

Capitolo 1

APPLICAZIONI: QED

1.1 Diffusione in un campo coulombiano classico

Consideriamo la diffusione di un elettrone in un campo esterno statico. Il quadripotenziale corrispondente si può scrivere

$$A^\mu(x) = A^\mu(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} A^\mu(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} . \quad (1.1)$$

e lo sviluppo perturbativo per la matrice S ha la forma

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n T \{ [\bar{\psi}(x_1) \mathcal{A}(x_1) \psi(x_1)] \dots [\bar{\psi}(x_n) \mathcal{A}(x_n) \psi(x_n)] \} , \quad (1.2)$$

dove ψ è il campo che descrive l' elettrone, T è l'operatore di ordinamento temporale.

Al primo ordine nella lagrangiana d'interazione la (1.2) si riduce alla

$$S = ie \int d^4x \bar{\psi}(x) \mathcal{A}(x) \psi(x) . \quad (1.3)$$

Il processo fisico descritto dalla matrice S definita dalla (1.3) è rappresentato schematicamente dal diagramma di Feynman della Fig. 1.1. L'interazione col campo esterno provoca la transizione dell'elettrone dallo stato iniziale $|i\rangle = |pr\rangle$ allo stato finale $|f\rangle = |p'r'\rangle$, dove $p \equiv (E, \mathbf{p})$ e $p' \equiv (E', \mathbf{p}')$ sono i quadri-impulsi ed r e r' le proiezioni dello spin.

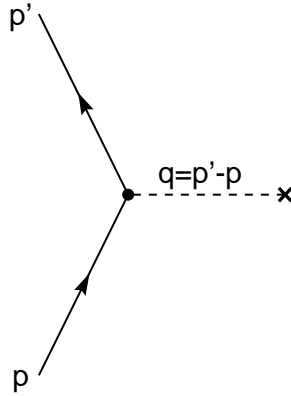


Figura 1.1:

L'elemento di matrice S corrispondente ha la forma

$$\begin{aligned}
 S_{if} &= \langle f|S|i\rangle = ie \left(\frac{m}{VE}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE'}\right)^{1/2} \int d^4x e^{i(p'-p)x} \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}') \mathcal{A}(x) u_r(\mathbf{p}) \\
 &= ie \left(\frac{m}{VE}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE'}\right)^{1/2} \int d^3x e^{i(\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \int dt e^{i(E'-E)t} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}') \mathcal{A}(\mathbf{q}) u_r(\mathbf{p}) \\
 &= (2\pi) \delta(E - E') \left(\frac{m}{VE}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE'}\right)^{1/2} \mathcal{M}_{if} ,
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

dove V è il volume di normalizzazione e

$$\mathcal{M}_{if} = ie \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}') \mathcal{A}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) . \tag{1.5}$$

Si noti che nella (1.4) compare solo la funzione δ associata alla conservazione dell'energia. L'impulso non è conservato, perchè la presenza della sorgente statica che genera il campo esterno rompe l'invarianza per traslazioni. La relazione che esprime la conservazione dell'energia, che implica

$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| , \tag{1.6}$$

mostra chiaramente che l'impulso assorbito dalla sorgente viene trascurato.

La sezione d'urto differenziale del processo si ottiene dalle formule date nel Cap. ??:

$$d\sigma = \frac{V}{v} W_{if} \frac{V d^3p'}{(2\pi)^3} , \tag{1.7}$$

dove W_{if} è la probabilità di transizione per unità di tempo

$$W_{if} = \frac{|S_{if}|^2}{T} = (2\pi) \delta(E - E') \left(\frac{m}{VE} \right)^2 |\mathcal{M}_{if}|^2, \quad (1.8)$$

T è il tempo di interazione. Usando le equazioni (1.8) e (??) e la relazione

$$|\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}| E' dE' \quad (1.9)$$

dalla (1.7) otteniamo

$$d\sigma = \frac{VE}{|\mathbf{p}|} (2\pi) \delta(E - E') \left(\frac{m}{VE} \right)^2 |\mathcal{M}_{if}|^2 \frac{V}{(2\pi)^3} |\mathbf{p}| E' dE' d\Omega_{p'}. \quad (1.10)$$

Per arrivare all'espressione della sezione d'urto differenziale, la la probabilità che l'elettrone venga diffuso nell'elemento di angolo solido $d\Omega_{p'}$, dobbiamo ora integrare sull'energia usando la funzione δ , col risultato

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} = \left(\frac{m}{2\pi} \right)^2 |\mathcal{M}_{if}|^2 = \left(\frac{me}{2\pi} \right)^2 |\bar{u}_{r'}(\mathbf{p}') A(\mathbf{q}) u_r(\mathbf{p})|^2, \quad (1.11)$$

dove $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$.

Consideriamo ora il caso in cui il campo esterno sia il campo Coulombiano generato da un nucleo atomico, che supponiamo puntiforme. Abbiamo quindi:

$$A^\mu(\mathbf{x}) \equiv \left(\frac{Z}{4\pi|\mathbf{x}|}, 0, 0, 0 \right), \quad (1.12)$$

con trasformata di Fourier, FT, data da (cfr. Problema 1):

$$A^\mu(\mathbf{q}) \equiv \left(Z \frac{e}{|\mathbf{q}|^2}, 0, 0, 0 \right). \quad (1.13)$$

Sostituendo la (1.13) nella (1.11), sommando sulle proiezioni dello spin dell'elettrone nello stato finale e mediando su quelle dell'elettrone nello stato iniziale otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} &= \left(\frac{me}{2\pi} \right)^2 Z^2 \frac{e^2}{|\mathbf{q}|^4} \frac{1}{2} \sum_{rr'} |\bar{u}_{r'}(\mathbf{p}') \gamma^0 u_r(\mathbf{p})|^2 \\ &= \frac{(2m\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4} \frac{1}{(2m)^2} \frac{1}{2} Tr [(\not{p}' + m) \gamma^0 (\not{p} + m) \gamma^0], \end{aligned} \quad (1.14)$$

dove $\alpha = e^2/4\pi$ e le somme su r e r' sono state effettuate usando le relazioni di completezza soddisfatte dagli spinori di Dirac. Il calcolo delle tracce nella (1.14) si esegue facilmente utilizzando il risultato

$$\begin{aligned} Tr [(\not{p}' + m)\gamma^0(\not{p} + m)\gamma^0] &= Tr(\not{p}'\gamma^0\not{p}\gamma^0) + m^2 Tr(\gamma^0\gamma^0) \\ &= 4p'_\mu p_\nu (2g^{\mu 0}g^{\nu 0} - g^{\mu\nu}g^{00}) + 4m^2 \\ &= 4[2EE' - (pp') + m^2] = 4[EE' + (\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}) + m^2] . \end{aligned} \quad (1.15)$$

Si ottiene così

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} &= 2 \frac{(\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4} [E^2 + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}') + m^2] \\ &= 2 \frac{(\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4} 2E^2 \left(1 - \frac{|\mathbf{p}|^2}{E^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 2 \frac{(\alpha Z^2)}{|\mathbf{q}|^4} 2E^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) , \end{aligned} \quad (1.16)$$

dove v e θ sono, rispettivamente, la velocità e l'angolo di diffusione dell'elettrone, cioè l'angolo compreso tra i vettori \mathbf{p} e \mathbf{p}' . Usando la relazione

$$|\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 = 2|\mathbf{p}|^2(1 - \cos \theta) = 4E^2v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (1.17)$$

possiamo riscrivere la (1.17) nella forma ottenuta originariamente da Mott

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} = \frac{\alpha Z^2}{4E^2v^4 \sin^4(\theta/2)} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) . \quad (1.18)$$

La sezione d'urto di Mott descrive la diffusione elastica di elettroni da nuclei all'ordine più basso nella costante di struttura fine α . Ovviamente, questa approssimazione non è applicabile nel caso di nuclei molto pesanti, per i quali la costante di accoppiamento $Z\alpha$ diventa troppo grande.

Nel limite non relativistico, cioè per $v \ll 1$ e $E \sim m$, dalla (1.18) riotteniamo la famosa sezione d'urto di Rutherford

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} = \frac{\alpha Z^2}{4m^2v^4 \sin^4(\theta/2)} , \quad (1.19)$$

la cui misura sperimentale ha condotto allo sviluppo del modello planetario dell'atomo.

Nota. Siamo riusciti a ricavare la sezione d'urto di Rutherford da un calcolo al primo ordine in α . Questo è sorprendente, poichè la stessa espressione si ottiene dalla Meccanica Classica come risultato esatto. La spiegazione di questa apparente contraddizione si deve a Dalitz, il quale dimostrò che, nel limite non relativistico, l'inclusione delle correzioni di ordine superiore ha come unico risultato la comparsa di un fattore di fase nell'ampiezza, e lascia quindi invariata la sezione d'urto.

Divergenza coulombiana. L' integrale sull' angolo solido della sezione d' urto differenziale di Mott, (1.18) diverge per $\theta = 0$, impedendoci di definire la sezione d' urto totale. Infatti, per piccoli valori di θ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} d\cos\theta \simeq 4 \frac{\alpha Z^2}{4E^2 v^4 \theta^4} \theta d\theta \quad (1.20)$$

L' origine di questa divergenza si può far risalire all' andamento singolare, per $|\mathbf{q}| \rightarrow 0$ della FT del campo coulombiano, eq (1.13), ovvero all' andamento troppo lentamente decrescente del campo coulombiano stesso, per $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, eq. (1.12). Dovuto a questa lenta decrescita, anche le particelle che passano lontanissime dalla carica nell' origine ne sentono l' effetto: gli stati asintotici, nella rappresentazione di interazione, non tendono veramente ad una costante e questo ci impedisce di definire rigorosamente la matrice S.

Fortunatamente, in Natura, non esistono cariche elettriche isolate. La carica positiva di ciascun nucleo, nella materia ordinaria, è schermata dalla carica negativa degli elettroni atomici. Anche in un plasma ionizzato, la lunga portata delle forze elettrostatiche fa sí che le cariche positive coordinino intorno a loro le cariche negative in modo che, in media, il plasma sia elettricamente neutro. Il risultato è che l' integrando nella (1.20) è smorzato per piccoli valori di θ .

Ricordiamo che la FT in $|\mathbf{q}|$ è sensibile ai valori della funzione per $|\mathbf{x}| \simeq |\mathbf{q}|^{-1}$. Quindi, se consideriamo la diffusione su un atomo, la presenza degli elettroni esterni si farà sentire

ai valori di $|\mathbf{q}|$ tali che:

$$|\mathbf{q}|R \leq 1 \quad (1.21)$$

dove R vé il raggio atomico, ovvero per:

$$\theta \leq \frac{1}{REv} \quad (1.22)$$

In questa regione di θ la sezione d' urto differenziale é smorzata dal fatto che l' elettrone vede una carica totale via via decrescente e la sezione d' urto totale é finita.

Fattore di forma. Possiamo migliorare l' approssimazione di carica puntiforme del nucleo introducendo un *fattore di forma*.

Supponiamo che la densità di carica all' interno del nucleo sia descritta da una funzione $Z\rho(\mathbf{x})$. La densità di carica deve decrescere rapidamente all' esterno del nucleo, per $|\mathbf{x}| > R_N$ e soddisfare la condizione di normalizzazione:

$$\int \rho(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} = 1 \quad (1.23)$$

in modo che la carica totale sia ancora data da Ze . Il potenziale elettrostatico del nucleo é ora dato da:

$$A^0(\mathbf{x}) = \frac{Ze}{4\pi} \int d^3\mathbf{y} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (1.24)$$

La sua FT é data da (cfr. Problema 1):

$$\begin{aligned} A^0(\mathbf{q}) &= \frac{Ze}{|\mathbf{q}|} F(\mathbf{q}); \\ F(\mathbf{q}) &= \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Corrispondentemente, la sezione d' urto di Mott diventa:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} = \frac{\alpha Z^2}{4E^2v^4 \sin^4(\theta/2)} |F(\mathbf{q})|^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.26)$$

Problema 1. Calcolare la FT del potenziale elettrostatico dovuto alla distribuzione di carica $Z\rho(\mathbf{x})$.

Dalle relazioni

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 = -\nabla\Phi; \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = Ze\rho$$

si trova:

$$-\nabla^2\Phi = \rho \tag{1.27}$$

Moltiplichiamo per $|\mathbf{q}|^2$ la FT del potenziale elettrostatico. Usando la (1.27) troviamo:

$$|\mathbf{q}|^2 A^0(\mathbf{q}) = |\mathbf{q}|^2 \int d^3\mathbf{x} \Phi(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = - \int d^3\mathbf{x} \nabla^2\Phi e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = Ze \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$$

da cui:

$$A^0(\mathbf{q}) = \frac{Ze}{|\mathbf{q}|^2} F(\mathbf{q}); \quad F(\mathbf{q}) = \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \tag{1.28}$$

1.2 La formula di Rosenbluth

1.3 Diffusione Compton

1.4 Annichilazione $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$