MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA

SOLUZIONI DEL COMPITO DEL 07/07/2009

Soluzione del Problema 1

- Indicando $(t, x, y, z) \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3)$, la trasformazione richiesta è la

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

- Dalla

$$(S^{\mu\nu})^{\rho}_{\tau} = g^{\mu\rho}\delta^{\nu}_{\tau} - g^{\nu\rho}\delta^{\mu}_{\tau}$$

segue che

$$(S^{12})^{\rho}_{\tau} = g^{1\rho}\delta^{2}_{\tau} - g^{2\rho}\delta^{1}_{\tau} ,$$

ovvero che

$$S^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Si ottengono quindi facilmente le relazioni

$$(S^{12})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \; (S^{12})^3 = -S^{12} , \; (S^{12})^4 = -(S^{12})^2 , \; \ldots ,$$

che possiamo utilizzare per effettuare lo sviluppo

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\theta S^{12}} &= 1 - \theta S^{12} + \frac{1}{2!}\theta^2 (S^{12})^2 - \frac{1}{3!}\theta^3 (S^{12})^3 + \frac{1}{4!}\theta^3 (S^{12})^4 + \ldots \\ &= \mathbb{1} - S^{12}(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \ldots) + (S^{12})^2 (\frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{4!}\theta^4 + \ldots) \\ &= \mathbb{1} - S^{12}\sin\theta + (S^{12})^2 [1 - \cos\theta] . \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni esplicite delle matrici otteniamo

$$\mathrm{e}^{-\theta S^{12}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Lambda \ .$$

- Partiamo dalla definizione ($p \equiv (\mathcal{E}, \vec{p})$)

$$y = \frac{1}{2}\ \ln \frac{\mathcal{E} + p_3}{\mathcal{E} - p_3}$$

ed osserviamo che nel limite non relativistico, cioè per $v \ll 1$,

$$y = \frac{1}{2}\ \ln \frac{1 + p_3/\mathcal{E}}{1 - p_3/\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\ [\ln(1 + v_3) - \ln(1 - v_3)] \approx \frac{1}{2}\ (v_3 + v_3) = v_3\ ,$$

dove abbiamo trascurato termini di ordine v_3^2.

- Un boost di Lorentz lungo l'asse z è descritto dalla matrice

$$\Lambda = \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,$$

con $\beta = v$ e

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\ .$$

Usando la trasformazione del quadrimpulso, $p^{\mu\prime} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu}$, troviamo quindi che l'effetto del boost sulla rapidità y è

$$y = \frac{1}{2}\ \ln \frac{\mathcal{E} + p_3}{\mathcal{E} - p_3} \to y' = \frac{1}{2}\ \ln \frac{(1 - \beta)(\mathcal{E} + p_3)}{(1 + \beta)(\mathcal{E} - p_3)} = y + \ln \frac{(1 - \beta)}{(1 + \beta)}$$

- Per una particella senza massa, cioè per $\mathcal{E} = |\vec{p}|$ otteniamo

$$y = \frac{1}{2}\ \ln \frac{|\vec{p}|(1 + \cos\phi)}{|\vec{p}|(1 - \cos\phi)} = \frac{1}{2}\ \ln \tan^2 \frac{\phi}{2} = -\ln \tan \frac{\phi}{2}\ ,$$

dove abbiamo indicato con ϕ l'angolo compreso tra la direzione di $\vec{p}$ e l'asse z .

Soluzione del Problema 2

- Dalle derivate della densità lagrangiana

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = Ai(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu - M\bar{\psi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = Ai\gamma^\mu \psi \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = i\gamma^\mu(\partial_\mu \psi) - M\psi$$

  segue che le equazioni di Eluero-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \quad , \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}}$$

  hanno la forma

$$\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + \frac{M}{1-A}\right) \ , \ \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{M}{1-A}\right)\psi = 0 \ .$$

  L'analogia tra le equazioni ottenute e l'equazione di Dirac dimostra che, per $0 \leq A < 1$, la densità lagrangiana descrive particelle di spin 1/2 e massa $m = M/(1-A)$.