MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA

AA 2007-2008

Soluzione della prova scritta del 31 Gennaio 2008

Problema 1

- Effetuando le derivate della densità lagrangiana $\mathcal{L}(\phi, \phi^\star, \partial_\mu\phi, \partial_\mu\phi^\star)$ rispetto a ϕ e $\partial_\mu\phi$ si ottengono le relazioni

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi^\star - 2\lambda(\phi\phi^\star)\phi^\star \quad , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi^\star \ ,$$

che sostituite nell'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\star} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\star)} = 0$$

danno il risultato

$$\left[\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right]\phi^\star = -2\lambda(\phi\phi^\star)\phi^\star \ .$$

Derivando rispetto a $\phi^\star$ e $\partial_\mu\phi^\star$ si ottiene la seconda equazione del moto

$$\left[\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right]\phi = -2\lambda(\phi\phi^\star)\phi \ .$$

- Dalla definizione del tensore energia impulso

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\star)}\frac{\partial\phi^\star}{\partial x_\nu} - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \ ,$$

si ottiene

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi^\star\partial^\nu\phi + \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi^\star - g^{\mu\nu}\mathcal{L}$$

da cui segue

$$T^{00} = \dot{\phi}^\star\dot{\phi} + \dot{\phi}\dot{\phi}^\star - \mathcal{L} \ .$$

Dall'espressione dei momenti cinetici coniugati

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\phi}^\star \quad , \quad \pi^\star = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^\star} = \dot{\phi}$$

si ottiene

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} + \pi^\star\dot{\phi}^\star - \mathcal{L} = T^{00} \ .$$

- Per trasformazioni di fase costante infinitesime le variazioni dei campi sono

$$\delta\phi = i\alpha\phi \qquad , \qquad \delta\phi^\star = -i\alpha\phi^\star \ ,$$

e la corrente di Nöther corrispondente è

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\star)}\delta\phi^\star = i\alpha[(\partial_\mu\phi^\star)\phi - (\partial_\mu\phi)\phi^\star] \ .$$

Problema 2

- Nel caso di rotazione infinitesima intorno all'asse z abbiamo

$$S = \mathbb{1} - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = \mathbb{1} - \frac{i}{4}(\omega_{12}\sigma^{12} + \omega_{21}\sigma^{21})$$

con $\omega_{12} = -\omega_{21} = \phi$ e

$$\sigma^{12} = \frac{i}{2}[\gamma^1, \gamma^2] \ ,$$

da cui segue

$$S = \mathbb{1} + \frac{\phi}{2}\gamma^1\gamma^2 \ .$$

Usando la rappresentazione standard delle matrici γ troviamo

$$\gamma^1\gamma^2 = -\begin{pmatrix} \sigma_1\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_1\sigma_2 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$S = \mathbb{1} - i\frac{\phi}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \ .$$

- Nel caso di un angolo ϕ finito abbiamo

$$S = \mathrm{e}^{\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} = \mathrm{e}^{\frac{\phi}{2}\gamma^1\gamma^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\phi}{2}\gamma^1\gamma^2\right)^n \ .$$

Lo sviluppo in serie di potenze dell'esponenziale si può riscrivere in forma semplice usando le proprietà $\{\gamma^1, \gamma^2\} = 0$ e $(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = -1$, da cui segue che

$$(\gamma^1\gamma^2)^n = \begin{cases} i^n & \text{per } n \text{ pari} \\ i^{n-1}(\gamma^1\gamma^2) & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases} \ .$$

Si ottiene così il risultato

$$S = \mathbb{1}\cos\frac{\phi}{2} + \gamma^1\gamma^2\sin\frac{\phi}{2} \ .$$

Ponendo $\phi = 2\pi$ troviamo quindi

$$S = -\mathbb{1} \ ,$$

cioè che una rotazione di 2π intorno all'asse z cambia il segno dello spinore ψ. Questo risultato implica che $\psi(x)$ non è una grandezza osservabile.