MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA

SOLUZIONI DEL COMPITO DEL 5/9/2008

Soluzione del Problema 1

- La forma infinitesima si ottiene dallo sviluppo in serie

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} + O(\alpha^2) = \mathbb{1} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + O(\alpha^2) \ ,$$

dove $\mathbb{1}$ è la matrice unità in due dimensioni. Di conseguenza, a meno di termini $O(\alpha^2)$,

$$\Phi' = U\Phi = \left[\mathbb{1} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 - \alpha\phi_2 \\ \phi_2 + \alpha\phi_1 \end{pmatrix} \ .$$

- Dalle

$$(\partial_\mu \Phi')^\dagger (\partial^\mu \Phi') = (\partial_\mu U\Phi)^\dagger (\partial^\mu U\Phi) = (\partial_\mu \Phi^\dagger) U^\dagger U (\partial^\mu \Phi),$$

$$\Phi'^\dagger \Phi' = \Phi^\dagger U^\dagger U \Phi \ ,$$

usando la

$$U^\dagger U = \mathbb{1} + O(\alpha^2) \ ,$$

si ottiene immediatamente che, nel caso di trasformazioni infinitesime

$$\mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi') = \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) + O(\alpha^2) \ .$$

Per trasformazioni finite

$$U^\dagger U = \mathbb{1}$$

e

$$\mathcal{L}(\Phi', \partial_\mu \Phi') = \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$$

- La corrente di Nöther è data dalla

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_1)} \delta\phi_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_2)} \delta\phi_2$$

con

$$\delta\phi_1 = -\alpha\phi_2 \quad , \quad \delta\phi_2 = \alpha\phi_1 \ .$$

Si ottiene quindi

$$J^\mu = -\alpha \left[(\partial^\mu \phi_1)\phi_2 - (\partial^\mu \phi_2)\phi_1 \right]$$

Soluzione del Problema 2

- Usando la definizione $\bar{u} = u^\dagger \gamma_0$ e la proprietà $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ si ottiene facilmente

$$
\begin{aligned}
A = \sum_{r,s} \left| \bar{u}_s(\mathbf{p}')\gamma^0 u_r(\mathbf{p}) \right|^2 &= \sum_{r,s} [\bar{u}_s(\mathbf{p}')\gamma^0 u_r(\mathbf{p})][\bar{u}_s(\mathbf{p}')\gamma^0 u_r(\mathbf{p})]^* \\
&= \sum_{r,s} \bar{u}_s(\mathbf{p}')\gamma^0 u_r(\mathbf{p})\bar{u}_r(\mathbf{p})\gamma^0 u_s(\mathbf{p}') \\
&= \sum_{r,s} \bar{u}_{s\alpha}(\mathbf{p}')\gamma^0_{\alpha\beta} u_{r\beta}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\rho}(\mathbf{p})\gamma^0_{\rho\sigma} u_{s\sigma}(\mathbf{p}') \ ,
\end{aligned}
$$

dove la somma sugli indici spinoriali α, β, ρ e σ è sottintesa.

Sostituendo nell'espressione ottenuta le relazioni

$$
\sum_r u_{r\beta}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\rho}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m}(\not{p} + m)_{\beta\rho} \quad , \quad \sum_s u_{s\sigma}(\mathbf{p}')\bar{u}_{s\alpha}(\mathbf{p}') = \frac{1}{2m}(\not{p}' + m)_{\sigma\alpha} \ ,
$$

dove $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ e $\not{p}' = \gamma^\mu p'_\mu$, troviamo quindi

$$
A = \frac{1}{4m^2}(\not{p}' + m)_{\sigma\alpha}\gamma^0_{\alpha\beta}(\not{p} + m)_{\beta\rho}\gamma^0_{\rho\sigma} = \frac{1}{4m^2}\ Tr[(\not{p}' + m)\gamma^0(\not{p} + m)\gamma^0] \ .
$$

Ricordando che la traccia del prodotto di qualunque numero dispari di matrici γ è nulla, che

$$
Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}) \ ,
$$

e che $(\gamma^0)^2 = 1$, si ottiene il risultato

$$
A = \frac{1}{4m^2}[Tr(\not{p}'\gamma^0\not{p}\gamma^0) + m^2 Tr(\gamma^0\gamma^0)] = \frac{1}{m^2}[2p_0p'_0 - (pp') + m^2] \ .
$$