MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA

SOLUZIONI DEL COMPITO DEL 03/02/2010

Soluzione del Problema 1

1. Dalle derivate della densità lagrangiana

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{i}{2}(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \ ,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = \frac{i}{2}\gamma^\mu \psi \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = -\frac{i}{2}\gamma^\mu(\partial_\mu \psi) \ ,$$

segue che le equazioni di Eluero-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \quad , \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} \ ,$$

hanno la forma

$$i\partial\!\!\!/ \psi = 0 \quad , \quad \bar{\psi} i \overleftarrow{\partial\!\!\!/} = 0 \ .$$

2. Le equazioni trovate al punto uno sono equazioni di Dirac senza il termine di massa. Quindi la teoria descrive particelle di spin 1/2 e $m = 0$.

3. Le variabili coniugate ai campi ψ e $\bar{\psi}$ sono

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = -\frac{i}{2}\ \bar{\psi}\gamma^0 \quad , \quad \bar{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\psi})} = \frac{i}{2}\ \gamma^0 \psi \ .$$

4. Il tensore energia-impulso canonico è definito dalla

$$\begin{aligned} \theta^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\partial^\nu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})}\partial^\nu \bar{\psi} - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \\ &= -\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial^\nu \psi) + \frac{i}{2}(\partial^\nu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \end{aligned}$$

Usando i risultati al punto 3 e 4 otteniamo

$$\mathcal{H} = \pi(\partial^0 \psi) + (\partial^0 \bar{\psi})\bar{\pi} - \mathcal{L} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^0(\partial^0 \psi) + \frac{i}{2}(\partial^0 \bar{\psi})\gamma^0 \psi - g^{00}\mathcal{L} = \theta^{00} \ .$$

Soluzione del Problema 2

Utilizzando le relazioni

$$\bar{u}_s(\mathbf{p}') = u_s^\dagger(\mathbf{p}')\gamma^0 \quad , \quad (\gamma^0)^2 = \mathbb{1} \quad , \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$$

otteniamo

$$[\bar{u}_s(\mathbf{p}')\gamma^0\gamma^5 u_r(\mathbf{p})]^\star = u_r^\dagger(\mathbf{p})\gamma^5 u_s(\mathbf{p}') = \bar{u}_r(\mathbf{p})\gamma^0\gamma^5 u_s(\mathbf{p}') \ .$$

Dobbiamo quindi calcolare la quantità

$$A = \sum_r \sum_s \bar{u}_s(\mathbf{p}')\gamma^0\gamma^5 u_r(\mathbf{p})\bar{u}_r(\mathbf{p})\gamma^0\gamma^5 u_s(\mathbf{p}') \ .$$

Utilizzando gli operatori di proiezione sulle soluzioni a energia positiva dell'equazione di Dirac

$$\Lambda^{(+)}(p) = \sum_r u_r(\mathbf{p})\bar{u}_r(\mathbf{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m} \quad , \quad \Lambda^{(+)}(p') = \sum_r u_r(\mathbf{p}')\bar{u}_r(\mathbf{p}') = \frac{\not{p}' + m}{2m} \ ,$$

si trova

$$A = \frac{1}{4m^2}\ \mathrm{Tr}\ (\not{p}' + m)\gamma^0\gamma^5(\not{p} + m)\gamma^0\gamma^5 \ .$$

I termini lineari in m si annullano perchè contengono la traccia di tre matrici γ. Rimane quindi da calcolare

$$A = \frac{1}{4m^2}\left\{p'_\alpha p_\beta \mathrm{Tr}\ \gamma^\alpha\gamma^0\gamma^5\gamma^\beta\gamma^0\gamma^5 + m^2 \mathrm{Tr}\ \gamma^0\gamma^5\gamma^0\gamma^5\right\} \ .$$

Usiamo ora $\{\gamma^5, \gamma^\alpha\} = 0$ e $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$ per riscrivere A nella forma

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{4m^2}\left\{p'_\alpha p_\beta \mathrm{Tr}\ \gamma^\alpha\gamma^0\gamma^\beta\gamma^0 - m^2 \mathrm{Tr}\ \mathbb{1}\right\} \\
&= \frac{1}{m^2}\left\{p'_\alpha p_\beta(2g^{\alpha 0}g^{\alpha 0} - g^{\alpha\beta}g^{00}) - m^2\right\} \\
&= \frac{1}{m^2}(p'_0 p_0 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{p}' - m^2) \ .
\end{aligned}$$