MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA
SOLUZIONI DEL COMPITO DEL 4/7/2008

Soluzione del Problema 1

Nel limite non relativistico,

$$\frac{|\mathbf{p}|}{m} \to 0 \quad , \quad E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} \to m \ ,$$

da cui segue

$$u_s(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi_s \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \to \begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

dove $s = 1, 2$ e

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Usando le

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \gamma^5\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \gamma^5\gamma^i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \ ,$$

dove le σ_i $(i = 1, 2, 3)$ sono le matrici di Pauli, si ottiene

$$\bar{u}_{s'}(\mathbf{p}')\gamma^5 u_s(\mathbf{p}) \to 0$$

$$\bar{u}_{s'}(\mathbf{p}')\gamma^5\gamma^0 u_s(\mathbf{p}) \to 0$$

$$\bar{u}_{s'}(\mathbf{p}')\gamma^5\gamma^i u_s(\mathbf{p}) \to -\chi^\dagger_{s'}\sigma_i\chi_s$$

Soluzione del Problema 2

- Effetuando le derivate della densità lagrangiana rispetto a $\phi^\dagger$ e $\partial_\mu\phi^\dagger$ si ottengono le relazioni

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\dagger} = -m^2\phi + ieA_\mu(\partial^\mu\phi) + e^2A_\mu A^\mu\phi \quad , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)} = \partial^\mu\phi - ieA^\mu\phi = D^\mu\phi \ ,$$

  che sostituite nell'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\dagger} = 0$$

danno il risultato

$$\left[D_\mu D^\mu + m^2\right] \phi = 0 \ .$$

Procedendo in modo analogo, si ottiene l'equazione per il campo $\phi^\dagger$

$$(D_\mu D^\mu \phi)^\dagger + m^2 \phi^\dagger = 0 \ .$$

Infine, l'equazione del moto per A^μ segue dalle

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = \partial_\nu F^{\mu\nu} = \Box A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = ie\left[\phi^\dagger(\partial^\mu \phi) - \phi(\partial^\mu \phi^\dagger)\right] + 2e^2 A^\mu \phi^\dagger \phi \ ,$$

che implicano

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = ie\left[\phi^\dagger(\partial^\mu \phi) - \phi(\partial^\mu \phi^\dagger)\right] + 2e^2 A^\mu \phi^\dagger \phi \ .$$

- Per una trasformazione di fase infinitesima dei campi ϕ e $\phi^\dagger$ valgono le relazioni

  $$\delta\phi = ie\phi \quad , \quad \delta\phi^\dagger = -ie\phi^\dagger \ ,$$

  che sostituite nella definizione della corrente di Nöther

  $$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} \delta\phi^\dagger + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi$$

  danno il risultato

  $$j^\mu = ie\left[\phi^\dagger(D^\mu \phi) - \phi(D^\mu \phi)^\dagger\right] = ie\left[\phi^\dagger(\partial^\mu \phi) - \phi(\partial^\mu \phi^\dagger) - 2ieA^\mu \phi^\dagger \phi\right] .$$

- Usando l'espressione di j^μ possiamo riscrivere l'equazione del moto per il campo elettomagnetico nella forma

  $$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$$

  dalla quale segue immediatamente che

  $$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\mu j^\mu = 0 \ .$$