MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA

SOLUZIONI DEL COMPITO DEL 18/12/2008

Soluzione del Problema 1

- Dalle derivate della densità lagrangiana

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -\frac{i}{2}(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu - M\bar{\psi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = -\frac{i}{2}\gamma^\mu \psi \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = i\gamma^\mu(\partial_\mu \bar{\psi}) - M\psi$$

segue che le equazioni di Eluero-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \quad , \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}}$$

hanno la forma

$$\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + \frac{2}{3}M\right) \ , \ \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{2}{3}M\right)\psi = 0 \ .$$

L'analogia tra le equazioni ottenute e l'equazione di Dirac dimostra che la densità lagrangiana descrive particelle di spin 1/2 e massa $m = 2M/3$.

La soluzione del problema può anche essere ottenuta in modo più semplice, notando che la densità lagrangiana si può riscrivere nella forma equivalente

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu \psi) + \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_/ mu\psi - M\bar{\psi}\psi \ ,$$

poichè il secondo termine è una quadridivergenza, ininfluente nella determinazione delle equazioni del moto. Troviamo così

$$\mathcal{L} = \frac{3}{2}\left(\bar{\psi}i\partial\!\!\!/ - \frac{2}{3}M\right)\psi \ ,$$

cioè, a meno di un fattore numerico irrilevante, la desità lagrangiana di Dirac per una particella di massa $m = 2M/3$.

Soluzione del Problema 2

- Usando i risultati

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = \gamma_0 \gamma^0 - \gamma_i \gamma^i = 4$$

e

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = \gamma_\mu (2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu) = 2\gamma^\nu - 4\gamma^\nu = -2\gamma^\nu$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu) \\
&= -\frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\nu\gamma^\mu) = -\frac{1}{2}(-8 - 16) = 12 \ .
\end{aligned}$$

- le componenti del tensore σ^{ij} con i, j=1,2,3 sono

$$\sigma^{ij} = \frac{i}{2}[\gamma^i, \gamma^j] = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} [\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & [\sigma^i, \sigma^j] \end{pmatrix} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$$

Ricordando che nel limite non relativistico

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\psi} = (\chi^\dagger \ \ 0) \ ,$$

dove χ è uno spinore di Pauli a due componenti, otteniamo il risultato

$$\bar{\psi}\sigma^{ij}\psi = \epsilon^{ijk}\chi^\dagger\sigma_k\chi \ .$$