MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA

SOLUZIONI DEL COMPITO DEL 02/12/2009

Soluzione del Problema 1

- Dalle

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \qquad , \qquad (\gamma^0)^2 = \mathbb{1}_2$$

segue che

$$\begin{aligned}\gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0 &= \frac{i}{2}\left(\gamma^0\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^0 - \gamma^0\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^0\right) = \frac{i}{2}\left[(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^\nu)^\dagger - (\gamma^\nu)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\right] \\ &= \frac{i}{2}\left[(\gamma^\nu\gamma^\mu)^\dagger - (\gamma^\mu\gamma^\nu)^\dagger\right] = -\frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]^\dagger = (\sigma^{\mu\nu})^\dagger \ .\end{aligned}$$

- Nelle rappresentazione di Dirac troviamo

$$i\gamma^1\gamma^2 = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0\end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} -\sigma_1\sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_1\sigma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix} \ .$$

- Consideriamo le combinazioni possibili degli indici di Lorentz

  - $\mu = \nu = 0$

$$\mathrm{Tr}\ \gamma^0\gamma^0 = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2\end{pmatrix} = 4 \ .$$

  - $\mu = 0$, $\nu = i$ $(i = 1,2,3)$

$$\mathrm{Tr}\ \gamma^0\gamma^i = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0\end{pmatrix} = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0\end{pmatrix} = 0 \ .$$

  - $\mu = i$, $\nu = j$, $(i,j = 1,2,3)$

$$\mathrm{Tr}\ \gamma^i\gamma^j = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0\end{pmatrix} = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} -\sigma_i\sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_i\sigma_j\end{pmatrix} = -4\delta_{ij} \ .$$

Soluzione del Problema 2

- Dalle derivate della densità lagrangiana

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = F^{\mu\nu} \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = m^2 A^\nu - j^\nu \ ,$$

  segue che l'equazione di Eluero-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \ ,$$

  ha la forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) - \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = m^2 A^\nu - j^\nu$$

  cioè

$$\Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) + m^2 A^\nu = j^\nu$$

- Operando con ∂_ν su entrambi i membri dell'equazione del moto si trova

$$\partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu + m^2 \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu j^\nu \ .$$

  I primi due contributi a primo membro si cancellano. Da quelli rimanenti otteniamo

$$\partial_\nu A^\nu = \frac{1}{m^2} \, \partial_\nu j^\nu \ .$$

  Quindi, per $m^2 \neq 0$,

$$\partial_\nu j^\nu = 0 \Longrightarrow \partial_\nu A^\nu = 0 \ .$$

- Il contributo del primo termine della densità lagrangiana è invariante sotto trasformazioni di gauge del campo A^μ. Possiamo quindi limitarci a considerare la variazione dell'azione associata alla variazione degli altri due termini

$$\delta S = \int d^4x \left\{ -m^2 \left[2A^\mu(\partial_\mu \Lambda) - (\partial_\mu \Lambda)(\partial^\mu \Lambda) \right] + j^\mu(\partial_\mu \Lambda) \right\} \ .$$

  Se la condizione discussa al punto precedente è soddisfatta, i due termini lineari in $(\partial_\mu \Lambda)$ si possono eliminare entrambi con un'integrazione per parti. Il termine quadratico non può invece essere eliminato. Di conseguenza l'azione, e quindi l'equazione del moto, non sono invarianti sotto trasformazioni di gauge.