MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA

SOLUZIONI DEL COMPITO DEL 07/09/2009

Soluzione del Problema 1

- Dalle derivate della densità lagrangiana

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \bar\psi i \gamma^\mu \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -m\bar\psi - g\bar\psi\phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar\psi)} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar\psi} = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi - g\psi\phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu\phi \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -M^2\phi - g\bar\psi\psi\phi$$

segue che le equazioni di Eluero-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \quad , \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar\psi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar\psi} \quad , \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

hanno la forma

$$\bar\psi \left(i\overleftarrow{\not\partial} + m \right) = -g\phi\bar\psi \quad , \quad \left(i\not\partial - m \right)\psi = g\phi\psi \quad , \quad (\Box + M^2)\Phi = -g\bar\psi\psi \ .$$

- Nel sistema di unità naturali, in cui $\hbar = c = 1$ lunghezze e tempi sono grandezze omogenee e l'energia ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza.

  La densità lagrangiana ha dimensioni

$$[\mathcal{L}] = [E][L^{-3}] = [L^{-4}] \ .$$

  Le dimensioni dei campi si ottengono facilmente, ad esempio dalle

$$[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi] = [L^{-2}][\phi^2] = [L^{-4}] \ , \ [\bar\psi\partial_\mu\psi] = [L^{-1}][\psi^2] = [L^{-4}]$$

  che implicano

$$[\phi] = [L^{-1}] \ , \ [\psi] = [L^{-3/2}] \ ,$$

  da cui segue che

$$[g] = [\mathcal{L}][\psi^{-2}][\phi^{-1}] = [L^{-4}][L^3][L^1] \ ,$$

  cioè che la costante di accoppiamento della teoria è adimensionale.

Soluzione del Problema 2

- Le proprietà degli operatori $\Pi^{\pm}$ si ottengono facilmente usando la relazione

$$(\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{p})^2 = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix} p_i p_j = \begin{pmatrix} \sigma_i\sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_i\sigma_j \end{pmatrix} p_i p_j = (\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k) p_i p_j \ ,$$

dove ϵ_{ijk} è il tensore antisimmetrico nei tre indici, la cui contrazione col tensore simmetrico $p_i p_j$ si annulla. Otteniamo quindi il risultato

$$(\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{p})^2 = |\mathbf{p}|^2 \ ,$$

che implica

$$\Pi^+\Pi^- = \Pi^-\Pi^+ = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{(\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{p})^2}{|\mathbf{p}|^2}\right] = 0$$

e

$$\Pi^{\pm}\Pi^{\pm} = \frac{1}{2}\left[1 \pm 2\frac{\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} + \frac{(\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{p})^2}{|\mathbf{p}|^2}\right] = \Pi^{\pm} \ ,$$

cioè che $\Pi^{\pm}$ sono operatori di proiezione (la proprietà $\Pi^+ + \Pi^- = \mathbb{1}$ segue direttamente dalle definizioni).

- Scegliendo l'asse z lungo la direzione di $\mathbf{p}$ si trova

$$(\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{p}) = \sigma_3|\mathbf{p}| \ ,$$

cioè

$$\Pi^{\pm} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbb{1} \pm \sigma_3 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \pm \sigma_3 \end{pmatrix} \ .$$

Usando la definizione degli spinori di Dirac $u_r(\mathbf{p})$ e $v_r(\mathbf{p})$ $(r = 1,2)$:

$$u_r(\mathbf{p}) = u_r^{(+)}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{\sigma_3|\mathbf{p}|}{E+m}\chi_r \end{pmatrix} \ , \ u_r^{(-)}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} -\frac{\sigma_3|\mathbf{p}|}{E+m}\chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix}$$

$$v_1(\mathbf{p}) = u_2^{(-)}(-\mathbf{p}) \ , \ v_2(\mathbf{p}) = u_1^{(-)}(-\mathbf{p}) \ ,$$

con

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e le

$$\frac{1}{2}\left(\mathbb{1}+\sigma_3\right)\chi_r = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}+\sigma_3\right)\sigma_3\chi_r = \delta_{r1}\chi_r \quad ,$$

$$\frac{1}{2}\left(\mathbb{1}-\sigma_3\right)\chi_r = \delta_{r2}\chi_r = -\frac{1}{2}\left(\mathbb{1}-\sigma_3\right)\sigma_3\chi_r = \delta_{r2}\chi_r \ ,$$

Si ottiene che gli operatori $\Pi^{\pm}$ soddisfano le relazioni

$$\Pi^+ u_r(\mathbf{p}) = \delta_{r1} u_r(\mathbf{p}) \quad , \quad \Pi^+ v_r(\mathbf{p}) = \delta_{r2} v_r(\mathbf{p})$$

$$\Pi^- u_r(\mathbf{p}) = \delta_{r2} u_r(\mathbf{p}) \quad , \quad \Pi^- v_r(\mathbf{p}) = \delta_{r1} v_r(\mathbf{p}) \ .$$