

MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA

AA 2009-2010

Prova scritta del 8 Settembre 2010

Problema 1

Consideriamo l'azione associata alla lagrangiana di un campo scalare con massa nulla

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi ,$$

e la trasformazione (agente sia sulle coordinate che sul campo ϕ)

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = e^\alpha x^\mu ,$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = e^{\gamma\alpha} \phi .$$

Determinate il valore di γ che lascia invariata l'azione.

Problema 2

Sotto la trasformazione di Lorentz Λ , un generico quadrispinore si trasforma secondo la

$$\psi \rightarrow S(\Lambda)\psi ,$$

con

$$S[\Lambda(\omega)] = e^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}$$

dove il tensore antisimmetrico $\omega_{\mu\nu}$ ha componenti non nulle ω_{0j} per boost nella direzione j ($j = 1, 2, 3$) e ω_{ij} per rotazioni intorno all'asse k ortogonale al piano (i, j) , secondo la regola della mano destra. Il tensore $\sigma^{\mu\nu}$ è dato da

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] . \quad (1)$$

Usando la proprietà

$$e^X Y e^{-X} = Y + [X, Y] + \frac{1}{2!}[X, [X, Y]] + \dots \quad (2)$$

verificare che

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

nel caso particolare di Λ corrispondente a un boost lungo l'asse x (si suggerisce di effettuare la dimostrazione componente per componente).