MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA
SOLUZIONI DEL COMPITO DEL 10/12/2007

Soluzione del Problema 1

- Effetuando le derivate rispetto a ϕ e $\partial_\mu\phi$ si ottengono le relazioni

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi - \frac{\lambda}{2}\phi^2 \quad , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi \ ,$$

che sostituite nell'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0$$

danno il risultato

$$\left[\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right]\phi = -\frac{\lambda}{2}\phi^2 \ .$$

- Dalla definizione

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu} - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \ ,$$

si ottiene

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{3!}\phi^3\right] \ .$$

- Dall'espressione del momento coniugato a ϕ

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi} \ ,$$

con $\dot{\phi} = \partial^0\phi$, si ottiene la densità di hamiltoniana

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} \\ &= \dot{\phi}^2 - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi + \frac{\lambda}{3!}\phi^3 = T^{00} \ .\end{aligned}$$

- L'espressione ottenuta per $\mathcal{H}$ mostra che la teoria non è consistente, poichè, se $\lambda \neq 0$, l'energia non è limitata inferiormente per $\phi \to \pm\infty$.

Soluzione del Problema 2

- Dalla definzione $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$ e dalla $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ segue che

$$\begin{aligned} X = \sum_{r,s} |\bar{u}_r(\mathbf{p}')u_s(\mathbf{p})|^2 &= \sum_{r,s} [\bar{u}_r(\mathbf{p}')u_s(\mathbf{p})][\bar{u}_r(\mathbf{p}')u_s(\mathbf{p})]^* \\ &= \sum_{r,s} \bar{u}_r(\mathbf{p}')u_s(\mathbf{p})\bar{u}_s(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}') \\ &= \sum_{r,s} u_{r\beta}(\mathbf{p}')\bar{u}_{r\alpha}(\mathbf{p}')u_{s\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{s\beta}(\mathbf{p}) \ , \end{aligned}$$

  dove α e β sono gli indici spinoriali e la somma su α e β è sottintesa. Usando la relazione

$$\sum_s u_{s\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{s\beta}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m}(\not{p} + m)_{\alpha\beta} \ ,$$

  dove $\not{p} = \gamma_\mu p^\mu$, si ottiene quindi

$$\sum_{r,s} |\bar{u}_r(\mathbf{p}')u_s(\mathbf{p})|^2 = \frac{1}{4m^2}(\not{p}' + m)_{\beta\alpha}(\not{p} + m)_{\alpha\beta} = \frac{1}{4m^2} \ Tr[(\not{p}' + m)(\not{p} + m)] \ ,$$

  ovvero, ricordando che $Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$ e che la traccia del prodotto di qualunque numero dispari di matrici γ è nulla,

$$\sum_{r,s} |\bar{u}_r(\mathbf{p}')u_s(\mathbf{p})|^2 = \frac{(p'p)}{m^2} + 1$$

- Procedendo in modo analogo e usando la relazione

$$-\sum_s v_s^\alpha(\mathbf{p})\bar{v}_s^\beta(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m}(-\not{p} + m)_{\alpha\beta} \ ,$$

  si ottiene

$$X = \sum_{r,s} |\bar{v}_r(\mathbf{p}')u_s(\mathbf{p})|^2 = \frac{(p'p)}{m^2} - 1 \ .$$

Si puó calcolare X anche usando le espressioni esplicite delle soluzioni dell' equazioni di Dirac intermini di spinori bidimensionali. Consideriamo esplicitamente solo il primo caso.

$$u_r(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi_r \end{pmatrix}$$

Otteniamo:

$$X = \sum_{r,s} | \begin{pmatrix} \chi_r^\dagger, & \chi_r^\dagger \frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s \\ -\frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi_s \end{pmatrix} |^2$$

(il segno meno viene dalla moltiplicazione per γ_0=diag(1, 1, -1, -1)).

Esplicitando il modulo quadro, abbiamo:

$$X = \sum_{r,s} \frac{(E'+m)(E+m)}{4m^2} \left(\chi_r^\dagger \left[1 - \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}' \ \sigma \cdot \mathbf{p}}{(E'+m)(E+m)} \right] \chi_s \right) \left(\chi_s^\dagger \left[1 - \frac{\sigma \cdot \mathbf{p} \ \sigma \cdot \mathbf{p}'}{(E'+m)(E+m)} \right] \chi_r \right)$$

Usiamo ora la relazione di completezza:

$$\sum_r (\chi_r)_a \ (\chi_r^\dagger)_b = \ \delta_{ab} \quad (\mathrm{a,\ b} = 1,\ 2)$$

per ottenere:

$$X = \frac{1}{4m^2} \ Tr \left[(E'+m)(E+m) - 2(\sigma \cdot \mathbf{p}') \ (\sigma \cdot \mathbf{p}) + \frac{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}'^2}{(E'+m)(E+m)} \right]$$

La traccia va sugli indici bidimensionali a e b ed abbiamo usato l' identitá: $(\sigma \cdot \mathbf{p})(\sigma \cdot \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2$. Inoltre usiamo:

$$\begin{aligned} &Tr[(\sigma \cdot \mathbf{p}') \ (\sigma \cdot \mathbf{p})] = 2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}') \\ &\mathbf{p}^2 = E^2 - m^2 = (E+m)(E-m) \end{aligned} \tag{1}$$

per ottenere:

$$X = \frac{1}{m^2} \left(E'E - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' + m^2 \right) = \frac{p'_\mu p^\mu}{m^2} + 1$$

che coincide con il risultato trovato con il formalismo covariante.