = \delta^{(3)}(0) \omega(\mathbf{p}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \omega(\mathbf{p}) \ . \tag{2.97}$$

Si vede così che la densitá di particelle nello stato $|\tilde{p}\rangle$ è pari a $\rho = 1/(2\pi)^3$.

Per finire, notiamo che la relazione che lega i campi agli operatori di distruzione si scrive:

$$\tilde{a}_q = \int d^3 x \, \left[\tilde{f}_q(x)^* \, i \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x)) \right] \ , \tag{2.98}$$

con

$$\tilde{f}_q(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega(\mathbf{p})}} e^{-ipx} \ . \tag{2.99}$$

Nel seguito adotteremo la normalizzazione del continuo, omettendo per brevitá la tilde sia sugli operatori che sulle funzioni f_q.

Capitolo 3

Sviluppo perturbativo delle funzione di Green. Teoria $\lambda\phi^4$

Nei Capitoli precedenti abbiamo applicato il metodo della somma sui cammini a teorie di campo molto semplici, in particolare a campi scalari reali o complessi *liberi*, che descrivono particelle di spin zero, rispettivamente neutre e cariche, in assenza di interazioni. Il caso dei campi liberi è l'unico nel quale si può effettuare il calcolo delle varie grandezze che caratterizzano la teoria, in particolare il funzionale generatore e le funzioni di Green. Con l'espressione campi *liberi* ci si riferisce a campi che descrivono particelle che non interagiscono tra loro. Ciò si traduce nella richiesta che la lagrangiana non contenga termini che sono il prodotto di più di due campi. Alle lagrangiane di questo tipo corrispondono equazioni del moto lineari nei campi, come per esempio l'equazione di Klein-Gordon, per il campo scalare

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0 \, .$$

La soluzione generale delle equazioni del moto è delle teorie libere è data da una sovrapposizione di onde piane, che corrispondono ai diversi possibili stati di impulso definito delle particelle. In tutti i casi interessanti la situazione è invece molto più complessa: la lagrangiana contiene termini del terzo o quarto ordine (o di ordine ancora superiore), le equazioni del moto sono non lineari e non si possono risolvere esattamente. Si ricorre allora a metodi approssimati, e tra questi in primo luogo la teoria delle perturbazioni.

Anche se in questo corso vogliamo occuparci sopratutto di elettrodinamica quantistica, consideriamo per primo il caso semplice di un campo scalare reale con una interazione $\lambda\phi^4$. La lagrangiana ha la forma

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\,\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 \, , \tag{3.1}$$

alla quale corrisponde l'equazione del moto non lineare

$$(\Box + m^2)\phi(x) = -\frac{1}{3!}\lambda\phi^3 \, ,$$

la cui soluzione generale non è nota, nemmeno a livello classico.

3.1 Sviluppo perturbativo del funzionale generatore e diagrammi di Feynman

Possiamo esprimere, almeno formalmente, le grandezze di interesse fisico come serie di potenze nella *costante d'accoppiamento* λ, la cosidetta *serie perturbativa*. In particolare è possibili esprimere come serie di potenze in λ le funzioni di Green. Se λ è piccolo, i primi termini di questa serie forniscono una buona approssimazione della grandezza di interesse fisico.

Per cominciare, si suddivide la lagrangiana in due termini secondo la

$$\mathscr{L}(\phi,\partial_\mu\phi) = \mathscr{L}^0(\phi,\partial_\mu\phi) + \mathscr{L}^1(\phi)\,, \tag{3.2}$$

dove $\mathscr{L}^0$ è la lagrangiana della teoria libera, ad esempio quella studiata nella Sezione 2.3, e $\mathscr{L}^1$ un termine di interazione[1]. Il funzionale generatore è dunque dato dalla (si veda l'Eq. (2.20))

$$Z[J] = \int D[\phi(x)]\exp\left(i\int d^4x\mathscr{L}^1(\phi)\right)\exp\left(i\int d^4x\left(\mathscr{L}^0(\phi,\partial_\mu\phi) - \phi(x)J(x)\right)\right)\,,$$

che possiamo riscrivere (si veda l'Eq. (2.23)) nella forma

$$Z[J] = \exp\left(i\int d^4x\mathscr{L}^1\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right)Z^0[J]\,, \tag{3.3}$$

dove $Z^0[J]$ è il funzionale generatore ottenuto dalla lagrangiana imperturbata $\mathscr{L}^0$. Nel caso della teoria $\lambda\phi^4$, Eq. (3.1), $Z^0[J]$ è quello definito dalla (2.66), che riportiamo per convenienza

$$Z^0[J] = \exp\left(-\frac{i}{2}\iint d^4x\,d^4y\,J(x)\,\Delta_F(x-y)\,J(y)\right)\,. \tag{3.4}$$

Formalmente, il funzionale generatore $Z[J]$ si può sviluppare in serie di potenze di λ secondo la

$$Z[J] = \exp\left(\frac{-i\lambda}{4!}\int d^4x\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right)Z^0[J] \tag{3.5}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\lambda)^n}{(4!)^n n!}\left(\int d^4x\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right)^n Z^0[J] \tag{3.6}$$

$$= Z^0[J] - i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 Z^0[J] \tag{3.7}$$

$$-\frac{\lambda^2}{2(4!)^2}\iint d^4x\,d^4y\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\left(i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^4 Z^0[J] + \dots\,. \tag{3.8}$$

Per procedere col calcolo, ordine per ordine, dobbiamo eseguire materialmente le derivate funzionali. Notiamo innanzitutto che (si veda l'Eq. (3.4))

$$i\frac{\delta}{\delta J(x)}Z^0[J] = \int d^4y\,\Delta_F(x-y)\,J(y)\,Z^0[J]\,. \tag{3.9}$$

[1] Abbiamo supposto che $\mathscr{L}^1$ dipenda dai campi e non dalle loro derivate. Questa limitazione che semplifica gli sviluppi formali, ma può essere superata senza particolari difficoltà. Pure per semplicità ci limiteremo anche al caso di un singolo campo.

La prima derivata che si esegue "cala" un fattore $\Delta_F J$ dall'esponenziale, mentre quelle successive possono "calare" ulteriori fattori, o "catturare" la J da un fattore $\Delta_F J$ "calato" da una derivata precedente, ad esempio per la derivata seconda troviamo

$$i\frac{\delta}{\delta J(x')}\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}Z^0[J]\right)=\left(\int d^4y'\,\Delta_F(x'-y')\,J(y')\right)\left(\int d^4y\,\Delta_F(x-y)\,J(y)\right)Z^0[J]+ \\ +\,i\Delta_F(x-x')\,Z^0[J]\,. \tag{3.10}$$

Per dominare meglio la complicazione di questi calcoli, che cresce rapidamente di derivata in derivata, si introduce una rappresentazione grafica. Ad ogni fattore $(i\delta/\delta J(x))^4$ corrisponde un punto, detto "vertice" da cui escono quattro linee. Ogni linea può finire in un altro vertice di cui ha "catturato" una J (o nello stesso vertice se cattura una J prodotta da una precedente derivata), oppure in un pallino, che rappresenta una J non catturata da altre derivate. Nel primo caso la linea (che chiameremo "linea interna") corrisponde a un propagatore $i\Delta_F$, nel secondo (linea "esterna") ad un fattore $\Delta_F J$. Ad esempio, i due termini della derivata seconda possono essere rappresentati dai due diagrammi della Fig. 3.1. Naturalmente in questo caso da ciascuno dei due punti x, x' esce una sola linea. Per unificare la descrizione dei due tipi di linee ci conviene riscrivere il termine che corrisponde a una linea che termina in un pallino come $\Delta_F J = (i\Delta_F)(-iJ)$ di modo che ad ogni linea, interna o esterna, corrisponda un fattore $i\Delta_F$.

Figura 3.1: Rappresentazione grafica dei due termini dell'Eq.(3.10). I pallini grandi tratteggiati corrispondono ciascuno ad un fattore $-iJ$.

Al termine di ordine λ della $Z[J]$ (eq.(3.5)) corrisponderanno diagrammi con un singolo vertice, e ci si convince facilmente che le sole possibilità sono i diagrammi (a), (b) e (c) della Fig. 3.2. Il diagramma (a), dove tutte le J sono state "catturate", e che è privo di linee esterne, viene detto diagramma *vuoto-vuoto*.

Il diagramma (b) rappresenta una modificazione al propagatore che abbiamo calcolato in precedenza (Sezione 2.3) all'ordine λ^0 è quello, e che possiamo rappresentare con diagramma senza vertici, come in (d). Anche su questo torneremo nel seguito. Per ora limitiamoci a passare in rassegna i diagrammi dello stesso tipo che si incontrano al secondo ordine pertubativo, illustrati nella Fig. 3.3. Sorge subito il sospetto che il diagramma (a) di questa figura sia, assieme ai diagrammi (b) e (d) della figura precedente, l'inizio di una serie interessante. Come vedremo, si tratta di un sospetto del tutto giustificato.

Infine, il diagramma (c) della Fig. 3.2, rappresenta lo scattering di due particelle e, come vedremo, è direttamente connesso all'elemento della matrice S che descrive questo processo, o meglio alla sua approssimazione d'ordine λ. Le correzioni di ordine λ^2 sono rappresentate dai diagrammi della Fig. 3.4.

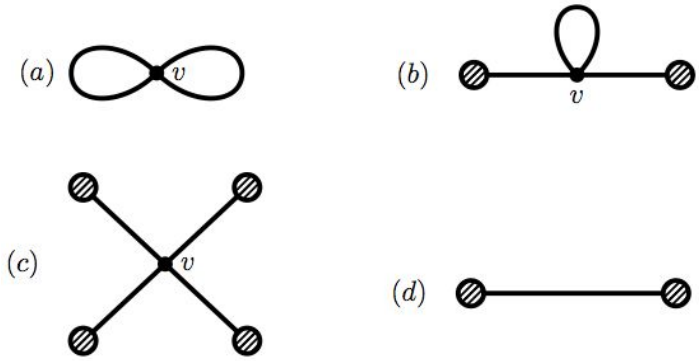

Figura 3.2: I diagrammi al primo ordine perturbativo

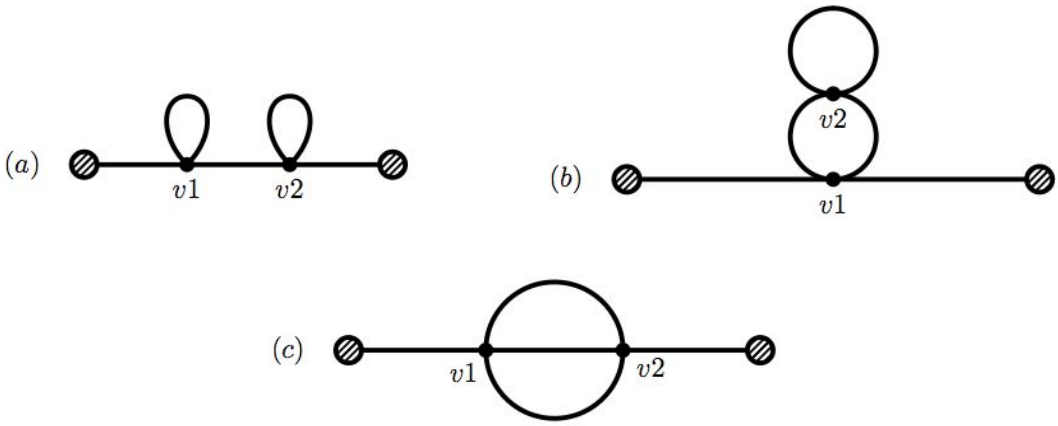

Figura 3.3: Correzioni di ordine λ^2 al propagatore.

La corrispondenza tra diagrammi della teoria $\lambda\phi^4$ e termini dell'espansione di $Z[J]$ si può riassumere in alcune semplici regole:

$$\begin{array}{ll} \text{pallino} & -i\int d^4x\, J(x)\,, \\ \text{vertice} & \dfrac{-i\lambda}{4!}\int d^4v\,, \\ \text{linea da } x \text{ a } y & i\Delta_F(x-y)\,. \end{array} \tag{3.11}$$

A queste si deve aggiungere una regola per calcolare il fattore combinatorio da applicare al contributo di ciascun diagramma. Nel caso della teoria $\lambda\phi^4$ quest'ultima regola è parecchio più complicata che nel caso della elettrodinamica quantistica (QED). Nel contesto delle nostre lezioni, in cui la teoria $\lambda\phi^4$ serve solo come modello semplice per la QED, è conveniente omettere la discussione di questo

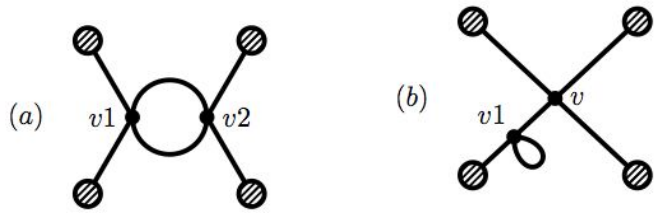

Figura 3.4: Correzioni di ordine λ^2 al grafico (c) della Fig. 3.2.

problema. È comunque sempre possibile, una volta identificata — con le regole che abbiamo dato — la forma di un particolare contributo alla $Z[J]$, ricorrere alla (3.5) per ottenere il fattore combinatorio corretto.

Ad ogni vertice o pallino si associa un punto nello spazio-tempo (x, v), sulle cui coordinate viene eseguita una integrazione, e l'argomento delle Δ_F è la differenza tra le posizioni degli estremi, siano essi vertici o pallino. Quindi, al diagramma (c) della Fig. 3.2 corrisponde un termine in $Z[J]$ che possiamo chiamare D_1 (è il primo diagramma che calcoliamo!)

$$D_1[J] = (-i)^4 \int d^4x_1\, J(x_1) \int d^4x_2\, J(x_2) \int d^4x_3\, J(x_3) \int d^4x_4\, J(x_4) \tag{3.12}$$

$$\times \frac{(-i\lambda)}{4!} \int d^4v\, (i)^4 \Delta_F(x_1 - v)\Delta_F(x_2 - v)\Delta_F(x_3 - v)\Delta_F(x_4 - v)\,, \tag{3.13}$$

che rappresenta il primo ordine in λ del termine in $Z[J]$ proporzionale a J^4. Le correzioni di ordine λ^2 sono date dai diagrammi della Fig. 3.4: il diagramma (a) corrisponde a

$$D_2[J] = (-i)^4(6^2) \int d^4x_1\, J(x_1) \int d^4x_2\, J(x_2) \int d^4x_3\, J(x_3) \int d^4x_4\, J(x_4) \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)^2 \iint d^4v_1 d^4v_2$$
$$(i)^6 \Delta_F(x_1 - v_1)\Delta_F(x_2 - v_1)\Delta_F(x_3 - v_2)\Delta_F(x_4 - v_2)\Delta_F(v_1 - v_2)\Delta_F(v_1 - v_2)\,,$$

dove (6^2) è un fattore combinatorio. Avremmo potuto ottenere questi risultati , incluso il fattore (6^2), isolando direttamente i termini J^4 nella Eq. (3.5). Lasciamo questo compito come esercizio ai lettori. Del diagramma (b) della Fig. 3.4 discuteremo a parte, perchè si tratta di una correzione sulle linee esterne.

3.2 Diagrammi e regole di Feynman per le funzioni di Green

Consideriamo la funzione di Green del campo scalare reale a $2k$ punti (nella teoria con interazione $\lambda\phi^4$ si ottiene un risultato non nullo solo per un numero pari di punti[2]). Riassumendo le formule

[2] La lagrangiana di questa teoria, Eq. (3.1), è simmetrica sotto l'operazione $\phi \to -\phi$. Deve quindi esistere un operatore unitario $\mathbf{P}$ sullo spazio degli stati, tale che $\mathbf{P}\phi\mathbf{P} = -\phi$. Nel linguaggio degli operatori di creazione e distruzione si verifica facilmente che se $|n\rangle$ è un stato ad n particelle, $\mathbf{P}|n\rangle = (-1)^n|n\rangle$. Dato che il vuoto ($n$=0) è pari, ne segue che $\langle n|\phi|0\rangle = 0$ se n è pari.

precedenti, otteniamo

$$G(x_1,x_2,\dots,x_{2k}) = \frac{1}{Z[0]}\int D[\phi(x)]\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_{2k})\exp[i\int d^4x\mathscr{L}(\phi,\partial_\mu\phi)] =$$
$$= \frac{1}{Z[0]}\left[(i\frac{\delta}{\delta J(x_1)})(i\frac{\delta}{\delta J(x_2)})\dots(i\frac{\delta}{\delta J(x_{2k})})Z[J]\right]_{J=0}, \tag{3.14}$$

dove, utilizzando lo sviluppo perturbativo

$$Z[J] = \int D[\phi(x)]\exp[i\int d^4x\,\mathscr{L}^1(\phi)]\exp\left[i\int d^4x\,\mathscr{L}^0 - i\int d^4x J(x)\phi(x)\right]$$
$$= \exp\left[i\int d^4x\,\mathscr{L}^1(i\frac{\delta}{\delta J(x)})\right]Z^0[J] \tag{3.15}$$
$$= \sum_n(\frac{i}{n!})^n\left[\int d^4x\,\mathscr{L}^1(i\frac{\delta}{\delta J(x)})\right]^n Z^0[J], \tag{3.16}$$

dove

$$Z^0[J] = \exp\left[-\frac{i}{2}\int\int d^4x\,d^4y\,J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right] = \exp\left[-\frac{i}{2}(J\Delta_F J)\right]. \tag{3.17}$$

Lo sviluppo perturbativo di G prende quindi la forma

$$G(x_1,\dots,x_{2k}) = \sum_n G^{(n)}(x_1,\dots,x_{2k}),$$

con

$$G^{(n)}(x_1,\dots,x_{2k}) = \left\{(i\frac{\delta}{\delta J(x_1)})\dots(i\frac{\delta}{\delta J(x_{2k})})\frac{1}{n!}\left[i\int d^4x\,\mathscr{L}^1(i\frac{\delta}{\delta J(x)})\right]^n Z^0[J]\right\}_{J=0}. \tag{3.18}$$

Poiché alla fine del calcolo dobbiamo porre $J=0$, nello sviluppo di Z^0 in potenze di $(J\Delta_F J)$ conta solo il termine di grado pari al numero di derivate funzionali che compaiono nella Eq. (3.18). Nel caso dell'interazione $\lambda\phi^4$, possiamo quindi scrivere

$$G^{(n)}(x_1,\dots,x_{2k}) = (i\frac{\delta}{\delta J(x_1)})\dots(i\frac{\delta}{\delta J(x_{2k})})\frac{1}{n!}\left[i\int d^4x\,\frac{(-i\lambda)}{4!}(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4\right]^n\frac{1}{M!}\left[\frac{-i}{2}(J\Delta_F J)\right]^M. \tag{3.19}$$

con $M = k+2n$.

Naturalmente, le derivate funzionali possono essere eseguite in molti modi diversi. Ciascuno di essi può essere rappresentato da un *diagramma di Feynman*, cioè un grafico nello spazio-tempo in cui M linee, i propagatori $i\Delta_F$, connettono i punti $x_1,\dots,x_{2k}$ tra loro e/o con gli n punti in cui sono localizzate le interazioni, i *vertici*. Ciascuno di questi grafici è associato ad un'ampiezza, che è il prodotto di propagatori, costanti di accoppiamento λ e fattori numerici, determinati dalla struttura della (3.19). Esplicitamente, dalla (3.19) possiamo vedere che:

- ogni volta che due derivate agiscono sullo stesso propagatore, otteniamo un fattore 2, e quindi il risultato è un fattore $i\Delta_F$ calcolato nei punti associati alle derivate funzionali;

- i ruoli dei propagatori possono essere permutati senza cambiare il risultato. Questa proprietà permette di semplificare il fattore $1/M!$;

- analogamente, i ruoli dei vertici possono essere permutati ottenendo $n!$ contributi identici. Questa proprietà permette di semplificare il fattore $1/n!$.

Le considerazioni appena svolte si riassumono in prescrizioni semplici ed eleganti per ottenere la funzione di Green a $2k$ punti all'ordine n della teoria delle perturbazioni, note col nome di *regole di Feynman*.

Diagrammi di Feynman Iniziamo con l'individuazione delle ampiezze indipendenti che contribuiscono alla funzione di Green a la costruzione dei corrispondenti diagrammi di Feynman.

- fissiamo i punti esterni (x_1, x_2,.., x_{2k}) ed i punti (x, y, z,...) dove sono localizzate le interazioni (vertici);

- disegnamo i grafici in cui M linee connettono tra loro punti esterni e vertici in tutti i modi topologicamente indipendenti;

Regole di Feynman Ad ogni grafico è associata un'ampiezza, secondo le regole seguenti.

- un fattore $i\Delta_F(u-v)$ per ogni linea che inizia nel punto u e finisce in v;

- un fattore $i\lambda$ per ogni vertice;

- un fattore numerico, da calcolare caso per caso, che nasce dalla incompleta cancellazione dei fattori $1/4!$ nei vertici con la molteplicità dei modi in cui si eseguono le derivate corrispondenti al grafico;

- integriamo l'ampiezza sulle coordinate di tutti i vertici;

- la funzione di Green è la somma delle ampiezze corrispondenti a ciascun grafico.

Consideriamo, a titolo di esempio, il calcolo della funzione a due e quattro punti al primo ordine in λ.

Calcolo di $G^{(1)}(x_1,x_2)$. Con un vertice e due punti esterni possiamo costruire i due grafici indipendenti della Fig. 3.5. Calcoliamo adesso i fattori numerici ad essi associati eseguendo esplicitamente le derivate funzionali (per brevità scriviamo 1, 2 al posto di $x_{1,2}$):

$$G^{(1)}(1,2) = (i\frac{\delta}{\delta J(1)})(i\frac{\delta}{\delta J(2)})\frac{i\lambda}{4!}(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4\,\frac{1}{3!}[-\frac{i}{2}\,(J\Delta_F J)]^3\,. \tag{3.20}$$

Eseguiamo le derivate rispetto a J(1) e J(2). Le due derivate possono agire: (a) sullo stesso propagatore, (b) su propagatori diversi:

$$
\begin{aligned}
G_{2a} &= i\Delta_F(1-2)\ \frac{i\lambda}{4!}(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4\ \frac{1}{2!}(-\frac{i}{2}\ J\Delta_F J)^2\ , \\
G_{2b} &= \frac{i\lambda}{4!}(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4 \\
&\qquad \times \int\ \int d^4u d^4v\ [i\Delta_F(1-u)(-iJ(u))]\ [i\Delta_F(2-v)(-iJ(v))]\ (-\frac{i}{2}\ J\Delta_F J)\ .
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

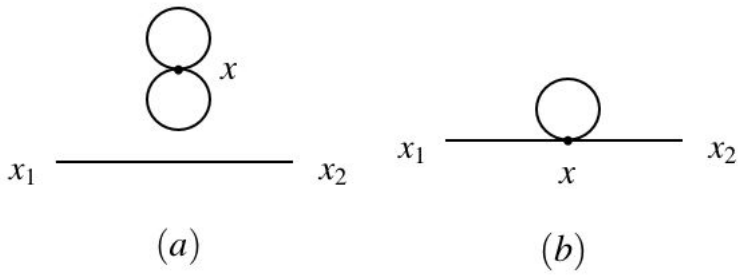

Figura 3.5: Diagrammi di Feynman al primo ordine per la funzione di Green a due punti.

Nel caso di G_{2a}, eseguendo la prima derivata troviamo

$$
G_{2a} = i\Delta_F(1-2)\ \frac{i\lambda}{4!}(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^3 \int d^4u\ \Delta_F(x-u)J(u)[\frac{-i}{2}\ (J\Delta_F J)]\ . \tag{3.22}
$$

Una delle altre tre derivate deve agire su J(u), il che può avvenire in tre modi diversi, le altre due eliminano le correnti in ($J\Delta_F J$). Quindi:

$$
G_{2a} = C_a[i\Delta_F(1-2)]\ (i\lambda)[i\Delta_F(0)]^2\quad ,\quad C_a = \frac{3}{4!} = \frac{1}{8}\ . \tag{3.23}
$$

Nel caso di G_{2b}, due derivate devono operare sulle correnti J(u) e J(v), il che può avvenire in 4×3 modi diversi, mentre le altre due agiscono su ($J\Delta_F J$). In totale, troviamo quindi:

$$
G_{2b} = C_b\ i\lambda\ [i\Delta_F(1-x)]\ [i\Delta_F(2-x)i\Delta_F(0)\quad ,\quad C_b = \frac{12}{4!} = \frac{1}{2}\ . \tag{3.24}
$$

Calcolo di $G^{(1)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$. I diagrammi di Feynman della funzione a quattro punti al primo ordine sono illustrati in Fig. 3.6.

Il calcolo esplicito si effettua a partire dall' espressione

$$
G^{(1)}(1,2,3,4) = (i\frac{\delta}{\delta J(1)})(i\frac{\delta}{\delta J(2)})(i\frac{\delta}{\delta J(3)})(i\frac{\delta}{\delta J(4)})\frac{i\lambda}{4!}(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4\ \frac{1}{4!}[-\frac{i}{2}\ (J\Delta_F J)]^4\ . \tag{3.25}
$$

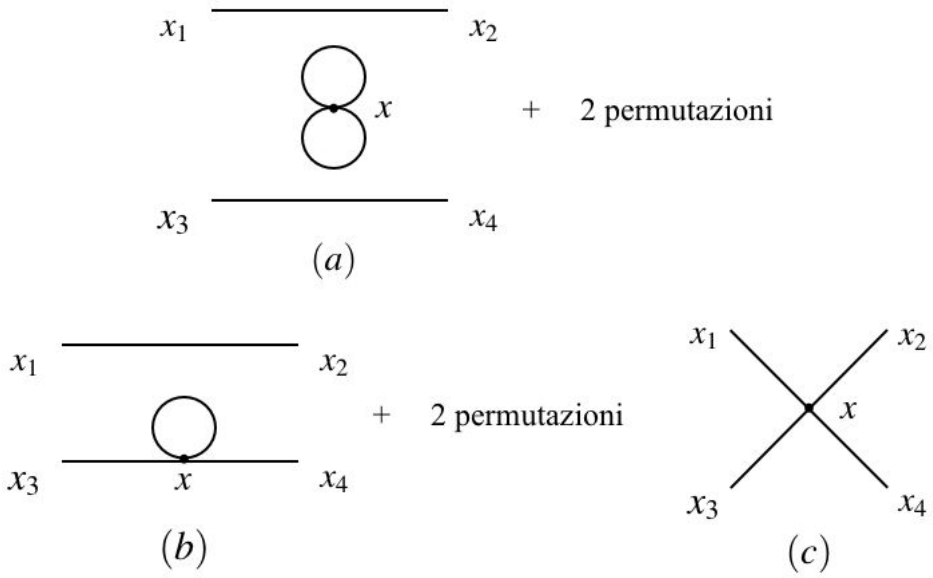

Figura 3.6: Diagrammi di Feynman al primo ordine per la funzione di Green a quattro punti.

Il contributo del grafico (a) si ottiene facendo agire due a due le derivate rispetto alle correnti dei punti esterni su due propagatori. Otteniamo così

$$G_{4a} = \frac{i\lambda}{4!}\, i\Delta_F(1-2)\, i\Delta_F(3-4)(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4\, \frac{1}{2!}[\frac{-i}{2}\,(J\Delta_F J)]^2 \;+\; (2\leftrightarrow 3) \;+\; (2\leftrightarrow 4)\,. \tag{3.26}$$

Riutilizzando l'argomento che ci ha portato alla (3.23) troviamo quindi

$$G_{4a} = \frac{3}{4!}\, i\lambda\, i\Delta_F(1-2)\, i\Delta_F(3-4)[i\Delta_F(0)]^2 \;+\; (2\leftrightarrow 3) \;+\; (2\leftrightarrow 4)\,. \tag{3.27}$$

Per il grafico (b), solo due delle derivate rispetto alle correnti nei punti esterni vanno sullo stesso propagatore. Il risultato è

$$\begin{aligned} G_{4b} &= \frac{i\lambda}{4!}\, i\Delta_F(1-2)(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4 \times \\ &\times \int\int d^4u d^4v \Delta_F(3-u)\Delta_F(4-v)J(u)J(v)\,[\frac{-i}{2}\,(J\Delta_F J)] + (2\leftrightarrow 3) + (2\leftrightarrow 4)\,, \end{aligned} \tag{3.28}$$

e procedendo come per la (3.24) otteniamo

$$G_{4b} = \frac{12}{4!}\, i\lambda\, i\Delta_F(1-2)\, i\Delta_F(3-x)\, i\Delta_F(4-x)\, i\Delta_F(0) + (2\leftrightarrow 3) + (2\leftrightarrow 4)\,. \tag{3.29}$$

Calcoliamo infine il grafico (c). In questo caso le derivate rispetto alle correnti nei punti esterni devono agire tutte su propagatori diversi, col risultato

$$\begin{aligned} G_{4c} = \frac{i\lambda}{4!}(i\frac{\delta}{\delta J(x)})^4 \int d^4u \int d^4v \int d^4w \int d^4z \\ \times \Delta_F(1-u)\Delta_F(2-v)\Delta_F(3-w)\Delta_F(4-z)\; J(u)J(v)J(w)J(z)\,. \end{aligned} \tag{3.30}$$

La cancellazione del fattore 1/4! è completa, e quindi

$$G_{4c} = i\lambda\ i\Delta_F(1-x)i\Delta_F(2-x)i\Delta_F(3-x)i\Delta_F(4-x)\ . \tag{3.31}$$

A conclusione della Sezione, facciamo alcune considerazioni di ordine generale.

Diagrammi di Feynman e somma sui cammini. L'analisi delle funzioni di Green in termini dei diagrammi di Feynman corrisponde in pieno all'idea di somma sui cammini che abbiamo introdotto all'inizio di questo volume. Per esempio, possiamo interpretare la funzione di Green a 4 punti come l'ampiezza quantistica di un processo nello spazio-tempo in cui due particelle vengono create in x_1 ed x_2 ed assorbite in x_3 ed x_4. Ogni grafico indipendente, fissate le posizioni dei vertici, corrisponde ad un cammino possibile e l'ampiezza corrispondente è data dal prodotto delle ampiezze delle diverse componenti del cammino: ampiezza di propagazione, $i\Delta_F(x-y)$, e interazione, $i\lambda$. Lo sviluppo perturbativo corrisponde ad avere una, due, ..., n, interazioni lungo i cammini delle diverse particelle.

Le coordinate dei punti esterni non determinano quante interazioni avvengono nel processo nè fissano i punti dello spazio-tempo dove avvengono le interazioni stesse. Secondo i principi generali della Meccanica Quantistica, dobbiamo quindi integrare sullo spazio-tempo le coordinate delle interazioni (vertici) per ciascun grafico e sommare le ampiezze dei grafici indipendenti.

Contrazioni nello stesso vertice. Quando due derivate funzionali in una lagrangiana di interazione catturano le due J di un termine $(J\Delta_F J)$, nel grafico corrispondente appare una linea che si chiude sul vertice stesso, come nel diagramma (b) della Fig. 3.2. Il circuito chiuso corrisponde all'inserzione di un termine di interazione con due potenze in meno dei campi, in questo caso della forma cost $\times\ \phi^2$. Poichè la lagrangiana *gà contiene* termini con tutte le potenze dei campi fino a quattro, l'inserzione corrisponde a ridefinire le costanti già presenti nella lagrangiana stessa. Il risultato è una nuova, semplice, regola:

- Le contrazioni nello stesso vertice possono essere ignorate.

Nella formulazione di Dyson della matrice S, questa regola è soddisfatta automaticamente se si prende la lagrangiana di interazione come *prodotto normale* di campii [1].

3.3 Parti connesse e diagrammi vuoto-vuoto

Torniamo a considerare lo sviluppo perturbativo del funzionale generatore, Z[J]. I diagrammi che abbiamo mostrato nelle Fig. 3.2 – 3.4 sono tutti topologicamente connessi. In ciascuno di essi ci si può spostare da qualsiasi vertice o pallino a qualsiasi altro muovendosi lungo le linee del diagramma. Esistono però anche diagrammi non connessi. Ad esempio, tra i termini del secondo ordine in λ nella Eq. (3.5) ne esiste uno in cui ciascuna delle otto derivate "cala" un fattore $\Delta_F J$, dando come risultato il quadrato del termine della Eq. (3.12). Questo termine, rappresentato da un diagramma composto da due parti topologicamente separate centrate sui due vertici v_1 e v_2, è illustrato nella Fig. 3.7. A un diagramma non connesso corrisponde un termine (un funzionale di J) che si fattorizza nel prodotto di due o più funzionali di J, e nel caso della Fig. 3.7 si ottiene[3] $(D_1[J])^2/2$. Dal punto di vista

[3] La giustificazione di questo risultato si troverà nell'Appendice B, Eq. (B.14).

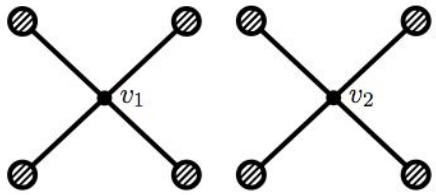

Figura 3.7: Un diagramma sconnesso al secondo ordine in λ.

fisico ciascuna delle due parti del diagramma nella Fig. 3.7 rappresenta un processo di scattering tra due particelle. La combinazione delle due parti rappresenta due processi di scattering indipendenti tra loro: possiamo immaginare che il primo avvenga al CERN e il secondo a Frascati. L'ampiezza di probabilità per la combinazione di più processi indipendenti è semplicemente il prodotto delle ampiezze di ciascuno di essi, e la probabilità che tutti avvengano è il prodotto delle singole probabilità. Non c'è altro da imparare dallo studio di processi indipendenti. Conviene quindi concentrarsi sui singoli processi, che corrispondono a diagrammi connessi.

Abbiamo visto che tramite la teoria delle perturbazioni il funzionale $Z[J]$ può essere espresso come una somma di diagrammi, di cui alcuni connessi, altri non connessi. È possibile definire un funzionale $W[J]$ che genera solo i diagrammi connessi,

$$W[J] = \sum_{\text{(diag. connessi)}} D_i[J] \,. \tag{3.32}$$

La relaione tra $W[J]$ e $Z[J]$ è semplicemente data dalla

$$Z[J] = \exp(W[J]) \,, \tag{3.33}$$

come dimostrato nell'Appendice B.

Notiamo ancora che per $J = 0$ otteniamo

$$Z[0] = \exp(W[0]) \,, \tag{3.34}$$

dove $W[0]$ corrisponde alla somma dei diagrammi connessi vuoto-vuoto, quelli che non hanno "pallino", gli unici che non si annullano per $J = 0$. Possiamo quindi scrivere

$$Z[J] = Z[0] \exp(W'[J]) \,, \tag{3.35}$$

dove $W'[J]$ è la somma dei diagrammi connessi che non siano del tipo vuoto-vuoto, quindi dei diagrammi provvisti di gambe esterne. L'effetto dei diagrammi vuoto-vuoto sul funzionale generatore $Z[J]$ consiste quindi in una costante moltiplicativa $Z[0]$. Come si vede dalla (2.21) il fattore $Z[0]$ non contribuisce al calcolo delle funzioni di Green, e possiamo semplicemente tralasciarlo. Un semplice esempio di che mostra come i contributi dei diagrammi vuoto-vuoto al funzionale generatore $Z[J]$ venga cancellato esattamente dal denominatore $Z[0]$ è discusso nell'Appendice C.

Possiamo applicare questo risultato direttamente alle funzioni di Green, definendo le funzioni di Green *connesse* tramite le derivate del funzionale $W[J]$, o in modo equivalente del funzionale $W'[J]$, dato che i due differiscono per una costante $W[0]$ che non contribuisce alle derivate

$$\langle 0|T\left(\phi(x_1)\cdots\phi(x_N)\right)|0\rangle\Big|_{\text{Conn.}} = \frac{i\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{i\delta}{\delta J_N(x_N)}W[J]\Big|_{J=0}. \tag{3.36}$$

Alla funzione di Green connessa ad N punti contribuiranno i diagrammi connessi con esattamente N linee esterne, quindi N fattori J. Se guardiamo alle regole per i diagrammi della (3.11), vediamo che le derivate funzionali $i\delta/\delta J(x_k)$ della (3.36) sopprimono i fattori $-iJ(x)$ delle linee esterne, e fissano ad x_k la terminazione di ciascuna linea. Si passa quindi dai diagrammi per il funzionale generatore a quelli per la funzione di Green semplicemente sopprimendo i pallini e il relativo fattore, $-i\int d^4x\, J(x)$, e fissando l'estremità di ciascuna linea alla coordinata di uno dei campi presenti nella funzione di Green. Consideriamo ad esempio la funzione a quattro punti: il diagramma di ordine minore che vi contribuisce è il (c) della Fig. 3.2, da cui (vedi la eq. (3.12)) otteniamo

$$\begin{aligned}&\langle 0|T\left(\phi(x_1)\cdots\phi(x_4)\right)|0\rangle\Big|_{\text{Conn.}} = \\ &= -i\lambda\int d^4v\,(i)^4\Delta_F(x_1-v)\Delta_F(x_2-v)\Delta_F(x_3-v)\Delta_F(x_4-v)\;+\mathcal{O}(\lambda^2)\,.\end{aligned} \tag{3.37}$$

Notiamo che la derivata quarta a primo membro ha anche eliminato il fattore $1/4!$ della (3.12).

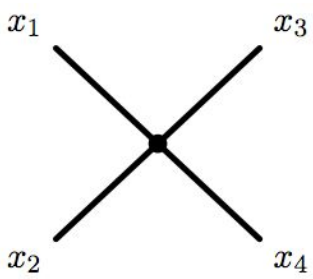

Figura 3.8: Il grafico di ordine λ per la funzione a quattro punti.

A livello grafico possiamo rappresentare i diagrammi della funzione di Green sostituendo ai "pallini" l'indicazione delle coordinate dei punti in cui terminano le linee esterne, come ad esempio mostrato nella figura 3.8.

3.4 Rappresentazione spettrale della funzione di Green a due punti.

In questa sezione studiamo la forma esatta della funzione di Green a due punti per un campo scalare reale. In una teoria di campo con interazioni non è possibile calcolare esattamente le funzioni di Green, ma la richiesta di invarianza rispetto a trasformazioni di Lorentz e una ragionevole ipotesi sulla struttura degli stati ad una e più particelle permette di stabilire una *rappresentazione spettrale* della

funzione a due punti. Nella prossima sezione useremo questa rappresentazione per stabilire una relazione tra funzioni di Green a più punti e gli elementi della matrice S che descrivono l'ampiezza di transizione negli urti tra particelle.

L'idea della rappresentazione spettrale è molto semplice: scriviamo, per $x^0 > 0$

$$\langle 0|T\left[\phi(x)\,\phi(0)\right]|0\rangle = \langle 0|\phi(x)\,\phi(0)|0\rangle = \sum_\alpha \langle 0|\phi(x)|\alpha\rangle\langle\alpha|\phi(0)|0\rangle\ . \tag{3.38}$$

Alla somma sugli stati intermedi possono contribuire stati ad una particella $|\mathbf{p}\rangle$ e stati con due o più particelle. quindi dividiamo la somma (e il risultato) in due parti:

$$\langle 0|\phi(x)\,\phi(0)|0\rangle = \langle 0|\phi(x)\,\phi(0)|0\rangle_1 + \langle 0|\phi(x)\,\phi(0)|0\rangle_{(2+)}\ . \tag{3.39}$$

Il contributo degli stati a una particella può essere scritto esplicitamente (si veda l'eq.(2.91))

$$\langle 0|\phi(x)\,\phi(0)|0\rangle_1 = \int d^3p\langle 0|\phi(x)|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}|\phi(0)|0\rangle\ . \tag{3.40}$$

Procediamo adesso in due passi.

- La dipendenza da x si ottiene dalla relazione:

$$\phi(x) = e^{iPx}\,\phi(0)\,e^{-iPx}\ , \tag{3.41}$$

  dove P_μ sono gli operatori che rappresentano il quadri-momento totale, da cui

$$\langle 0|\phi(x)|p\rangle = e^{-ipx}\,\langle 0|\phi(0)|\mathbf{p}\rangle\ . \tag{3.42}$$

- L' elemento di matrice di $\phi(0)$ si parametrizza come

$$\langle 0|\phi(0)|\mathbf{p}\rangle = \frac{\sqrt{Z(p)}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2\omega(\mathbf{p})}}\ , \tag{3.43}$$

  per cui

$$\langle 0|\phi(x)\,\phi(y)|0\rangle_1 = \int d^3p\frac{Z(p)}{(2\pi)^3\,2\omega(\mathbf{p})}e^{-ipx}\ . \tag{3.44}$$

Il punto cruciale è che la Z(p) definita dalla (3.43) *risulta essere Lorentz-invariante.* Essa deve essere quindi una funzione dell'unico invariante che possiamo costruire con il quadri-momento della particella, cioé funzione di $p_\mu p^\mu = m^2$ che è una costante, indipendente dal valore di $\mathbf{p}$. La dimostrazione esplicita di questa affermazione è riportata in Appendice D. In modo piú intutitivo, ma sostanzialmente corretto, si puó argomentare come segue.

(1) La funzione di Green è Lorentz invariante e cosí la sua restrizione agli stati intermedi ad una particella, il primo membro della (3.44).

(2) Nel secondo membro della (3.44), la misura $d^3p/(2\omega(\mathbf{p}))$ è Lorentz invariante e cosí l' esponenziale exp(-ipx), da cui, per avere un risultato invariante, segue l' invarianza di Z(p).

Possiamo quindi portare Z(p) = Z(m^2) = Z fuori dell' integrale e ottenere

$$\langle 0|\phi(x)\,\phi(y)|0\rangle_1 = Z\int d^3p\,\frac{1}{(2\pi)^3\,2\omega(\mathbf{p})}e^{-ipx};\quad (\mathrm{x}^0>0)\,. \tag{3.45}$$

Se ripetiamo questi passi nel caso $x^0<0$ otteniamo, per il contributo degli stati a una particella,

$$\langle 0|\,T\left(\phi(x)\,\phi(0)\right)|0\rangle_1 = \\ \frac{Z}{(2\pi)^3}\int d^3p\,\frac{e^{i\vec{p}(\vec{x})}}{2\omega(\mathbf{p})}\left(e^{-i\omega(\mathbf{p})x^0}\theta(x^0)+e^{i\omega(\mathbf{p})x^0}\theta(-x^0)\right)\,,$$

e, paragonando con la (2.72) otteniamo

$$\langle 0|\,T\left(\phi(x)\,\phi(0)\right)|0\rangle_1 = i\,Z\,\Delta_F(x;m)\,. \tag{3.46}$$

dove abbiamo introdotto la notazione $\Delta_F(x;m)$ per indicare il propagatore di Feynman relativo a particelle di massa m. La costante Z è indicata col nome di costante di rinormalizzazione del campo.

Gli stati a due o più particelle possono essere caratterizzati sulla base del loro impulso $\mathbf{p}$, della loro massa invariante, M, e della loro energia $E=\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}$. Al contrario degli stati di singola particella, che corrispondono a un valoro preciso di m, gli stati a due o più particelle presentano uno spettro continuo di valori di M a partire da una certa soglia M_s. Ad esempio gli stati a due particelle di impulso totale nullo, per i quali $E=M$, saranno composti da due particelle di impulso opposto, $\pm\mathbf{p}$, e quindi $M=E=2\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}\geq M_s=2m$. Nella teoria $\lambda\phi^4$, come abbiamo visto, non sono possibili funzioni di Green con numero dispari di punti, ovvero transizioni tra stati con un numero pari e un numero dipari di particellee la soglia effettiva è $M_s=3m$. Gli stati che contribuiscono alla somma (3.38) sono creati da ϕ che opera sul vuoto, e avranno momento angolare intrinseco nullo. Quindi anche a questi stati si applicano le considerazioni fatte sugli stati di singola particella, e il contributo degli stati di massa M risulterà proporzionale a $i\Delta_F(x;M)$. Possiamo quindi dare l'espressione generale per la funzione a due punti in una teoria scalare:

$$\langle 0|\,T\left(\phi(x)\,\phi(0)\right)|0\rangle = iZ\Delta_F(x;m)+i\int_{M^2=M_s^2}^{\infty}dM^2\sigma(M^2)\Delta_F(x;M)\,. \tag{3.47}$$

che dipende da due sole grandezze incognite: la costante di rinormalizzazione Z e la funzione $\sigma(M^2)$ che prende il nome di *funzione spettrale*.

Notiamo che in teoria delle perturbazioni possiamo sviluppare la funzione a due punti in potenze della costante di accoppiamento (λ nella teoria scalare che adottiamo come modello in questo capitolo). Quindi sia la costante di rinormalizzazione Z che la funzione spettrale $\sigma(M^2)$ devono essere considerate come serie di potenze nella costante di accoppiamento. All'ordine zero ci si riduce ai risultati della teoria libera (si veda, ad esempio, l'eq. (2.67)), cioé

$$Z=1;\qquad \sigma(M^2)=0\qquad\qquad \text{(ordine zero in teoria delle perturbazioni)}\ . \tag{3.48}$$

Nella teoria $\lambda\phi^4$ le prime correzioni a Z e $\sigma(M^2)$ provengono dal diagramma (c) nella figura 3.3, e sono $\propto\lambda^2$.

Possiamo dare una costruzione formale del secondo termine nella (3.47) nel modo seguente. Consideriamo per primo il caso $x^0>0$. Il contributo degli stati con tre o piú particelle si scrive:

$$\langle 0|\phi(x)|\phi(0)|0\rangle_{2+} = \langle 0|\phi(x)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle_{2+} = \sum_n \langle 0|\phi(x)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle =$$
$$= \sum_n e^{-P_n x}\,\langle 0|\phi(x)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle\,. \tag{3.49}$$

Gli stati $|n\rangle$ sono stati con 3 o più particelle, caratterizzati dal quadri-momento totale P_n, piú altri numeri quantici che non dobbiamo specificare. Inseriamo nella (3.49) due funzioni delta, che si integrano esplicitamente ad uno:

$$\sum_n \langle 0|\phi(x)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle =$$
$$= \int dM^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\delta(p^2-M^2)\sum_n (2\pi)^4\delta^{(4)}(p-P_n)e^{-iP_n x}\,\langle 0|\phi(0)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle =$$
$$= \int dM^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\delta(p^2-M^2)e^{-ipx}\sum_n (2\pi)^4\delta^{(4)}(p-P_n)\,\langle 0|\phi(0)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle\,, \tag{3.50}$$

dove abbiamo portato l' esponenziale fuori della somma usando la funzione delta.

Il punto cruciale è che, come nel caso della singola particella, la somma sugli stati da una funzione del quadri-momento p che è *invariante di Lorentz*. Quindi la somma deve essere una funzione di p^2 ovvero, in virtú della seconda funzione delta, di M^2. Possiamo denotare questa funzione come:

$$(2\pi)\sigma(M^2) = \sum_n (2\pi)^4\delta^{(4)}(p-P_n)\,\langle 0|\phi(0)|n\rangle\langle n|\phi(0)|0\rangle \quad (M^2=p^2)\,, \tag{3.51}$$

ed ottenere

$$\langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle_{2+} = \int dM^2\sigma(M^2)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,e^{-ipx} =$$
$$= \int dM^2\sigma(M^2)\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\omega(p,M)}\,e^{-i(\omega(p,M)t}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\,, \tag{3.52}$$

dove $\omega(p,M)$ è l' energia che corrisponde ad una particella di quadri-momento p e massa M.

Ripetiamo l' argomento per $x^0<0$ e cambiamo la variabile di integrazione $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$. Troviamo così

$$\langle 0|\phi(0)\phi(x)|0\rangle_{2+} = \int dM^2\sigma(M^2)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,e^{+ipx} =$$
$$= \int dM^2\sigma(M^2)\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\omega(p,M)}\,e^{+i(\omega(p,M)t}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\,. \tag{3.53}$$

In conclusione

$$\langle 0|T\left[\phi(x)\phi(0)\right]|0\rangle_{2+} =$$
$$\int dM^2\sigma(M^2)\left\{\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\omega(p,M)}\,e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\left[\theta(x^0)e^{-i(\omega(p,M)t}+\theta(-x^0)e^{+i(\omega(p,M)t}\right]\right\}\,, \tag{3.54}$$

e, confrontando con la ((2.72)), troviamo il risultato finale

$$\begin{aligned}&\langle 0|T\left[\phi(x)\phi(0)\right]|0\rangle_{2+} = \\ &= i\int dM^2\sigma(M^2)\Delta_F(x,M)\ .\end{aligned} \tag{3.55}$$

La funzione $\sigma(M^2)$ è diversa da zero solo per quei valori di M^2 che corrispondono alla massa di qualche possibile stato intermedio, cioé per $M^2 > (3m)^2$, quindi i limiti di integrazione vanno da $(3m)^2$ all' infinito e ritroviamo proprio il secondo termine della (3.47).

3.5 Funzione di Green a due punti in teoria delle perturbazioni.

Nella sezione precedente abbiamo discusso la rappresentazione esatta della funzione a due punti in teoria dei campi nota come rappresentazione di Lehmann-Kallen.

Per la teoria di un campo scalare corrispondente a particelle di massa m, la rappresentazione L-K prende la forma

$$G(x,y) = iZ\Delta_F(x-y,m^2) + \int_{(3m)^2}^{+\infty} dM^2\ \sigma(M^2)\ i\Delta_F(x-y,M^2)\ , \tag{3.56}$$

dove $i\Delta_F(x-y,m^2)$ è il propagatore di una particella scalare libera di spin zero e massa m. La funzione $\sigma(M^2)$, la cosiddetta *funzione spettrale*, è definita positiva. In questa Sezione diamo una discussione della funzione a due punti nella teoria delle perturbazioni al secondo ordine, nella teoria scalare $\lambda\phi^4$. Ripetiamo qui la lagrangiana data nella eq. (2.58)

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4\ , \tag{3.57}$$

indicando peró con m_0 il coefficiente del termine quadratico in ϕ, per distinguerlo dalla massa fisica m che compare nella formula (3.56).

Possiamo definire m_0 come la massa che avrebbe la particella *nel limite* $\lambda \to 0$, una quantità chiaramente inosservabile, mentre m è la massa inerziale di una particella isolata, misurabile in linea di principio e determinata dalla posizione del polo nella trasformata di Fourier della funzione a due punti, (3.56). Il calcolo che segue mostra come, partendo dai grafici di Feynman intermini della massa nuda, si ricostruisce la funzione a due punti in termini della massa fisica o rinormalizzata. È il piú semplice caso del processo indicato come *rinormalizzazione* in teoria dei campi.

I relativi grafici di Feynman connessi sono riportati nella Fig. 3.9.

Consideriamo la trasformata di Fourier:

$$\tilde{G}(p_1,p_2) = \int d^4x_1 d^4x_2\ e^{-i(p_1x_1)}e^{+i(p_2x_2)}\ G(x_1,x_2)\ . \tag{3.58}$$

limitandoci, in un primo momento, ai termini al primo ordine in λ, Fig. 3.9, (a) e (b). Rifacendoci alle eq. (3.23) e (3.24), possiamo scrivere direttamente

$$\begin{aligned}&\tilde{G}(p_1,p_2) = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1-p_2)G_{(a+b)}(p_1); \\ &G_{(a+b)}(p) = \frac{i}{p^2-m_0^2} + \frac{i}{p^2-m_0^2}(i\lambda C_1)\frac{i}{p^2-m_0^2} + \mathscr{O}(\lambda^2)\ ,\end{aligned} \tag{3.59}$$

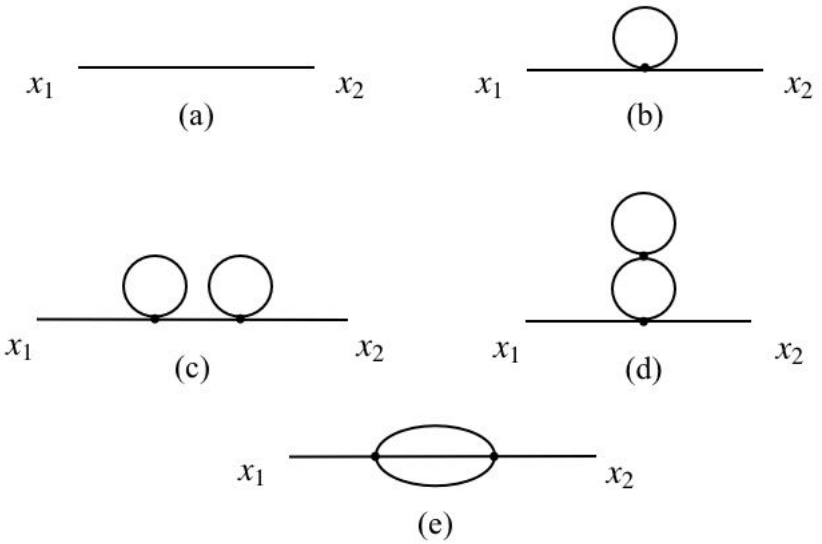

Figura 3.9: I diagrammi connessi per la funzione a due punti nella teoria $\lambda\phi^4$, al secondo ordine perturbativo.

dove abbiamo posto

$$C_1 = i\frac{1}{2}\Delta_F(0)\,. \tag{3.60}$$

Nella (3.59) compare la *massa nuda*, m_0. Notiamo che il propagatore ha un polo per $p^2 = m_0^2$. Introduciamo adesso la *massa rinormalizzata*, m, scrivendo:

$$m_0^2 = m^2 + \delta m^2\,. \tag{3.61}$$

È evidenete che δm^2 deve dipendere da λ, in particolare deve essere $\delta m^2 = \mathcal{O}(\lambda)$, poiché $m^2 \to m_0^2$ se mandiamo $\lambda \to 0$. Possiamo sviluppare il primo termine nella (3.59) utilizzando la relazione:

$$\frac{1}{A+\epsilon} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A^2}\,\epsilon + \frac{1}{A^3}\,\epsilon^2 + \dots\,, \tag{3.62}$$

e fermandoci al primo ordine in δm^2. Il risultato è

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2} = \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2}\,\delta m^2 + \mathcal{O}(\lambda^2)\,. \tag{3.63}$$

Se ci limitiamo al primo ordine in λ, trascurando termini di ordine λ^2, possiamo invece identificare m_0^2 con m^2 nel secondo termine della (3.59). In totale abbiamo quindi

$$G_{(a+b)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2}[\delta m^2 - \lambda C_1] + \mathcal{O}(\lambda^2)\,. \tag{3.64}$$

Secondo la rappresentazione L-K, la funzione di Green deve avere un polo semplice per $p^2 = m^2$, dove m è la *massa fisica*. Questo fissa $\delta m^2 = \lambda C_1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$. A questo ordine, ritroviamo così l' eq. (3.56) con

$$Z = 1 \quad , \quad \sigma(M^2) = 0 \, . \tag{3.65}$$

Possiamo determinare la forma del propagatore al secondo ordine abbastanza semplicemente aggiungendo all'espressione (3.59) i contributi dei i grafici (c), (d) ed (e) della Fig. 3.9

$$\begin{aligned} G_c &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} \, (i\lambda C_1) \, \frac{i}{p^2 - m_0^2} \, (i\lambda C_1) \, \frac{i}{p^2 - m_0^2} \, , \\ G_d &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} \, (i\lambda^2 C_2) \, \frac{i}{p^2 - m_0^2} \, , \\ G_e &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} \, [i\lambda^2 F(p^2)] \frac{i}{p^2 - m_0^2} \, . \end{aligned} \tag{3.66}$$

In questi termini, che sono giá del secondo ordine, possiamo identificare m_0 con m.

Abbiamo indicato, come prima, con $i\lambda C_1$ la costante corrispondente alla singola bolla nei grafici (b) e (c) della Fig. 3.9, e con $i\lambda^2 C_2$ il contributo, sempre una costante, della doppia bolla del grafico (d). Il calcolo esplicito di G_e è alquanto più difficile e non siamo ancora in grado di farlo. Tuttavia, ci basta sapere che l' ampiezza corrispondente al circuito chiuso (*loop*) nella Fig. 3.9, (e) si può scrivere come $i\lambda^2 F(p^2)$, con F una funzione non triviale di p^2, regolare in $p^2 = m^2$.

Possiamo rappresentare la funzione $F(p^2)$ al modo seguente

$$F(p^2) = F(m^2) + (p^2 - m^2)F'(m^2) + (p^2 - m^2)R(p^2) \, , \tag{3.67}$$

dove $R(p^2)$ è una funzione regolare che *si annulla* per $p^2 = m^2$[4]. Nella (3.59), dobbiamo adesso sviluppare il primo termine fino al secondo ordine in δm^2 e il secondo termine fino al primo ordine. Otteniamo così

$$\begin{aligned} G_{a+b}(p^2) &= \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2} \, [\delta m^2 - \lambda C_1] + \\ &+ \frac{i}{(p^2 - m^2)^3} \, [(\delta m^2)^2 - 2\delta m^2 \, (\lambda C_1)] \, . \end{aligned} \tag{3.68}$$

Per quanto riguarda G_e, usando la rappresentazione (3.67), troviamo

$$G_e = \frac{i}{(p^2 - m^2)^2} \, [-\lambda^2 F(m^2)] + \frac{i}{(p^2 - m^2)} \, [-\lambda^2 F'(m^2)] + \frac{i}{p^2 - m^2} \, [-\lambda^2 R(p^2)] \, . \tag{3.69}$$

Ponendo tutto insieme, abbiamo

$$\begin{aligned} G(p^2) &= \frac{i[1 - \lambda^2 \, F'(m^2)]}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2} \, [\delta m^2 - \lambda C_1 - \lambda^2 C_2 - \lambda^2 F(m^2)] + \\ &+ \frac{i}{(p^2 - m^2)^3} \, [(\delta m^2)^2 - 2\delta m^2 \, (\lambda C_1) + \lambda^2 C_1^2] + \\ &+ i \frac{-\lambda^2 R(p^2)}{p^2 - m^2} \, + \mathcal{O}(\lambda^3) \, . \end{aligned} \tag{3.70}$$

[4] $(p^2 - m^2)R(p^2)$ è il resto di Taylor dello sviluppo al primo ordine di $F(p^2)$ in $p^2 = m^2$, ed è un infinitesimo di ordine superiore ripsetto a $p^2 - m^2$.

Per cancellare il residuo nel doppio polo dobbiano adesso porre

$$\delta m^2 = \lambda C_1 + \lambda^2 C_2 + \lambda^2 F(m^2) \; + \mathcal{O}(\lambda^3) \, , \tag{3.71}$$

e notare che con questa posizione si cancella anche il residuo del polo triplo. Il risultato finale è quindi:

$$G(p^2) = \frac{i[1-\lambda^2 \, F'(m^2)]}{p^2 - m^2} \; + \; i\frac{-\lambda^2 R(p^2)}{p^2 - m^2} \; + \mathcal{O}(\lambda^3) \, . \tag{3.72}$$

Abbiamo ottenuto una rappresentazione della funzione a due punti composta da un termine di polo (il primo) ed un termine regolare in $p^2 = m^2$, in quanto $R(m^2) = 0$. Il risultato ha la forma data nella (3.56) se identifichiamo

$$\begin{aligned} Z &= 1 - \lambda^2 \, F'(m^2) \, , \\ \mathcal{R}(p^2) &= \frac{-\lambda^2 R(p^2)}{p^2 - m^2} = \int_{(3m)^2}^{+\infty} \frac{\sigma(M^2)}{p^2 - M^2} \, dM^2 \, . \end{aligned} \tag{3.73}$$

Uno studio piú approfondito mostra che la funzione al primo membro della (3.73) è una funzione analitica della variabile complessa p^2 con un taglio sull'asse reale positivo di p^2 che parte da $p^2 = (3m)^2$ e arriva a $+\infty$. Il secondo membro della (3.73) è quindi la familiare rappresentazione di Cauchy di una funzione analitica, come integrale della discontinuità sul taglio. La discontinuitá è proprio la funzione spettrale $\sigma(M^2)$ che, come anticipato, risulta essere di $\mathcal{O}(\lambda^2)$. Esplicitamente:

$$\sigma(M^2) = \frac{i}{2\pi} \lim_{\epsilon \to 0} [\mathcal{R}(M^2 + i\epsilon) - \mathcal{R}(M^2 - i\epsilon)] \tag{3.74}$$

Appendice A

Ampiezza di transizione in assenza di potenziale

Effettuiamo il calcolo dell'elemento di matrice $\langle q_2|e^{-i\frac{p^2}{2m}T}|q_1\rangle$. Assumiamo che gli autostati di q e p siano normalizzati in modo che

$$\langle q'|q\rangle = \delta(q'-q) \quad , \quad \int dq|q\rangle\langle q| = \mathbf{1} \, .$$

Se normalizziamo gli stati $|p\rangle$ in modo che

$$\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipq} \, ,$$

troviamo che

$$\langle p'|p\rangle = \delta(p'-p) \quad , \quad \int dp|p\rangle\langle p| = \mathbf{1} \, .$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\langle q_2|e^{-i\frac{p^2}{2m}T}|q_1\rangle &= \int dk \langle q_2|e^{-i\frac{p^2}{2m}T}|k\rangle\langle k|q_1\rangle \\
&= \int dk e^{-i\frac{k^2}{2m}T}\langle q_2|k\rangle\langle k|q_1\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi}\int dk e^{-i\frac{k^2}{2m}T} e^{i(q_2-q_1)k} \, .
\end{aligned}$$

L'integrazione si semplifica costruendo un quadrato perfetto all'esponente. Otteniamo così

$$\langle q_2|e^{-i\frac{p^2}{2m}T}|q_1\rangle = \frac{1}{2\pi} e^{i\frac{m(q_2-q_1)^2}{2T}} \int dk e^{-i\frac{(k-k_{\rm cl})^2}{2m}T} \quad , \quad k_{\rm cl} = \frac{m(q_2-q_1)}{T} \, ,$$

e converge per $\mathrm{Im}\, T < 0$. Per valori reali di T possiamo definirlo, con il cambiamento di variabile $Q = k - k_{\rm cl}$

$$\int dQ e^{-i\frac{Q^2}{2m}T} = \lim_{\eta\to 0^+} \int dQ e^{-i\frac{Q^2}{2m}(T-i\eta)} = \sqrt{\frac{2\pi m}{iT}} \, ,$$

dove la notazione $\eta \to 0^+$ indica che il limite va preso partendo da valori positivi di η. La necessità di passare al limite verso valori reali del tempo partendo da valori complessi nel semipiano inferiore si riflette, come vedremo, nella famosa "regola dell'$i\epsilon$" nel calcolo dei propagatori e dei diagrammi di Feynman. Sostituendo nella espressione precedente si ottiene il risultato della eq. (1.3).

Appendice B

Grafici connessi

Vogliamo dimostrare che il funzionale generatore $Z[J]$ può essere scritto come

$$Z[J] = \exp(W[J]) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} W[J]^k \tag{B.1}$$

dove $W[J]$ è la somma di tutti i diagrammi connessi. La dimostrazione si applica egualmente allo sviluppo perturbativo di qualsiasi teoria di campo.

Possiamo scrivere la $Z[J]$ in termini dell'operatore "vertice" V,

$$Z[J] = e^V Z^0[J] = \sum \frac{V^k}{k!} Z^0[J] \tag{B.2}$$

dove l'operatore V si ottiene direttamente dal lagrangiano di interazione,

$$V = i \int d^4x \mathscr{L}^1 \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \tag{B.3}$$

e dipende dalla teoria. Nella $\lambda\phi^4$ (vedi eq. (3.5)) questo operatore è

$$V = \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4$$

e in teorie diverse può prendere una forma più complessa, eventualmente con più funzioni J in corrispondenza dei diversi campi. $Z^0[J]$, il funzionale generatore della teoria libera, può essere scritto come

$$Z^0[J] = \exp W^0[J] \tag{B.4}$$

dove $W^0[J]$ è la somma dei diagrammi connessi privi di vertici. Nella teoria $\lambda\phi^4$ l'unico diagramma di questo tipo è il diagramma (d) della figura 3.2, e troviamo (vedi eq. 3.4)

$$W_0[J] = \frac{-i}{2} \iint d^4x\, d^4y\, J(x)\, \Delta_F(x-y)\, J(y) \tag{B.5}$$

Ciascuna derivata funzionale della Z (vedi ad esempio le eq. (3.9), (3.10)) contiene un fattore $Z^0[J]$, quindi possiamo scrivere

$$Z[J] = \tilde{Z}[J]\, Z^0[J] = \tilde{Z}[J] \exp(W^0[J]) \tag{B.6}$$

e notare che la $\tilde{Z}[J]$ si può esprimere mediante la somma di tutti quei diagrammi G, connessi e non connessi, *in cui ciascuna componente connessa ha almeno un vertice*

$$\tilde{Z} = 1 + \sum G \tag{B.7}$$

Per dimostrare la (B.1) occorre quindi dimostrare che

$$\tilde{Z} = \exp(\tilde{W}[J]) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{W}[J]^n \tag{B.8}$$

dove $\tilde{W}[J]$ è la somma di tutti i diagrammi *connessi, con uno o più vertici*, che immaginiamo ordinati in una lista $\{D_1, D_2, \ldots\}$:

$$\tilde{W}[J] = \sum_{i=1}^{\infty} D_i[J] \tag{B.9}$$

La lista potrebbe cominciare con i diagrammi con un $v_i = 1$, poi quelli con $v_i = 2$ e via di seguito. Possiamo quindi scrivere

$$\exp(\tilde{W}[J]) = e^{D_1} e^{D_2} \cdots e^{D_k} \cdots = \sum_{n_1, n_2 \ldots n_k \ldots} \frac{D_1^{n_1}}{n_1!} \cdots \frac{D_k^{n_k}}{n_k!} \cdots \tag{B.10}$$

Per ciascun diagramma D_i indicheremo con v_i il numero dei vertici in esso contenuti. Il termine $V^k/k!$ nella (B.2) produrrà i diagrammi connessi con k vertici (un sottoinsieme della lista $\{D_1, D_2, \ldots\}$) oltre a diagrammi non connessi che indicheremo con G

$$\frac{V^k}{k!} Z^0[J] = \left[\sum_i D_i\, \delta_{k\, v_i} + (\text{diagrammi } G \text{ non connessi}) \right] Z^0[J] \tag{B.11}$$

Consideriamo ora un diagramma G non connesso che contiene n_1 copie del diagramma connesso D_1, n_2 copie di D_2, e così via, quindi

$$G = K_G\, (D_1)^{n_1} (D_2)^{n_2} \cdots \tag{B.12}$$

dove K_G è un coefficiente combinatorio. Per dimostrare la (B.8) dobbiamo dimostrare che K_G è lo stesso coefficiente con cui questo termine compare nella (B.10), cioé

$$K_G = \frac{1}{n_1!} \cdots \frac{1}{n_k!} \cdots \tag{B.13}$$

Per calcolare K_G dobbiamo partire dalla (B.2). Se $v_i \geq 1$ è il numero dei vertici nel grafico D_i, il numero totale delle componenti e dei vertici in G, n e v, saranno rispettivamente[1]

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \qquad\qquad v = \sum_{i=1}^{\infty} n_i v_i$$

[1]Notiamo che anche se le somme sono estese sino ad infinito, stiamo considerando diagrammi con un numero finito di componenti, per cui solo alcune n_k saranno differenti da zero.

quindi G sarà prodotto dal termine $V^v/v!$ nella (B.2). In questo termine dovremo scegliere i v_1 fattori V che producono ciascuna delle n_1 copie di D_1, i v_2 fattori che producono le copie di D_2 e così via (vedi la B.11). Questa scelta si può fare in

$$\frac{1}{\prod(n_i!)}\frac{v!}{\prod(v_i!)^{n_i}}$$

modi diversi. Infatti ci sono $v!$ permutazioni dei fattori V, ma questo numero va diviso per il numero di permutazioni delle V che contribuiscono a ciascuna componente connessa di G, e quindi dividiamo per $\prod(v_i!)^{n_i}$, e per il numero di permutazioni tra gli n_1 gruppi che danno le n_1 copie di D_1 e cosi via, e quindi dividiamo per $\prod(n_i!)$. Il fattore $v!$ si semplifica con il fattore $1/v!$ che accompagna il termine V^v nello sviluppo della $Z[J]$, eq. (B.2). Analogamente ciascuno dei fattori $v_i!$ a denominatore si combinano (vedi la eq. B.11) con un V^{v_i} a generare le componenti D_i.

In conclusione il valore del diagramma G, composto da n_1 copie di D_1, n_2 copie di D_2, e così via, è dato da

$$G[J] = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{(D_i[J])^{n_i}}{n_i!}. \tag{B.14}$$

Il coefficiente K_G è dunque quello della (B.13), e questo conchiude la dimostrazione.

Bibliografia

[1] L. Maiani e O. Benhar, *Meccanica Quantistica Relativistica. Introduzione alla teoria quantistica dei campi*, (Editori Riuniti University Press, Roma, 2012).

[2] R. P. Feynman e A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, (McGraw-Hill, New York, 1965).

[3] P. A. M. Dirac, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion, Band 3, Heft 1 (1933), Ristampato in *Quantum Electrodynamics*, a cura di J. Schwinger (Dover, New York, 1958).

[4] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley, Boston,1994).

[5] J.D.Bjorken, S.Drell, op. cit. l Cap. 2

[6] Claude Itzykson e Jean-Bernard Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1980.

[7] L.Landau, E.Lifchitz, Mecanique Quantique, Theorie Non Relativiste, ed. Mir, 1967, Cap,1.

[8] L. Maiani, Interazioni Elettrodeboli, AA. 2009-2010

[9] H. Lehman, K. Symanzik, W. Zimmermann, *Nuovo Cimento* **1**, 205 (1955).

[10] Michael E. Peskin e Daniel V Schroeder *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books, 1995.

[11] P. A. M. Dirac, *Quantum Mechanics*, Cap. VI, Oxford University Press.

[12] L Landau e E. Lifschitz, *Teoria Quantistica Relativistica*, Editori Riuniti.

[13] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol.II, Cambridge University Press, 1995.

[14] V. N. Gribov, Nucl. Phys. **B 139** (1978) 1.

[15] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol.I, Cambridge University Press, 1995.

[16] H. Jeffreys e M. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, 1972

[17] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathemathical Functions*, Dover, 1972.