UNIVERSITÀ DI ROMA "LA SAPIENZA"
Dipartimento di Fisica

MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA

Anno Accademico 2006-2007

L. Maiani[1]

O. Benhar[2]

[1]e-mail: luciano.maiani@roma1.infn.it

[2]e-mail: omar.benhar@roma1.infn.it

RICHIAMI DI MECCANICA QUANTISTICA
WORK IN PROGRESS

Commenti, correzioni e suggerimenti, in particolare da parte degli studenti del Corso, sono apprezzati.

Indice

3

1 ELEMENTI DI MECCANICA QUANTISTICA **5**

1.1 Il Principio di Sovrapposizione 5

1.2 Operatori Lineari 7

1.3 Grandezze Osservabili ed Operatori Hermitiani 9

1.4 La Particella Non-Relativistica con Spin 0 10

1.4.1 Traslazioni e Rotazioni 11

1.4.2 Spin 14

1.5 Evoluzione nel tempo dei sistemi quantistici 15

1.5.1 La Rappresentazione di Schroedinger 16

1.5.2 La Rappresentazione di Heisenberg 17

1.5.3 La Rappresentazione di Interazione 18

1.6 Lo sviluppo perturbativo 20

1.7 Prodotti tempo-ordinati 21

1.8 Simmetrie e costanti del moto 22

BIBLIOGRAFIA **24**

Capitolo 1

ELEMENTI DI MECCANICA QUANTISTICA

In questo Capitolo sono presentati gli elementi di base della Meccanica Quantistica. Lo scopo é piú che altro quello di fissare le nozioni piú importanti e di stabilire notazioni che verranno usate in seguito. Per una discussione approfondita delle basi fisiche della teoria, si rinvia il lettore al libro di Dirac [1]. Una concisa e moderna discussione sui fondamenti e le difficoltá filosofiche della Meccanica Quantistica si trova nel libro di J.Bell [2].

1.1 Il Principio di Sovrapposizione

Ad un dato istante di tempo, gli stati di un sistema quantistico sono rappresentati dagli elementi di uno spazio astratto, H. Questi elementi saranno indicati con la notazione di Dirac:

$|A>,\ |B>,\ |C>\ldots$ in corrispondenza agli stati fisici del sistema A, B, C, etc.

e denominati col termine *ket*.

La struttura matematica di H é fissata dal *Principio di Sovrapposizione*, secondo cui se $|A>$ e $|B>$ rappresentano due possibili stati del sistema, sono sempre realizzabili degli stati corrispondenti ad una loro arbitraria combinazione lineare, con coefficienti complessi α e β:

$$|C>=\alpha|A>+\beta|B> \tag{1.1}$$

Lo spazio H é uno spazio vettoriale (o lineare) complesso, in genere infinito-dimensionale.

La caratterizzazione degli stati fisici implica necessariamente la determinazione sperimentale dei valori di una o piú grandezze osservabili sugli stati stessi. Supponiamo che i ket $|A>$ e $|B>$ che compaiono nella relazione (1.1) corrispondano, rispettivamente, a due valori distinti,diciamo a e b, di una stessa grandezza osservabile X (ad es. l'energia). L'interpretazione fisica dello stato $|C>$, sovrapposizione di $|A>$ e $|B>$ é la seguente:

- La sovrapposizione di $|A>$ con se stesso (il caso $\beta = 0$) dá luogo allo stesso stato fisico: $|A>$ e $\alpha|A>$ rappresentano lo stesso stato qualunque sia $\alpha \neq 0$;
- nel caso in cui α e β sono entrambi $\neq 0$, il risultato di una misura di X sullo stato $|C>$ puó essere a oppure b: *solo uno di questi due valori puó risultare dalla misura.*
- Non é possibile prevedere quale, tra questi due valori, sará il risultato di una data misura. Tuttavia, se gli stati $|A>$ e $|B>$ sono *egualmente normalizzati* (nel senso precisato qui di seguito), le frequenze con cui si presentano i risultati a e b sono nel rapporto $|\alpha|^2/|\beta|^2$.

Per collegare i coefficienti della sovrapposizione alla probabilitá dei diversi risultati della misura, occorre poter normalizzare i vettori che caratterizzano gli stati. Questo richiede che si possa definire in H il prodotto scalare complesso di $|A>$ su $|B>$, che indicheremo con:

$$< B|A >=< A|B >^* \tag{1.2}$$

(l'asterisco indica l'operazione di coniugazione sui numeri complessi).

Il prodotto scalare $< B|A >$ deve essere **lineare** in A e quindi **antilineare** in B

$$< C|\alpha A + \beta B >= \alpha < C|A > +\beta < C|B > \tag{1.3}$$

$$< \alpha A + \beta B|C >= \alpha^* < A|C > +\beta^* < B|C > \tag{1.4}$$

nonché definito positivo:

$$\begin{aligned} &< A|A > 0, \\ &< A|A >= 0 \ \text{se e solo se :} \quad |A >= 0 \end{aligned}$$

Con questa ulteriore specificazione, lo spazio H é uno *spazio di Hilbert*, e la grandezza $< A|A >$ é la norma del vettore $|A>$.

Accanto ad H, possiamo considerare un nuovo spazio vettoriale, lo *spazio duale* H, definito come lo spazio dei funzionali lineari (a valori complessi) definiti su H. Non é difficile convincersi che gli elementi di H^* sono in corrispondenza biunivoca con quelli di H. In effetti, secondo un noto teorema (dovuto a F.Riesz), ogni funzionale lineare $f(|A>)$ puó essere scritto come:

$$f(|A>) =< f|A > \tag{1.5}$$

con $|f>$ un ket fissato. Quindi possiamo far corrispondere il funzionale $f(|A>)$ in H^* con $|f>$ in H. La (1.5) giustifica la notazione di Dirac per gli elementi di H^*, secondo la quale indicheremo con:

$$< f| \tag{1.6}$$

l'elemento di H^* che corrisponde al ket $|f>$. I vettori $< f|$ sono indicati col termine *bra.* Sulla base della (1.4), il bra $< f|$ dipende antilinearmente dal ket $|f>$ ed il prodotto scalare (1.2) puó essere interpretato come il prodotto del bra $< B|$ con il ket $|A>$ (bra* ket = bracket = prodotto, di qui la scelta dei termini bra e ket).

Tornando all'interpretazione probabilistica dei risultati della misura di X sullo stato $|C>$ nell' eq.(1.1), assumeremo che:

- Se i vettori $|A>$ e $|B>$ hanno norma uno, la probabilitá di ottenere a (oppure b) nella misura di X su $|C>$ é uguale ad $|\alpha|^2$(oppure$|\beta|^2$).

1.2 Operatori Lineari

Sullo spazio vettoriale H possiamo definire degli operatori lineari, delle leggi cioé che ad ogni vettore di H (contenuto in un appropriato dominio di H stesso) associano un altro vettore, che dipende in modo lineare dal primo [1]:

$$|B >= X|A > \tag{1.7}$$

$$X(\alpha|A > +\beta|B >) = \alpha X|A > +\beta X|B > \tag{1.8}$$

Dato X, possiamo considerare il numero complesso:

$$< A|X|B >^*$$

per ogni $< A|$ e $|B >$. Questo numero complesso dipende antilinearmente da $|B >$. Possiamo quindi scrivere:

$$< A|X|B >^*=< B|V >$$

Inoltre, poiché $|V >$ dipende linearmente dal ket $|A >$ che corrisponde al bra $< A|$, possiamo anche scrivere:

$$< A|X|B >^*=< B|V >=< B|X^\dagger|A > \tag{1.9}$$

dove $X^\dagger$ é un nuovo operatore lineare, associato univocamente ad X dalla (1.9), ed indicato col nome di operatore aggiunto (o hermitiano coniugato) di X. Evidentemente valgono le relazioni:

$$(X^\dagger)^\dagger = X \tag{1.10}$$

$$(\alpha X)^\dagger = \alpha^* X^\dagger \tag{1.11}$$

per ogni numero complesso α.

Un operatore H é hermitiano, o autoaggiunto, se $X^\dagger = X$. Gli operatori hermitiani godono di alcune proprietá, cruciali per lo sviluppo della Meccanica Quantistica, per quanto riguarda i loro *autovalori* e *autovettori*. Ricordiamo che un autovalore di un operatore lineare X é un numero (reale o complesso) λ per cui l' equazione:

$$X|v >= \lambda\, |v > \tag{1.12}$$

ammette soluzioni $|v >\neq 0$. Diremo in questo caso che l' autovettore $|v >$ *appartiene* all' autovalore λ e scriveremo $|v >= |\lambda, a, b, \ldots >$ ($a, b, \ldots$ sono parametri che distinguono eventualmente tra gli autovettori che appartengono allo stesso autovalore).

Valgono le proprietá seguenti.

- Gli *autovalori* di un operatore hermitiano sono sempre *numeri reali*;

[1]. Nel seguito assumeremo per semplicitá che gli operatori siano definiti in tutto H.

- autovettori, $|h' >$ ed $|h'' >$ che appartengano a due autovalori distinti, h' e h'', sono ortogonali fra loro:

$$< h'|h' >= 0, \text{ se } h' \neq h'' \tag{1.13}$$

- Gli autovettori di un operatore hermitiano formano una *base completa* in H.

Assumendo, per semplicitá, che H abbia uno spettro discreto di autovalori, l'ultima proprietá implica che ogni vettore puó essere sviluppato nella base degli autovettori normalizzati di H:

$$|A >= \sum_n c_n |h_n > \tag{1.14}$$

con:

$$\begin{aligned} &H|h_n >= h_n|h_n > \\ &< h_n|h_m >= \delta_{n,m} \end{aligned}$$

da cui seguono le proprietá:

$$\begin{aligned} &c_n =< h_n|A > \\ &< A|A >= \sum_n |c_n|^2 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Un concetto utile, in connessione alla base degli autovettori di H, é quello di proiettore su uno o piú stati. Il proiettore su un vettore dato, ad esempio su $|h_1 >$ é un operatore che gode delle proprietá:

$$P^2 = P \tag{1.16}$$

$$P|h_1 >= |h_1 > \tag{1.17}$$

$$P|V >= 0, \text{ se } < h_1|V >= 0 \tag{1.18}$$

cioé se $|V >$ é ortogonale ad $|h_1 >$. E' facile vedere che P puó essere scritto formalmente come:

$$P = |h_1 >< h_1| \tag{1.19}$$

(assumendo: $< h_1|h_1 >= 1$). Infatti:

$$\begin{aligned} &P^2 = |h_1 >< h_1|h_1 >< h_1| = |h_1 >< h_1| = P \\ &P|h_1 >= |h_1 >< h_1|h_1 >= |h_1 > \\ &P|V >= |h_1 >< h_1|V >= 0, \text{ se } < h_1|V >= 0 \end{aligned}$$

Il proiettore su uno spazio a piú dimensioni, sotteso da un certo numero di vettori ortogonali tra loro, è dato semplicemente dalla somma dei proiettori sui singoli vettori:

$$P = \sum_n |h_n >< h_n| \tag{1.20}$$

e la *condizione di completezza* della base degli autovettori di H si esprime come:

$$\sum_n |h_n >< h_n| = 1 \tag{1.21}$$

(1 indica l'operatore identitá). Le relazioni eq.(1.15) si ottengono formalmente dalla (1.21) al modo seguente:

$$|A >= 1|A >= \sum_n |h_n >< h_n|A >= \sum_n c_n|h_n >$$

Analogamente,

$$< A|A >=< A|1|A >= \sum_n < A|h_n >< h_n|A >= \sum_n |c_n|^2$$

1.3 Grandezze Osservabili ed Operatori Hermitiani

La rilevanza dei concetti appena illustrati sta nel fatto che nella Meccanica Quantistica ogni grandezza osservabile, **O**, é rappresentata da un operatore hermitiano, O.

Gli autovettori di O rappresentano gli stati fisici su cui **O** assume un valore definito, pari all'autovalore che corrisponde all'autovettore in questione. L'insieme degli autovalori di O (lo spettro) fornisce quindi il complesso dei possibili risultati di una misura di **O**. Le considerazioni della Sez. 1.2 permettono di descrivere il risultato di una misura di **O** su uno stato generico $|A >$ al modo seguente.

- La misura di **O** su $|A >$ dá come risultato uno degli autovalori di O, ad esempio h_n, con probabilitá proporzionale al modulo quadro del corrispondente coefficiente dello sviluppo, c_n.

- La somma delle probabilitá su tutti i casi possibili deve essere pari ad uno. Se $|A >$ é normalizzato all'unitá, l' eq.(1.15) mostra che:

  $$P(h_n \,\mathrm{su}\, |A >) = |c_n|^2 = | < h_n|A > |^2 \tag{1.22}$$

  Questo risultato dá un significato fisico al prodotto scalare di due vettori. Supponiamo che $|A >$ e $|B >$ corrispondano a stati in cui due grandezze diverse assumono valori definiti, x_a per la grandezza X in $|A >$ e y_b per la grandezza Y in $|B >$. Se $|A >$ e $|B >$ sono normalizzati all'unitá, la probabilitá che una misura di Y in $|A >$ dia il risultato y_b é data dal modulo quadro del prodotto scalare corrispondente:

  $$P(y_b \mathrm{in}|A >) = | < B|A > |^2 \tag{1.23}$$

  Per questo motivo, il prodotto scalare viene anche indicato con il termine di ampiezza di probabilitá.

- Il valore medio dei risultati di molte misure di 0 su $|A >$[2] é dato dalla formula:

  $$< 0 >_A = \sum_n h_n P(h_n \mathrm{su}|A >) = \tag{1.24}$$

[2]Si intende che ognuna di queste misure va effettuata su una nuova replica del sistema, preparato nello stato $|A >$ dagli opportuni apparati sperimentali.

$$= \sum_n h_n |c_n|^2 = \sum_n h_n < A|h_n >< h_n|A >=$$
$$=< A|O(\sum_n |h_n >< h_n|)|A >=< A|O|A >$$

in virtú della eq.(1.21). Per questo motivo, l'elemento di matrice di O tra $< A|$ ed $|A >$ (elemento di matrice diagonale) si chiama anche il *valore medio* di O su A.

1.4 La Particella Non-Relativistica con Spin 0

Il caso della particella non relativistica senza spin fornisce l'esempio concreto piú semplice delle considerazioni appena esposte. Le osservabili base per questo sistema sono la coordinata, x, (per semplicitá consideriamo una sola dimenzione spaziale e poniamo $\hbar = 1$) ed il momento coniugato, p, con le regole di commutazione:

$$[x, p] = i \tag{1.25}$$

Possiamo introdurre gli autostati di x e di p:

$$x|x >= x|x >$$

$$p|p >= p|p >$$

con le condizioni di normalizzazione e di completezza:

$$< x|x' >= \delta(x - x') \tag{1.26}$$

$$\int dx|x >< x| = 1 \tag{1.27}$$

$$< p|p' >= \delta(p - p') \tag{1.28}$$

$$\int dp|p >< p| = 1 \tag{1.29}$$

La *funzione d' onda* di un dato ket, $|A >$, é la componente di $|A >$ nella base degli autovettori $|x >$:

$$\psi_A(x) =< x|A > \tag{1.30}$$

con:

$$< B|A >= \int dx < B|x >< x|A >= \int dx \psi_B(x)^* \psi_A(x) \tag{1.31}$$

da cui:

$$1 =< A|A >= \int dx < A|x >< x|A >= \int dx |\psi_A(x)|^2 \tag{1.32}$$

in accordo con l'interpretazione di $|\psi_A(x)|^2$ come densitá di probabilitá per trovare la particella tra x e $x + dx$.

Dalla eq.(1.30) e dalla relazione di commutazione, (1.25), si trova [1]:

$$(x\psi_A)(x) = x\psi_A(x)$$
$$(p\psi_A)(x) = -i\frac{d}{dx}\psi_A(x)$$

La funzione d'onda del ket $|p>$ si ottiene direttamente da questa equazione:

$$< x|p >= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ipx} \tag{1.33}$$

con il fattore di normalizzazione determinato dalla (1.28).

1.4.1 Traslazioni e Rotazioni

I risultati appena illustrati permettono di caratterizzare le operazioni di *traslazione spaziale*.

Definiamo gli operatori di traslazione, $U(a)$, come quelli che, applicati ad un ket $|A>$, lo trasformano nel ket che corrisponde allo stato traslato, quello stato cioé che si ottiene traslando di una lunghezza a tutti gli apparati necessari per produrre lo stato $|A>$. L'omogeneitá dello spazio richiede che $U(a)$ sia un operatore unitario (cfr. piú avanti, Sez. 1.8)

$$U(a)^\dagger = U(a)^{-1} = U(-a) \tag{1.34}$$

Dalla definizione di U, trascurando fattori di fase irrilevanti, segue che:

$$U(a)|x >= |x + a > \tag{1.35}$$

ovvero:

$$< x|U(a)^\dagger =< x + a| \tag{1.36}$$

Da qui si ottiene:

$$< x|U(a)^\dagger|p >=< x + a|p >= (2\pi)^{-1/2}e^{ip(x+a)} = \tag{1.37}$$
$$= e^{ipa} < x|p >=< x|e^{ipa}|p >$$

Poiché questa relazione deve valere per ogni $|p>$ e per ogni $|x>$, troviamo:

$$U(a) = e^{-ipa} \tag{1.38}$$

Per trasformazioni infinitesime:

$$U(a) \equiv 1 - ipa \tag{1.39}$$

La quantitá di moto é il generatore infinitesimo delle traslazioni spaziali. Per uno stato generico, $|A>$:

$$(U(a)\psi_A)(x) =< x|U(a)|A >=< x - a|A >= \psi_A(x - a) \tag{1.40}$$

Il passaggio al caso tridimensionale permette di discutere la simmetria per rotazioni spaziali. In analogia al caso delle traslazioni, definiamo degli operatori unitari, $U(R)$, secondo la relazione:

$$U(R)|\vec{x}>=|R\vec{x}> \tag{1.41}$$

dove R é la matrice (ortogonale, 3×3) della rotazione ed inoltre:

$$U(R)^\dagger = U(R)^{-1} = U(R^{-1}) \tag{1.42}$$

Per rotazioni di un angolo θ intorno all'asse z:

$$\begin{aligned}(R\vec{x})_x &= \cos\theta x - \sin\theta y \\ (R\vec{x})_x &= \sin\theta x + \cos\theta y \\ (R\vec{x})_z &= z\end{aligned}$$

Procedendo come in (1.40) si trova, per un ket generico:

$$\begin{aligned}&(U(R)\psi_A)(\vec{x}) =< \vec{x}|U(R)|A >=< R^{-1}\vec{x}|A >= \\ &= \psi_A(R^{-1}\vec{x})\end{aligned} \tag{1.43}$$

Per rotazioni infinitesime intorno all'asse z, si trova quindi:

$$\begin{aligned}&< \vec{x}|U(R)|A >= \psi_A(\vec{x}) - \theta(x\frac{d}{dy} - y\frac{d}{dx})\psi_A(\vec{x}) = \\ &=< \vec{x}|[1 - i\theta(\vec{x} \times \vec{p})_z]|A >\end{aligned}$$

da cui

$$U(R) = 1 - i\theta L_z \tag{1.44}$$

dove L_z é la componente del momento angolare lungo l'asse z:

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} \tag{1.45}$$

Piú in generale, per una rotazione generica,

$$U(R) = e^{-i\vec{n}\cdot\vec{L}}$$

dove $\vec{n}$ é un vettore tridimensionale la cui direzione individua l'asse della rotazione mentre $|\vec{n}| = \theta$ é l'angolo di rotazione.

Le componenti del momento angolare sono quindi i generatori delle rotazioni infinitesime. Sulla base delle relazioni canoniche, (1.25), si verifica che gli operatori $\vec{L}$ obbediscono alle relazioni di commutazione:

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \tag{1.46}$$

E' importante convincersi che le regole di commutazione (1.46) sono una diretta conseguenza dalla struttura del gruppo delle rotazioni e della richiesta che:

$$U(R_1)U(R_2) = U(R_1R_2) \tag{1.47}$$

per rotazioni infinitesime arbitrarie, $R_{1,2}$.

Per ottenere questo risultato, usiamo il fatto che ogni matrice ortogonale 3×3, R, puó essere scritta come:

$$R = e^{-i\vec{n}\cdot\vec{T}} \tag{1.48}$$

dove $\vec{n}$ é lo stesso vettore che compare nella eq.(1.46) e le matrici 3×3, $\vec{T}$, sono date da:[3]

$$(T_k)_{ij} = i\epsilon_{ikj} \tag{1.49}$$

Un calcolo esplicito mostra che le matrici T_k soddisfano proprio delle relazioni di commutazione uguali alle (1.46):

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k \tag{1.50}$$

Per $\vec{n}_1$ ed $\vec{n}_2$ infinitesimi:[4]

$$\begin{aligned} R_1R_2 &= e^{-i\vec{n}_1\cdot\vec{T}}e^{-i\vec{n}_2\cdot\vec{T}} = \\ &= e^{-i[(\vec{n}_1+\vec{n}_2)\cdot\vec{T}+(i/2)[\vec{n}_1\cdot\vec{T},\vec{n}_2\cdot\vec{T}]+\ldots]} \\ &= e^{-i[(\vec{n}_1+\vec{n}_2-(1/2)\vec{n}_1\times\vec{n}_2)\cdot T+\ldots]} \end{aligned} \tag{1.51}$$

dove i puntini rappresentano termini di ordine superiore in $\vec{n}_1$ o $\vec{n}_2$. D'altro canto abbiamo:

$$\begin{aligned} U(R_1)U(R_2) &= e^{-i\vec{n}_1\cdot\vec{L}}e^{-i\vec{n}_2\cdot\vec{L}} = e^{-i[(\vec{n}_1+\vec{n}_2)L+(i/2)[\vec{n}_1\cdot\vec{L},\vec{n}_2\cdot\vec{L}]+\ldots]} = \\ &= U(e^{-i[(\vec{n}_1+\vec{n}_2)T+(1/2)[\vec{n}_1\cdot\vec{T},\vec{n}_2\cdot\vec{T}]+\ldots]}) = U(e^{-i[(\vec{n}_1+\vec{n}_2-(1/2)\vec{n}_1\times\vec{n}_2\cdot T]+\ldots]}) \end{aligned} \tag{1.52}$$

dove le ultime eguaglianze seguono dalla legge di composizione (1.47). Per confronto, vediamo che gli operatori $\vec{L}$ devono obbedire proprio alle relazioni di commutazione (1.46). Il fatto che i commutatori canonici conducano a queste relazioni indica che gli operatori U, eq. (1.44) forniscono una *rappresentazione* del gruppo delle rotazioni, ma potrebbero esserci (e ci sono, come vedremo) altre rappresentazioni indipendenti.

Le considerazioni che abbiamo appena esposto conducono ad una definizione del tutto generale del momento angolare.

Per qualunque sistema fisico, possiamo individuare (operativamente) gli operatori $U(R)$ che descrivono l'azione di una rotazione del sistema stesso e per i quali valgono le relazioni (1.46). Per questo sistema, *definiamo* il momento angolare dalla relazione:

$$U(R) = 1 - i\vec{n}\cdot\vec{J} \tag{1.53}$$

per trasformazioni infinitesime. Per quanto visto prima, le componenti di $\vec{J}$ soddisfano automaticamente a relazioni di commutazione analoghe alle (1.53):

[3] ad esempio, si verifica facilmente che la matrice nell'eq.(1.43) puó essere scritta come $e^{-i\theta T_3}$ con $(T_3)_{12} = -(T_3)_{21} = i\epsilon_{132}$, e tutti gli altri elementi uguali a zero.

[4] questa relazione si dimostra direttamente sviluppando gli esponenziali in potenze di $\vec{n}_1$ e di $\vec{n}_2$

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \tag{1.54}$$

Analoghe considerazioni valogono per le componenti della quantitá di moto. Per un sistema fisico arbitrario, possiamo definire la quantitá di moto dalla relazione:

$$U(\vec{a}) = 1 - i\vec{a} \cdot \vec{P} \tag{1.55}$$

valida per traslazioni infinitesime individuate dal vettore $\vec{a}$.

1.4.2 Spin

L'esempio piú semplice della definizione di momento angolare appena data é quello della particella con spin. In questo caso, i ket che rappresentano una particella localizzata in $\vec{x}$ sono caratterizzati da un ulteriore numero quantico σ tale che l' effetto di una rotazione, oltre a ruotare $\vec{x}$ in $R\vec{x}$, é quello di produrre una combinazione lineare degli stati corrispondenti ai vari valori di σ*[5]:

$$U(R)|\vec{x}, \sigma >= |R\vec{x}, \sigma' > S(R)_{\sigma'\sigma} \tag{1.56}$$

L'unitarietá di U implica che $S(R)$ sia una matrice unitaria:

$$S(R)^\dagger S(R) = 1 \tag{1.57}$$

ed inoltre la relazione (1.56) implica che le matrici $S(R)$ debbano fornire esse stesse una rappresentazione del gruppo delle rotazioni (per rotazioni infinitesime):

$$S(R_1)S(R_2) = S(R_1 R_2) \tag{1.58}$$

Quindi, anche S deve avere la forma:

$$S = 1 - i\vec{n} \cdot \vec{S} \tag{1.59}$$

essendo $\vec{S}$ tre opportune matrici, nello spazio σ, che soddisfano le relazioni di commutazione del momento angolare:

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk} S_k \tag{1.60}$$

Le realizzazioni possibili di $\vec{S}$ corrispondono, come é noto, a momenti angolari s interi o semiinteri. Fissato s, σ varia tra $-s$ e $+s$ a passi di uno. Ad esempio, per $s = 1/2$, $\sigma = -1/2, +1/2$ e:

$$S_i = \frac{1}{2}\sigma_i \tag{1.61}$$

dove σ_i sono le tre matrici di Pauli.

[5] Nel seguito si sottointende la somma sugli indici ripetuti.

La funzione d'onda di uno stato generico $|A>$ é adesso uno ''spinore" a $2s+1$ componenti:

$$\psi_\sigma(\vec{x}) =< \sigma, \vec{x}|A > \tag{1.62}$$

ed inoltre:

$$[U(R)\psi]_\sigma(\vec{x}) =< \sigma, \vec{x}|U(R)|A >= S(R^{-1})_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}(R^{-1}\vec{x})$$

da cui, per trasformazioni infinitesime, si trova:

$$< \sigma, \vec{x}|U(R)|A >=< \sigma, \vec{x}|1 - i\vec{n} \cdot (\vec{L} + \vec{S})|A > \tag{1.63}$$

L' operatore associato ai generatori delle rotazioni, il momento angolare totale, é la somma di due termini mutuamente commutanti: il momento angolare orbitale, $\vec{L}$, ed il momento angolare di spin, $\vec{S}$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \tag{1.64}$$

Prima di concludere questa Sezione, vogliamo notare una caratteristica della rappresentazione di spin 1/2 . Trascurando le variabili spaziali, l'azione di una rotazione di un angolo θ intorno all'asse z su uno spinore con, ad esempio, $S_z = 1/2$ é data da:

$$U(R)|\sigma = 1/2 >= e^{-i\theta S_2}|\sigma = 1/2 >= \tag{1.65}$$

$$= e^{-i\theta/2}|\sigma = 1/2 >$$

Per $\theta = 2\pi$, il ket viene moltiplicato per -1. Questo é del tutto consistente col fatto che lo stato fisico deve tornare in se stesso dopo una rotazione completa, dal momento che i ket $|A >$ e $-|A >$ rappresentano lo stesso stato fisico. Tuttavia questo fatto mostra che la regola di moltiplicazione (1.58) puó non essere soddisfatta per rotazioni finite, nel caso di rappresentazioni corrispondente allo spin 1/2 (in generale, per spin semintero). In effetti, come mostra questo esempio, la Meccanica Quantistica richiede solo che le rappresentazioni del gruppo delle rotazioni obbediscano alla legge di moltiplicazione del gruppo *a meno di una fase*:

$$U(R_1)U(R_2) = \omega(R_1, R_2)U(R_1, R_2) \tag{1.66}$$

La fase $\omega(R_1, R_2)$, senza perdita di generalitá, puó essere scelta pari a $+1$ o -1. Gli operatori $U(R)$ danno, in questo caseo, una *rappresentazione a meno di una fase* [3] del gruppo delle rotazioni.

1.5 Evoluzione nel tempo dei sistemi quantistici

I valori medi delle grandezze osservabili dipengono in genere dal tempo. Nella Meccanica Quantistica, questi valori medi sono dati dall'espressione:

$$< X >_t=< A(t)|X(t)|A(t) > \tag{1.67}$$

C'é un'ambiguitá intrinseca nel determinare la dipendenza dal tempo dei vari elementi che compongono il secondo membro dell'eq. (1.67), bra, ket e operatore, poiché possiamo trasferire questa dipendenza da un elemento all'altro, purché il valore medio $< X >_t$, che poi é tutto quello che possiamo misurare sul sistema, resti immutato. L' ambiguitá dá luogo a descrizioni del moto diverse, collegate da trasformazioni unitarie dipendenti dal tempo, quindi equivalenti tra loro. Nelle prossime Sezioni, descriviamo la rappresentazione di Schroedinger e la rappresentazione di Heisenberg. Successivamente considereremo una terza descrizione del moto, la rappresentazione di Dirac, o di interazione, particolarmente conveniente nel caso di sistemi debolmente interagenti.

1.5.1 La Rappresentazione di Schroedinger

In questa rappresentazione, le variabili dinamiche (posizione, quantitá di moto etc.) sono associate ad operatori fissati. La variazione col tempo del valore medio (1.67) é dovuta alla variazione col tempo del ket che rappresenta lo stato fisico al tempo t. Dato il ket $|A>$ al tempo t_0 (lo stato iniziale), il Principio di Sovrapposizione richiede che $|A(t)>$ si ottenga da $|A>$ mediante l'applicazione di un operatore lineare, $U(t,t_0)$, indipendente da $|A>$:

$$|A(t)>= U(t,t_0)|A> \tag{1.68}$$

Inoltre, se $|A>$ é normalizzato, in modo che le sue componenti c_n sulla base di un dato osservabile **O** siano le ampiezze di probabilitá dei possibili risultati di una misura di **O**, é naturale richiedere che anche $|A(t)>$ sia normalizzato, in modo che:

$$\sum_n |c_n|^2 = \sum_n |c_n(t)|^2 = 1 \tag{1.69}$$

L'eq. (1.69) corrisponde alla conservazione della probabilitá di tutti i risultati possibili. Data questa condizione, l'operatore $U(t,t_0)$ risulta unitario:

$$U(t,t_0)^\dagger U(t,t_0) = 1 \tag{1.70}$$

Possiamo trasformare la (1.68) in una equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}|A(t)>= \frac{dU(t,t_0)}{dt}U(t,t_0)^\dagger|A(t)>= -\frac{i}{\hbar}H|A(t)> \tag{1.71}$$

H, a meno del fattore $1/\hbar$ é il generatore delle traslazioni infinitesime nel tempo. Poiché U é unitario, H é hermitiano:

$$H = i\hbar\frac{dU(t,t_0)}{dt}U(t,t_0)^\dagger = \tag{1.72}$$

$$= i\hbar\frac{d}{dt}[U(t,t_0)U(t,t_0)^\dagger] - i\hbar U(t,t_0)\frac{dU(t,t_0)^\dagger}{dt} = H^\dagger$$

L'equazione (1.71) é l'equazione di Schroedinger. E' un'equazione differenziale del primo ordine in t, in accordo con l'ipotesi che, al tempo t_0, il ket $|A>$ dia una descrizione completa dello stato del sistema e che quindi l' evoluzione sia determinata una sola condizione iniziale.

Nel limite classico, H diventa la funzione di Hamilton del sistema, e per questo prende il nome di operatore Hamiltoniano, o Hamiltoniana, del sistema stesso.

Nel caso in cui H sia indipendente dal tempo, possiamo integrare l' eq. (1.71) e scrivere direttamente la soluzione dell'equazione di Schroedinger che si riduce allo stato $|A>$ al tempo t_0:

$$|A(t)>= e^{-\frac{1}{\hbar}H(t-t_0)}|A> \tag{1.73}$$

Se sviluppiamo $|A>$ nella base degli autovettori di H:

$$|A(t)>= \sum_n c_n(t)|h_n> \tag{1.74}$$

otteniamo dalla (1.71):

$$c_n(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)}c_n(t_0) \tag{1.75}$$

L'energia é conservata: l' eq. (1.71) mostra che se $|A>$ é una autostato di H, lo é anche $|A(t)>$, con lo stesso autovalore. Per uno stato generico si conserva il valore medio di H:

$$< A(t)|H|A(t)>=< A|H|A>= cost. \tag{1.76}$$

Un aspetto interessante di questi risultati é l'invarianza per traslazioni temporali, il fatto, cioé, che $|A(t)>$ dipenda solo da $t - t_0$. Se eseguiamo un esperimento preparando il sistema nello stato $|A>$ alle ore 9.30 di oggi e facciamo una misura 10.00, il risultato é lo stesso che se avessimo eseguito le stesse operazioni tra le 17.00 e le 17.30 di ieri. Questo risultato segue direttamente dall'indipendenza dal tempo di H.

Ragionando in senso inverso, se ci aspettiamo *a priori* che un dato sistema sia invariante per traslazioni temporali, la sua hamiltoniana sará indipendente da t e quindi conservata nel tempo: *la conservazione dell' energia é diretta conseguenza dell' invarianza per traslazioni temporali.*

Tutto quanto sappiamo ci fa ritenere che i sistemi sufficientemente isolati dal resto dell'Universo sono indipendenti dal tempo. Un sistema isolato, quindi, deve soddisfare alla conservazione dell' energia.

1.5.2 La Rappresentazione di Heisenberg

In alternativa alla rappresentazione di Schroedinger, possiamo associare lo stato ad un vettore fisso, ed attribuire la dipendenza dal tempo dei valori medi (1.67) alla variazione dell' operatore che rappresenta l'osservabile. Formalmente, la rappresentazione di Heisenberg si ottiene applicando al ket $|A(t)>_S$ della rappresentazione di Schroedinger la trasformazione unitaria che lo riporta al valore che aveva ad un tempo fissato, t_0:

$$|A>_H= e^{+\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|A(t)>_S \tag{1.77}$$

Al tempo t_0, le due rappresentazioni coincidono.

La dipendenza da t delle grandezze osservabili é fissata dalla richiesta che il valore medio (1.67) sia lo stesso nelle due rappresentazioni, ad ogni t e che il ket $|A>_H$ sia costante. Dall' equazione:

$$_S < A(t)|X_S|A(t) >_S = \ _H < A|X_H(t)|A >_H \tag{1.78}$$

si ottiene, usando la (1.77):

$$X_H(t) = e^{+\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} X_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \tag{1.79}$$

Differenziando rispetto al tempo, otteniamo:

$$i\hbar \frac{dX_H(t)}{dt} = [X_H(t), H] \tag{1.80}$$

Per visualizzare la rappresentazione di Heisenberg, ricorriamo all'analogia col moto di un sistema classico.

Possiamo caratterizzare lo stato del sistema al tempo t dando la posizione istantanea del sistema nello spazio delle fasi, (p_t, q_t): questo corrisponde alla rappresentazione di Schroedinger. La rappresentazione di Heisenberg corrisponde invece a descrivere lo stato di moto dando la condizione iniziale (p_{t_0}, q_{t_0}), ad un tempo arbitrario ma fissato, t_0. La condizione iniziale determina completamente la traiettoria nello spazio delle fasi e naturalmente, come lo stato di Heisenberg, non cambia col tempo.

C'é un aspetto peculiare della rappresentazione di Heisenberg, che é implicito in quanto detto ma che vale la pena sottolineare.

Lo stato di Heisenberg é indipendente dal tempo t. Tuttavia, il vettore che lo rappresenta dipende implicitamente dal valore del tempo t_0, scelto per fissare la condizione iniziale (in altre parole, il tempo, al quale la rappresentazione di Heisenberg coincide con quella di Schroedinger). La scelta di t_0 é arbitraria, ma dobbiamo fissare t_0 allo stesso modo per tutti gli stati di moto, se vogliamo confrontare tra loro stati diversi.

I vettori che rappresentano lo stato di moto per una data scelta di t_0 differiscono da quelli relativi ad un'altra scelta per una trasformazione unitaria:

$$|A; t_0 >_H = e^{+\frac{i}{\hbar}H(t_0 - t_0')} |A; t_0' >_H \tag{1.81}$$

La (1.81) lascia invariati i valori medi (1.67). Tuttavia, al variare di t_0, il vettore che rappresenta uno stesso stato di moto puó assumere aspetti considerevolmente diversi tra loro.

1.5.3 La Rappresentazione di Interazione

In molti casi fisicamente interessanti, l'Hamiltoniana é la somma di due termini:

$$H = H_0 + V_0 \tag{1.82}$$

di cui H_0 é esattamente risolubile e V_0 puó essere considerato una modifica "piccola" di H_0. In questi casi, possiamo cercare di approssimare le soluzioni di H a partire dalle soluzioni di H_0,

con uno sviluppo in potenze di V_0 limitato ad un numero finito di termini. Questa é la versione quantistica della Teoria delle Perturbazioni, ampiamente usata in Meccanica Classica.

L'esempio piú rilevante é l'Elettrodinamica Quantistica, QED. H_0 é l'Hamiltoniana che descrive elettroni e fotoni liberi mentre V_0 descrive l'interazione dell'elettrone con il campo elettromagnetico. L'intesitá dell'interazione é determinata dalla carica elettrica dell'elettrone stesso, e si esprime in termini di una grandezza adimensionale (la costante di struttura fina):

$$\alpha = (\frac{e^2}{4\pi\hbar c}) = \frac{1}{137} \tag{1.83}$$

molto minore dell'unitá.

Per ottenere lo sviluppo perturbativo in modo sistematico, é conveniente descrivere il moto del sistema nella *rappresentazione di interazione*, o rappresentazione di Dirac.

Lo stato al tempo t nella rappresentazione di interazione si ottiene dallo stato nella rappresentazione di Schroedinger con la trasformazione unitaria:

$$|A(t)>_I = e^{+\frac{i}{\hbar}H_0 t}|A(t)>_S \tag{1.84}$$

I valori medi delle osservabili devono essere gli stessi nelle due rappresentazioni:

$$_I < A(t)|O_I(T)|A(t)>_I = {}_S < A(t)|O_S|A(t)>_S \tag{1.85}$$

e quindi:

$$O_I(t) = e^{+\frac{i}{\hbar}H_0 t} O_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} \tag{1.86}$$

Differenziando rispetto a t, otteniamo le equazioni del moto degli stati e delle osservabili:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|A(t)>_I = V_{0I}(t)|A(t)>_I \tag{1.87}$$

$$i\hbar\frac{dO_I(t)}{dt} = [H_0, O_I(t)] \tag{1.88}$$

dove $V_{0I}(t)$ é l'Hamiltoniana di interazione nella rappresentazione di interazione:

$$V_{0I}(t) = e^{+\frac{i}{\hbar}H_0 t} V_0 e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} \tag{1.89}$$

Le osservabili variano nel tempo con l'Hamiltoniana libera, mentre la variazione col tempo degli stati é dovuta soltanto all'interazione.Da notare che V_{0I} dipende esplicitamente dal tempo, in quanto V_0 ed H_0, in genere, non commutano tra loro.

L' eq. (6.6) definisce un operatore di traslazione nel tempo tra t_0 e t:

$$|t>_I = U_I(t,t_0)|t_0>_I \tag{1.90}$$

dove abbiamo indicato con $|t>_I$ lo stato al tempo t che si riduce a $|t_0>_I$ al tempo t_0.

$U_I(t,t_0)$ é un operatore lineare. Inoltre, verifica la relazione:

$$U_I(t,t_0) = U_I(t,t_1)U_I(t_1,t_0) \ (t > t_1 > t_0) \tag{1.91}$$

U_I é unitario, come conseguenza del fatto che l'hamiltoniana di interazione. V_{0I}, é hermitiana:

$$U(t,t_0)^\dagger U(t,t_0) = U(t,t_0)U(t,t_0)^\dagger = I \tag{1.92}$$

Naturalmente, possiamo anche risolvere l'equazione del moto con una condizione finale, cioé assegnando lo stato ad un tempo $t_1 > t$. Il corrispondente operatore, $\bar{U}_I(t,t_1)$, definito da:

$$|t>_I = \bar{U}_I(t,t_1)|t_1>_I \quad (t_1 > t) \tag{1.93}$$

é l'hermitiano coniugato di $U_I(t_1,t)$:

$$\bar{U}_I(t,t_1) = U_I(t_1,t)^\dagger \tag{1.94}$$

1.6 Lo sviluppo perturbativo

Possiamo esprimere U_I come una serie di potenze in V_{0I}. Per fare questo, integriamo la (6.6) tra t_0 e t, ottenendo cosí l'equazione integrale:

$$|t>_1 = |t_0>_I - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' V_{0I}(t')|t'>_I \tag{1.95}$$

Ovviamente, $|t>_I$ differisce da $|t_0>_I$ per termini che sono almeno di ordine V_{0I}. La eq. (6.14) ci dá la soluzione al primo ordine sostituendo semplicemente $|t'>_I$ con $|t_0>_I$:

$$|t>_I = |t_0>_I - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' V_{0I}(t')|t_0>_I + O(V_0^2) \tag{1.96}$$

Il procedimento puó essere ripetuto. Ad esempio, sostituendo di nuovo la (6.15) nella (6.14), otteniamo la soluzione al secondo ordine:

$$\begin{aligned} |t>_1 &= |t_0>_I - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' V_{0I}(t')|t_0>_I + \\ &+(-\frac{i}{\hbar})^2 \int_{t_0}^{t} dt' V_{0I}(t') \int_{t_0}^{t'} V_{0I}(t'')|t_0>_I + O(V_0^3) \end{aligned} \tag{1.97}$$

e cosí via.

Continuando indefinitamente il procedimento, si trova la serie:

$$|t>_I=|t_0>_I+\sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{i}{\hbar})^n dt_1 V_{0I}(t_1)\int_{t_0}^{t_1} dt_2 V_{0I}(t_2)\ldots\int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n V_{0I}(t_n)|t_0>_I= \tag{1.98}$$

$$=[1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{i}{\hbar})^n\int_{t_0}^{t} dt_I V_{0I}(t_I)\int_{t_0}^{t_1} dt_2 V_{0I}(t_2)\ldots\int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n V_{0I}(t_n)]|t_0>_I=$$

$$=U_I(t,t_0)|t_0>_I$$

che dá una soluzione formale dell'equazione del moto con la condizione iniziale $|t>_I=|t_0>_I$, come si verifica facilmente per sostituzione nella eq. (6.6).

1.7 Prodotti tempo-ordinati

Conviene esprimere i termini della serie come risultato di una integrazione indipendente su tutte le variabili $t_1,\ldots t_n$, nell'intervallo fisso tra t_0 e t. Per fare questo, si introduce il prodotto tempo-ordinato (T-prodotto) degli operatori $V_{0I}(t_1), V_{0I}(t_2)\ldots, V_{0I}(t_n)$ definito, per valori fissati delle variabili $t_1, t_2,\ldots t_n$, come il prodotto degli operatori nell'ordine che corrisponde a valori decrescenti del tempo, leggendo da sinistra verso destra:

$$T(V_{0I}(t_1), V_{0I}(t_2)\ldots, V_{0I}(t_n)) = V_{0I}(t_{a1})V_{0I}(t_{a2})\ldots V_{0I}(t_{an}) \tag{1.99}$$

dove $t_{a_1}, t_{a_2}\ldots t_{a_n}$ é la permutazione di $t_1, t_2,\ldots, t_n$ per cui:

$$t_{a_1}>t_{a_2}>\ldots>t_{a_n} \tag{1.100}$$

Nel caso di due operatori, si ha, esplicitamente:

$$T(V_{0I}(I_1), V_{0I}(t_2)) = \theta(t_1-t_2)V_{0I}(t_1 V_{0I}(t_2+ \tag{1.101}$$

$$+\theta(t_2-t_1)V_{0I}(t_2)V_{0I}(t_1)$$

con $\theta(x)=0,1$ a seconda che sia $x<0$ o $x>0$.

Consideriamo adesso l'integrale:

$$\int_{t_0}^{t} T(V_{0I}(t_1), V_{0I}(t_2)\ldots, V_{0I}(t_n))dt_1 dt_2\ldots dt_n \tag{1.102}$$

con tutte le variabili tra t_0 e t.

Il dominio di integrazione si decompone in $n!$ domini, corrispondenti ai possibili ordinamenti temporali delle variabili. Il contributo del particolare dominio in cui vale l'ordinamento dato dalla (6.19) é dato da:

$$\int_{t_0}^{t} dt_{a1} V_{0I}(t_{a1}) \int_{t_0}^{t_{a1}} dt_{a2} dV_{0I}(t_{a2}) \dots \int_{t0}^{t_{an-1}} dt_{an} V_{0I}(t_{an}) \tag{1.103}$$

e quindi coincide proprio con l'integrale che compare nella (6.17), a meno di un cambiamento triviale del nome delle variabili. L'istruzione di ordinamento temporale nella (6.21) fá sí che gli integrali estesi agli $n!$ domini siano tutti uguali alla (6.22), per cui, in conclusione, possiamo riscrivere $U_I(t, t_0)$ nella forma simmetrica:

$$U_I(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1} (-\frac{i}{\hbar})^n \frac{1}{n!} \int_{t0}^{t} dt_1 dt_2 \dots dt_n T(V_{0I}(t_1) V_{0I}(t_2) \dots V_{0I}(t_n)) \tag{1.104}$$

1.8 Simmetrie e costanti del moto

Le osservabili che commutano con l'hamiltoniana sono costanti del moto: il loro valore medio é indipendente da t (cfr. l' equazione(1.80)). Come in Meccanica Classica (cfr. il Teorema di Noether), nella Meccanica Quantistica c' é una relazione diretta tra le simmetrie del sistema fisico e le costanti del moto.

Qualitativamente, parliamo di simmetria tutte le volte che possiamo eseguire una trasformazione sugli apparati che preparano il sistema (nei diversi stati $|A>, |B>$, etc) in modo tale da lasciare invarianti le relazioni mutue tra gli stati stessi. In concreto, se indichiamo con $|RA>, |RB>$, etc. gli stati che si ottengono da $|A>, |B>$, etc. con la trasformazione R, questo vuol dire che:

$$| < RB|RA > |^2 = | < B|A > |^2 \tag{1.105}$$

per tutti gli stati $|A>$ e $|B>$.

Come ha mostrato Wigner, l' eq. (1.105) da luogo a due alternative, cioé:

$$< RB|RA > = < B|A > \tag{1.106}$$

ovvero:

$$< RB|RA > = < B|A > * \tag{1.107}$$

Se vale la condizione (1.106) la trasformazione é rappresentata da un operatore $U(R)$ lineare ed unitario:

$$\begin{aligned} &|RA> = U(R)|a> \\ &U(R)U(R)^\dagger = 1 \end{aligned} \tag{1.108}$$

La condizione (1.107) richiede invece che $U(R)$ sia antilineare ed antiunitario [**?**]:

$$\begin{aligned} &U(R)(\alpha|A> +\beta|B>) = \alpha^* U(R)|A> +\beta^* U(R)|B> \\ &U(R)U(R)^\dagger = 1 \end{aligned} \tag{1.109}$$

La seconda alternativa si applica al caso dell'inversione temporale (time-reversal). Tutte le trasformazioni che lasciano inalterato il verso del tempo devono, invece, essere rappresentate da operatori unitari, e questo é il caso che consideremo in questa Sezione. In particolare, devono essere unitari gli operatori che rappresentano quei gruppi di trasformazioni che sono connesse con continuitá alla trasformazione identitá (che puó essere sempre rappresentata dall'operatore 1) come ad esempio le traslazioni o le rotazioni spaziali, considerate nella Sez. 1.4.1, o le traslazioni nel tempo, Sez. 1.5.1.

Data un'osservabile X, definiamo l' osservabile trasformata come quella che, sullo stato $|RA>$, ha lo stesso valore medio che X ha in $|A>$:

$$< RA|X_R|RA >=< A|X|A > \tag{1.110}$$

Dalla (1.108) troviamo quindi:

$$X_R = U(R)XU(R)^\dagger \tag{1.111}$$

Il caso piú importante é quello dell'Hamiltoniana. Se H é lasciata invariante dalla trasformazione:

$$H_R = U(R)HU(R)^\dagger = H \tag{1.112}$$

allora:

$$[U(R), H] = 0 \tag{1.113}$$

tutti gli operatori $U(R)$ sono delle costanti del moto.

Confrontiamo due esperimenti che partono da due stati che sono l'uno il trasformato dell'altro $|A>$ e $|RA>$ al tempo $t = 0$. Nei due casi, al tempo t abbiamo:

$$\begin{aligned} &|A(t)>= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|A> \\ &|RA(t)>= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|RA>= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}U(R)|A>= \\ &= U(R)e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|A>= U(R)|A(t)> \end{aligned} \tag{1.114}$$

In questo caso si parla di simmetria esatta, o conservata, e le formule precedenti indicano che la relazione per cui uno stato é il trasformato dell'altro si conserva nel tempo.

Dato un gruppo di trasformazioni continue, consideriamo quelle infinitamente prossime all'identitá. Per queste, possiamo porre:

$$U(R) = U(\lambda) \equiv 1 - i\lambda T \tag{1.115}$$

dove λ denota il parametro della trasformazione. Il generatore infinitesimo, T, deve essere hermitiano dato che $U(R)$ é unitario:

$$T^\dagger = T \tag{1.116}$$

Sulla base della (1.114), il generatore di una simmetria esatta commuta con H:

- *un gruppo continuo di simmetrie esatte implica l'esistenza di osservabili conservate*, tante quanti sono i parametri indipendenti che caratterizzano il gruppo stesso.

La conservazione della quantitá di moto e del momento angolare sono gli esempi piú immediati di questo risultato, peraltro assolutamente generale.

Le osservabili delle teorie quantistiche di campo, ad esempio la densitá di energia, sono grandezze locali, operatori che possiamo pensare determinati da misure in una piccola regione dello spazio-tempo.

Indichiamo con $\Pi(\vec{x}, t)$ uno di questi operatori. Il vetore $\vec{x}$ é una variabile numerica (e non l' operatore coordinata) in quanto é collegato alla posizione degli apparati macroscopici che misurano $\Pi(\vec{x}, t)$.

$\Pi(\vec{x}, t)$ si ottiene con una traslazione spazio-temporale, a partire da $\Pi(\vec{0}, 0) = \Pi(0)$. Per quanto riguarda il tempo, dato che $\Pi(\vec{x}, t)$ é un operatore nella rappresentazione di Heisenberg, otteniamo dalla (1.79):

$$\Pi(\vec{x}, t) = e^{+\frac{i}{\hbar}Ht}\Pi(\vec{x}, 0)e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \tag{1.117}$$

Per quanto riguarda le variabili spaziali, usando la (1.111) e la (1.39), troviamo, :

$$\Pi(\vec{x}, t) = e^{+\frac{i}{\hbar}Ht}e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\vec{x}}\Pi(\vec{0}, 0)e^{+\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\vec{x}}e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \tag{1.118}$$

Negli esponenti compare la combinazione relativisticamente invariante:

$$Ht - \vec{P}\cdot\vec{x} = P^\mu x^\nu g_{\mu\nu} = P_\mu x^\mu \tag{1.119}$$

L'elemento di matrice tra autostati dell'energia e della quantitá di moto di un operatore locale ha, di conseguenza, una dipendenza spazio-temporale caratteristica:

$$\begin{aligned}
&< P', E'|\Pi(\vec{x}, t)|P, E >= \\
&=< P', E'|e^{+\frac{i}{\hbar}(Ht-\vec{P}\cdot\vec{x})}\Pi(\vec{0}, 0)e^{-\frac{i}{\hbar}(Ht-\vec{P}'\cdot\vec{x})}|P, E >= \\
&= e^{-\frac{i}{\hbar}[(E-E')t-(\vec{P}-\vec{P}')\cdot\vec{x}]} < P', E'|\Pi(\vec{0}, 0)|P, E >
\end{aligned} \tag{1.120}$$

Bibliografia

[1] P.A.M.Dirac, *Principi della Meccanica Quantistica*, Boringhieri.

[2] J.Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics.*

[3] per una rassegna completa, vedi: H.Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics, Dover Publications, 1950.

1959, p. 371.