MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA

SOLUZIONI DEL COMPITO DEL 12/02/2009

Soluzione del Problema 1

- Dalle derivate della densità lagrangiana

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} = \partial^\mu \Phi \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = -M^2\Phi - \lambda\phi^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2\Phi - 2\lambda\Phi\phi$$

  segue che le equazioni di Eluero-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \quad , \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

  hanno la forma ($\Box = \partial_\mu \partial^\mu$)

$$(\Box + M^2)\Phi = -\lambda\phi^2 \quad , \quad (\Box + m^2)\phi = -2\lambda\Phi\phi \ .$$

- Nel sistema di unità naturali, in cui $\hbar = c = 1$ lunghezze e tempi sono grandezze omogenee e l'energia ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza.

  La densità lagrangiana ha dimensioni

$$[\mathcal{L}] = [E][L^{-3}] = [L^{-4}] \ .$$

  Le dimensioni dei campi si ottengono facilmente, ad esempio dalla

$$[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi] = [\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi] = [L^{-2}][\phi^2] = [L^{-2}][\Phi^2] = [L^{-4}] \ ,$$

  che implica

$$[\phi] = [\Phi] = [L^{-1}] \ ,$$

  da cui segue che

$$[\lambda] = [\mathcal{L}][\phi^{-2}][\Phi^{-1}] = [L^{-4}][L^3] = [L^{-1}] \ .$$

- Nel sistema di riferimento in cui la particella di massa M è in quiete le particelle prodotte hanno impulsi uguali e opposti, $\mathbf{k}$ e $-\mathbf{k}$. I quadrimpulsi degli stati iniziale e finale sono quindi

$$P_i \equiv (M, 0) \quad , \quad P_f \equiv (2E, 0)$$

con

$$E = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} \ .$$

La conservazione del quadrimpulso, $P_i^2 = P_f^2$, in questo caso fornisce la relazione

$$M^2 = 4E^2 = 4(|\mathbf{k}|^2 + m^2)$$

che implica la condizione

$$M \geq 2m \ .$$

Soluzione del Problema 2

- Le γ^i con i=1,2,3 hanno la stessa forma nelle rappresentazioni di Weyl e Dirac. Quindi dobbiamo verificare solo gli anticommutatori nei quali compare la γ^0. Il calcolo esplicito mostra immediatamente che

$$(\gamma^0)^2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} ,$$

e

$$\gamma^0\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} = -\gamma^i\gamma^0$$

Lo stesso risultato si può ottenere in modo più semplice notando che le matrici γ^μ nella rappresentazione di Weyl si possono ottenere da quelle nella rappresentazione di Dirac, che indichiamo con γ_D^μ, tramite la trasformazione

$$\gamma^\mu = S^{-1}\gamma_D^\mu S$$

con

$$S = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} .$$

Ciò implica che

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = S^{-1}\{\gamma_D^\mu, \gamma_D^\nu\}S = 2g^{\mu\nu}$$

e

$$\gamma^5 = S^{-1}\gamma_D^5 S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

- Usando la matrice γ^5 ottenuta al punto precedente si ottengono le

$$\frac{1+\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{1-\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

da cui segue che

$$\frac{1+\gamma^5}{2} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{1-\gamma^5}{2} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$