Note sulle trasformazioni di Lorentz

AD Polosa

1 SL(2,$\mathbb{C}$) ed il gruppo di Lorentz

Definiamo lo spazio di Minkowski come lo spazio $M = \mathbb{R}^4$ con metrica $g = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Per un qualsiasi vettore $x \in M$, la norma $||x||^2$ è definita da una delle equivalenti espressioni

$$||x||^2 = x^\mu x_\mu = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_\mu \delta^\mu_\nu x^\nu = x_\mu g^{\mu\nu} x_\nu, ..., \qquad \forall\, x \in M \tag{1}$$

Una trasformazione di Lorentz è una trasformazione lineare che conserva la metrica

$$||\Lambda x||^2 = ||x||^2, \qquad \forall\, x \in M \tag{2}$$

Le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo di trasformazioni [1] chiamato **gruppo di Lorentz**. A partire da un generico vettore $x \in M$ costruiamo la matrice hermitiana $\underset{\sim}{x}$

$$x \mapsto \underset{\sim}{x} = x_\mu \sigma^\mu = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

dove

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

Possiamo osservare che valgono le due relazioni

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\, \underset{\sim}{x} \\ x_3 = \frac{1}{2} \left(\underset{\sim}{x}_{11} - \underset{\sim}{x}_{22} \right) \end{cases}$$

e che

$$\det \underset{\sim}{x} = ||x||^2 \tag{5}$$

[1] Un *gruppo* è un insieme di elementi G sul quale è definita una operazione binaria $G \times G \to G$ che soddisfi la legge associativa, l'esistenza di un elemento neutro e l'esistenza di un inverso per tutti gli elementi di G.

Sia A una generica matrice 2×2 complessa.
L'azione di A sulla matrice hermitiana $\underset{\sim}{x}$ si definisce come

$$\underset{\sim}{x} \to A\,\underset{\sim}{x}\,A^\dagger \tag{6}$$

La corrispondente azione sul vettore x è

$$x \to \phi(A)x \tag{7}$$

Esercizio. Si osservi come $A\,\underset{\sim}{x}\,A^\dagger$ è essa stessa hermitiana.
È da notare inoltre che

$$\det(A\,\underset{\sim}{x}\,A^\dagger) = \det(A)\det(\underset{\sim}{x})\det(A^\dagger) = |\det(A)|^2\det(\underset{\sim}{x}) \tag{8}$$

dunque se $A \in$ SL(2,$\mathbb{C}$) (gruppo delle matrici complesse 2×2 con determinante unitario) allora

$$\|\,\phi(A)x\,\|^2 = \|\,x\,\|^2 \tag{9}$$

In altri termini

$$\boxed{\text{se } A \in \text{SL(2,}\mathbb{C}\text{)} \;\Rightarrow\; \phi(A) \text{ è una trasformazione di Lorentz}}$$

Si osservi che

$$\phi(AB)x = \phi(A)\phi(B)x \tag{10}$$

Dimostrazione.

$$\phi(AB)x \iff AB\,\underset{\sim}{x}\,(AB)^\dagger = A\left(B\,\underset{\sim}{x}\,B^\dagger\right)A^\dagger \iff \phi(A)\phi(B)x \;\bullet$$

Definizione. Sia ϕ una mappa dal gruppo G_1 al gruppo G_2:

$$\phi:\; G_1 \longrightarrow G_2 \tag{11}$$

si dice che ϕ è un ***omomorfismo*** se

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \qquad \forall\;\; a, b \;\in\; G_1 \tag{12}$$

Dalla relazione (10) si può concludere che

$$\boxed{\phi:\; \text{SL(2,}\mathbb{C}\text{)} \longrightarrow \text{gruppo di Lorentz, è un omomorfismo}}$$

Tuttavia si deve notare che

$$\boxed{\phi(A) = \phi(-A)}$$

quindi

(*i*) A e $-A$ corrispondono alla stessa trasformazione di Lorentz

(*ii*) ϕ non è un omomorfismo *uno-a-uno*

Consideriamo un particolare sottogruppo di SL(2,$\mathbb{C}$) , il gruppo SU(2) [2]. Indichiamo con e il seguente quadrivettore

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

che corrisponde, nello spazio delle matrici 2×2, alla matrice identità

$$\underset{\sim}{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \tag{14}$$

Questo implica che

$$\underset{\sim}{e} \longrightarrow A \underset{\sim}{e} A^\dagger = AA^\dagger = \underset{\sim}{e} \;\Rightarrow\; \phi(A)e = e$$

dove è stata usata la proprietà di unitarietà del gruppo SU(2) ($A \in$ SU(2)). Si osservi che una trasformazione di Lorentz Λ tale che

$$\Lambda e = e \tag{15}$$

agisce sul generico vettore ortogonale a e restituendo un vettore che è ancora ortogonale a e

$$\Lambda e^\perp = e'^\perp \tag{16}$$

avendo indicato con $e^\perp$

$$e^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Dunque Λ è una trasformazione ortogonale nello spazio tridimensionale. Possiamo considerare O(3) [3] come il sottogruppo delle trasformazioni di Lorentz che soddisfano

$$\Lambda e = e \tag{18}$$

[2] Gruppo delle matrici unitarie a determinante uno che nella rappresentazione fondamentale hanno dimensione 2×2; $\forall U \in SU(2) : U^\dagger U = \mathbb{1} = UU^\dagger$.

[3] Gruppo delle matrici ortogonali 3×3; $\forall O \in O(3) : O^T O = \mathbb{1} = OO^T$.

dunque

$$\phi : \text{SU(2)} \longrightarrow \text{O(3)} \tag{19}$$

Esempio. Si consideri la matrice $A_\theta \in$ SU(2)

$$A_\theta = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \tag{20}$$

La trasformazione di Lorentz associata a A_θ è la seguente

$$\begin{aligned} \phi(A_\theta)x \quad &\Leftrightarrow \quad A_\theta \, \underset{\sim}{x} \, A_\theta^\dagger = A_\theta \, \underset{\sim}{x} \, A_{-\theta} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_0 + x_3) & (x_1 - ix_2)e^{-2i\theta} \\ (x_1 + ix_2)e^{2i\theta} & (x_0 - x_3) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{21}$$

Vogliamo ora riscrivere $A_\theta \, \underset{\sim}{x} \, A_\theta^\dagger$ nella base σ_μ

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} (x_0 + x_3) & (x_1 - ix_2)\,(\cos 2\theta - i \sin 2\theta) \\ (x_1 + ix_2)\,(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) & (x_0 - x_3) \end{pmatrix} = \\ &= x_0\sigma^0 + (x_1 \cos 2\theta - x_2 \sin 2\theta)\,\sigma^1 + (x_1 \sin 2\theta + x_2 \cos 2\theta)\,\sigma^2 + x_3\sigma^3 \end{aligned}$$

La norma $\| \, \phi(A_\theta)x \, \|^2$ è calcolata dal determinante di questa matrice ed è

$$\| \, \phi(A_\theta)x \, \|^2 = \| \, x \, \|^2$$

D'altra parte si osservi

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \phi(A_\theta)x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \cos 2\theta - x_2 \sin 2\theta \\ x_1 \sin 2\theta + x_2 \cos 2\theta \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Osserviamo altre due cose:

(*i*) $\phi(A_\theta)$ lascia x_0 e x_3 invariati $\Rightarrow \phi(A_\theta)$ è una rotazione attorno a x_3

(*ii*) l'azione su x_1, x_2 è $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ stiamo effettuando una rotazione di 2θ nel piano (x_1, x_2)

Concludiamo dunque che

$$\boxed{\phi(A_\theta) \text{ corrisponde a una rotazione di } 2\theta \text{ intorno a } x_3}$$

Osserviamo che

(*i*) $\theta = 0 \Rightarrow A_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(*ii*) $\theta = \pi \Rightarrow A_{\theta=\pi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -A_{\theta=0}$

È utile a questo punto ricordare che ogni elemento di SU(2) può essere scritto come

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \tag{23}$$

con $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Riscriviamo a, b come

$$\begin{cases} a = x_1 - ix_2 \\ b = x_3 - ix_4 \end{cases} \tag{24}$$

scegliendo $x_1 = \cos\theta$, $x_2 = \sin\theta$, $x_3 = 0$ e $x_4 = 0$ otteniamo la matrice A_θ. In questo modo lo spazio dei parametri di SU(2) è rappresentato da una superficie sferica in uno spazio quadridimensionale, dunque da una superficie tridimensionale; (x_1, x_2, x_3, x_4) verificano l'equazione cartesiana di una sfera di raggio unitario:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \tag{25}$$

In altri termini ogni elemento (matrice) di SU(2) può essere rappresentato come un punto su questa superficie sferica e dunque si può concludere che SU(2) è **semplicemente connesso**. [4]
Si osservi che

(*i*) $A_{\theta=0}$ corrisponde al punto $(1, 0, 0, 0)$

(*ii*) $A_{\theta=\pi}$ corrisponde al punto $(-1, 0, 0, 0)$

ovvero $A_{\theta=0}$ e $A_{\theta=\pi}$ rappresentano due antipodi della sfera 3D (li si può chiamare polo nord e polo sud). Abbiamo già constatato che $A_{\theta=\pi} = -A_{\theta=0}$. D'altra parte sappiamo che

$$\phi(A) = \phi(-A) \tag{26}$$

[4] In topologia uno spazio si dice semplicemente connesso se è connesso per archi (esiste cioè un arco che collega ogni coppia x, y di punti dello spazio) e ogni arco che connette due punti può essere deformato in maniera continua rimanendo all'interno dello spazio e mantenendo fissati i due punti estremi.

il che vuol dire che polo nord e polo sud della sfera di SU(2) inducono la stessa trasformazione di O(3).

Esempio. Si consideri la matrice A_θ ($\in$ O(2))

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{27}$$

come nell'esempio precedente anche in questo caso $A_\theta^\dagger = A_{-\theta}$. Alla trasformazione di Lorentz $\phi(A_\theta)x$ è associata come al solito la trasformazione della matrice $\underset{\sim}{x}$:

$$\phi(A_\theta)x \iff A_\theta \, \underset{\sim}{x} \, A_\theta^\dagger = A_\theta \, \underset{\sim}{x} \, A_{-\theta} \tag{28}$$

Consideriamo il caso semplice di un vettore x della forma

$$x = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \underset{\sim}{x} = \sigma_2 \tag{29}$$

È semplice calcolare l'azione della trasformazione di Lorentz $\phi(A_\theta)$ su e_2

$$\phi(A_\theta)e_2 \iff A_\theta \sigma_2 A_{-\theta} = \sigma_2 \iff \phi(A_\theta)e_2 = e_2 \tag{30}$$

Si conclude dunque che

$$\boxed{\phi(A_\theta) \text{ corrisponde a una rotazione intorno a } e_2}$$

vedremo come nel caso precedente che si tratta di una rotazione di un angolo 2θ. Per far questo scegliamo ora un vettore della forma

$$x = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \underset{\sim}{x} = \sigma_3 \tag{31}$$

e calcoliamo l'azione della trasformazione di Lorentz $\phi(A_\theta)$ su x

$$\phi(A_\theta)e_3 \iff A_\theta \sigma_3 A_{-\theta} \tag{32}$$

seguendo la solita procedura

$$\begin{aligned} A_\theta \sigma_3 A_{-\theta} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \\ &= \cos 2\theta \; \sigma_3 + \sin 2\theta \; \sigma_1 \end{aligned} \tag{33}$$

abbiamo dunque che

$$\phi(A_\theta)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \sin 2\theta\\ 0\\ \cos 2\theta\end{pmatrix} \tag{34}$$

ovvero

$$\phi(A_\theta)e_3=\sin 2\theta\ e_1+\cos 2\theta\ e_3 \tag{35}$$

Si vede quindi che si tratta di una rotazione di un angolo 2θ intorno a e_2, ovvero nel piano (e_1, e_3).

Esempio. Si consideri la matrice A_r

$$A_r=\begin{pmatrix}r & 0\\ 0 & r^{-1}\end{pmatrix}\ ,\quad A_r^\dagger=A_r\ ,\quad r\in\mathbb{R} \tag{36}$$

Come fatto negli esempi precedenti si noti che

$$\begin{aligned} A_r\,\underset{\sim}{x}\,A_r^\dagger=A_r\,\underset{\sim}{x}\,A_r &= \begin{pmatrix} r^2(x_0+x_3) & x_1-ix_2\\ x_1+ix_2 & r^{-2}(x_0-x_3)\end{pmatrix}=\\ &= x_0'\sigma^0+x_1\sigma^1+x_2\sigma^2+x_3'\sigma^3 \end{aligned} \tag{37}$$

dove

$$\begin{cases} x_0'=\frac{1}{2}\left(r^2+r^{-2}\right)x_0+\frac{1}{2}\left(r^2-r^{-2}\right)x_3\\ x_3'=\frac{1}{2}\left(r^2-r^{-2}\right)x_0+\frac{1}{2}\left(r^2+r^{-2}\right)x_3\end{cases} \tag{38}$$

Dunque $\phi(A_r)$ è una trasformazione che lascia x_1 e x_2 invariati, mentre trasforma x_0 e x_3 in x_0' e x_3' rispettivamente. D'altra parte avevamo osservato che x_0 è la metà della traccia di $\underset{\sim}{x}$ mentre x_3 è la metà della differenza degli elementi di matrice sulla diagonale. Quindi

$$\begin{cases} x_0'=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(A_r\,\underset{\sim}{x}\,A_r^\dagger\right)\\ x_3'=\frac{1}{2}\left[\left(A_r\,\underset{\sim}{x}\,A_r^\dagger\right)_{11}-\left(A_r\,\underset{\sim}{x}\,A_r^\dagger\right)_{22}\right]\end{cases} \tag{39}$$

Se identifichiamo r con $r=e^\psi$ [5] e ricordiamo la definizione delle funzioni

[5] Avremmo potuto definire A_r direttamente come:

$$A_r=\begin{pmatrix}e^\psi & 0\\ 0 & e^{-\psi}\end{pmatrix} \tag{40}$$

in analogia con la definizione di A_θ degli esempi precedenti:

$$A_\theta=\begin{pmatrix}e^{-i\theta} & 0\\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix} \tag{41}$$

$A_\theta = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$	$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	$A_\psi = \begin{pmatrix} e^{\psi} & 0 \\ 0 & e^{-\psi} \end{pmatrix}$
$\phi(A_\theta) = R_z^{(2\theta)}$	$\phi(A_\theta) = R_y^{(2\theta)}$	$\phi(A_\psi) = \Lambda_z^{(2\psi)}$

Tab. 1: esempi di trasformazioni di SL(2,$\mathbb{C}$)

iperboliche possiamo riscrivere la (38) come

$$\begin{cases} x_0' = \cosh(2\psi)x_0 + \sinh(2\psi)x_3 \\ x_3' = \sinh(2\psi)x_0 + \cosh(2\psi)x_3 \end{cases} \tag{42}$$

e dunque siamo in grado di scrivere la trasformazione di Lorentz corrispondente sul vettore x in forma di matrice:

$$\Lambda_z^{(2\psi)} = \begin{pmatrix} \cosh(2\psi) & 0 & 0 & \sinh(2\psi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh(2\psi) & 0 & 0 & \cosh(2\psi) \end{pmatrix} \tag{43}$$

Sintetizziamo in una tabella (Tab. 1) i risultati ottenuti nei tre esempi discussi .

2 Gruppo di Lorentz proprio

Teorema. Ogni $A \in$ SL(2,$\mathbb{C}$) può essere deformata in maniera continua nell'identità lungo una curva di matrici $A(t)$ che appartengono tutte a SL(2,$\mathbb{C}$)

Dimostrazione. È noto che

$$\forall A \in \text{SL(2,}\mathbb{C}\text{) , A è coniugata ad una matrice triangolare}$$

$$A = B \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} B^{-1} \qquad a, b \in \mathbb{C}$$

Sia ora $a(t)$ una curva continua di numeri complessi diversi da zero con $a(0) = 1$ e $a(1) = a$. Sia $b(t)$ una curva di numeri complessi diversi da zero

con $b(0) = 0$ e $b(1) = b$. Si può costruire $A(0) = \mathbb{1}$ e $A(1) = A$, da cui si vede che A può essere deformata nell'identità lungo una curva continua ●

Tuttavia non tutte le trasformazioni di Lorentz sono legate all'identità attraverso una curva continua. Ci sono alcune trasformazioni Λ con determinante negativo. Dato che il determinante è una funzione continua non può esistere una curva continua che congiunga questa categoria di trasformazioni di Lorentz (quelle con determinante negativo) con l'identità $\mathbb{1}_4$ (si ricordi che $\det(\mathbb{1}_4) = +1$). Questo sarebbe infatti possibile solo se $\det(\Lambda(t))$ potesse annullarsi.

Dato che

$$||\Lambda x||^2 = ||x||^2 \tag{44}$$

tutti gli elementi del gruppo di Lorentz conservano i vettori di tipo tempo $||x||^2 > 0$.
L'insieme dei vettori di tipo tempo si divide in due classi:

1. quelli con $x^0 > 0$ (cono di luce in avanti)
2. quelli con $x^0 < 0$ (cono di luce indietro)

Ogni elemento del gruppo di Lorentz che può essere deformato in maniera continua nell'identità deve conservare ciascuna componente. In altre parole, gli elementi del gruppo di Lorentz che sono deformabili in maniera continua in $\mathbb{1}_4$ non scambiano vettori del cono di luce in avanti con vettori del cono di luce indietro.
Da tutto questo si può concludere che

$$\boxed{\phi: \quad \text{SL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \text{Lorentz group non è un'applicazione suriettiva}}$$

ovvero non esiste un elemento di SL(2,$\mathbb{C}$) per ogni trasformazione del gruppo di Lorentz.
Indichiamo con $L_\uparrow^+$ il ***gruppo di Lorentz proprio***

$$\Lambda \in L_\uparrow^+ : \begin{cases} \det(\Lambda) = 1 \\ \Lambda \text{ conserva il sottospazio dei vettori del cono di luce in avanti} \end{cases}$$

Si può mostrare che la mappa ϕ definita sopra associa ad ogni elemento di SL(2,$\mathbb{C}$) un elemento di $L_\uparrow^+$

$$\boxed{\phi: \quad \text{SL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow L_\uparrow^+ \text{ è un'applicazione suriettiva}}$$

come pure si può dimostrare che

$$\phi: \quad \text{SU(2)} \longrightarrow \text{SO(3)} \qquad \text{(non O(3)!)} \tag{45}$$

Quelle definite sopra sono delle mappe suriettive, ma non iniettive (a elementi distinti di SL(2,$\mathbb{C}$) e di SU(2) non corrispondono necessariamente elementi distinti di $L_{\uparrow}^{+}$ e di SO(3) rispettivamente).
Segue un teorema importante per le applicazioni

Teorema. Ogni trasformazione di Lorentz propria $\Lambda(\in L_{\uparrow}^{+})$ può essere scritta come

$$\Lambda = R_1 \Lambda_z^{(\psi)} R_2, \qquad \Lambda(\in L_{\uparrow}^{+}) \tag{46}$$

dove R_1 e R_2 sono rotazioni e $\Lambda_z^{(\psi)}$ è un boost lungo z con velocità $\tanh(\psi) = V$.

Dimostrazione. Sia

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{47}$$

Possiamo scrivere

$$\Lambda e = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{48}$$

con $x_0^2 - \mathbf{x}^2 = 1$ essendo $||e||F^2 = 1$.
Si può trovare una rotazione S che ruota Λe lungo l'asse z:

$$x \equiv S\Lambda e = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \\ ||\mathbf{x}|| \end{pmatrix} \tag{49}$$

Ora la matrice hermitiana $\underset{\sim}{x}$ associata a $x \in M$ è

$$\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_0 + ||\mathbf{x}|| & 0 \\ 0 & x_0 - ||\mathbf{x}|| \end{pmatrix} \tag{50}$$

Consideriamo la matrice A_r definita in (36) con $r \in \mathbb{R}$ tale che:

$$r^2 = (x_0 + ||\mathbf{x}||)^{-1} = \frac{x_0 - ||\mathbf{x}||}{(x_0 - ||\mathbf{x}||)(x_0 + ||\mathbf{x}||)} = \frac{x_0 - ||\mathbf{x}||}{x_0^2 - ||\mathbf{x}||^2} = x_0 - ||\mathbf{x}|| \tag{51}$$

Possiamo calcolare l'azione di $\phi(A_r)$ su x come al solito trovando

$$\phi(A_r)x \iff A_r \underset{\sim}{x} A_r^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{52}$$

ovvero

$$\phi(A_r)x = e \iff \underbrace{\phi(A_r)S\Lambda}_{\text{è una rotazione!}} \; e = e \tag{53}$$

Introduciamo dunque la seguente notazione

$$\phi(A_r)S\Lambda \equiv R_2 \tag{54}$$

Da questa definizione segue che

$$\Lambda = S^{-1}\phi^{-1}(A_r)R_2 \tag{55}$$

dove $S^{-1} = R_1$ e resta ta stabilire cosa sia $\phi^{-1}(A_r)$. Si ricordi che abbiamo trovato $r = \sqrt{x_0 - ||\mathbf{x}||}$. Da qui ponendo $x^0 = \cosh\psi$ e $||\mathbf{x}|| = \sinh\psi$, poiche' le due componenti possono erre ottenute da una trasformazione di Lorentz del vettore $(1, 0, 0, 0)$ essendo $x_0^2 - ||\mathbf{x}||^2 = 1$, abbiamo che

$$A_r = \begin{pmatrix} e^{-\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{\psi/2} \end{pmatrix} \tag{56}$$

che sulla base di quanto abbiamo discusso induce un boost di Lorentz con rapidità $-\psi$. Peranto $\phi^{-1}(A_r) = \Lambda_z^{(\psi)}$. ●

Ricordiamo adesso il teorema di Eulero

Teorema. Ogni rotazione nello spazio 3D può essere scritta come:

$$R = R_z^\theta R_y^\phi R_z^\psi \tag{57}$$

(dove θ, ϕ, ψ sono gli angoli di Eulero). Dunque R_1 e R_2 sono di questa forma.

Corollario. Ogni elemento di $L_\uparrow^+$ può essere scritto come un prodotto di tre elementi

$$\Lambda_z^{(\psi)},\ R_z^{(\theta)},\ R_y^{(\phi)} \tag{58}$$

Questi elementi corrispondono a $\phi(A_{\psi/2})$ (cui corrisponde $\Lambda_z^{(\psi)}$) e ai due tipi di $\phi(A_\theta)$ descritti nella Tabella (1), dunque **ogni elemento di (58) è**

nell'immagine di ϕ.
In conclusione:

$$\phi: \ \text{SL}(2,\mathbb{C}) \ \longrightarrow L_{\uparrow}^{+} \tag{59}$$

è una mappa suriettiva.
Analogamente

Teorema. La mappa $\phi:$ SU(2) $\longrightarrow$ SO(3) è suriettiva.

3 Digressione: Teorema di Eulero

Teroema. Sia $m \in M$ e $a \in G$. Sia

$$G_{am} = aG_m a^{-1} \tag{60}$$

allora

$$c \in G_{am} \ \Leftrightarrow c = aba^{-1} \text{ con } b \in G_m \tag{61}$$

Definizione. Dato il gruppo di trasformazioni G, si indica con G_m il sottogruppo di G chiamato **gruppo di isotropia di m** costituito da tutti gli elementi $a \in G$ tali che $am = m$ dato $m \in M$
È chiaro che:

(*i*) $am = m \ \Rightarrow a^{-1}m = m$

(*ii*) $am = m, \ bm = m \ \Rightarrow abm = m$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} &b \in G_m \Leftrightarrow bm = m \\ &c \in G_{am} \Leftrightarrow \ c(am) = am = abm = aba^{-1}am \ \bullet \end{aligned} \tag{62}$$

Teroema di Eulero. Una rotazione R è completamente determinata dalla conoscenza di Rn (immagine di n), e dell'immagine di un qualsiasi vettore unitario tangente alla sfera e passante per n (Figura 1, Figura 2).

Dimostrazione. Sia B una certa rotazione $B \neq R$ tale che:

$$Bn = Rn \tag{63}$$

allora

$$R = CB \ \text{ dove } \ CBn = Bn \tag{64}$$

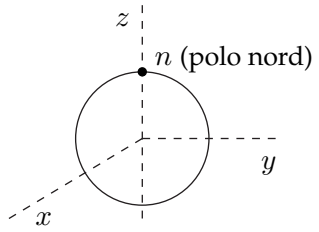


Fig. 1: Sia n il punto di polo nord della sfera

Fig. 2: Attraverso n passa un vettore unitario tangente alla sfera. Una rotazione è completamente identificata dalla conoscenza della immagine Rn del punto n e dell'immagine del vettore unitario tangente.

In altre parole C è nel gruppo di isotropia $SO(3)_{Bn}$, i.e. è una rotazione attorno all'asse attraverso Bn.
Possiamo andare da n ad un qualunque $p = Rn$ applicando prima una rotazione attorno a y (per raggiungere la latitudine di p) e successivamente intorno a z (per raggiungere la longitudine di p)

$$\begin{aligned} Rn &= R_z^\phi R_y^\theta n = Bn \\ B &= R_z^\phi R_y^\theta \end{aligned} \tag{65}$$

ma allora

$$\begin{aligned} &R = CB \text{ con } C \in SO(3)_{Bn} \ \Rightarrow C = BDB^{-1} \text{ con } D \in SO(3)_n \\ &R = BDB^{-1}B = BD = R_z^\phi R_y^\theta R_z^\psi \ \bullet \end{aligned} \tag{66}$$

4 Digressione: Topologia di SO(3)

Ricordiamo prima di tutto che l'elemento identità del gruppo SO(3) è rappresentato da una rotazione di un angolo nullo o di 2π:

$$R_z(0) = R_z(2\pi) = \text{elemento identità di SO(3)} \tag{67}$$

Consideriamo $R_z(t)$, una curva di rotazioni attorno all'asse z di angolo $t \in [0, 2\pi]$. $R_z(t)$ rappresenta una curva chiusa in SO(3).
Ci chiediamo qual'è la controimmagine di questa curva in $SU(2)$ data la mappa suriettiva:

$$\phi : \ SU(2) \ \longrightarrow SO(3) \tag{68}$$

A questo scopo si consideri una curva continua $C(t)$ in SU(2) in cui $C(0) = e$. Sia $C(t)$ quella curva che ha come immagine $R_z(t)$ secondo la mappa ϕ

$$\phi(C(t)) = R_z(t) \tag{69}$$

ϕ è una mappa $2 \to 1$ e i due punti in SU(2) a cui è associato uno stesso punto in SO(3) sono punti antipodali sulla sfera 3D che rappresenta gli elementi di SU(2). Usiamo le relazioni (20,23,24) per scrivere $C(t)$ in termini delle sue 4 componenti:

$$C(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) - iy_2(t) & y_3(t) - iy_4(t) \\ -y_3(t) - iy_4(t) & y_1(t) + iy_2(t) \end{pmatrix} \tag{70}$$

e si scelga

$$\begin{cases} y_1(t) = \cos(t/2) \\ y_2(t) = \sin(t/2) \\ y_3(t) = 0 \\ y_4(t) = 0 \end{cases} \tag{71}$$

in modo tale che i due punti agli antipodi della sfera di SU(2) corrispondono allo stesso elemento di SO(3). Osserviamo infatti che

$$\begin{cases} y_1(0) = 1, \ y_2(0) = 0, \ y_3 = y_4 = 0 \\ y_1(2\pi) = -1, \ y_2(2\pi) = 0, \ y_3 = y_4 = 0 \end{cases} \tag{72}$$

dunque $C(0) = e$ e $C(2\pi) = -e$. Concludiamo quindi che l'elemento identità di SO(3) ($e_{SO(3)} = R_z(0) = R_z(2\pi)$) è immagine di due punti distinti della sfera di SU(2), overo $e_{SU(2)} = (1, 0, 0, 0)$ e il suo antipodo $-e_{SU(2)}$.
D'altra parte sappiamo che la sfera che rappresenta SU(2) (in generale ogni

Fig. 3: Percorsi aperti sulla sfera.

sfera) ha la proprietà che ogni curva chiusa sulla sua superficie può essere deformata in maniera continua fino ad essere ridotta ad un punto.
Tuttavia, come abbiamo appena visto, $C(t)$, quando t va da 0 a 2π, non è una curva chiusa anche se la sua immagine $\phi(C(t))$ è una curva chiusa in SO(3).
In generale, infatti, se prendiamo un nastro di gomma sulla sfera 3D (Figura 3), questo può essere deformato in maniera continua fino a correre lungo il percorso di minima distanza tra A e B sulla superficie della sfera, ma non meno di quello (in altre parole non può essere ridotta ad un punto).

Per ottenere una curva chiusa in SU(2) bisogna considerare $C(t)$ con $t \in [0, 4\pi]$, che ha come immagine in SO(3) una curva chiusa che comincia in una rotazione di angolo nullo e termina in una rotazione di un angolo 4π. In questo caso $C(t)$ può essere deformata in maniera continua in un punto e dunque la conclusione a cui giungiamo è che un percorso chiuso in SO(3) che comincia sull'identità e termina in una rotazione di 4π può essere contratto in maniera continua ad un percorso semplice (Figura 4).

Una rotazione di 4π è rappresentata dall'identità e dunque gli autovalori di una rotazione di 2π sono $+1$ e -1 (bosoni e fermioni).

$$R_z(4\pi) = e \;\Rightarrow\; R_z(2\pi)R_z(2\pi) = e \;\Rightarrow\; R_z(2\pi) = \pm e \tag{73}$$

(Ad esempio SO(2) non ha questa proprietà topologica; da qui discendono l'esistenza delle cosidette statistiche frazionarie e degli 'anioni'.)

5 Trasformazioni di Lorentz di tensori

Premettiamo il seguente
Teorema. I tensori antisimmetrici $T_{i_1,..,i_n}$ di rango $n = \dim V$ si trasformano sotto cambiamento di coordinate

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, ..., x^n) \tag{74}$$

Fig. 4: Percorsi chiusi

nello spazio vettoriale V secondo la

$$T_{12\ldots n} = JT_{1'2'\ldots n'} \tag{75}$$

dove

$$J = \det\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right) \tag{76}$$

Dimostrazione. Un generico tensore completamente antisimmetrico $T_{i_1,..,i_n}$ è univocamente definito dal numero $T_{12\ldots n}$ poiché tutte le sue altre componenti date dalle permutazioni degli indici $\sigma(1, 2, ...n)$ non sono altro che il numero $T_{12\ldots n}$ preceduto dal segno della permutazione

$$T_{i_1,\ldots,i_n} = \epsilon_{i_1,\ldots,i_n} T_{12\ldots n} \tag{77}$$

dove ϵ è il tensore completamente antisimmetrico. Nello spazio di Minkowski si definisce

$$\epsilon_{0123} = -1 \tag{78}$$

e conseguentemente

$$\epsilon^{0123} = +1 \tag{79}$$

Si osservi che

$$\epsilon_{1'2'\ldots n'} = \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{2'}} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x^{n'}} = \sum_\sigma \mathrm{sign}(\sigma) \frac{\partial x^{\sigma(i_i}}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial x^{2'}} \cdots \frac{\partial x^{i_n)}}{\partial x^{n'}} \tag{80}$$

dove σ è una permutazione degli n indici. Dall'equazione precedente desumiamo che

$$\epsilon_{1'2'\ldots n'} = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\right) = \frac{1}{J} \equiv \frac{1}{J}\epsilon_{12\ldots n} \tag{81}$$

ponendo $\epsilon_{12...n} = 1$. Dalle Eq. (295,81), ponendo $(i_1, ..., i_n) = (1', 2', ..., n')$ si ottiene la Eq. (75) ●
Consideriamo lo spazio di Minkowski ed il tensore completamente antisimmetrico in esso

Esercizio. Provare che

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} &= -24 \\
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\lambda\nu\rho\sigma} &= -6\delta^{\lambda}_{\mu} \\
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu'\nu'\rho\sigma} &= -2(\delta^{\mu'}_{\mu}\delta^{\nu'}_{\nu} - \delta^{\mu'}_{\nu}\delta^{\nu'}_{\mu}) \\
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma} &= -\det\begin{pmatrix} \delta^{\mu'}_{\mu} & \delta^{\mu'}_{\nu} & \delta^{\mu'}_{\rho} \\ \delta^{\nu'}_{\mu} & \delta^{\nu'}_{\nu} & \delta^{\nu'}_{\rho} \\ \delta^{\rho'}_{\mu} & \delta^{\rho'}_{\nu} & \delta^{\rho'}_{\rho} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{82}$$

e similmente nel caso in cui tutti e quattro gli indici sono diversi.
Il teorema precedente stabilisce che il tensore $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ è invariante per trasformazioni di Lorentz Λ con $\det\Lambda = 1$.
Sia $F^{\mu\nu}$ un tensore antisimmetrico nello spazio di Minkowski. Come si trasforma sotto un boost nella direzione x?. Una tale trasformazione corrisponde ad una rotazione iperbolica nel piano x^0x^1. Le componenti

$$F^{01}, F^{10}, F^{00}, F^{11} \tag{83}$$

formano un tensore antisimmetrico di rango 2 nello spazio vettoriale $V = x^0x^1$. Pertanto dal teorema precedente

$$\begin{aligned}
F^{01} &= F'^{01} \\
F^{10} &= F'^{10} \\
F^{11} &= F'^{11} = 0 \\
F^{00} &= F'^{00} = 0
\end{aligned}$$

Poiché un boost lungo l'asse x mescola solo le componenti 0 ed 1 abbiamo anche che

$$F^{23} = F'^{23} \tag{84}$$

Nel caso del tensore elettromagnetico

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{85}$$

il teorema precedente asserisce che le componenti del campo elettrico sono lasciate invariate nella direzione del boost (componenti longitudinali). Stesso dicasi per la componente longitudinale H_x. Solo le componenti trasverse saranno modificate dal boost di Lorentz.

Esercizio. Provare che valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} &F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(H^2 - E^2) \\ &\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = -4E \cdot H = 4\partial_\mu X^\mu \end{aligned}$$

dove $X^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(A_\nu \partial_\rho A_\sigma)$. Queste sono le due quantità invarianti che si possono formare a partire dal tensore elettromagnetico (la prima scalare la seconda pseudoscalare). Per svolgere l'esercizio si osservi che il tensore elettromagnetico duale si scrive come

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ H_x & 0 & E_z & -E_y \\ H_y & -E_z & 0 & E_x \\ H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \equiv \tilde{F} \tag{86}$$

ed $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -\mathrm{Tr}\ F \cdot \tilde{F}$.
Procediamo adesso a studiare come si trasformino le componenti trasverse del tensore elettromagnetico. Prendiamo ad esempio F^{13}

$$\begin{aligned} &H_y = F^{13} \equiv G^1 \otimes G^3 \to \left(\frac{G'^1 + VG'^0}{\sqrt{1-V^2}}\right) \otimes G'^3 = \\ &= \frac{G'^1 \otimes G'^3 + VG'^0 \otimes G'^3}{\sqrt{1-V^2}} = \frac{H'_y + V(-E'_z)}{\sqrt{1-V^2}} \end{aligned} \tag{87}$$

Esercizio. Si dimostri che [6]

$$
\begin{aligned}
E_y &= \frac{E'_y + VH'_z}{\sqrt{1-V^2}} \\
E_z &= \frac{E'_z - VH'_y}{\sqrt{1-V^2}} \\
H_y &= \frac{H'_y - VE'_z}{\sqrt{1-V^2}} \\
H_z &= \frac{H'_z + VE'_y}{\sqrt{1-V^2}}
\end{aligned}
$$

Si consideri ad esempio un elettrone fermo nel campo di un nucleo. L'elettrone risentirà soltanto del campo elettrico dovuto alla carica Ze sul nucleo. Ma l'elettrone si muove a velocità relativistiche intorno al nucleo; nel sistema di riferimento solidale con l'elettrone è il nucleo ad essere in moto. Supponiamo che nel sistema a riposo dell'elettrone si osservi il nucleo muoversi di moto rettilineo uniforme con velocità $\mathbf{V}$ lungo l'asse x. Per via delle relazioni precedenti avremo:

$$
\begin{aligned}
H_x &= 0 \\
H_y &= \frac{-VE'_z}{\sqrt{1-V^2}} = -VE_z \\
H_z &= \frac{+VE'_y}{\sqrt{1-V^2}} = VE_y
\end{aligned}
$$

o, più sinteticamente

$$
\mathbf{H} = \frac{\mathbf{V}}{c} \wedge \mathbf{E} \tag{89}
$$

dove abbiamo ripristinato c. L'elettrone risentirà quindi anche di un campo magnetico $\mathbf{H}$ dovuto al moto del nucleo e l'Hamiltoniana di interzione sarà

$$
\mathcal{E} = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{H} \tag{90}
$$

[6] La presente osservazione va considerata in una seconda lettura di queste note. Incidentalmente si consideri il vettore $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} E'_x & E'_y & H'_z & H'_x & H'_y & E'_z \end{pmatrix}^T$. Sulla base delle trasformazioni di Lorentz dei campi elettrici e magnetici trovate si osservi che $\mathbf{F}$ trasforma come

$$
\begin{pmatrix} (1,0) & 0 \\ 0 & (0,1) \end{pmatrix} = (1,0) \oplus (0,1) \tag{88}
$$

Infatti le due rappresentazioni $(1,0)$ e $(0,1)$, entrambe di dimensionalità pari a 3, sono legate l'una all'altra da una trasformazione di parità e quindi rappresentano due boost con velocità opposte.

dove $\mathbf{M}$ è il momento magnetico dell'elettrone

$$\mathbf{M} = -\frac{eg}{2mc}\mathbf{S} \tag{91}$$

Dalla teoria di Dirac si troverà il momento giromagnetico $g = 2$. Pertanto

$$\mathcal{E} = -\mathbf{M}\cdot\mathbf{H} = \frac{e}{mc}\mathbf{S}\cdot\frac{\mathbf{V}}{c}\wedge\mathbf{E} \tag{92}$$

Se vogliamo attribuire $\mathbf{V}$ all'elettrone dobbiamo cambiarne il segno in $-\mathbf{V}$. Il campo elettrico $\mathbf{E} = -\nabla\Phi = \mathbf{r}/r(d/dr\Phi(r))$ da cui

$$\mathcal{E} = \frac{e}{m^2c^2}\mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\wedge\mathbf{r}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Phi(r)\right) = -\frac{e}{m^2c^2}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Phi(r)\right)\mathbf{S}\cdot\mathbf{L} \tag{93}$$

La correzione spin-orbita in cui si tenga conto che il moto non è rettilineo differisce da quella trovata per un fattore $1/2$. Da questa derivazione si apprezza il fatto che l'interazione spin-orbita è di natura relativistica. Una trattazione coerente degli effetti di interazione spin-orbita richiede l'uso della equazione di Dirac.

Nel sistema di riposo di una carica elettrica non ci sono campi magnetici: $H' = 0$. Una carica elettrica in moto relativistico verso un osservatore viene invece misurata come un' onda elettromagnetica con un campo elettrico trasverso dilatato di $1/\sqrt{1-V^2}$ rispetto a quello di riposo

$$E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-V^2}} = \gamma E'_y$$
$$E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1-V^2}} = \gamma E'_z$$

ed un campo magnetico ad esso ortogonale

$$H_y = \frac{VE'_z}{\sqrt{1-V^2}} = \beta\gamma E'_z \simeq \gamma E'_z$$
$$H_z = \frac{-VE'_y}{\sqrt{1-V^2}} \simeq -\gamma E'_y$$

Esercizio. Provare che le componenti trasverse elettriche e magnetiche sono fra loro ortogonali. [Suggerimento: $\tan\varphi = -a/b, \tan\varphi' = b/a$ se $\varphi' + \pi/2 = \varphi$].

Esercizio. Si consideri una configurazione di cariche e correnti che generano un campo elettrico $\mathbf{E}$ ed un campo magnetico $\mathbf{H}$ in un certo sistema

di riferimento K. Si determini la velocità $\mathbf{V}$ del sistema K' nel quale $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ risultanto fra loro paralleli.
[Qualunque siano $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ essi individuano un piano. Sia $\hat{x}$ la direzione normale a questo piano. Le componenti trasformate di Lorentz lungo $\hat{x}$ saranno anche esse nulle. Se richiediamo che nel sistema K' le componenti lungo l'asse z dei campi elettrici e magnetici siano entrambe nulle, resterà che le uniche componenti non nulle sono quelle lungo y e che quindi i campi in K' sono paralleli. Abbiamo dunque

$$E_x = 0 \qquad E_y = \gamma E'_y \qquad E_z = -V\gamma H'_y \tag{94}$$

$$H_x = 0 \qquad H_y = \gamma H'_y \qquad H_z = V\gamma E'_y \tag{95}$$

Si osservi che

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{H} = V\gamma^2(E'^2_y + H'^2_y)\hat{x} \tag{96}$$

mentre

$$\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2 = \frac{1+V^2}{1-V^2}(E'^2_y + H'^2_y) \tag{97}$$

Dunque la velocità cercata è data da

$$\frac{\mathbf{V}}{1+V^2} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}}{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2} \tag{98}$$

da cui estrarre la radice con $V \leq 1$.]

Esercizio. Definendo $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$ si provi che

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i\varphi & -\sin i\varphi \\ 0 & \sin i\varphi & \cos i\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{pmatrix} \tag{99}$$

dove $\tanh\varphi = V$.

Esercizio. Si osservi che per ogni vettore l'unico invariante rispetto alle rotazioni è il suo quadrato

$$\mathbf{F}^2 = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 + 2i\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} \tag{100}$$

Un altro tensore antisimmetrico di interesse è il tensore momento angolare

$$M^{\mu\nu} = \sum (x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu) \tag{101}$$

dove la somma è estesa a tutte le particelle di un corpo.

Esercizio. Mostrare che

$$M^{23} = M_x, \quad M^{31} = M_y, \quad M^{12} = M_z \tag{102}$$

dove M_x, M_y, M_z sono le componenti di $M = \sum r \wedge p$. In considerazione del fatto che nel sistema centro di massa del corpo si ha

$$\sum \mathcal{E} r = 0, \quad \sum p = 0 \tag{103}$$

dimostrare che per un boost lungo x si ha

$$M_x = M_x^{(0)} \quad M_y = \gamma M_y^{(0)}, \quad M_z = \gamma M_z^{(0)} \tag{104}$$

dove con l'apice (0) si intende indicare il sistema del centro di massa.

6 Un' applicazione: la Bremsstrahlung

Un elettrone che incide su un nucleo con velocità $V \sim 1$ e con un certo parametro di impatto b vede nel suo riferimento di riposo il nucleo come un' onda elettromagnetica piana che gli viene incontro. A sua volta quest'ultima può essere vista come un insieme di fotoni che potranno effettuare diffusione Compton sull'elettrone. I fotoni diffusi Compton nel sistema di riposo dell'elettrone coincidono, nel sistema del laboratorio in cui è l'elettrone a muoversi verso il nucleo, con quelli di Bremsstrahlung (radiazione da frenamento). I fotoni di Bremsstrahlung sono visti nel sistema di riposo del nucleo come fotoni emessi dall'elettrone.

Nel laboratorio, il campo elettrico trasverso del nucleo è

$$E'_\perp = \frac{Ze}{b^2} \tag{105}$$

e quindi nel riferimento dell'elettrone

$$E_\perp = \frac{Ze\gamma}{b^2} \tag{106}$$

con $\mathbf{H}_\perp \perp \mathbf{E}_\perp$, $\mathbf{H}_\perp \perp \mathbf{V}$ ed

$$H_\perp = \frac{Ze\gamma}{b^2} \tag{107}$$

L'energia per unità di volume trasportata dall'onda elettromagnetica piana è dunque

$$\mathcal{E} \approx E_\perp^2 + H_\perp^2 = \frac{Z^2 e^2 \gamma^2}{b^4} \tag{108}$$

dove il volume in questione è dato da $V = S \times b/\gamma$; pertanto l'energia per unità di superficie è data da

$$\mathcal{E} \approx \frac{Z^2 e^2 \gamma}{b^3} \tag{109}$$

Vogliamo contare il numero di fotoni per unità di superficie a distanza b dall'elettrone e nell'intervallo di frequenza $\Delta\nu$ (i fotoni candidati a fare la diffusione Compton dall'elettrone). Se si assume che l'onda elettromagnetica che investe l'elettrone possa essere considerata come un impulso gaussiano che abbia intensità $Ze\gamma/b^2$ ed elongazione temporale $b/c\gamma$ (varianza della gaussiana), lo spettro in frequenza avrà varianza $\gamma c/b$. Diciamo quindi che l'energia trasportata dai fotoni nell'intervallo di frequenza $\Delta\nu$ è proporzionale a

$$\mathcal{E} \propto \frac{\Delta\nu}{\nu_{\max}} = \frac{b\Delta\nu}{\gamma c} \tag{110}$$

Pertanto l'energia per unità di superficie nell'intervallo di frequenza $\Delta\nu$ è data da

$$\mathcal{E} \approx \frac{Z^2e^2}{cb^2}\Delta\nu \tag{111}$$

Siamo quindi in grado di stimare la luminosità dei fotoni come

$$\mathcal{L} = \frac{Ze^2}{chb^2} \times \frac{\Delta\nu}{\nu} \tag{112}$$

ed il numero medio di diffusioni di fotoni con frequenza ν a distanza b sarà quindi dato da

$$\frac{Ze^2}{chb^2} \times \frac{\Delta\nu}{\nu} \times \sigma_{\text{Compton}}(\nu) \tag{113}$$

Questa formula può essere integrata sulla corona di raggio interno $b_{\min}$ e raggio esterno $b_{\max}$, ovvero $\int_{b_{\min}}^{b_{\max}} 2\pi b db$ dove $b_{\min} \gtrsim \lambda_C$ dove λ_C è la lunghezza d'onda Compton dell'elettrone $h/mc \sim 0.024 \times 10^{-8}$ cm, ovvero la taglia minima che può essere attribuita a un elettrone senza scontrarsi con le 'ambiguità' della elettrodinamica quantistica (creazione di coppie). Possiamo dire che la sezione d'urto totale per nucleo è

$$\sigma \propto \frac{Ze^2}{chb^2}\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)\sigma_{\text{Compton}} \ln\frac{b_{\max}}{\lambda_C} \tag{114}$$

Il $b_{\max}$ può essere preso dal modello di Thomas-Fermi. Una nota importante: sotto trasformazioni di Lorentz $\Delta\nu/\nu = \Delta\nu'/\nu'$ (Effetto Doppler).

7 Generatori del gruppo di Lorentz

Una trasformazione di Lorentz lungo un particolare asse può essere scritta come una matrice 2×2 che mescola la componente tempo con la direzione di boost

$$\mathbb{1}\cosh\psi + \sigma_1 \sinh\psi = e^{\psi\sigma_1} \tag{115}$$

Questa in verità corrisponde ad una trasformazione di Lorentz ortocrona propria. Similmente per una rotazione

$$\mathbb{1}\cos\varphi + i\sigma_2 \sin\varphi = e^{i\varphi\sigma_2} \tag{116}$$

Ci si chiede quale sia la forma esponenziale in 4 dimensioni per un boost o una rotazione, in altri termini si vogliono individuare i generici $e^{\psi K_i}$ ed $e^{i\varphi J_i}$ per $i = 1, 2, 3$. Per quel che riguarda i boost troviamo subito

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che corrisponde ad inglobare la matrice σ_1 in una matrice 4×4 nei tre modi relativi alle tre possibili trasformazioni di boost. Analogamente si ha per le matrici di rotazione in quattro dimensioni

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed infine

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio. Nel caso di J_2 si vede che la matrice σ_2 viene scritta con un segno scambiato rispetto a quanto avviene per J_1, J_3. Mostrare che questo è dovuto al fatto che si assume che le rotazioni intorno agli assi sono supposte avvenire in senso antiorario.

Esercizio. Dimostrare che, scrivendo i generatori K con una i al posto di ogni 1 [7] si trovano le seguenti regole di commutazione

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \tag{117}$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k \tag{118}$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k \tag{119}$$

Esercizio. Definendo

$$(M^{k\rho})^{\mu}{}_{\nu} = i(g^{k\mu} g^{\rho}{}_{\nu} - g^{\rho\mu} g^{k}{}_{\nu}) \tag{120}$$

si dimostri che

$$M^{01} = K_1, \quad M^{02} = K_2, \quad M^{03} = K_3 \tag{121}$$

$$M^{23} = J_1, \quad M^{31} = J_2, \quad M^{12} = J_3 \tag{122}$$

e che pertanto per le trasformazioni di Lorentz di quadrivettori si può convenientemente scrivere

$$\boxed{\Lambda(\omega) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{k\rho} M^{k\rho}}}$$

Il tensore antisimmetrico $\omega_{k\rho}$ definisce completamente il tipo di trasformazione. Ad esempio una rotazione intorno all asse z di un angolo φ corrisponde a considerare un ω di sole componenti nulle tranne che $\omega_{12} = -\omega_{21} = \varphi$ mentre un boost di velocità V lungo l'asse x corrisponde ad un ω di sole componenti nulle tranne che $\omega_{01} = -\omega_{10} = \psi = \mathrm{arctanh} V$.

Introduciamo due operatori non-hermitiani

$$J_{\pm i} = \frac{1}{2}(J_i \pm iK_i) \tag{123}$$

Un'altra notazione è $N_i = J_{+i}$ e $N_i^\dagger = J_{-i}$, per mettere in luce che sono l'uno l'hermitiano coniugato dell'altro. Le precedenti regole di commutazione si riducono a

$$[J_{+i}, J_{+j}] = i\epsilon_{ijk} J_{+k} \tag{124}$$

$$[J_{-i}, J_{-j}] = i\epsilon_{ijk} J_{-k} \tag{125}$$

$$[J_{\pm i}, J_{\mp j}] = 0 \tag{126}$$

[7] Questo si può fare semplicemente sostituendo $e^{\vec{\psi}\cdot\vec{K}} \to e^{-i\vec{\psi}\cdot\vec{K}}$

Il gruppo di Lorentz ortocrono proprio è quindi isomorfo ad un gruppo $SU(2) \times SU(2)$ generato dai (J_{+i}, J_{-i}). Etichettiamo le rappresentazioni di $SU(2) \times SU(2)$ attraverso gli autovalori degli operatori $J_{\pm}$: ogni rappresentazione (j_+, j_-) avrà dimensione $(2j_+ + 1)(2j_- + 1)$. A parte la rappresentazione scalare (0,0), le rappresentazioni a dimensione più bassa sono le rappresentazioni spinoriali $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$. Date le rappresentazioni spinoriali tutte le rappresentazioni a dimensionalità più alta possono essere costruite come prodotti di Kronecker. Ad esempio

$$(0, 1/2) \otimes (1/2, 0) = (1/2, 1/2) \tag{127}$$

che è una rappresentazione a spin 1 con 4 componenti. In notazione tensoriale, un quadrivettore. Similmente

$$(0, 1/2) \otimes (0, 1/2) = (0, 0) \oplus (0, 1) \tag{128}$$

$$(1/2, 0) \otimes (1/2, 0) = (0, 0) \oplus (1, 0) \tag{129}$$

Le rappresentazioni $(1, 0)$ e $(0, 1)$ corrispondono rispettivamente a tensori antisimmetrici auto-duali

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma} \tag{130}$$

ed anti-auto-duali

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma} \tag{131}$$

Il tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ si trasformerà sotto trasformazioni di Lorentz come un $(0, 1) \oplus (1, 0)$.

I quadrivettori potrebbero trasformare sotto $(0, 3/2)$, $(3/2, 0)$ e $(1/2, 1/2)$. Tutte queste rappresentazioni hanno infatti dimensione quattro. Purtuttavia solo l'ultima è quella corretta poichè essa contiene le componenti $j = 1/2 + 1/2, |1/2 - 1/2|$: in un quadrivettore la componente tempo è scalare $(j = 0)$ sotto rotazioni mentre la componente spazio trasforma come un trivettore ($j = 1$).

N.B.Talvolta si preferisce indicare le diverse rappresentazioni con la notazione $(2j_+ + 1, 2j_- + 1)$. *In tal caso la rappresentazione* $(1/2, 0)$ *corrisponderebbe alla* $(2, 1)$.

8 Digressione sul gruppo di Poincarè.

Quando si includono le traslazioni, si ottengono trasformazioni di coordinate più generali del tipo

$$x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{132}$$

Con notazione più compatta scriviamo

$$x \to \Lambda x + a = x' \tag{133}$$

Trasformiamo anche x' con una seconda *trasformazione di Poincarè*

$$\Lambda'(\Lambda x + a) + a' = \Lambda'\Lambda x + \Lambda' a + a \tag{134}$$

Definiamo

$$g(a, \Lambda) = T(a)\Lambda \tag{135}$$

ovvero la successione di una trasformazione di Lorentz e di una traslazione. In tal caso la (134) si scrive come

$$g(a', \Lambda')g(a, \Lambda) = g(\Lambda' a + a', \Lambda'\Lambda) \tag{136}$$

In quest'ultima relazione prendiamo $a' = 0$ e $\Lambda = \mathbb{1}$ da cui segue che

$$\Lambda' T(a) = T(\Lambda' a)\Lambda' \tag{137}$$

dove si è fatto uso della definizione di g data nella (135). Quest'ultima equazione si riscrive come

$$\Lambda T(a)\Lambda^{-1} = T(\Lambda a) \tag{138}$$

Trasformazioni di Lorentz di operatori di traslazione sono altre traslazioni.

Si ricordi ora le definizione dela funzione d'onda in rappresentazione di Heisenberg

$$e^{iHt/\hbar}\psi(\mathbf{x}, 0)e^{-iHt/\hbar} = \psi(\mathbf{x}, t) \tag{139}$$

La sua versione relativistica è

$$e^{iP_\mu a^\mu}\psi(0)e^{-iP_\mu a^\mu} = \psi(a) \tag{140}$$

L'operatore di traslazione sarà dunque $T(a) = e^{iP_\mu a^\mu}$ e usando questo nella (138) si ottiene

$$\Lambda P_\mu \Lambda^{-1} = P_\nu \Lambda^\nu{}_\mu \tag{141}$$

dove le Λ sono da intendersi come operatori che non commutano con i P^μ. Richiamiamo la forma più generale di Λ introdotta sopra

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega_{k\rho}M^{k\rho}} \tag{142}$$

Esercizio. Usando quest'ultima si dimostri che, a partire dalla (141) si ottiene

$$[P_\mu, M_{k\rho}] = i(P_\rho g_{\mu k} - P_k g_{\mu\rho}) \tag{143}$$

Esercizio. Sia $P_0 = H$, l'Hamiltoniana. Usando la (143) si dimostri che i generatori dei boost non sono conservati mentre lo sono le tre componenti dell'impulso e i tre generatori delle rotazioni (momenti angolari). [Si tenga presente che a causa della abelianità delle traslazioni si ha $[P^\mu, P^\nu] = 0$.]

La regola di commutazione (143) insieme alla regola $[P^\mu, P^\nu] = 0$, al commutatore $[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\sigma}]$ e a tutte le regole di commutazione del gruppo di Lorentz proprio costituiscono la cosiddetta algebra del gruppo di Poincarè.

9 Spinori di Weyl e Dirac

Le rappresentazioni $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$ agiscono su spinori a due componenti noti come spinori di Weyl. Si osservi che sotto l'operazione di parità

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \mathbf{x} \to -\mathbf{x} \\ \mathbf{p} \to -\mathbf{p} \end{cases}$$

si ha

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \mathbf{J} \to +\mathbf{J} \text{ (assiale)} \\ \mathbf{K} \to -\mathbf{K} \end{cases}$$

che in altri termini vuol dire

$$J_+ \to J_- \tag{144}$$

oppure

$$(1/2, 0) \to (0, 1/2) \tag{145}$$

Chiamiamo gli spinori (di Weyl) associati alle due rappresentazioni come ψ_L e ψ_R con chiaro riferimento alla chiralità che per una particella senza massa equivale alla elicità. Per descrivere un elettrone abbiamo bisogno di entrambi a meno che non si intenda distinguere fra stati connettibili l'uno all'altro da operazioni di parità. Lo spinore per un elettrone deve essere dunque della forma:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

ovvero la parità forza ad avere un 4-spinore per descrivere l'elettrone. Ma pur sempre l'elettrone ha soli 2 gradi di libertà! Più avanti introdurremo la notazione con indici spinoriali espliciti secondo la quale

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_c \\ \xi^{\dagger\dot{c}} \end{pmatrix}$$

Vogliamo scrivere una equazione che nel sistema di riferimento a riposo dell'elettrone identifichi $\psi_L = \psi_R$. Questa equazione è

$$(\gamma_0 - 1)\psi = 0 \tag{146}$$

dove

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \gamma^0_{(\mathrm{Weyl})} \tag{147}$$

Esercizio. Dimostrare che

$$T^{-1}\gamma^0_{(\mathrm{Weyl})}T = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \gamma^0_{(\mathrm{Dirac})} \tag{148}$$

dove T è la matrice degli autovettori della γ^0. Si osservi anche che

$$\gamma^i_{(\mathrm{Weyl})} = \gamma^i_{(\mathrm{Dirac})} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{149}$$

Si osservi dunque che

$$(1/2, 0) : \begin{cases} J_i \sim \sigma_i/2 \\ iK_i \sim \sigma_i/2 \end{cases} \tag{150}$$

e

$$(0, 1/2) : \begin{cases} J_i \sim \sigma_i/2 \\ iK_i \sim -\sigma_i/2 \end{cases} \tag{151}$$

dove con il simbolo $\sim$ si intende 'rappresentazione bidimensionale dei J_i, K_i'. Un boost generico sul quadrispinore ψ corrisponde dunque ad effettuare la trasformazione

$$e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{K}} = \exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma} \end{pmatrix}\right) \tag{152}$$

Esercizio. Dimostrare che nella rappresentazione di Weyl si ritroverebbe la formula precedente utilizzando $\psi \to S(\Lambda)\psi$ dove

$$\boxed{S(\Lambda(\omega)) = e^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}}$$

e

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{153}$$

si svolga l'esercizio considerando il boost in una qualche direzione (ad esempio x).

Esercizio. Utilizzando il seguente risultato (lemma di Hadamard)

$$e^X Y e^{-X} = Y + [X,Y] + \frac{1}{2!}[X,[X,Y]] + ... \tag{154}$$

dimostrare che

$$e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{K}}\gamma^0 e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{K}} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}} \\ e^{\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}} & 0 \end{pmatrix} \tag{155}$$

Esercizio. Osservando che

$$\cosh\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \tag{156}$$

$$\sinh\varphi = \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} \tag{157}$$

dimostrare che

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{-\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}} \\ e^{\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E}/m - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}/m \\ \mathcal{E}/m + \vec{\sigma}\cdot\vec{p}/m & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{m}\gamma^\mu p_\mu \tag{158}$$

A partire dai risultati ricavati negli esercizi il boost della equazione che nel sistema di riferimento a riposo proietta $\psi_{_L} = \psi_{_R}$ è dato da

$$(\gamma^0 - 1)\psi = 0 \rightarrow (e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{K}}\gamma^0 e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{K}} - 1)e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{K}}\psi(p^{(0)}) = 0 \tag{159}$$

che è semplicemente

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi(p) = 0 \tag{160}$$

Si usa scrivere

$$(\not{p} - m)\psi(p) = 0 \tag{161}$$

Per un boost di Lorentz nella direzione $-x$ si ha

$$(\Lambda^{-1})^0{}_\nu \gamma^\nu = \gamma^0\cosh\varphi - \gamma^1\sinh\varphi \tag{162}$$

che è la matrice in (158) quando si considera solo un boost nella direzione x. Sempre usando il lemma di Hadamard e la espressione che abbiamo ottenuto per $S(\Lambda)$,

Esercizio. si vede che

$$S(\Lambda)\gamma^j S(\Lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j e^{-\varphi\sigma^j} \\ -\sigma^j e^{\varphi\sigma^j} & 0 \end{pmatrix} \tag{163}$$

se il boost Λ e nella direzione j. Altrimenti se il boost non è lungo j si ha

$$S(\Lambda)\gamma^j S(\Lambda)^{-1} = \gamma^j \tag{164}$$

La (163) equivale a

$$S(\Lambda)\gamma^j S(\Lambda)^{-1} = -\gamma^0 \sinh\varphi + \gamma^j \cosh\varphi \tag{165}$$

che a sua volta è uguale a

$$-\gamma^0 \sinh\varphi + \gamma^j \cosh\varphi = (\Lambda^{-1})^j{}_\nu \gamma^\nu \tag{166}$$

essendo $\nu = 0, j$. Abbiamo dunque trovato componente per componente che

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu \tag{167}$$

dove il Λ nel lato destro è inverso rispetto a quello che compare nell' $S(\Lambda)$. Si procede in modo analogo nel caso in cui le Λ corrispondoano a delle rotazioni. Si trova ugualmente l'equazione (167).

Esercizio. Invece che studiare i casi particolari si osservi che se $X = -i/4\ \omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ ed $Y = \gamma^\lambda$ allora

$$e^X Y e^{-X} = \gamma^\lambda - \omega^\lambda{}_\mu \gamma^\mu + \frac{1}{2}\omega^\lambda{}_\mu \omega^\mu{}_\tau \gamma^\tau + ... \tag{168}$$

da cui si risale alla (167). Il risultato é particolarmente evidente per trasformazioni infinitesime.

10 Digressione sulle matrici di Pauli

In questa sezione considereremo solo lo spazio $\mathbb{R}^3$; non faremo quindi distinzione sulla posizione degli indici. Ricordiamo che le matrici di Pauli soddisfano le seguenti relazioni:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{169}$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \tag{170}$$

Queste relazioni definiscono completamente l'algebra delle matrici $M(2, \mathbb{C})$ infatti in virtù di queste relazoni tutti i prodotti $\sigma_i\sigma_j$ possono essere espressi come combinazioni lineari di $\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Realizziamo lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ sotto forma di uno spazio di matrici a tracia nulla

$$(x^1, x^2, x^2) \mapsto x^i \sigma_i \tag{171}$$

Sia $\Lambda \in O(3)$, il gruppo delle matrici ortogonali 3×3 tale che

$$x'^i = \Lambda^i_j x^j \tag{172}$$

e poniamo

$$\sigma'_i = \Lambda_i^j \sigma_j \tag{173}$$

Si vuole dimostrare che

$$[\sigma'_i, \sigma'_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma'_k \tag{174}$$

$$\{\sigma'_i, \sigma'_j\} = 2\delta_{ij} \tag{175}$$

per generiche trasformazioni di $SO(3)$. La relazione (175) vale invero anche per trasformazioni $O(3)$. Cominciamo con il dimostrare la (174). Si osservi che ponendo $\sigma'_i = \Lambda_i^k \sigma_k,\ \sigma'_j = \Lambda_j^{k'} \sigma_{k'}$ ed utilizzando la

$$\sigma_k \sigma_{k'} = \delta_{kk'} + i\epsilon_{kk'\rho}\sigma_\rho \tag{176}$$

che si ottiene semplicemente sommando (169) ed (170), si ottiene

$$[\sigma'_i, \sigma'_j] = 2i\sigma_\rho \epsilon_{kk'\rho} \Lambda_i^k \Lambda_j^{k'} \tag{177}$$

dove è intesa una somma sugli indici ripetuti tridimensionali.

Esercizio. Si dimostri che

$$\epsilon_{kk'\rho} \Lambda_i^k \Lambda_j^{k'} = \epsilon_{ijk} M_k^\rho \tag{178}$$

dove con il simbolo M_k^ρ si intende il *minore* della matrice Λ_j^i ottenuto eliminado da quest'ultima la riga ρ e la colonna k. M_k^ρ qui definito incorpora il segno $(-1)^{\rho+k}$.

Si ricordi che la definizione di determinante di una matrice Λ è

$$\det \Lambda = \sum_\rho \Lambda_k^\rho M_k^\rho \tag{179}$$

dove non è sottointesa alcuna somma sull'indice k che va scelto arbitrariamente. D'altra parte la definizione di matrice ortogonale è

$$1 = \Lambda^T \Lambda \Rightarrow \sum_\rho (\Lambda^T)_\rho^k \Lambda_{k'}^\rho = \delta_k^{k'} \tag{180}$$

o in altri termini

$$\sum_\rho \Lambda_k^\rho \Lambda_k^\rho = 1 \tag{181}$$

Nel caso in cui $\det \Lambda = 1$, (178), (179) e (181) sostituite in (177) danno la (174) ●

Esercizio. Provare la relazione (175).

Esercizio. Diagonalizzare l'Hamiltoniana

$$H = \alpha \frac{2}{\hbar}(S_x + S_z) \tag{182}$$

Questo può essere fatto osservando che $H = \alpha(\sigma_x + \sigma_z)$ e trovando autovalori ed autovettori della matrice in questione. Si trova per esempio

$$\lambda_+ = \sqrt{2}; \quad v_+ = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}(|+\rangle + (\sqrt{2} - 1)|-\rangle) \tag{183}$$

Ma si osservi anche che

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(S_x + S_z) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \frac{\hbar}{2}\sigma \cdot \mathbf{n} \tag{184}$$

dove

$$\mathbf{n} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \tag{185}$$

Per quanto trovato sopra possiamo diagonalizzare $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ lungo la direzione z [8] e trovare gli autovalori $\pm\hbar/2$ con autovettori $|\pm\rangle$. Gli autovettori della $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ si troveranno ruotando gli spinori $|\pm\rangle$ intorno a y di un angolo $\varphi = \pi/4$

$$|+\rangle \to e^{-i\varphi J_2}|+\rangle = e^{-i\varphi\frac{\sigma_2}{2}}|+\rangle = e^{-i\frac{\pi}{8}\sigma_2}|+\rangle \tag{186}$$

Per completare l'esercizio si osservi che

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$$
$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$$

Esercizio. Ruotare un quadrispinore di Dirac intorno ad un asse (prendiamo z) di un angolo pari a 2π.
L'operatore di rotazione in questione è

$$S = e^{\frac{\varphi}{2}\gamma^1\gamma^2} \tag{187}$$

Si osservi che in base di Dirac (e anche in base di Weyl) si ha

$$\gamma^i = \sigma^i \otimes i\tau^2 \tag{188}$$

[8] Si osservi che $\sigma^i n^i = \sigma^i \delta^i_r n^r = \sigma^i((\Lambda^T)^i_j \Lambda^j_r)n^r = \sigma^i \Lambda^j_i \Lambda^j_r n^r = \sigma'^j n'^j$

dove sia σ che τ sono le ordinarie matrici di Pauli. Quindi si può calcolare

$$\gamma^1\gamma^2 = (\sigma^1 \otimes i\tau^2)(\sigma^2 \otimes i\tau^2) = \sigma^1\sigma^2 \otimes i^2(\tau^2)^2 = i\sigma^3 \otimes \mathbb{1} \tag{189}$$

Abbiamo quindi che

$$S = e^{\frac{\varphi}{2}\gamma^1\gamma^2} = \mathbb{1}_4 \cos\frac{\varphi}{2} + \gamma^1\gamma^2 \sin\frac{\varphi}{2} = \begin{pmatrix} e^{i(\varphi/2)\sigma_3} & 0 \\ 0 & e^{i(\varphi/2)\sigma_3} \end{pmatrix} \tag{190}$$

Sotto una rotazione di 2π un quadrispinore di Dirac cambia di segno.

Esercizio. A partire dal seguente spinore di Dirac

$$\begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{per esempio} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{191}$$

se ne calcoli il boost di velocità V nella direzione x ($V = \tanh\psi$). Questo equivale ad applicare allo spinore in questione l'operatore

$$e^{\frac{\psi}{2}\gamma^0\gamma^1} = \mathbb{1}_4 \cosh\frac{\psi}{2} + \gamma^0\gamma^1 \sinh\frac{\psi}{2} \tag{192}$$

Si osservi ora che in base di Dirac

$$\gamma^0\gamma^1 = (\mathbb{1} \otimes \tau^3)(\sigma^1 \otimes i\tau^2) = \sigma^1 \otimes \tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{193}$$

Con questi risultati è immediato di mostrare che

$$e^{\frac{\psi}{2}\gamma^0\gamma^1} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\psi}{2}\varphi^{(\alpha)} \\ \sigma^1 \sinh\frac{\psi}{2}\ \varphi^{(\alpha)} \end{pmatrix} \tag{194}$$

Si osservi adesso che

$$\cosh\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{\cosh\psi + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}/m + 1}{2}} \tag{195}$$

e che

$$\sinh\frac{\psi}{2} = \frac{\sinh\psi}{2\cosh\frac{\psi}{2}} = \frac{k/m}{2\sqrt{\frac{\mathcal{E}/m+1}{2}}} \tag{196}$$

Il nostro risultato finale è quindi

$$\sqrt{\frac{\mathcal{E} + m}{2m}} \begin{pmatrix} \varphi^{(\alpha)} \\ \frac{\sigma^1 k^1}{\mathcal{E}+m}\ \varphi^{(\alpha)} \end{pmatrix} \tag{197}$$

Esercizio. Si osservi che nella base di Weyl si può scrivere

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \tag{198}$$
$$\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) \tag{199}$$
$$\tag{200}$$

ed

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{201}$$

Esercizio. Usando le regole stabilite sopra provare che in base di Dirac

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \mathbb{1} \otimes \tau^1 \tag{202}$$

mentre in base di Weyl la matrice γ_5 è diagonale (ed uguale a $-\gamma_0$ di Dirac)

$$\gamma_5 = -\mathbb{1} \otimes \tau^3 \tag{203}$$

Si oservi che $(1-\gamma_5)$ e $(1+\gamma_5)$ in base di Weyl, proiettano rispettivamente ψ_L e ψ_R quando applicate ad un generico bispinore di Weyl.

Esercizio. Mostrare anche che

$$\gamma_5 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \tag{204}$$

dove $\epsilon^{0123} = +1$.

Vediamo come si trasforma sotto trasformazioni di Lorentz il bilineare

$$\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\psi(x) \tag{205}$$

Sappiamo dalla (167) che

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x)S(\Lambda)^{-1}\gamma_5 S(\Lambda)S(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu\, \bar{\psi}(x)[S(\Lambda)^{-1}\gamma_5 S(\Lambda)]\gamma^\nu\psi(x) \end{aligned} \tag{206}$$

Esercizio. Per ricavare la formula precedente occorre provare che

$$\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger\gamma^0 = S(\Lambda)^{-1} \tag{207}$$

Per far questo sarà utile mostrare che $\gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0 = \sigma^{\mu\nu\dagger}$. Si tenga presente che $e^{ABA^{-1}} = Ae^BA^{-1}$ essendo A, B due matrici.

Concentriamoci dunque su

$$S(\Lambda)^{-1}\gamma_5 S(\Lambda) = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^\mu{}_{\mu'}\Lambda^\nu{}_{\nu'}\Lambda^\rho{}_{\rho'}\Lambda^\sigma{}_{\sigma'}\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\gamma^{\rho'}\gamma^{\sigma'} \tag{208}$$

Si osservi dunque che a causa della presenza del tensore completamente antisimmetrico, deve essere $\mu' \neq \nu' \neq \rho' \neq \sigma'$. La sequenza 01234 può essere assegnata in $4!$ modi diversi agli indici $\mu'\nu'\rho'\sigma'$ mentre

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{1}\Lambda^{\rho}{}_{2}\Lambda^{\sigma}{}_{3} = \det\Lambda \tag{209}$$

Risulta pertanto che

$$\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^{\mu}\psi(x) \to \det(\Lambda)\ \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^{\nu}\psi(x) \tag{210}$$

L'oiperazione di parità ha il determinante negativo della corrispondente Λ.

11 Operatore di Pauli-Lubanski

Abbiamo visto che un quadrispinore di Dirac si trasforma sotto una generica trasformazione infinitesima (rotazione o boost) come

$$\psi'(x') = \left(\mathbb{1} - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)\psi(x) \tag{211}$$

o in altri termini

$$\psi'(x) = \left(\mathbb{1} - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)\psi(\Lambda^{-1}x) \tag{212}$$

Si osservi che per una trasformazione infinitesima si ha

$$\psi(\Lambda^{-1}x) = \psi(x^{\rho} - \omega^{\rho}{}_{\nu}x^{\nu}) = \psi - \omega^{\rho}{}_{\nu}x^{\nu}\partial_{\rho}\psi \tag{213}$$

e quindi

$$\psi'(x) = \left(\mathbb{1} - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + x_{\mu}\omega^{\mu\nu}\partial_{\nu}\right)\psi(x) = \left(\mathbb{1} - \frac{i}{2}J_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)\psi(x) \tag{214}$$

dove

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu} + i(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu}) \tag{215}$$

Il tensore J rappresenta un momento angolare totale (spin+parte orbitale). Si definisca

$$W_{\mu} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^{\sigma} \tag{216}$$

dove P è l'operatore energia-momento (il generatore delle traslazioni infinitesimali; J invece genera le trasformazioni di Lorentz infinitesimali). W è noto come operatore di Pauli-Lubanski.

Esercizio. Si dimostri che poichè $P^\sigma = -i\partial^\sigma$ il momento angolare orbitale non contribuisce a W_μ. Pertanto

$$W_\mu = -\frac{1}{4i}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma^{\nu\rho}\partial^\sigma \tag{217}$$

Si vuole ora calcolare il quadrato dell'operatore W. Questo è dato da

$$W^2 = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu'\rho'\sigma'}(\sigma^{\nu\rho}\partial^\sigma\sigma_{\nu'\rho'}\partial_{\sigma'}) \tag{218}$$

Secondo quanto visto in (82) abbiamo che

$$\begin{aligned}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu'\rho'\sigma'} &= -(\delta^{\nu'}_\nu\delta^{\rho'}_\rho\delta^{\sigma'}_\sigma - \delta^{\nu'}_\nu\delta^{\rho'}_\sigma\delta^{\sigma'}_\rho - \delta^{\nu'}_\rho\delta^{\rho'}_\nu\delta^{\sigma'}_\sigma \\ &\quad +\delta^{\nu'}_\rho\delta^{\rho'}_\sigma\delta^{\sigma'}_\nu + \delta^{\nu'}_\sigma\delta^{\rho'}_\nu\delta^{\sigma'}_\rho - \delta^{\nu'}_\sigma\delta^{\rho'}_\rho\delta^{\sigma'}_\nu)\end{aligned} \tag{219}$$

Esercizio. Provare che

$$W^2 = -\frac{1}{16}(2\sigma^2\partial^2 - 4\sigma^{\nu\rho}\partial_\rho\sigma_{\nu\sigma}\partial^\sigma) \tag{220}$$

Per semplificare ulteriormente l'espressione precedete si considerino le seguenti proprietà (identità di Chisolm)

$$\gamma^\mu\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_n}\gamma_\mu = -2\gamma^{\mu_n}\gamma^{\mu_{n-1}}...\gamma^{\mu_1} \quad \text{(n dispari)} \tag{221}$$

$$\begin{aligned}\gamma^\mu\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_n}\gamma_\mu &= 2\gamma^{\mu_n}(\gamma^{\mu_1}...\gamma^{\mu_{n-1}}) \\ &+ 2(\gamma^{\mu_{n-1}}...\gamma^{\mu_1})\gamma^{\mu_n} \quad \text{(n pari)}\end{aligned} \tag{222}$$

Esercizio. Partendo dalle precedenti, si dimostrino i seguenti casi particolari

$$\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma_\mu = -2\gamma^\lambda \tag{223}$$

$$\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma_\mu = 4g^{\lambda\sigma}\mathbb{1} \tag{224}$$

dove $\mathbb{1}$ è l'identità 4×4 nello spazio spinoriale. Si ricordi anche che

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4\times\mathbb{1} \tag{225}$$

Dimostriamo esplicitamente la (223). Partiamo dalla rappresentazione di Weyl delle matrici γ sintetizzata nella formula (201). Si trova

$$\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu\bar{\sigma}^\lambda\sigma_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu\sigma^\lambda\bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{226}$$

ma si oservi che

$$\sigma^\mu \bar{\sigma}^\lambda \sigma_\mu = (\mathbb{1}, -\sigma^j) + (\sigma^i \sigma_i, -\sigma^i \sigma^j \sigma_i) \tag{227}$$

d'altra parte

$$\sigma^i \sigma_i = -3 \times \mathbb{1} \tag{228}$$

$$-\sigma^i \sigma^j \sigma_i = -3\sigma^j + 2\sigma^j = -\sigma^j \tag{229}$$

cioè

$$\sigma^\mu \bar{\sigma}^\lambda \sigma_\mu = (-2 \times \mathbb{1}, -2\sigma^j) = -2\sigma^\lambda \tag{230}$$

Esercizio. Provare che

$$\bar{\sigma}^\mu \sigma^\lambda \bar{\sigma}^\mu = -2\bar{\sigma}^\lambda \tag{231}$$

Abbiamo pertanto dimostrato che

$$\gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma_\mu = -2\gamma^\lambda \tag{232}$$

Esercizio. Sapendo che [9]

$$\mathrm{Tr}\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = 4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu} \tag{236}$$

a partire dalla

$$\gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma_\mu = A\gamma^\lambda \tag{237}$$

trovare che $A = -2$. A questo punto possiamo tornare alla (220).

Esercizio. Provare che

$$\sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = 12 \tag{238}$$

Esercizio. Provare che

$$\sigma^{\nu\rho} \sigma_{\nu\sigma} = g^\rho_\sigma + 2\gamma^\rho \gamma_\sigma \tag{239}$$

pertanto

$$\sigma^{\nu\rho} \sigma_{\nu\sigma} \partial_\rho \partial^\sigma = \partial^2 + 2\partial^2 \tag{240}$$

[9] Molto utili sono anche le proprietà di traccia delle matrici di Pauli. Si osservi che

$$\mathrm{Tr}\ \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l = 2(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{233}$$

$$\mathrm{Tr}\ \sigma_i \sigma_k \sigma_l = 2i\epsilon_{ikl} \tag{234}$$

$$\mathrm{Tr}\ \sigma_i \sigma_k = 2\delta_{ik} \tag{235}$$

e di qui troviamo

$$W^2 = -\frac{1}{16}12\partial^2 = -\frac{3}{4}\partial^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\partial^2 = J(J+1)M^2 \tag{241}$$

che è il risultato che ci potevamo attendere sulla base della definizione di W data nella (216).

Consideriamo ora un vettore space-like normalizzato n ortogonale all'impulso k di un elettrone: $n^2 = -1$ e $n \cdot k = 0$. Si osservi che

$$n \cdot W = -\frac{1}{4i}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} n^\mu k^\nu \sigma^{\rho\sigma} \tag{242}$$

Utilizzando una proprietà che si dimostrerà per esercizio nella sezione successiva

$$\gamma_5 \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma} \tag{243}$$

vediamo che

$$n \cdot W = \frac{i}{2}\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} n^\mu k^\nu = -\frac{1}{2}\gamma_5 \not{n}\not{k} \tag{244}$$

dove si è usato che $g_{\mu\nu} n^\mu k^\nu = 0$.

Consideriamo adesso il sistema di riferimento a riposo in cui $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$ ed $n^\mu = (0, \mathbf{n})$. Si vede subito che

$$\frac{\vec{W}}{m} = \frac{1}{2}\gamma_5 \gamma^0 \vec{\gamma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \tag{245}$$

Se poi si sceglie $n_{(3)} = (0, 0, 0, 1)$ abbiamo che

$$-\frac{W \cdot n_{(3)}}{m} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \tag{246}$$

Questo é chiaramente l'operatore che estrae gli autovalori di spin delle soluzioni *a riposo* della equazione di Dirac libera (per una discussione sulle soluzioni della equazione di Dirac si veda più avanti in queste note o nelle dispense sull'argomento).

In generale gli spinori $u^{(\alpha)}(k)$ e $v^{(\alpha)}(k)$, che si ottengono per boost di Lorentz di quelli a riposo, saranno dunque autostati di $-W \cdot n/m$ dove n è il quadrivettore trasformato di Lorentz di $n_{(3)}$. Pertanto concludiamo che

$$-\frac{W \cdot n}{m} u^{(\alpha)}(k) = \frac{1}{2}\gamma_5 \not{n} u^{(\alpha)}(k) = \pm\frac{1}{2} u^{(\alpha)}(k) \tag{247}$$

dove il segno $+$ vale per $\alpha = 1$ e $-$ per $\alpha = 2$ (si pensi alle soluzioni a riposo!). Per $\alpha = 1$ per esempio abbiamo che

$$\frac{1}{2}u^{(1)}(k) + \frac{1}{2}\gamma_5 \not{n} u^{(1)}(k) = u^{(1)}(k) \tag{248}$$

abbiamo quindi stabilito che

$$\frac{\mathbb{1} + \gamma_5 \not{n}}{2} = P(n) \tag{249}$$

proietta $u^{(1)}$ in se stesso. Lo stesso operatore annichila $u^{(2)}(k)$: $P(n)u^{(2)} = 0$.

Esercizio. Si osservi che per le soluzioni ad energia negativa si ha

$$-\frac{W \cdot n}{m} v^{(\alpha)}(k) = -\frac{1}{2}\gamma_5 \not{n} v^{(\alpha)}(k) = \pm\frac{1}{2}v^{(\alpha)}(k) \tag{250}$$

in altri termini si discuta is segno meno a destra della prima egualianza.

In base alla equazione precedente si capisce che $P(n)$ proietta in se stesso anche $v^{(2)}$ mentre annichila $v^{(1)}$.

Quindi $P(n)$ seleziona le soluzioni che *nel sistema di riposo* hanno spin-up se ad energia positiva e spin-down se a energia negativa.

Si ricordi anche che

$$\sum_{\alpha=1,2} u^{(\alpha)}(p)\bar{u}^{(\alpha)}(p) = (\not{p} + m) \tag{251}$$

mentre

$$\sum_{\alpha=1,2} v^{(\alpha)}(p)\bar{v}^{(\alpha)}(p) = (\not{p} - m) \tag{252}$$

Esercizio. Tenendo presente che

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p)u^{(\beta)}(p) = 2m\ \delta^{\alpha\beta} \tag{253}$$

$$\bar{v}^{(\alpha)}(p)v^{(\beta)}(p) = -2m\ \delta^{\alpha\beta} \tag{254}$$

$$\tag{255}$$

(gli altri prodotti sono zero) si dimostri che dunque per una soluzione arbitraria ψ polarizzata lungo n si può scrivere

$$\psi = \frac{\epsilon\not{p} + m}{2m}\frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2}\psi \tag{256}$$

sempre con $p^0 > 0$ dove ϵ è il segno della energia. Si osservi che il proiettore $P(n) = \frac{1+\gamma_5\not{n}}{2}$ proietta sugli spin $\pm 1/2$ lungo n in accordo al segno della energia: $u^{(1)}$ e $v^{(2)}$ sono proiettate in $1/2$ mentre $u^{(2)}$ e $v^{(1)}$ in $-1/2$.

12 Altre proprietà delle matrci γ. Coniugazione di carica e parità

Esercizio. Provare che

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu} \tag{257}$$

Esercizio. Provare che

$$[\sigma^{\mu\nu}, \gamma_5] = 0 \tag{258}$$

[si ricordi che $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$]
Esercizio. Provare che

$$\gamma_5 \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma} \tag{259}$$

[Si usi la (238), la (257) ed il fatto che $\gamma_5 = -i/24\ \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$]
Esercizio. Provare che

$$\gamma_5 \gamma^0 \gamma^i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sigma^{jk} \tag{260}$$

[Questa dimostrazione si può effettuare agevolmente usando le matrici di Weyl. Infatti $\gamma_5\gamma^0\gamma^i$ risulterebbe uguale a

$$\gamma_5 \gamma^0 \gamma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \tag{261}$$

d'altra parte

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sigma^{jk} = \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\gamma^j\gamma^k = -\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^j\sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^j\sigma^k \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{jkr}\begin{pmatrix} \sigma^r & 0 \\ 0 & \sigma^r \end{pmatrix}$$

A questo punto si ricordi che valgono le seguenti

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \tag{262}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{i'jk} = 2\delta_{ii'} \tag{263}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{i'j'k} = \delta_{ii'}\delta_{jj'} - \delta_{ij'}\delta_{ji'} \tag{264}$$

La seconda di queste e le proprietà del tensore completamente antisimmetrico permetono di dimostrare l'asserto]
Esercizio. Provare che

$$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger} \tag{265}$$

[Si osservi che in base di Weyl

$$\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}^\dagger \tag{266}$$

poiché le matrici di Pauli sono hermitiane]
Esercizio. Provare che

$$\gamma^0\gamma_5\gamma^0 = -\gamma_5^\dagger = -\gamma_5 \tag{267}$$

Esercizio. Provare che

$$\gamma^0\gamma_5\gamma^\mu\gamma^0 = (\gamma_5\gamma^\mu)^\dagger \tag{268}$$

Esercizio. Provare che

$$\gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0 = (\sigma^{\mu\nu})^\dagger \tag{269}$$

[si usi il fatto che $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$ ed $i^\dagger = -i$]
Esercizio. Si introduca la seguente matrice, nota come coniugazione di carica

$$C = i\gamma^2\gamma^0 \tag{270}$$

e la si scriva in base di Weyl come

$$C = i\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix} = -i\sigma^2 \otimes \gamma_5 \tag{271}$$

provare che

$$C^2 = -\mathbb{1} \tag{272}$$
$$CC^\dagger = C^\dagger C = \mathbb{1} \quad (C^\dagger = C^{-1}) \tag{273}$$
$$C^\dagger = -C \tag{274}$$
$$C^T = -C \tag{275}$$

e quindi provare che

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T \tag{276}$$

[per quanto detto si osservi che

$$C\gamma^\mu C^{-1} = C\gamma^\mu C^\dagger = -C\gamma^\mu C = -\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2\sigma^\mu\sigma^2 \\ \sigma^2\bar{\sigma}^\mu\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{277}$$

Poiché vale la relazione

$$\sigma^2\sigma^i\sigma^2 = -\sigma^{i*} \tag{278}$$

allora si trova che

$$\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2 = \bar{\sigma}^{\mu*} \tag{279}$$
$$\sigma^2\bar{\sigma}^\mu\sigma^2 = \sigma^{\mu*} \tag{280}$$

Pertanto

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2\sigma^\mu\sigma^2 \\ \sigma^2\bar{\sigma}^\mu\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}^{\dagger *} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}^T \tag{281}$$

come si voleva dimostrare]
Esercizio. Provare inoltre che

$$C\gamma_5 C^{-1} = \gamma_5^T \tag{282}$$
$$C\gamma_5\gamma^\mu C^{-1} = (\gamma_5\gamma^\mu)^T \tag{283}$$
$$C\sigma^{\mu\nu}C^{-1} = -(\sigma^{\mu\nu})^T \tag{284}$$

Vogliamo ora commentare su come si determinino i numeri quantici di spin J, parità P e coniugazione di carica C (si usa la notazione J^{PC}) per alcune correnti che si incontrano frequentemente in letteratura (si veda la tavola riportata sotto). Prendiamo ad esempio $\bar{\psi}\gamma_5\psi$.

Tab. 2: Numeri quantici J^{PC} associati a bilineari ricorrenti

$\bar{\psi}\gamma_5\psi$	$(0,0)$	0^{-+}
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$0^{+-}, 1^{--}$
$\bar{\psi}\psi$	$(0,0)$	0^{++}
$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$0^{-+}, 1^{++}$
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	$(1,0)\oplus(0,1)$	$1^{--}, 1^{+-}$

Sappiamo che sotto trasformazioni di Lorentz

$$\psi \to S(\Lambda)\psi \tag{285}$$
$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}S(\Lambda)^{-1} \tag{286}$$

dove sappiamo che $S(\Lambda) = \exp(-i/4\ \omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})$. Poichè

$$S(\Lambda)^{-1}\gamma_5 S(\Lambda) = \det \Lambda \tag{287}$$

Per trasformazioni Λ del gruppo di Lorentz proprio si ha che $\det \Lambda = 1$. Concludiamo dunque che $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ si comporta come uno scalare sotto trasformazioni di Lorentz. Per una trasformazione di parità si ha che $\Lambda = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Pertanto $\det \lambda = -1$ e riconosciamo che $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ è in realtà una quantita psudoscalare.

Si ricordi che, come abbiamo osservato sudiando le matrici γ in base di Weyl, la matrice γ^0 scambia le componenti di Weyl left con quelle right - che è quello che succederebbe effetuando una operazione di parità sullo spazio. Possiamo pertanto studiare le proprietà di trasformazione sotto parità di $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ effettuando la trasformazione

$$\psi \to \gamma^0\psi \tag{288}$$

trovando

$$\bar{\psi}\gamma_5\psi \to \overline{(\gamma^0\psi)}\gamma_5\gamma^0\psi = \bar{\psi}\gamma^0\gamma_5\gamma^0\psi = -\bar{\psi}\gamma_5\psi \tag{289}$$

a conferma che $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ ha i numeri quantici di uno pseudoscalare: 0^-.

Cosa si può dire sulla coniugazione di carica? Consideriamo l'operatore coniugato di carica che si ottiene come

$$\bar{\psi}\gamma_5\psi \to \bar{\psi}_c\gamma_5\psi_c \tag{290}$$

dove introduciamo la definizione di spinore coniugato di carica nel modo seguente:

$$\psi_c = C\bar{\psi}^T \tag{291}$$

(Si vedrà che questo descrive un antielettrone se ψ è il quadrispinore di un elettrone). Pertanto il 'barra del coniugato di carica' (N.B. il coniugato di carica del barra è uno spinore colonna!)

$$\bar{\psi}_c = \overline{C\bar{\psi}^T} = \bar{\psi}^* C^\dagger\gamma^0 = \psi^T\gamma^0 C^\dagger\gamma^0 \tag{292}$$

ma per definizione di C

$$\gamma^0 C^\dagger\gamma^0 = -\gamma^0 C\gamma^0 = -i\gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^0 = -i\gamma^0\gamma^2 = i\gamma^2\gamma^0 = C \tag{293}$$

da cui concludiamo che

$$\bar{\psi}_c = \psi^T C \tag{294}$$

Di qui deduciamo che

$$\bar{\psi}_c\gamma_5\psi_c = \psi^T C\gamma_5 C\bar{\psi}^T = -\psi^T C\gamma_5 C^{-1}\bar{\psi}^T = -\psi^T\gamma_5^T\bar{\psi}^T = (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^T \quad (295)$$

ovvero

$$\bar{\psi}_c\gamma_5\psi_c = \bar{\psi}\gamma_5\psi \quad (296)$$

Possiamo concludere dunque che i numeri quantici J^{PC} dell'operatore $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ siano 0^{-+} come riportato in tabella. L'ultima egualianza nella equazione (295) contiene una inversione di segno dovuta allo scambio di due campi fermionici.

Si possono costruire anche bilineari come

$$\bar{\psi}_c\psi \quad (297)$$

che nella linguaggio della teoria quantistica dei campi si interpreta come un operatore il cui valore di aspettazione fra lo stato di vuoto e quello di una coppia di elettroni e' non nullo.

Studiamone le proprietà sotto trasformazioni di Lorentz proprie.

$$\bar{\psi}_c\psi = \psi^T C\psi \to \psi^T S(\Lambda)^T C S(\Lambda)\psi \quad (298)$$

Esercizio. Si mostri che

$$S(\Lambda)^T = CS(\Lambda)^{-1}C^{-1} \quad (299)$$

facendo uso della proprietà (284). Sulla base del precedente risultato vediamo che

$$\bar{\psi}_c\psi \quad (300)$$

si comporta dunque come uno scalare sotto trasformazioni di Lorentz poichè

$$\bar{\psi}_c\psi \to \bar{\psi}_c\psi \quad (301)$$

Per quel che riguarda la parità abbiamo che

$$(\gamma^0\psi)^T C\gamma^0\psi = \psi^T\gamma^0 C\gamma^0\psi = \psi^T\gamma^0 i\gamma^2\gamma^0\gamma^0\psi = -\psi^T C\psi \quad (302)$$

Trattasi dunque di uno stato 0^-. Si osservi che invece $\bar{\psi}\psi$ ha numeri quantici J^P 0^+. Veniamo alla coniugazione di carica. Si osservi che:

$$\psi_c = C\bar{\psi}^T = i\gamma^2\gamma^0(\psi^\dagger\gamma^0)^T = i\gamma^2\psi^* \quad (303)$$

da cui

$$(\psi_c)_c = (i\gamma^2\psi^*)_c = i\gamma^2(i\gamma^2\psi^*)^* = i\gamma^2(i\gamma^2\psi) = \psi \quad (304)$$

come non era difficile intuire (l'antiparticella dell'antiparticlella è la particella). Dunque sotto coniugazione di carica abbiamo

$$\bar{\psi}_c\psi \to \bar{\psi}\psi_c = \bar{\psi}(C\psi) = \bar{\psi}C\bar{\psi}^T = \bar{\psi}_c\bar{\psi}^T \tag{305}$$

Non è sorprendente che l'operazione di coniugazione di carica su $\bar{\psi}_c\psi$ non individui un autovalore preciso della coniugazione di carica. Questo lo si capisce bene ricorrendo ancora una volta al linguaggio della teoria quantistica dei campi. Il sistema di due particelle creato da $\bar{\psi}_c\psi$, a differenza del sistema particella-antiparticella $\bar{\psi}\psi$, risulta infatti essere carico. Due elettroni vanno in due positroni. Un sistema elettrone-positrone va ancora in elettrone-positrone ed è dunque autostato di C con un autovalore ben definito $C = \pm$.

Consideriamo ora il caso del bilineare $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

Esercizio. Si dimostri che sotto trasformazioni di Lorentz

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \to \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu \tag{306}$$

Questo vuol dire che il bilineare in questione si trasforma come un quadrivettore $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Le componenti $\bar{\psi}\gamma^0\psi$ e $\bar{\psi}\gamma^i\psi$ non vengono mescolate fra loro da rotazioni nel 3-spazio. In particolare la prima si comporta come uno scalare mentre la seconda come un trivettore. I due autova lori $j++, j_-$ di $SU(2) \times SU(2)$, in questo caso entrambi pari a $\frac{1}{2}$ si compongono a dare $J = 0, 1$, ovvero le componenti di scalare e vettore menzionate sopra. Studiamo la parità di queste due componenti.

$$\bar{\psi}\gamma^0\psi \to \bar{\psi}\gamma^0\gamma^0\gamma^0\psi = \bar{\psi}\gamma^0\psi \tag{307}$$

Quindi $J^P = 0^+$ (scalare). Al contrario

$$\bar{\psi}\gamma^i\psi \to \bar{\psi}\gamma^0\gamma^i\gamma^0\psi = -\bar{\psi}\gamma^i\psi \tag{308}$$

quindi $J^P = 1^-$.

Trattandosi di bilineari $\bar{\psi}\Gamma\psi$ ha senso studiarne le proprietà di coniugazione di carica (vedi discussione precedente). In particolare

$$\bar{\psi}\gamma^0\psi \to \bar{\psi}_c\gamma^0\psi_c = \psi^T C\gamma^0 C\bar{\psi}^T = -\psi^T C\gamma^0 C^{-1}\bar{\psi}^T = \psi^T\gamma^{0T}\bar{\psi}^T \tag{309}$$

dove nell'ultima equazione abbiamo utilizzato la formula (277). Infine, ricordando il segno meno che deriva dallo scambiare due fermioni, abbiamo

$$\psi^T\gamma^{0T}\bar{\psi}^T = -(\bar{\psi}\gamma^0\psi)^T = -\bar{\psi}\gamma^0\psi \tag{310}$$

Concludiamo dunque che i numeri quantici J^{PC} relativi a $\bar{\psi}\gamma^0\psi$ sono $J^{PC} = 0^{+-}$.

Esercizio. Dimostrare che la componente $\bar{\psi}\gamma^i\psi$ ha numeri quantici 1^{--}. [Il caso della parità é stato già esaminato].

Per quel che riguarda il tensore $\sigma^{\mu\nu}$ si osservi che il fatto che esso trasporti due indici di Lorentz μ e ν comporta che esso devva essere trovato nella scomposizione del prodotto:

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\otimes\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \tag{311}$$

In considerazione del fatto che

$$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2} = 0\oplus 1 \tag{312}$$

che ha una espressione più familiare nella notazione $(2j_+ + 1, 2j_- + 1)$ come

$$2\otimes 2 = 1_A \oplus 3_S \tag{313}$$

ovvero due spin $1/2$, nella rappresentazione fondamentale 2 di $SU(2)$, si possono comporre in singoletto 1 (stato antisimmetrico rispetto allo scambio degli spin) o in tripletto (simmetrico) 3, abbiamo che

$$(2,2)\otimes(2,2) = (1_A\oplus 3_S, 1_A\oplus 3_S) = (1,1)_S\oplus(1,3)_A\oplus(3,1)_A\oplus(3,3)_S \tag{314}$$

I due termini antisimmetrici corrispondono ai due vettori (hanno dimensione $(2j_+ + 1)(2j_- + 1) = 3\cdot 1$) σ^{0j} e σ^{ij}. Tornando alla notazione (j_+, j_-) possiamo scrivere $(1,0)\oplus(0,1)$ come riportato in tabella. Entambe le componenti $\bar{\psi}\sigma^{0i}\psi$ e $\bar{\psi}\sigma^{ij}\psi$ sono dunque caratterizzate da $J = j_+ + j_- = 1$. Per quanto riuarda la parità é semplice osservare che

$$\gamma^0\sigma^{0i}\gamma^0 = -\sigma^{0i} \tag{315}$$

mentre

$$\gamma^0\sigma^{ij}\gamma^0 = \sigma^{ij} \tag{316}$$

quindi le due componenti avranno rispettivamente $J^P = 1^-$ e $J^P = 1^+$.

Esercizio. Si determinino gli autovalori della coniugazione di carica di $\bar{\psi}\sigma^{0i}\psi$ e $\bar{\psi}\sigma^{ij}\psi$. Si confronti il risultato ottenuto con quanto riportato nella precedente tabella.

Si ricordi ora l'equazione (256) che vale per una soluzione arbitraria ψ polarizzata lungo n

$$\psi = \frac{\epsilon\not{p} + m}{2m}\frac{1+\gamma_5\not{n}}{2}\psi \tag{317}$$

Si ricordi che il proiettore $P(n) = \frac{1+\gamma_5 \not{n}}{2}$ proietta sugli spin $\pm 1/2$ lungo n in accordo al segno della energia: $u^{(1)}$ e $v^{(2)}$ sono proiettate in $1/2$ mentre $u^{(2)}$ e $v^{(1)}$ in $-1/2$. Cosa succede dunque sotto coniugazione di carica?

Usando la base di Weyl si dimostra facilmente che

$$\gamma^2 \gamma^\mu \gamma^2 = \gamma^{\mu *} \tag{318}$$

dove si sono usate le (279) e (280) nonchè la definizione (201)

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{319}$$

Esercizio. Usando la (318) si dimostri che

$$\psi_c = \frac{-\not{\epsilon} + m}{2m} \frac{1+\gamma_5 \not{n}}{2} \psi_c \tag{320}$$

Dunque la coniugazione di carica *inverte il segno dell'energia e quindi dello spin*. Pertanto la coniugazione di carica fa passare dalle u alle v con fasi arbitrarie

$$u(p,n) \sim v_c(p,n) \tag{321}$$

$$v(p,n) \sim u_c(p,n) \tag{322}$$

Per completare quanto detto sulla coniugazione di carica si supponga di voler cercare una trasformazione $\psi \to \psi_c$ (vedremo che ψ_c è quella definita sopra) tale che

$$(i\not{\partial} - e\not{A} - m)\psi = 0 \tag{323}$$

$$(i\not{\partial} + e\not{A} - m)\psi_c = 0 \tag{324}$$

si faccia attenzione al segno. Facciamo ora il barra della prima equazione ottendo facilmente

$$\bar{\psi}(-i\not{\partial} - e\not{A} - m) = 0 \tag{325}$$

Trasponiamo quest'ultima

$$(\gamma^{\mu T}(-i\partial_\mu - eA_\mu) - m)\bar{\psi}^T = 0 \tag{326}$$

A questo punto applicando C a sinistra di quest'ultima equazione e inserendo $C^{-1}C$ a sinistra di $\bar{\psi}^T$ si ottiene esattamente la

$$(i\not{\partial} + e\not{A} - m)\psi_c = 0 \tag{327}$$

Sulla base di quanto detto la connessione elettrone-positrone dovrebbe a questo punto essere chiara.

13 Elicità e chiralità

Esercizio. Si consideri l'equazione di Dirac per una paticella priva di massa

$$\not{p}\psi = 0 \tag{328}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu p_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0 \tag{329}$$

Ora

$$\sigma^\mu p_\mu = \mathcal{E}\mathbb{1} - \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \tag{330}$$

E quindi l'elicità di ψ_R è positiva ($\mathcal{E} = +|\vec{p}|$)

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}\psi_R = \psi_R \tag{331}$$

Analogamente si mostri che

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}\psi_L = -\psi_L \tag{332}$$

In altri termini si ottiene che

$$h\psi \equiv \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} & 0 \\ 0 & \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \tag{333}$$

che è dunque equivalente a

$$\gamma_5 \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \tag{334}$$

Questo vuol dire che elicità e chiralità di una particella (essendo la chiralità l'autovalore di γ_5) concidono. Per le antiparticelle vale la stessa cosa? Vedremo che chiralità ed elicità sono opposte per le antiparticelle. Prima di far questo si consideri il seguente

Esercizio. La matrice γ_0 in base di Weyl scambia ψ_L con ψ_R, quindi effettua una operazione di parità. Cosa si può dire circa la parità relativa di una particella e della sua antiparticella?

Torniamo a chiralità ed elicità e scriviamo la seguente equazione

$$\gamma_5\psi = h\psi \tag{335}$$

valida per una particella ψ. Si consideri il croce di ambo i membri

$$\psi^\dagger \gamma_5 = \psi^\dagger h \tag{336}$$

per hermitianicità sia di γ_5 che di h. Si moltiplichino a destra ambo i membri per γ^0 e si usi (267) ottenendo

$$\bar{\psi}(-\gamma_5) = \bar{\psi} h \tag{337}$$

Si trasponga l'equazione

$$-\gamma_5 \bar{\psi}^T = h^T \bar{\psi}^T \tag{338}$$

e si introducano gli operatori di coniugazione di carica. Considerando che $C\bar{\psi}^T = \psi^c$ si ottiene

$$-C\gamma_5 C^{-1}\psi^c = C h^T C^{-1} \psi^c \tag{339}$$

Usando infine (282) e (278)

$$\gamma_5 \psi^c = h \psi^c \tag{340}$$

dove ψ^c è lo spinore della particella coniugata di carica (antiparticella). Ma per antiparticelle h ha il segno opposto a quello dato precedentemente ($\mathcal{E} = -|\vec{p}|$) quindi

$$\gamma_5 \psi^c = -h \psi^c \tag{341}$$

Esercizio. Si osservi che l'equazione di Dirac nello spazio degli impulsi fa si che per una particella senza massa che si muova lungo z si abbia

$$\gamma^0 \psi = \gamma^3 \psi \tag{342}$$

D'altra parte l'operatore di rotazione infinitesimale attorno all'asse z è [10]

$$J_3 \propto i\gamma^1\gamma^2 \tag{344}$$

e ci aspettiamo che uno spinore che descriva una particella con spin lungo z positivo sia autostato di J_3 [11]

$$J_3 \psi = \psi \tag{345}$$

[10] Si osservi che

$$i\gamma^1\gamma^2 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \tag{343}$$

[11] Invariante sotto rotazioni intorno all'asse z

Ma si osservi che a causa di (342) si ha

$$i\gamma^1\gamma^2\psi = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi \tag{346}$$

ovvero

$$J_3\psi = \gamma_5\psi \tag{347}$$

che dinuovo vuol dire che elicità e chiralità di una particella sono uguali [12]

Esercizio. Partendo dalla equazione precedente si ripetano i passaggi da (336) a (340). [n.b. $\gamma^{2T} = \gamma^2$ e $\gamma^{1T} = -\gamma^1$]

14 Indici spinoriali

Nella Eq. (152) abbiamo scritto l'operatore di trasformazione sotto boost di Lorentz di un quadrispinore di Dirac. Vogliamo ora guardare con maggiore dettaglio alle trasformazioni di Lorentz delle sue componenti di Weyl.

Ricordiamo che fin ora abbiamo individuato i seguenti operatori di trasformazione per vettori e quadrispinori

$$\Lambda(\omega) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{k\rho}M^{k\rho}} \tag{348}$$

$$S(\Lambda(\omega)) = e^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} \tag{349}$$

Come si trasforma sotto trasformazioni di Lorentz il tensore $M^{k\rho}$ definito nella Eq. (120)? Ricordiamo che

$$(M^{k\rho})^{\mu}{}_{\nu} = i(g^{k\mu}g^{\rho}{}_{\nu} - g^{\rho\mu}g^{k}{}_{\nu}) \tag{350}$$

Sulla base di quanto detto sulle trasformazioni di Lorentz di tensori sappiamo che

$$M^{k\rho} \to \Lambda^{k}{}_{\mu}\Lambda^{\rho}{}_{\nu}M^{\mu\nu} \tag{351}$$

ovvero ogni indice vettoriale subisce la sua trasformazione di Lorentz. Questa stessa trasformazione verrebbe implementata introducendo un operatore unitario $U(\Lambda)$ che soddisfi la proprietà

$$U(\Lambda'\Lambda) = U(\Lambda')U(\Lambda) \tag{352}$$

e che agisca su $M^{k\rho}$ nel seguente modo

$$M^{k\rho} \to U(\Lambda)^{-1}M^{k\rho}U(\Lambda) \tag{353}$$

[12] Nel caso avessimo voluto discutere di antiparticelle, il segno dell'energia da tenere in conto in (342), porterebbe un segno meno relativo fra gli autovalori di γ_5 e J_3.

Difatti definendo

$$U(\mathbb{1}+\delta\omega)=\mathbb{1}+\frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \tag{354}$$

si ottiene che, sotto trasformazioni di Lorentz, $M^{k\rho}$ si trasforma come

$$M^{k\rho}\to U(\Lambda)^{-1}M^{k\rho}U(\Lambda)=\Lambda^{k}{}_{\mu}\Lambda^{\rho}{}_{\nu}M^{\mu\nu} \tag{355}$$

Per dimostrare questo risultato si osservi che

$$U(\Lambda)^{-1}U(\Lambda')U(\Lambda)=U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda) \tag{356}$$

e si ponga

$$\Lambda'=\mathbb{1}+\delta\omega \tag{357}$$

da cui

$$\begin{aligned}&U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda)=U(\Lambda^{-1}(\mathbb{1}+\delta\omega)\Lambda)=U(\mathbb{1}+\Lambda^{-1}\delta\omega\Lambda)\\&=\mathbb{1}+\frac{i}{2}(\Lambda^{-1}\delta\omega\Lambda)_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}\end{aligned} \tag{358}$$

A questo punto si consideri

$$(\Lambda^{-1}\delta\omega\Lambda)_{\rho\sigma}=(\Lambda^{-1})_{\rho}{}^{\mu}\delta\omega_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} \tag{359}$$

Ricordando che dall'invarianza del prodotto scalare x^2 al cambiare del sistema di riferimento segue che

$$g_{\mu\nu}=g_{\rho\sigma}\Lambda^{\rho}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu} \tag{360}$$

e che alzando l'indice μ nell'equazione precedente si ha

$$\delta^{\mu}{}_{\nu}=\Lambda_{\sigma}{}^{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu} \tag{361}$$

da cui evidentemente

$$\Lambda_{\sigma}{}^{\mu}=(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\sigma} \tag{362}$$

Inserendo quest'ultima relazione in (359) abbiamo

$$(\Lambda^{-1}\delta\omega\Lambda)_{\rho\sigma}=\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\delta\omega_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} \tag{363}$$

da cui si ricava facilmente l'asserto (355) ●

Si ricordi ora la rappresentazione di Heisenberg di una funzione d'onda in meccanica quantistica

$$e^{iHt/\hbar}\psi(\mathbf{x},0)e^{-iHt/\hbar}=\psi(\mathbf{x},t) \tag{364}$$

Una generalizzazione relativistica di questa relazione sarebbe (ponendo il quanto di azione in unità naturali)

$$e^{iP^\mu x_\mu}\psi(0)e^{-iP^\mu x_\mu} = \psi(x) \tag{365}$$

dove P^μ è il quadrimomento. Possiamo dunque definire l'operatore di traslazione spaziotemporale

$$T(a) = e^{iP^\mu a_\mu} \tag{366}$$

da cui

$$T(a)^{-1}\psi(x)T(a) = \psi(x-a) \tag{367}$$

Per una traslazione infinitesima abbiamo

$$T(a) = \mathbb{1} + i\delta a_\mu P^\mu \tag{368}$$

che è una definizione analoga alla (354). Dunque per analogia con la (367) possiamo asserire che, ad esempio

$$U(\Lambda)^{-1}\phi(x)U(\Lambda) = \phi(\Lambda^{-1}x) \tag{369}$$

$$U(\Lambda)^{-1}\partial^\mu\phi(x)U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho\,\bar{\partial}^\rho\phi(\Lambda^{-1}x) \tag{370}$$

$$U(\Lambda)^{-1}\partial^2\phi(x)U(\Lambda) = \bar{\partial}^2\phi(\Lambda^{-1}x) \tag{371}$$

dove $\phi(x)$ è un generico campo scalare e $\bar{\partial}$ indica derivata parziale rispetto all'argomento $\bar{x} = \Lambda^{-1}x$. Allo stesso modo una trasformazione di Lorentz dello spinore di Weyl ψ_L espresso nelle sue componenti spinoriali è

$$U(\Lambda)^{-1}\psi_a(x)U(\Lambda) = L_a{}^b(\Lambda)\psi_b(\Lambda^{-1}x) \tag{372}$$

Da ora in poi ψ_a indicherà ψ_L (nella rappresentazione $(1/2,0)$ o $(2,1)$ che dir si voglia) con indice spinoriale a. Similmente useremo la notazione $\psi^\dagger_{\dot{a}}$ per indicare lo spinore di Weyl ψ_R (nella rappresentazione $(0,1/2)$ o $(1,2)$). Si intenderà che

$$(\psi_a)^\dagger = \psi^\dagger_{\dot{a}} \tag{373}$$

e similmente avremo

$$U(\Lambda)^{-1}\psi^\dagger_{\dot{a}}(x)U(\Lambda) = R_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}(\Lambda)\psi^\dagger_{\dot{b}}(\Lambda^{-1}x) \tag{374}$$

Le matrici L ed R soddisfano la legge di composizione gruppale

$$L_a{}^b(\Lambda')L_b{}^c(\Lambda) = L_a{}^c(\Lambda'\Lambda) \tag{375}$$

Per una trasformazione di Lorentz infinitesima $\Lambda = \mathbb{1} + \delta\omega$ abbiamo

$$L_a{}^b = \delta_a{}^b + \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(S_L^{\mu\nu})_a{}^b \tag{376}$$

$$R_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} = \delta_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} + \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}(S_R^{\mu\nu})_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \tag{377}$$

dove le S_L e le S_R al variare degli indici μ e ν descrivono un set di matrici 2×2. Sulla base della (349) ci aspettiamo che le S_L ed S_R siano rappresentate da commutatori di matrici di Pauli, come le $\sigma^{\mu\nu}$ sono commutatori di matrici γ di Dirac. Vogliamo dimostrare che questo è il caso. Utilizzando la (354)

$$U(\Lambda) = \mathbb{1} + \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \tag{378}$$

abbiamo che la relazione

$$U(\Lambda)^{-1}\psi_a(x)U(\Lambda) = L_a{}^b(\Lambda)\psi_b(\Lambda^{-1}x) \tag{379}$$

equivale a scrivere

$$[\psi_a(x), M^{\mu\nu}] = Q^{\mu\nu}\psi_a + (S_L^{\mu\nu})_a{}^b\psi_b(x) \tag{380}$$

dove il termine (di momento angolare orbitale)

$$Q^{\mu\nu} = \frac{1}{i}(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) \tag{381}$$

può essere rimosso considerando i campi nel punto spazio temporale $x = 0$. Per derivare la (380) si è fato uso della (213). Consideriamo il caso $\mu = i, \nu = j$. Ricordiamo la (122) secondo cui $M^{ij} = \epsilon^{ijk}J_k$ da cui

$$\epsilon^{ijk}[\psi_a(0), J_k] = (S_L^{ij})_a{}^b\psi_b(0) \tag{382}$$

dove J_k è l'operatore momento angolare (generatore delle tri-rotazioni). Supponendo di applicare il commutatore precedente ad uno stato senza spin e ricordando la rappresentazione bidimensionale di J_k descritta in (150) secondo cui $J_k \sim \sigma_k/2$ abbiamo che (qui le matrici di Pauli non sono trattate come componenti spaziali di un quadrivetore e quindi non faremo attenzione alla posizione degli indici)

$$S_L^{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\sigma_k \equiv -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\sigma^k = \frac{i}{4}[\sigma^i, \sigma^j] \tag{383}$$

D'altra parte dalla equazione (349)

$$S(\Lambda(\omega)) = e^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(-\frac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu])} \tag{384}$$

Sappiamo che nella base di Weyl abbiamo

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{385}$$

da cui segue

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix} \tag{386}$$

Fissando $\mu = i, \nu = j$ si ha

$$[\gamma^i, \gamma^j] = \begin{pmatrix} -[\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & -[\sigma^i, \sigma^j] \end{pmatrix} \tag{387}$$

che è consistente con quanto appena trovato nella (383).

Allo stesso modo ricordando che $M^{0i} = K_i$ abbiamo

$$[\psi_a(0), K_i] = (S_L^{0i})_a{}^b \psi_b(0) \tag{388}$$

Dalla (150) sappiamo che $K_i = -i\sigma_i/2$ da cui

$$S_L^{0i} = \frac{i}{2}\sigma^i \tag{389}$$

In definitiva

$$(S_L^{\mu\nu})_a{}^b = -\frac{i}{4}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_a{}^b \tag{390}$$

In modo del tutto analogo a quanto fatto per ottenere la relazione (382) possiamo ottenere una analoga equazione per gli spinori 'puntati'

$$[\psi_{\dot{a}}^\dagger(0), M^{\mu\nu}] = (S_R^{\mu\nu})_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \psi_{\dot{b}}^\dagger(0) \tag{391}$$

Facendo uso della

$$(\psi_a)^\dagger = \psi_{\dot{a}}^\dagger \tag{392}$$

e prendendo l'operatore croce della (391), in modo da ritornare agli spinori non puntati, si ottiene

$$[M^{\mu\nu}, \psi_a(0)] = [(S_R^{\mu\nu})_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}]^* \psi_b(0) \tag{393}$$

infatti

$$((S_R^{\mu\nu})_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \psi_{\dot{b}}^\dagger)^\dagger = \psi_b [(S_R^{\mu\nu})_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}]^* \equiv [(S_R^{\mu\nu})_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}]^* \psi_b \tag{394}$$

Dal confronto di (393) e (382) si trova la relazione

$$(S_R^{\mu\nu})_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} = -[(S_L^{\mu\nu})_a{}^b]^* \tag{395}$$

A questo punto dobbiamo ricordare due utili relazioni dimostrate precedentemente

$$\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2 = \bar{\sigma}^{\mu *} \tag{396}$$

$$\sigma^2\bar{\sigma}^\mu\sigma^2 = \sigma^{\mu *} \tag{397}$$

Allora

$$\begin{aligned} S_R^{\mu\nu} &= -[S_L^{\mu\nu}]^* = -\left[-\frac{i}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)\right]^* = \\ &= -\frac{i}{4}[(\sigma^2\bar{\sigma}^\mu\sigma^2)(\sigma^2\sigma^\nu\sigma^2) - (\sigma^2\bar{\sigma}^\nu\sigma^2)(\sigma^2\sigma^\mu\sigma^2)] = \\ &= -\frac{i}{4}\sigma^2[\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu]\sigma^2 \end{aligned} \tag{398}$$

da cui

$$\sigma^2 S_R^{\mu\nu}\sigma^2 = -i\sigma^2 S_R^{\mu\nu} i\sigma^2 = -\frac{i}{4}[\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu] \tag{399}$$

o più semplicemente

$$i\sigma^2 S_R^{\mu\nu} i\sigma^2 = \frac{i}{4}[\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu] \tag{400}$$

Si usa definire

$$(i\sigma^2)^{\dot{a}\dot{b}} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \tag{401}$$

e ugualmente

$$(i\sigma^2)^{ab} = \epsilon^{ab} \tag{402}$$

Approfondiremo nella sezione successiva quale sia il ruolo del tensore ϵ. Per il momento si osservi che

$$\epsilon^{\dot{c}\dot{a}}(A)_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} = (A)^{\dot{c}\dot{b}} \tag{403}$$

e che

$$(A)^{\dot{c}\dot{b}}\epsilon_{\dot{b}\dot{d}} = (A)^{\dot{c}}{}_{\dot{d}} \tag{404}$$

Pertanto, ripristinando gli indici spinoriali come nella (391), abbiamo ricavato che

$$\epsilon^{\dot{a}\dot{c}}(S_R^{\mu\nu})_{\dot{c}}{}^{\dot{d}}\epsilon_{\dot{d}\dot{b}} = (S_R^{\mu\nu})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} = \frac{i}{4}[\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu]^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \tag{405}$$

ovvero

$$(S_R^{\mu\nu})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} = \frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \tag{406}$$

da confrontare con

$$(S_L^{\mu\nu})_a{}^b = -\frac{i}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_a{}^b \tag{407}$$

Questo è il modo con cui si scrivono usualmente S_L ed S_R. Per analogia, si veda la (350), possiamo scrivere anche

$$(S_V^{\mu\nu})^\rho{}_\tau \equiv i(g^{\mu\rho}\delta^\nu{}_\tau - g^{\nu\rho}\delta^\mu{}_\tau) \tag{408}$$

15 Indici spinoriali: Invarianti

Nella sezione precedente abbiamo introdotto il tensore ϵ per abbassare ed alzare indici spinoriali. Vogliamo analizzare con maggiore dettaglio il suo ruolo. Consideriamo un campo $\Phi_{ab}(x)$ che abbia due indici spinoriali entrambi relativi alla rappresentazione $(2,1)$ (o $(1/2,0)$). Sotto trasformazioni di Lorentz ci aspettiamo che

$$U(\Lambda)^{-1}\Phi(x)_{ab}U(\Lambda) = L_a{}^c(\Lambda)L_b{}^d(\Lambda)\Phi(\Lambda^{-1}x)_{cd} \tag{409}$$

Il campo Φ_{ab} ha evidentemente quattro componenti essendo gli indici spinoriali $a, b = 1, 2$. Tuattavia possiamo raggrupparle in insiemi più piccoli che non si mescolano sotto trasformazioni di Lorentz. A tal scopo ricordiamo la scomposizione di due spin in tripletto (simmetrico sotto scambio delle particelle) e singoletto (antisimmetrico) secondo la regola

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1}_A \oplus \mathbf{3}_S \tag{410}$$

Di fatto il campo Φ_{ab} con i due indici spinoriali a, b potrà egualmente essere scomposto secondo la

$$(\mathbf{2},\mathbf{1}) \otimes (\mathbf{2},\mathbf{1}) = (\mathbf{1},\mathbf{1})_A \oplus (\mathbf{3},\mathbf{1})_S \tag{411}$$

che quivale a dire

$$\Phi(x)_{ab} = \epsilon_{ab}D(x) + G(x)_{ab} \tag{412}$$

dove $\epsilon_{ab} = -\epsilon_{ab}$ è un tensore antisimmetrico mentre G_{ab} è un tensore simmetrico (quindi con dimensione tre). $D(x)$ è uno scalare di Lorentz. Pertanto non può che essere

$$L(\Lambda)_a{}^c L(\Lambda)_b{}^d \epsilon_{cd} = \epsilon_{ab} \tag{413}$$

che è del tutto analoga alla

$$\Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \tag{414}$$

Il tensore antisimmetrico ϵ_{ab} è invariante sotto il gruppo di Lorentz. Si sceglie

$$\epsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma^2 = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} \tag{415}$$

ed

$$\epsilon^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma^2 = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} \tag{416}$$

Con queste definizioni si ha

$$\epsilon_{ab}\epsilon^{bc} = \delta_a{}^c \tag{417}$$

$$\epsilon^{ab}\epsilon_{bc} = \delta^a{}_c \tag{418}$$

Il tensore invariante ϵ con indici puntati si ricava nello stesso modo a partire dalla

$$(\mathbf{1},\mathbf{2}) \otimes (\mathbf{1},\mathbf{2}) = (\mathbf{1},\mathbf{1})_A \oplus (\mathbf{1},\mathbf{3})_S \tag{419}$$

Possiamo quindi introdurre la *definizione*

$$\psi^a(x) \equiv \epsilon^{ab}\psi_b(x) \tag{420}$$

$$\psi_a(x) \equiv \epsilon_{ab}\psi^b(x) \tag{421}$$

la cui consistenza può essere apprezzata osservando che

$$\psi_a = \epsilon_{ab}\psi^b = \epsilon_{ab}\epsilon^{bc}\psi_c = \delta_a{}^c\psi_c \tag{422}$$

Si osservi che

$$\psi_a\epsilon^{ab} \neq \psi^b \tag{423}$$

(si faccia attenzione ai prodotti riga per colonna). Difatti

$$\psi_a\epsilon^{ac} = \epsilon_{ab}\psi^b\epsilon^{ac} = -\epsilon_{ba}\epsilon^{ac}\psi^b = -\delta_b{}^c\psi^b = -\delta^c{}_b\psi^b = -\psi^c \tag{424}$$

Si osservi ora la cosa seguente

$$\psi^a\chi_a = \epsilon^{ab}\psi_b\chi_a = -\epsilon^{ba}\psi_b\chi_a = -\psi_b\epsilon^{ba}\chi_a = -\psi_b\chi^b \tag{425}$$

Si osservi come passare da ${}^a{}_a \mapsto {}_a{}^a$ comporti l'introduzione di un segno meno. D'altra parte poichè abbiamo a che fare con fermioni

$$\psi_b\chi_a = -\chi_a\psi_b \tag{426}$$

da cui

$$\psi^a \chi_a = -\epsilon^{ba} \psi_b \chi_a = \epsilon^{ba} \chi_a \psi_b = \chi^b \psi_b \tag{427}$$

o più semplicemente

$$\psi\chi = \chi\psi \tag{428}$$

dove però gli indici sottointesi sono di tipo ${}^a{}_a$.

Esercizio. Si osservi che il prodotto

$$\psi\chi \equiv \psi^a \chi_a = -\psi^1 \chi^2 + \psi^2 \chi^2 \tag{429}$$

viene lasciato invariante da una qualsiasia trasformazione U rappresentata da una matrice 2×2 a elementi complessi e con determinate pari a 1. (Una rotazione ad esempio!)

Gli indici puntati, quando sottointesi, li si considera sempre nella disposizione ordinata ${}_{\dot a}{}^{\dot a}$. Per esempio

$$\chi^\dagger \psi^\dagger = \chi^\dagger_{\dot a} \psi^{\dagger \dot a} \tag{430}$$

Difatti

$$(\chi\psi)^\dagger = (\chi^a \psi_a)^\dagger = \psi^\dagger_{\dot a} \chi^{\dagger \dot a} = \psi^\dagger \chi^\dagger = \chi^\dagger \psi^\dagger \tag{431}$$

dove l'ultima egualianza si ricava in analogia a quella per gli spinori della $(\mathbf{2}, \mathbf{1})$.

Si consideri adesso un campo A che abbia un indice a ed un indice $\dot a$, ovvero si consideri $A_{a\dot a}$. In tal caso abbiamo $(\mathbf{2}, \mathbf{1}) \otimes (\mathbf{1}, \mathbf{2}) = (\mathbf{2}, \mathbf{2})$. Quindi siamo nella rappresentazione vettoriale quadridimensionale. Ci possiamo quindi aspettare che

$$A_{a\dot a}(x) = \sigma^\mu_{a\dot a} A_\mu(x) \tag{432}$$

dove il simbolo $\sigma^\mu_{a\dot a}$ è un altro invariante la cui esistenza può essere dedotta osservando che

$$(\mathbf{2}, \mathbf{1}) \otimes (\mathbf{1}, \mathbf{2}) \otimes (\mathbf{2}, \mathbf{2}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus \ ... \tag{433}$$

Similmente l'esistenza dell'invariante $g_{\mu\nu}$ può essere dedotta osservando che

$$(\mathbf{2}, \mathbf{2}) \otimes (\mathbf{2}, \mathbf{2}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1})_S \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})_A \otimes (\mathbf{3}, \mathbf{1})_A \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{3})_S \tag{434}$$

e l'esistenza dell'invariante $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ può essere stabilita osservando che esiste in termine $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ nel prodotto

$$(\mathbf{2}, \mathbf{2}) \otimes (\mathbf{2}, \mathbf{2}) \otimes (\mathbf{2}, \mathbf{2}) \otimes (\mathbf{2}, \mathbf{2}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1})_A \oplus ... \tag{435}$$

L'invarianza di Lorentz del simbolo $\sigma^\mu_{a\dot a}$ si esprime come

$$\Lambda^\mu{}_\nu L(\Lambda)_a{}^b R(\Lambda)_{\dot a}{}^{\dot b} \sigma^\nu_{b\dot b} = \sigma^\mu_{a\dot a} \tag{436}$$

Una scelta consistente è

$$\sigma^{\mu}_{a\dot{a}} = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \tag{437}$$

Si definisce poi

$$\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a} \equiv \epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\sigma^{\mu}_{b\dot{b}} \tag{438}$$

o equivalentemente

$$\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a} = -\epsilon^{ab}\sigma^{\mu}_{b\dot{b}}\epsilon^{\dot{b}\dot{a}} \tag{439}$$

o in termini di prodotto di matrici

$$(\bar{\sigma}^{\mu})^T = \sigma^2\sigma^{\mu}\sigma^2 \tag{440}$$

Poichè le matrici di Pauli sono hermitiane, $*$ e T operano nello stesso modo, da cui la ben nota

$$\bar{\sigma}^{\mu *} = \sigma^2\sigma^{\mu}\sigma^2 \tag{441}$$

Sappiamo quindi che

$$\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a} = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}) \tag{442}$$

Si possono dimostrare esplicitamente le due seguenti relazioni

$$\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\sigma_{\mu b\dot{b}} = 2\epsilon_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \tag{443}$$

$$\epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\sigma^{\nu}_{b\dot{b}} = 2g^{\mu\nu} \tag{444}$$

Dimostriamo per esempio la seconda

$$\epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\sigma^{\nu}_{b\dot{b}} = -\epsilon^{ba}\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\sigma^{\nu}_{b\dot{b}} = \bar{\sigma}^{\mu\dot{b}b}\sigma^{\nu}_{b\dot{b}} \tag{445}$$

quindi una volta scelti gli indici μ e ν non resta che fare una operazione di traccia ricordando che $\bar{\sigma}^{\mu\dot{b}b} = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma})$ e che $\sigma_{\mu b\dot{b}} = (\mathbb{1}, \vec{\sigma})$, da cui il risultato. La prima relazione può essere ottenuta molto semplicemente fissando gli indici puntati e non.

Esercizio. Mostrare che se si fosse utilizzata la metrica $g = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ le due relazioni precedenti sarebbero state

$$\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\sigma_{\mu b\dot{b}} = -2\epsilon_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \tag{446}$$

$$\epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\sigma^{\nu}_{b\dot{b}} = -2g^{\mu\nu} \tag{447}$$

Sulla base di quanto trovato le matrici γ nella base di Weyl si scrivono come

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu}_{a\dot{b}} \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b} & 0 \end{pmatrix} \tag{448}$$

Calcoliamo ora l'hermitiano coniugato del seguente prodotto

$$\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi = \psi^\dagger_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\mu \dot{a} c} \chi_c \tag{449}$$

Si osservi subito che gli indici sottointesi sono nella disposizione ${}_{\dot{a}}{}^{\dot{a}}$ e ${}^{c}{}_{c}$. Vogliamo dunque calcolare $[\psi^\dagger_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\mu \dot{a} c} \chi_c]^\dagger$. Procediamo come segue

$$[\psi^\dagger_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\mu \dot{a} c} \chi_c]^\dagger = \chi^\dagger_{\dot{c}} (\bar{\sigma}^{\mu a \dot{c}})^* \psi_a \tag{450}$$

Si osservi come la matrice σ al centro sia trasposta rispetto al prodotto con gli spinori posti a sinistra e destra (l'ordine degli spinori viene preservato perchè questi anticommutano per scambio). Usando ancora la hermitianità delle matrici di Pauli osserviamo che l'operazione $*$ e' identica ad un altra trasposizione che quindi porterebbe in

$$[\psi^\dagger_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\mu \dot{a} c} \chi_c]^\dagger = \chi^\dagger_{\dot{c}} (\bar{\sigma}^{\mu a \dot{c}})^* \psi_a = \chi^\dagger_{\dot{c}} \bar{\sigma}^{\mu \dot{c} a} \psi_a \tag{451}$$

o più semplicemente

$$(\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \chi)^\dagger = \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi \tag{452}$$

Segue la evidente proprietà di hermitianità

$$(\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi)^\dagger = \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi \tag{453}$$

16 Lagrangiane per campi spinoriali: Majorana e Dirac

Supponiamo di voler scrivere una lagrangiana $\mathcal{L}$ per uno spinore ψ_L che scriviamo come ψ_a. Si deve richiedere che $\mathcal{L}$ sia *hermitiana* ed *invariante sotto trasformazioni di Lorentz*. Per quel che riguarda i termini senza derivate abbiamo una scelta facile che è data da

$$\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger \tag{454}$$

Si osservi che $\psi\psi \equiv \psi^a \psi_a = \epsilon^{ab} \psi_b \psi_a$ (ancora una volta si fa notare che gli indici spinoriali sottointesi vanno nella combinazione ${}^{a}{}_{a}$ se non puntati e ${}_{\dot{a}}{}^{\dot{a}}$ se puntati). Questo termine non è nullo perchè i campi spinoriali anticommutano (ϵ è antisimmetrico).

Allo scopo di costruire una lagrangiana *locale* possiamo poi ricercare dei termini che coinvolgano *derivate* di ψ. Il più semplice di questi termini è

$$\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi = g^{\mu\nu} \epsilon^{ab} \partial_\mu \psi_b \partial_\nu \psi_a \tag{455}$$

Il momento coniugato

$$\pi^c = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_c)} = g^{0\nu}\epsilon^{ac}\partial_\nu \psi_a + g^{\mu 0}\epsilon^{cb}\partial_\mu \psi_b = 0 \tag{456}$$

comporta che possiamo avere una hamiltoniana $\mathcal{H} = -\mathcal{L}$ non limitata dal basso nello spettro. Dobbiamo quindi limitarci a termini hermitiani con una sola derivata.

Un candidato è

$$i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \tag{457}$$

L'invarianza di Lorentz è assicurata. Sulla base di quanto trovato alla fine del capitolo precedente calcoliamo il suo hermitiano coniugato.

$$(i\psi^\dagger_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}c}\partial_\mu \psi_c)^\dagger = -i\partial_\mu \psi^\dagger_{\dot{c}} (\bar{\sigma}^{\mu a\dot{c}})^* \psi_a \tag{458}$$

dove osserviamo come la matrice $\bar{\sigma}$ sia trasposta nel prodotto con gli spinori a sinistra e destra. Sfruttando ancora l'hermitianità delle matrici di Pauli abbiamo

$$(i\psi^\dagger_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}c}\partial_\mu \psi_c)^\dagger = -i\partial_\mu \psi^\dagger_{\dot{c}} (\bar{\sigma}^{\mu a\dot{c}})^* \psi_a = -i\partial_\mu \psi^\dagger_{\dot{c}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{c}a} \psi_a \tag{459}$$

da cui possiamo estrarre una derivata totale

$$i\psi^\dagger_{\dot{c}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{c}a}\partial_\mu \psi_a - i\partial_\mu(\psi^\dagger_{\dot{c}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{c}a}\psi_a) \tag{460}$$

Con una opportuna scela dei campi ai bordi all'infinito possiamo rimuovere la divergenza totale e scrivere la seguente lagrangiana di Majorana

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m(\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger) \tag{461}$$

con m reale e positivo.

Dalla equazione del moto

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\dagger} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^\dagger)} = 0 \tag{462}$$

otteniamo

$$-i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + m\psi^\dagger = 0 \tag{463}$$

ovvero, esplicitando gli indici spinoriali

$$-i\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}c}\partial_\mu \psi_c + m\psi^{\dagger\dot{a}} = 0 \tag{464}$$

Prendiamo ora l'operatore † della precedente equazione

$$(-i\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}c}\partial_\mu\psi_c)^\dagger + m(\psi^{\dagger\dot{a}})^\dagger = 0 \tag{465}$$

da cui

$$(\partial_\mu\psi^\dagger_{\dot{c}})(i\bar{\sigma}^{\mu a\dot{c}*}) + m\psi^a = 0 \tag{466}$$

usando poi l'hermitianità delle matrici di Pauli abbiamo

$$i\bar{\sigma}^{\mu\dot{c}a}\partial_\mu\psi^\dagger_{\dot{c}} + m\psi^a = 0 \tag{467}$$

Si ricordi ora che

$$\bar{\sigma}^{\mu\dot{c}a} = -\epsilon^{ab}\,\sigma^\mu_{b\dot{d}}\,\epsilon^{\dot{d}\dot{c}} \tag{468}$$

da cui

$$(-\epsilon^{ab})i\sigma^\mu_{b\dot{d}}\partial_\mu\psi^{\dot{d}\dagger} + m\psi^a = 0 \tag{469}$$

e moltiplicando a sinistra per ϵ_{fa} si ha

$$-i\sigma^\mu_{f\dot{d}}\partial_\mu\psi^{\dot{d}\dagger} + m\psi_f = 0 \tag{470}$$

usando il fato che $\epsilon_{fa}\epsilon^{ab} = \delta_f{}^b$. Abbiamo dunque trovato le due equazioni seguenti

$$-i\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}c}\partial_\mu\psi_c + m\psi^{\dagger\dot{a}} = 0 \tag{471}$$

$$-i\sigma^\mu_{f\dot{d}}\partial_\mu\psi^{\dot{d}\dagger} + m\psi_f = 0 \tag{472}$$

Queste due equazioni possono essere scritte nella forma di una equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} m\delta_a{}^c & -i\sigma^\mu_{a\dot{c}}\partial_\mu \\ -i\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}c}\partial_\mu & m\delta^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_c \\ \psi^{\dagger\dot{c}} \end{pmatrix} = 0 \tag{473}$$

Ricordando che la definizione di matrici γ è

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_{a\dot{c}} \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}c} & 0 \end{pmatrix} \tag{474}$$

Non resta che constatare che

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi = 0 \tag{475}$$

dove

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_c \\ \psi^{\dagger\dot{c}} \end{pmatrix} \tag{476}$$

dove Ψ è uno spinore di Majorana.

Ricordiamo che siamo partiti dalla seguente lagrangiana di Majorana

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} m(\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger) \tag{477}$$

Consideriamo ora una teoria con *due spinori left* ed una simmetria $SO(2)$ che li mescoli

$$\mathcal{L} = i\psi_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i - \frac{1}{2} m(\psi_i\psi_i + \psi_i^\dagger \psi_i^\dagger) \tag{478}$$

con $i = 1, 2$ dove si somma su i. Le trasformazioni che mescolano i campi ψ_1 e ψ_2 sono dunque del tipo

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{479}$$

Che queste lascino invariate la lagrangiana (478) lo si vede osservando che nello spazio $i = 1, 2$ i prodotti $\sum_i \psi_i\psi_i$ corrispondono a $\psi^T\psi$ e le trasformazioni A sono ortogonali.

Esercizio. Se introduciamo i campi χ e ξ come segue

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + i\psi_2) \tag{480}$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - i\psi_2) \tag{481}$$

possiamo riscrivere (478) come

$$\mathcal{L} = i\chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi - m\chi\xi - m\xi^\dagger \chi^\dagger \tag{482}$$

Si osservi che (482) è invariante sotto le trasformazioni del gruppo $U(1)$

$$\begin{aligned} \chi &\to e^{-i\theta}\chi \\ \xi &\to e^{+i\theta}\xi \end{aligned} \tag{483}$$

Esercizio. Si scrivano le equazioni del moto relative a (482) dimostrando che si riottiene l'equazione di Dirac

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi = 0 \tag{484}$$

dove però

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_c \\ \xi^{\dagger\dot{c}} \end{pmatrix} \tag{485}$$

Possiamo anche riscrivere la lagrangiana (482) in termini degli spinori Ψ. Cominciamo con il considerare l'operatore $\dagger$ del campo Ψ

$$\Psi^\dagger = \begin{pmatrix} \chi^\dagger_{\dot{a}} & \xi^a \end{pmatrix} \tag{486}$$

Introduciamo poi la matrice

$$\beta \equiv \begin{pmatrix} 0 & \delta^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} \\ \delta_a{}^c & 0 \end{pmatrix} \tag{487}$$

che numericamente è uguale a γ^0 ma di fatto ha una differente struttura spinoriale. Ricordiamo infatti che

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_{a\dot{c}} \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}c} & 0 \end{pmatrix} \to \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{a\dot{c}} \\ \delta^{\dot{a}c} & 0 \end{pmatrix} \tag{488}$$

Con la definiziaone di β definiamo anche

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \beta = \begin{pmatrix} \xi^a & \chi^\dagger_{\dot{a}} \end{pmatrix} \tag{489}$$

da cui

$$\bar{\Psi}\Psi = \xi^a \chi_a + \chi^\dagger_{\dot{a}} \xi^{\dagger\dot{a}} = \xi\chi + \chi^\dagger \xi^\dagger \tag{490}$$

ancora una volta si fa notare che gli indici spinoriali sottointesi vanno nella combinazione ${}^a{}_a$ se non puntati e ${}_{\dot{a}}{}^{\dot{a}}$ se puntati. Con la stessa convenzione, utilizzando la definizione delle matrici γ e del $\bar{\Psi}$, abbiamo

$$\bar{\Psi}\partial\!\!\!/\Psi = \xi^a \sigma^\mu_{a\dot{c}} \partial_\mu \xi^{\dagger\dot{c}} + \chi_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}c} \partial_\mu \chi_c \tag{491}$$

Il primo termine del membro di destra di questa equazione può essere trasformato come segue

$$\xi^a \sigma^\mu_{a\dot{c}} \partial_\mu \xi^{\dagger\dot{c}} = (-\partial_\mu \xi^a) \sigma^\mu_{a\dot{c}} \xi^{\dagger\dot{c}} + \text{derivata totale} \tag{492}$$

si consideri ora che i campi spinoriali anticommutano per cui

$$(-\partial_\mu \xi^a) \sigma^\mu_{a\dot{c}} \xi^{\dagger\dot{c}} = \xi^{\dagger\dot{c}} \sigma^\mu_{a\dot{c}} \partial_\mu \xi^a \tag{493}$$

Si osservi adesso che

$$\xi^{\dagger\dot{c}} \sigma^\mu_{a\dot{c}} \partial_\mu \xi^a = (-\xi^\dagger_{\dot{d}} \epsilon^{\dot{d}\dot{c}}) \sigma^\mu_{a\dot{c}} \partial_\mu (\epsilon^{ab} \xi_b) = \xi^\dagger_{\dot{d}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{d}b} \partial_\mu \xi_b \tag{494}$$

dove abbiamo usato $\epsilon^\dagger = -\epsilon$. Pertanto abbiamo

$$\bar{\Psi}\partial\!\!\!/\Psi = \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi \tag{495}$$

da cui vediamo che (482) si trasforma in

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\Psi}\partial\!\!\!/\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \tag{496}$$

La lagrangiana di Dirac appena scritta risulta invariante sotto le trasformazioni $U(1)$

$$\Psi \to e^{-i\theta}\Psi \tag{497}$$
$$\bar{\Psi} \to e^{+i\theta}\bar{\Psi} \tag{498}$$

Esercizio. Mostrare che le precedenti sono equivalenti alle (483)

Si osservi che mandando $\chi \to \psi$ e $\xi \to \psi$ si può riscrivere la nostra lagrangiana di Majorana (477) per un solo campo left utilizzando lo spinore di Majorana (476) ottenendo

$$\mathcal{L}_M = \frac{i}{2}\bar{\Psi}\partial\!\!\!/\Psi - \frac{1}{2}m\bar{\Psi}\Psi \tag{499}$$

Tuttavia questa non è ancora la lagrangiana di Majorana nella sua forma finale perchè non incorpora la condizione $\Psi_c = \Psi$ dove Ψ_c è il coniugato di carica di Ψ.

17 Coniugazione di Carica

Possiamo introdurre un operatore unitario di coniugazione di carica $\mathcal{C}$ con la proprietà

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{-1}\chi_a(x)\mathcal{C} &= \xi_a(x) \\ \mathcal{C}^{-1}\xi_a(x)\mathcal{C} &= \chi_a(x) \end{aligned} \tag{500}$$

quindi la coniugazione di carica cosi definita scambia $\xi \leftrightarrow \chi$.

Esercizio. Osservare che la lagrangiana di Dirac (482) è tale che $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{C} = \mathcal{L}$. Si usi la (428).

Le equazioni relative alla coniugazione di carica possono essere scritte in termini dei campi di Dirac Ψ introducendo la matrice di coniugazione di carica già introdotta in (270) secondo la

$$C = i\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix} \tag{501}$$

che corrisponde a

$$C = i\gamma^2\gamma^0 \tag{502}$$

Per consistenza con la notazione spinoriale introdotta ruotiamo scambiamo i con $-i$ nella definizione precedente. Questo non ha effetto su quanto segue dalla (270).

Ricordiamo ora le definizioni (415) ed (416) da cui segue

$$C = -i \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{ac} & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot{a}\dot{c}} \end{pmatrix} \tag{503}$$

Il fatto di aver introdotto un segno meno nella definizione originaria permette di disporre gli indici delle ϵ come fatto. L'utilità di questo sarà presto evidente. Si osservi che il trasposto di $\bar{\Psi}$ definito nella (489) è dato da

$$\bar{\Psi}^T = \begin{pmatrix} \xi^c \\ \chi^\dagger_{\dot{c}} \end{pmatrix} \tag{504}$$

Si definisce come *spinore coniugato di carica* il seguente Ψ_c

$$\Psi_c = C\bar{\Psi}^T = \begin{pmatrix} \epsilon_{ac} & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot{a}\dot{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^c \\ \chi^\dagger_{\dot{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_a \\ \chi^{\dagger\dot{a}} \end{pmatrix} \tag{505}$$

mentre lo spinore di Dirac da cui siamo partiti è

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_a \\ \xi^{\dagger\dot{a}} \end{pmatrix} \tag{506}$$

Ψ e Ψ_c differiscono quindi, come atteso, per uno scambio di $\xi \leftrightarrow \chi$. Possiamo pertanto scrivere

$$\mathcal{C}^{-1}\Psi(x)\mathcal{C} = \Psi_c(x) \tag{507}$$

Si osservi che il campo di Majorana

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi^{\dagger\dot{a}} \end{pmatrix} \tag{508}$$

soddisfa evidentemente la proprietà

$$\Psi_c = \Psi \tag{509}$$

Questa è l'analoga per i campi scalari della condizione $\varphi^\dagger = \varphi$, soddisfatta per un campo reale. *Un campo di Majorana è analogo ad un campo scalare reale, mente un campo di Dirac, con la sua simmetria $U(1)$, è analogo ad un campo scalare complesso.*

A questo punto veniamo a quanto detto alla fine della sezione precedente. Vogliamo implementare la condizione $\Psi_c = \Psi$ nella lagrangiana $\mathcal{L}_M$

data in (499). Intanto si ricordi che abbiamo trovato nelle equazioni (272)-(275)

$$C^T = C^\dagger = C^{-1} = -C \tag{510}$$

Pertanto nel caso di campi di Majorana abbiamo

$$\Psi = C\bar{\Psi}^T \Rightarrow \Psi^T = \bar{\Psi}C^T \Rightarrow \Psi^T = \bar{\Psi}C^{-1} \Rightarrow \Psi^T C = \bar{\Psi} \tag{511}$$

da cui desumiamo la *lagrangiana di Majorana* [13]

$$\mathcal{L}_M = \frac{i}{2}\Psi^T C \partial\!\!\!/ \Psi - \frac{1}{2} m \Psi^T C \Psi \tag{512}$$

Richiamiamo infine la definizione di matrice γ_5 nella base di Weyl data nella (203)

$$\gamma_5 = -\mathbb{1} \otimes \tau^3 \tag{513}$$

che qui scriviamo come

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -\delta_a{}^c & 0 \\ 0 & +\delta^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} \end{pmatrix} \tag{514}$$

si osservi come la matrice sia stata scritta in modo che gli indici spinoriali sottointesi vadano nella combinazione ${}^a{}_a$ se non puntati e ${}_{\dot{a}}{}^{\dot{a}}$ se puntati. Definiamo inoltre i due proiettori ($P_L^2 = P_L$ e $P_R^2 = P_R$)

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = \begin{pmatrix} \delta_a{}^c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{515}$$

$$P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} \end{pmatrix} \tag{516}$$

Se applicati allo spinore di Dirac (o anche di Majorana)

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi_c \\ \xi^{\dagger\dot{c}} \end{pmatrix} \tag{517}$$

i due proiettori restituiscono le componenti di Weyl secondo la

$$P_L \Psi = \begin{pmatrix} \chi_a \\ 0 \end{pmatrix} \tag{518}$$

[13] Si osservi come dalla lagrangiana di Majorana si desume che il propagatore per uno spinore di Majorana contenga la matrice di coniugazione di carica nella forma

$$\frac{C^{-1}(p\!\!\!/ + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

ed

$$P_R\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^{\dagger\dot{a}} \end{pmatrix} \tag{519}$$

Usando la notazione introdotta all'inizio di queste dispense possiamo dire $\psi_{_L} = \chi$ e $\psi_{_R} = \xi$. Avendo in mente la (482) osserviamo che i termini di massa mescolano componenti left e right di Weyl.

Supponiamo di avere due particelle di Dirac senza massa che rinculano 'back-to-back'. Se sono entrambe *left* o entrambe *right*, poichè *elicità e chiralità concidono per fermioni* (si ricordi che sono opposte fra loro per gli antifermioni) allora il sistema dei due fermioni si troverà in spin totale zero. Si osservi anche che la parità del sistema sarà positiva, sarebbe stata negativa se si fosse trattato di un sistema fermione-antifermione. L'operatore di parità è in effetti rappresentato dalla matrice γ^0 che scambia L in R e viceversa. Si ricordi che in base di Dirac la γ^0 è diagonale $\gamma^0 = \mathrm{diag}(-\mathbb{1}, \mathbb{1})$ e per soluzioni di particelle(antiparticelle) massive nel sistema di riferimento a riposo γ^0 ha autovalori opposti per particelle e antiparticelle. Ovviamente in base di Weyl succede la stessa cosa - bisogna solo scrivere le soluzioni a riposo in base di Weyl (come faremo più avanti). Questa proprietà si conserva nel limite ultrarelativistico.

Come scrivere dunque i due spinori in modo che decsrivano uno stato RR o LL (o sovrapposizione dei due), quindi a spin 0 e parità positiva? Si noti che

$$\bar{\Psi}_c\gamma_5\Psi = \chi^c\chi_c - \xi^\dagger_{\dot{c}}\xi^{\dagger\dot{c}} \tag{520}$$

descrive una sovrapposizione $LL - RR$ che fa al nostro caso (NB. bisogna 'barrare' lo spinore coniugato di carica). Questa sovrapposizione è pari sotto scambio di $\chi \leftrightarrow \xi^\dagger$, ovvero sotto scambio $L \leftrightarrow R$ - si noti che risistemare gli indici ${}_a{}^a \to {}^a{}_a$ e ${}^{\dot{c}}{}_{\dot{c}} \to {}_{\dot{c}}{}^{\dot{c}}$ comporta ogni volta l'introduzione di un segno meno.

Analogamente possiamo scrivere un bilineare di quadrispinori di due fermioni che rappresenti un sistema fermione-fermione a spin 1 e parità positiva

$$\bar{\Psi}_c\gamma^i\Psi \tag{521}$$

che ha tre componenti, tutte a parità positiva come si può verificare, e tutte sovrapposizioni di termini RL e LR.

Esercizio. Si osservi che invece

$$\bar{\Psi}_c\Psi \tag{522}$$

descrive un sistema di due fermioni (senza massa che rinculano) in spin zero e parità negativa.

18 Spinori di rango più alto

Analogamente a quanto si fa nella transizione da vettori a tensori (vettori di rango più elevato), possiamo introdurre gli spinori di rango più elevato. Occupiamoci solo di spinori di Pauli e quindi dimentichiamo per il momento gli spinori 'puntati'. Uno spinore a quattro componenti

$$\psi^{ab} \tag{523}$$

che si trasformano come il prodotto $\phi_1^a \phi_2^b$ viene chiamato spinore di rango 2. In generale si possono introdurre spinori di rango n come

$$\psi^{\overbrace{abc\ldots}^{n}} \tag{524}$$

Soffermiamoci sullo spinore di rango 2 dato nella forma

$$\psi^a{}_b = \psi^{ac}\epsilon_{cb} \tag{525}$$

In particolare

$$\psi^a{}_a = -\psi_a{}^a \tag{526}$$

come risulta dalla equazione (425). Di fatto l'ultima equazione risponde alla regola già evidenziata in precedenza secondo cui *lo scambio di indici* ${}^a{}_a \mapsto {}_a{}^a$ *comporta l'introduzione di un segno meno*. Se uno spinore è simmetrico rispetto ad una coppia di indici, il risultato di una contrazione di questi indici è zero (uno spinore simmetrico di rango due ψ_{ab} è tale che $\psi_a{}^a = 0$). Contrarre uno spinore di rango elevato rispetto ad una determinata coppia di indici equivale dunque a costruire una combinazione *antisimmetrica* rispetto a questi indici.

Esercizio. Si osservi che lo spinore prodotto di ψ_{ab} con se stesso, se contratto rispetto ad una coppia di indici, $\psi_{ab}\psi_c{}^b$, risulta automaticamente antisimmetrico rispetto all'altra coppia di indici (ac).

Esercizio. Si mostri che

$$\psi_{ab}\psi_c{}^b = -\frac{1}{2}\psi_{df}\psi^{df}\epsilon_{ac} \tag{527}$$

In generale ogni spinore di rango due antisimmetrico risulta un multiplo scalare di ϵ_{ab}.

Con l'aiuto del formalismo sviluppato vogliamo imparare qualcosa sulla proprietà delle funzioni d'onda di particelle con *spin arbitrario*. Si raffiguri una particella di spin arbitrario s come un insieme di particelle di spin

$1/2$. Il valore più alto di s_z in questo sistema è $n/2$ se n sono le particelle nel sistema. Possiamo dire che lo spin totale del sistema è pertanto $S = n/2$. Tutte le componenti della funzione d'onda di questo sistema sono quindi prese pari a zero tranne la componente $\psi(1/2, 1/2, 1/2, ...)$. Se scriviamo questa funzione d'onda come un prodotto di n spinori $\psi^a \phi^b ...$, ognuno riferito ad una delle particelle del sistema, dobbiamo ricordare che solo la componente con $a = 1, b = 1, c = 1, ...$in ciascun spinore è non nulla. In altri termini solo il prodotto $\psi^1 \phi^1 ...$ è non nullo. L'insieme di tutti questi prodotti costituisce uno spinore di rango n simmetrico rispetto a tutti gli indici.

Si consideri ora un *sistema di due particelle di spin arbitrario* s. La funzione d'onda di spin di questo sistema è data da

$$\psi_{\text{spin}} = \psi^{\underbrace{abc...}_{2s}\underbrace{a'b'c'...}_{2s}} \tag{528}$$

ovvero ψ_{spin} è uno spinore di rango $4s$. $2s$ dei suoi indici corrispondono ad una particella e $2s$ all'altra. Lo spinore è simmetrico rispetto allo scambio di indici all'interno di ciascun gruppo, come detto sopra. Scambiare le due particelle fra di loro corrisponde a scambiare i due gruppi di indici fra di loro. Se intendiamo che le due particelle siano in spin totale S dobbiamo scrivere un qualche spinore

$$\chi^{\underbrace{abc...}_{2S}} \tag{529}$$

a partire da (528). Questo è possibile contraendo $2s - S$ *coppie* di indici e *simmetrizzando* gli indici rimanenti. Infatti contraendo $2s - S$ coppie restano $2s - (2s - S)$ coppie, ovvero $2S$ indici. Ma sappiamo che la contrazione di uno spinore rispetto ad una coppia di indici significa la costruzione di una combinazione antisimmetrica in quella coppia di indici. Dunque quando le *due particelle di spin* s sono *scambiate* fra di loro, la funzione d'onda acquista un fattore

$$(-1)^{2s-S} \equiv (-1)^{2s+S} \tag{530}$$

D'altra parte la funzione d'onda totale di un sistema di due particelle deve anche essere moltiplicata per un ulteriore fattore $(-1)^{2s}$ che corrisponde a $+1$ per spin interi e -1 per spin seminteri (fermioni).

Si consideri un sistema di due elettroni $|e^+e^-\rangle$. Questo è autostato dell'operatore coniugazione di carica, ma con che autovalore? Sulla base di quanto appena detto non può che essere $(-1)^S$ la risposta nel caso in cui $L = 0$ (altrimenti $(-1)^{L+S}$).

Esercizio. Si usi quanto appena detto per inferire che il fotone è una particella con coniugazione di carica pari a -1.

19 Spinori e Twistori

Si considerino le equazioni di Dirac per particelle ed antiparticelle (e si usino le matrici γ in base di Weyl)

$$(\not{p} - m)u_s(\mathbf{p}) = 0 \tag{531}$$
$$(\not{p} + m)v_s(\mathbf{p}) = 0 \tag{532}$$

le cui soluzioni nel sistema di riferimento a riposo della (anti)particella possono essere scritte come

$$u_+(\mathbf{0}) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad u_-(\mathbf{0}) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \tag{533}$$

$$v_+(\mathbf{0}) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad v_-(\mathbf{0}) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \tag{534}$$

da cui le soluzioni 'barrate'

$$\bar{u}_+(\mathbf{0}) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \tag{535}$$
$$\bar{u}_-(\mathbf{0}) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{536}$$
$$\bar{v}_+(\mathbf{0}) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{537}$$
$$\bar{v}_-(\mathbf{0}) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \tag{538}$$

ottenute da $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ o $\psi^\dagger\beta$. Con queste soluzioni si possono costruire esplicitamente le somme

$$\sum_{s=\pm} u_s(\mathbf{0})\bar{u}_s(\mathbf{0}) = m\gamma^0 + m \tag{539}$$
$$\sum_{s=\pm} v_s(\mathbf{0})\bar{v}_s(\mathbf{0}) = m\gamma^0 - m \tag{540}$$

da cui è facile inferire che

$$\sum_{s=\pm} u_s(\mathbf{p})\bar{u}_s(\mathbf{p}) = \not{p} + m \tag{541}$$
$$\sum_{s=\pm} v_s(\mathbf{p})\bar{v}_s(\mathbf{p}) = \not{p} - m \tag{542}$$

dove abbiamo usato (155) e (158) ovvero

$$e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{K}}\gamma^0 e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{K}} = \frac{\not{p}}{m} \tag{543}$$

Sia ora

$$S_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma^3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma^3 \end{pmatrix} \left(= \frac{i}{4}[\gamma^1, \gamma^2] = \frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2 \right) \tag{544}$$

con autovalori $\pm 1/2$ su $u_\pm(\mathbf{0})$ e $\mp 1/2$ su $v_\pm(\mathbf{0})$. Chiamiamo $s = \pm$ (l'elicità, ovvero la componente dello spin misurata lungo l'asse specificato dal trimomento) ottenendo quindi (non è sottointesa una somma sugli indici ripetuti)

$$\frac{1}{2}(1 + 2sS_z)u_{s'}(\mathbf{0}) = \delta_{ss'}u_{s'}(\mathbf{0}) \tag{545}$$

$$\frac{1}{2}(1 - 2sS_z)v_{s'}(\mathbf{0}) = \delta_{ss'}v_{s'}(\mathbf{0}) \tag{546}$$

poichè $\frac{1}{2}(1 + ss') = \delta_{ss'}$. Si ricordi ora la definizione di matrice γ_5 in base di Weyl secondo cui $\gamma_5 = -\mathbb{1} \otimes \tau^3 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

Esercizio. Poichè sia in base di Dirac che in base di Weyl si ha $\gamma^i = \sigma^i \otimes i\tau^2$ abbiamo

$$S_z = -\frac{1}{2}\gamma_5\gamma^3\gamma^0 \tag{547}$$

Introduciamo ora nel sistema di quite della particella il quadrivettore $z^\mu = (0, 0, 0, 1)$ che sotto trasformazione di Lorentz diventa $z^\mu = (\sinh\varphi, 0, 0, \cosh\varphi)$. Si oservi che nel sistema di quiete $\gamma^\mu z_\mu \equiv -\gamma^3$ e che $\gamma^0 \equiv \frac{\gamma^\mu p_\mu}{m}$ da cui

$$S_z = \frac{1}{2m}\gamma_5 \not{z}\not{p} \tag{548}$$

In questo senso possiamo fare un boost di S_z verso qualsiasi sistema di riferimento sostituendo a z e p i loro rispettivi valori in quei sistemi.

Esercizio. Osservando che $p^\mu/m = (\cosh\varphi, 0, 0, \sinh\varphi)$ si noti che in ogni sistema di riferimento succede che $z^2 = -1$ e $z \cdot p = 0$.

Torniamo quindi alle equazioni (545) e (546) che, usando la (548), diventano

$$\frac{1}{2}(1 + s\gamma_5\not{z})u_{s'}(\mathbf{p}) = \delta_{ss'}u_{s'}(\mathbf{p}) \tag{549}$$

$$\frac{1}{2}(1 + s\gamma_5\not{z})v_{s'}(\mathbf{p}) = \delta_{ss'}v_{s'}(\mathbf{p}) \tag{550}$$

Esercizio. A questo punto otteniamo che

$$u_s(\mathbf{p})\bar{u}_s(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1 + s\gamma_5 \not{z})(\not{p} + m) \tag{551}$$

$$v_s(\mathbf{p})\bar{v}_s(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1 + s\gamma_5 \not{z})(\not{p} - m) \tag{552}$$

Torniamo all' asse di quantizzazione dello spin $z^\mu = (\sinh\varphi, 0, 0, \cosh\varphi)$. Supponiamo che il momento sia proprio nella direzione **z**; quindi $p^\mu/m = (\cosh\varphi, 0, 0, \sinh\varphi)$. Scrivendo i seni e coseni iperbolici nella notazione esponenziale si vede immediatamente che per rapidità φ molto grandi

$$z^\mu \simeq \frac{p^\mu}{m} \tag{553}$$

quindi nel limite relativistico estremo possiamo rimpiazzare $\not{z}$ con $\not{p}/m$. Osservando che $(\not{p})^2 = m^2$ e trascurando alla fine m rispetto a $\not{p}$ si ottiene

$$u_s(\mathbf{p})\bar{u}_s(\mathbf{p}) \to \frac{1}{2}(1 + s\gamma_5)\not{p} \tag{554}$$

$$v_s(\mathbf{p})\bar{v}_s(\mathbf{p}) \to \frac{1}{2}(1 - s\gamma_5)\not{p} \tag{555}$$

Queste diventano *equazioni* nel caso di particelle prive di massa. Si osservi dunque la consistenza di questa notazione con la definizione

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

di spinore di un elettrone. Una particella ultrarelativistica è in uno stato o *right* o *left*. Supponiamo che sia in stato right. In tal caso lo spinore sarà

$$\psi = u_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

Ci aspettiamo quindi che

$$u_+\bar{u}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \psi_R\psi_R^\dagger & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \xi^{\dagger\dot{a}}\xi^a & 0 \end{pmatrix} \tag{556}$$

dove nell'ultima equazione si è fatto uso della relazione (519). Gli spinori ξ dipenderanno dal quadriimpulso p^μ e possiamo utilizzare l'invariante $\bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a}$ per scrivere $\xi^{\dagger\dot{a}}\xi^a = \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a}p_\mu$. Osserviamo che in effetti

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a}p_\mu & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\not{p} \tag{557}$$

essendo

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{558}$$

Una particella *left* sarà invece descritta da u_-. Per quanto riguarda le antiparticelle ultrarelativistiche descritte dagli spinori $v_\pm$ osserviamo che il segno meno nella equazione (555) comporta che le antiparticelle v_- sono *right* mentre le v_+ sono *left*.

Consideriamo ora una particella senza massa ad elicità negativa

$$u_-(\mathbf{p})\bar{u}_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\not{p} \tag{559}$$

Definiamo

$$p_{a\dot{a}} \equiv p_\mu \sigma^\mu_{a\dot{a}} \tag{560}$$

ed analogamente

$$p^{\dot{a}a} \equiv \epsilon^{ac}\epsilon^{\dot{a}\dot{c}} p_{c\dot{c}} = p_\mu \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a} \tag{561}$$

da cui

$$u_-(\mathbf{p})\bar{u}_-(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 & p_{a\dot{a}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{562}$$

Come abbiamo osservato poco prima le due componenti basse di u_- sono nulle essendo u_- uno spinore left. Quindi possiamo scrivere

$$u_-(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \phi_a \\ 0 \end{pmatrix} \tag{563}$$

Qui ϕ_a è semplicemente uno spinore a due componenti *numerico*. Non è inteso come un oggetto anticommutante. Uno spinore commutante è chiamamto *twistore*. Cerchiamo una espressione analitica per il twistore ϕ_a.

Cominciamo con lo scrivere esplicitamente

$$p_{a\dot{a}} = -\begin{pmatrix} -p^0 + p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & -p^0 - p^3 \end{pmatrix} \tag{564}$$

Il prodotto

$$u_-(\mathbf{p})\bar{u}_-(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \phi_a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi^\dagger_{\dot{a}} & 0 \end{pmatrix} \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \phi_a \phi^\dagger_{\dot{a}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{565}$$

da cui segue che dobbiamo costruire il twistore ϕ_a in modo che risulti $\phi_a \phi^\dagger_{\dot{a}} = p_{a\dot{a}}$. Questo è di fatto possibile scrivendo

$$\phi_a = \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}\, e^{-i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{566}$$

dove ω è l'energia della particella senza massa in questione mentre θ e ϕ sono gli angoli polare e azimuthale che specificano la direzione di $\mathbf{p}$ (essendo $|\mathbf{p}| = \omega$).

Esercizio. Utilizzando (566) si mostri esplicitamente che

$$\phi_a \phi^\dagger_{\dot{a}} = p_{a\dot{a}} \tag{567}$$

Si usa spesso la notazione $\phi^*_{\dot{a}}$ per indicare $\phi^\dagger_{\dot{a}}$.

La relazione (567) è particolarmente significativa in quanto *esprime il quadriimpulso di una particella massless in termini del twistore che ne identifica lo stato di spin*. Quindi l'oggetto fondamentale diventa il twistore a partire dal quale oltre che lo spin si può ricostruire il quadrimomento della particella.

Alla stessa stregua si può scrivere

$$u_+(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi^{*\dot{a}} \end{pmatrix} \tag{568}$$

dove

$$\phi^{*\dot{a}} = \epsilon^{\dot{a}\dot{c}} \phi^*_{\dot{c}} \tag{569}$$

Se si osserva

$$(\phi^{*\dot{a}})^* = \phi^a \tag{570}$$

(trattiamo lo $*$ come $\dagger$) si trova

$$u_+(\mathbf{p})\bar{u}_+(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \phi^{*\dot{a}}\phi^a & 0 \end{pmatrix} \tag{571}$$

e similmente a quanto fatto sopra

$$p^{\dot{a}a} = \phi^{*\dot{a}} \phi^a \tag{572}$$

Utilizzando l'espressione trovata per $p_{a\dot{a}}$ è immediato notare anche che

$$\det p_{a\dot{a}} = 0 \tag{573}$$

che rappresenta la condizione di assenza di massa della particella (si faccia un confronto con quanto stabilito nelle (3) e (5)).

Per le particelle massless si usa introdurre la seguente notazione

$$|p] = u_- = v_+ \tag{574}$$
$$|p\rangle = u_+ = v_- \tag{575}$$
$$[p| = \bar{u}_+ = \bar{v}_- \tag{576}$$
$$\langle p| = \bar{u}_- = \bar{v}_+ \tag{577}$$

da cui per esempio

$$[p||k] \equiv [pk] = \phi^a \kappa_a \tag{578}$$

essendo ϕ^a e κ_a i twistori relativi agli impulsi p e k. Allo stesso modo si introduce il prodotto

$$\langle p||k\rangle \equiv \langle pk\rangle = \phi^*_{\dot{a}} \kappa^{*\dot{a}} \tag{579}$$

Si osservi come gli indici *dotted* sono sommati nell'ordine ${}_{\dot{a}}{}^{\dot{a}}$ mentre quelli *undotted* lo sono nell ordine ${}^{a}{}_{a}$.

Esercizio. Si dimostri che

$$[kp\rangle = 0 \tag{580}$$
$$\langle kp] = 0 \tag{581}$$

Le definizioni (574) e (576) corrispondono a dire che i twistori *con parentesi quadra* descrivono fermioni *entranti* ad *elicità negativa* ed *uscenti* ad *elicità positiva*. Il contrario per gli antifermioni. Le definizioni (575) e (577) corrispondono a dire che i twistori *con parentesi a spigolo* descrivono fermioni *entranti* con *elicità positiva* ed *uscenti* con *elicità negativa*. Il contrario per gli antifermioni. Si osservi che i twistori di tipo *bra* descrivono (anti)particelle uscenti mentre quelli di tipo *ket* (anti)particelle entranti.

C'è un modo per semplificare ulteriormente questa notazione. Supponiamo di assegnare a tutte le particelle di un processo fisico, per esempio $e^-\gamma \to e^-\gamma$, degli impulsi *esterni* p_i tutti uscenti. Tuttavia i tri-impulsi fisici dell'elettrone e del fotone iniziale saranno entrambi entranti. Questo vuol dire che il segno delle componenti p^0 di questi due impulsi dovrà anche esso essere negativo in modo da poter scrivere onde piane *fisiche* entranti al posto delle onde piane *assegnate* uscenti. Indicheremo con $\epsilon_p = \mathrm{sign}(p^0)$ la variabile che tiene conto del segno relativo fra gli impulsi fisici e quelli assegnati.

L'utilità di assegnare degli impulsi tutti uscenti sta nel fatto che possiamo a questo punto *riferire il concetto di elicità agli impulsi assegnati piuttosto che a quelli fisici*. Così facendo dire che un fermione è a elicità positiva (rispetto all' impulso assegnato uscente) vuol dire che è a elicità negativa se

entrante e positiva se uscente. Ma allora sia $|p]$ che $[p|$ descrivono fermioni a elicità *positiva* (a elicità *negativa per le antiparticelle*). Allo stesso modo sia $|p\rangle$ che $\langle p|$ descrivono fermioni a elicità *negativa* (a elicità *positiva per le antiparticelle*).

Un accorgimento da tenere quando si lavora con gli impulsi assegnati è che nella definizione di twistore data in (566) si faccia la continuazione analitica $\sqrt{\omega} \to i\sqrt{\omega}$ qualora $\epsilon_p = -1$. Questa sostituzione non ha particolari conseguenze pratiche, come vedremo nei calcoli da venire.

20 Algebra con i twistori

Prima di proseguire con una applicazione pratica di queste nozioni (lo studio della diffusione Compton), vogliamo ricavare un certo numero di relazioni utili con i twistori.

osserviamo che sussistono le seguenti proprietà

$$[pk] = \phi^a \kappa_a = \epsilon^{ac}\phi_c\kappa_a = -\epsilon^{ca}\phi_c\kappa_a = -\epsilon^{ca}\kappa_a\phi_c = -[kp] \tag{582}$$

dove nella quarta ugualianza si è usato il fatto che i twistori si scambiano di posto senza scambio di segno. Analogamente si ha

$$\langle pk\rangle = -\langle kp\rangle \tag{583}$$

Si osservi anche che

$$\langle pk\rangle^* = (\phi^*_{\dot a}\kappa^{*\dot a})^* = \kappa^a\phi_a = [kp] \tag{584}$$

e quindi anche

$$[pk]^* = \langle kp\rangle \tag{585}$$

Evidentemente quando ci sono degli $\epsilon_p = -1$ se ne tiene traccia nelle due relazioni precedenti scrivendo ad esempio

$$\langle pk\rangle^* = \epsilon_p\epsilon_k[kp] \tag{586}$$

in quanto $i^* = -i$! Un'altra conseguenza chiara delle definizioni (574-577) è la seguente

Esercizio. Provare che

$$\not{p} = |p\rangle[p| + |p]\langle p| \tag{587}$$

Mostriamo ora un'ulteriore proprietà dei prodotti twistoriali

$$\langle pk\rangle[kp] = \phi^*_{\dot a}\kappa^{*\dot a}\kappa^a\phi_a = \phi_a\phi^*_{\dot a}\kappa^{*\dot a}\kappa^a = p_{a\dot a}\kappa^{\dot a a} = p_\mu\sigma^\mu_{a\dot a}k_\nu\bar\sigma^{\nu\dot a a} \tag{588}$$

Ricordiamo ora la (444) secondo la quale

$$\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\bar{\sigma}^{\nu\dot{a}a} = 2g^{\mu\nu} \tag{589}$$

Quindi concludiamo che

$$\langle pk\rangle[kp] = 2p\cdot k \tag{590}$$

Questa relazione ci aiuterà nel'usare le variabili di Mandelstam di un processo di interazioni fra particelle elementari.

Esercizio. Provare che

$$\langle p_1|\not{p}|p_2\rangle = 0 \tag{591}$$

qualsiasi siano le scelte degli impulsi p_1, p, p_2. Questa proprietà vale anche per twistori quadrati e per un numero arbitrario *dispari* di matrici γ.

Un'altra utile relazione è quella che si ottiene calcolando esplicitamente il prodotto

$$\langle p|\gamma_\mu|k]\gamma^\mu \tag{592}$$

che esplicitamente si scrive come

$$\langle p|\gamma_\mu|k]\gamma^\mu = \bar{u}_-(\mathbf{p})\gamma_\mu u_-(\mathbf{k})\gamma^\mu \tag{593}$$

Scriviamo in forma ancora più esplicita quest'ultimo prodotto

$$\begin{pmatrix} 0 & \phi^*_{\dot{a}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\mu a\dot{a}} \\ \bar{\sigma}^{\dot{a}a}_{\mu} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \kappa_a \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu}_{b\dot{b}} \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{b}b} & 0 \end{pmatrix} \tag{594}$$

ovvero

$$\phi^*_{\dot{a}}\bar{\sigma}^{\dot{a}a}_{\mu}\kappa_a\begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu}_{b\dot{b}} \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{b}b} & 0 \end{pmatrix} \tag{595}$$

che possiamo scrivere più semplicemente come

$$\phi^*_{\dot{a}}\kappa_a\begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^{\dot{a}a}_{\mu}\sigma^{\mu}_{b\dot{b}} \\ \bar{\sigma}^{\dot{a}a}_{\mu}\bar{\sigma}^{\mu\dot{b}b} & 0 \end{pmatrix} \tag{596}$$

Concentriamoci sui due elementi fuori diagonale. Partiamo con

$$\bar{\sigma}^{\dot{a}a}_{\mu}\sigma^{\mu}_{b\dot{b}} = \epsilon^{ad}\epsilon^{\dot{a}\dot{d}}\sigma_{\mu d\dot{d}}\sigma^{\mu}_{b\dot{b}} = \epsilon^{ad}\epsilon^{\dot{a}\dot{d}}(2\epsilon_{db}\epsilon_{\dot{d}\dot{b}}) = 2\delta^{a}{}_{b}\delta^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \tag{597}$$

dove nella prima equazione abbiamo utilizzato la (438) e nella seconda la (443).

Esercizio. Usando le stesse regole provare che

$$\bar{\sigma}_\mu^{\dot{a}a}\bar{\sigma}^{\mu\dot{b}b} = 2\epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \tag{598}$$

Riassumendo abbiamo che

$$\langle p|\gamma_\mu|k]\gamma^\mu = 2\begin{pmatrix} 0 & \phi_{\dot{b}}^*\kappa_b \\ \kappa^b\phi^{*\dot{b}} & \end{pmatrix} \tag{599}$$

(si ricordi che i twistori commutano).

Esercizio. Si provi che

$$u_-(\mathbf{k})\bar{u}_-(\mathbf{p}) + u_+(\mathbf{p})\bar{u}_-(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & \phi_{\dot{b}}^*\kappa_b \\ \kappa^b\phi^{*\dot{b}} & \end{pmatrix} \tag{600}$$

Abbiamo pertanto la relazione

$$\frac{1}{2}\langle p|\gamma_\mu|k]\gamma^\mu = |k]\langle p| + |p\rangle[k| \tag{601}$$

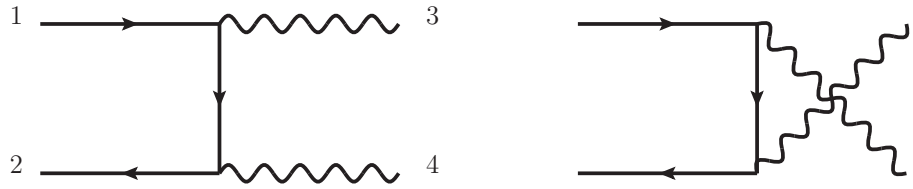
In modo del tutto analogo si può dimostrare che

$$\frac{1}{2}[p|\gamma_\mu|k\rangle\gamma^\mu = |k\rangle[p| + |p]\langle k| \tag{602}$$

21 La diffusione Compton con tecniche twistoriali

Consideriamo adesso una applicazione pratica di quanto introdotto nelle ultime pagine. Studieremo la diffusione Compton nel limite in cui l'energia del fotone incidente è molto più elevata della massa a riposo dell'elettrone urtato in modo tale da poter considerare l'elettrone come un fermione privo di massa ed utilizzare tecniche twistoriali. I diagrammi di Feynman che corrispiondono alle due alternative possibili attraverso le quali la diffusione Compton può avvenire all'ordine più basso della teoria delle perturbazioni sono mostrati in figura. Questi vanno sommati in quanto le alternative interferiscono. Il modulo quadro della somma è proporzionale alla probabilità del processo.

Come prima cosa osserviamo che poichè un numero dispari di matrici γ messe a sandwich fra due twistori da zero, allora i due fermioni rappresentati nei diagrammi devono portare elicità opposte. Infatti se il sandwich avviene fra due twistori a spigolo significa che le elicità rispetto afgli impulsi assegnati sono uguali e negative. Se il sandwich è fra due twistori quadri



allora le elicità sono entrambe positive. D'altra parte nell'effetto Compton abbiamo un fermione entrante ed un fermione uscente quindi siamo nella situazione in cui si ha un twistore a spigolo bra e uno a spigolo ket. Poichè abbiamo due vertici di elettrodinamica ed un propagatore, che porta un ulteriore matrice γ, allora siamo forzati a richiedere che i due fermioni nei diagrammi abbiano elicità opposta.

Si ricordi che, poichè si tratta di fermioni senza massa, essi hanno elicità left o right assegnata. Pertanto prenderemo solo in considerazione le ampiezze $T_{+-\lambda_3\lambda_4}$ e $T_{-+\lambda_3\lambda_4}$ con λ_3 e λ_4 a indicare le elicità dei fotoni. Si osservi che l'elicità viene conservata nei vertici di interazione come deve succedere visto che stiamo coiderando fermioni senza massa: sono i termini di massa a mescolare componenti a elicità diversa ($m\bar{\psi}_L\psi_R + m\bar{\psi}_R\psi_L$).

Nell'appendice a questa sezione descriveremo come si arriva alle seguenti definizioni di polarizzazioni dei fotoni. Per adesso introduciamo le due equazioni seguenti

$$\not{\epsilon}_+(k;q) = \frac{\sqrt{2}}{\langle qk\rangle}(|k]\langle q| + |q\rangle[k|) \tag{603}$$

$$\not{\epsilon}_-(k;q) = \frac{\sqrt{2}}{[qk]}(|k\rangle[q| + |q]\langle k|) \tag{604}$$

e usiamole. Qui q è un quadriimpulso light-like arbitrario. Si chiama *momento di riferimento* e può essere scelto a piacimento. La forza del metodo che stiamo per descrivere sta proprio nel fatto che si possa scegliere q in modo arbitrario ed opportunamente al fine di annullare il numero più alto possibile di contributi all'elemento di matrice.

Cominciamo dunque dallo scrivere l'elemento della ampiezza $T_{+-\lambda_3\lambda_4}$. Gli impulsi sulle gambe esterne sono p_1 e p_2 per i fermioni e k_3 e k_4 per i fotoni. Attraverso una semplice complessa coniugazione si ottiene l'altro $T_{-+\lambda_3\lambda_4}$. Il fatto che basti una complessa coniugazione per passare dall'uno all'altro è riassunto nella relazione (586) che mostra come la complessa

coniugazione faccia passare da twistori a spigolo a twistori quadri, cioè da elicità negative a elicità positive.

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} T_{+-\lambda_3\lambda_4} &= (ie)^2\langle 2|\not{\epsilon}_{\lambda_4}(k_4;q_4)\frac{(-\not{p}_1-\not{k}_3)}{(-p_1-k_3)^2}\not{\epsilon}_{\lambda_3}(k_3;q_3)|1] + \\ &\quad (ie)^2\langle 2|\not{\epsilon}_{\lambda_3}(k_3;q_3)\frac{(-\not{p}_1-\not{k}_4)}{(-p_1-k_4)^2}\not{\epsilon}_{\lambda_4}(k_4;q_4)|1] \end{aligned} \tag{605}$$

che corrisponde a sommare i due diagrammi in figura. Con la notazione $|2\rangle$ si intende per esempio $|p_2\rangle$; $[4|$ sarebbe $[k_4|$ e così via. C'e' una somma perchè nei due diagrammi vengono scambiate fra loro due linee bosoniche. Nella ampiezza abbiamo riportato gli impulsi fisici. Quindi abbiamo scritto $-p_1$ per indicare che l'elettrone 1 è entrante e ad esso sommiamo l'impulso fisico $-k_3$ del fotone entrante anche esso. Questi due impulsi sono opposti rispetto agli impulsi assegnati che caratterizzano le polarizzazioni nei twistori.

I denominatori dei propagatori possono essere scritti con notazione evidente come $s_{13} = (-p_1 - k_3)^2$ ed $s_{14} = (-p_1 + k_4)^2$.

A questo punto occupiamoci di λ_3 e λ_4. Naturalmente abbiamo quattro opzioni che sono $++, --, .+-, -+$. Ma possiamo subito stabilire che quelle di eguale segno portano ad ampiezze nulle. Questo è possibile grazie alla scelta dell'arbitrario impulso di riferimento che appare nelle polarizzazioni. Prendiamo ad esempio il caso $--$. Basta scegliere $q_3 = p_1$ e anche $q_4 = p_1$ che l'ampiezza fa zero.

Esercizio. Mostrare che

$$\not{\epsilon}_-(k_3;p_1)|1] = 0 \tag{606}$$

(si osservi che $[11] = 0$ e che $\langle k1] = 0$).

Esercizio. Mostrare che anche il caso $\lambda_3 = +, \lambda_4 = +$ porta ad una ampiezza nulla.

A questo punto possiamo decidere di occuparci solo della ampiezza T_{+-+-}. L'altra, ovvero T_{+--+} si otterrà dalla prima per semplice scambio delle etichette 3 e 4. Quando specifichiamo la ampiezza (605) al caso $+-$ dei fotoni ci accorgiamo che la scelta $q_3 = p_2$ permette di eliminare il secondo termine in quanto

$$\langle 2|\not{\epsilon}_+(k_3;p_2) = 0 \tag{607}$$

in quanto dinuovo $\langle 22\rangle = 0$ per antisimmetria del simbolo $\langle ij\rangle$ (si ricordino (582) ed (583)).

Lasciando q_4 non ancora specificato abbiamo

$$T_{+-+-} = -e^2 \langle 2|\not{\epsilon}_-(k_4;q_4)\frac{(-\not{p}_1 - \not{k}_3)}{s_{13}}\not{\epsilon}_+(k_3;p_2)|1] \tag{608}$$

Qui dobbiamo usare la forma esplicita di (603) ed (604) oltre che le regole di composizione date fra bra e ket twistoriali.

Esercizio. Provare che

$$T_{+-+-} = -e^2 \frac{\sqrt{2}}{[q_4 4]}\langle 24\rangle [q_4|\frac{(-\not{p}_1 - \not{k}_3)}{s_{13}}|2\rangle [31]\frac{\sqrt{2}}{\langle 23\rangle} \tag{609}$$

Quest'ultima espressione può essere ulteriormente semplificata facendo uso della equazione di Dirac scritta nella forma

$$[q|\not{q} = 0 \tag{610}$$

Basta scegliere in modo opportuno l'impulso di riferimento q_4. Qui la scelta da fare è $q_4 = p_1$ oppure $q_4 = k_3$. Scegliamo per esempio la seconda. Scegliendo la prima si segue un diverso percorso nell'algebra ma il risultato finale sarà ovviamente lo stesso.

Esercizio. Utilizzando la relazione (587) provare che

$$[3|\frac{-\not{p}_1}{s_{13}}|2\rangle = -\frac{1}{s_{13}}[31]\langle 12\rangle \tag{611}$$

Dunque troviamo

$$T_{+-+-} = -e^2 \frac{\sqrt{2}}{[34]}\langle 24\rangle \left(-\frac{1}{s_{13}}[31]\langle 12\rangle\right)[31]\frac{\sqrt{2}}{\langle 23\rangle} \tag{612}$$

Per scrivere questo risultato nella forma più semplice possibile in termini di variabili di Mandelstam resta da svoglere un pò di algebra con i prodotti twistoriali. Per far questo ci occorre un'altra proprietà dei prodotti twistoriali. Poichè abbiamo assegnato i momenti come tutti uscenti risu;ta

$$\sum_j p_j^\mu = 0 \tag{613}$$

da cui ugualmente

$$\sum_j \not{p}_j = 0 \tag{614}$$

che usando (587) vuol dire

$$\sum_j |j\rangle[j| + |j]\langle j| = 0 \tag{615}$$

Dunque (615) è un modo di dire che la somma degli impulsi esterni si annulla. Se inseriamo (615) fra $\langle i|$ e $|k]$ con i e k impulsi fissati, abbiamo

$$\sum_j \langle ij\rangle[jk] = 0 \tag{616}$$

mentre se inseriamo (615) fra $[i|$ e $|k\rangle$ con i e k impulsi fissati, abbiamo

$$\sum_j [ij]\langle jk\rangle = 0 \tag{617}$$

Esercizio. Usando (617) e le proprietà di antisimmetria dei prodotti twistoriali si mostri che

$$[31]\langle 12\rangle = [34]\langle 24\rangle \tag{618}$$

Esercizio. Usando (590) si mostri che

$$s_{13} = \langle 13\rangle[31] \tag{619}$$

Esercizio. Usando le ultime due equazioni si mostri che

$$T_{+-+-} = 2e^2 \frac{\langle 24\rangle^2}{\langle 13\rangle\langle 23\rangle} \tag{620}$$

A questo punto resterebbe solo da calcolare l'ampiezza T_{+--+}, ma come detto sopra questa si ottiene da T_{+-+-} semplicemente scambiando le etichette $3 \leftrightarrow 4$ e quindi

$$T_{+--+} = 2e^2 \frac{\langle 23\rangle^2}{\langle 14\rangle\langle 24\rangle} \tag{621}$$

Spesso si vogliono calcolare sezioni d'urto mediate sugli spin. Per far questo dobbiamo sommare i moduli quadri di T_{+--+} e T_{+-+-} e di quelli con tutte le elicità opposte. Infatti queste alternative non interferiscono poichè in linea di principio possono essere distinte dalle polarizzazioni delle particelle sulle gambe esterne.

Ora, T_{-+-+} si ottiene T_{+--+} per complessa coniugazione. Come sappiamo la complessa coniugazione converte prodotti twistoriali a spigolo in quadri e viceversa. Ma alla fine abbiamo da fare moduli quadri e quindi da

moltiplicare prodotti twistoriali per i loro coniugati. Che si parta da prodotti a spigolo o quadri il risultato finale sarà espresso dalla stessa variabile di Mandelstam. Quindi possiamo semplicemente scrivere

$$\overline{|T|^2} = \frac{1}{4} \times 2 \times (|T_{+-+-}|^2 + |T_{+--+}|^2) \tag{622}$$

dove il fattore $1/4$ tiene conto della media sulle polarizzazioni iniziali.

Si osservi dunque che restano da svolgere prodotti del tipo

$$|\langle 13\rangle|^2 = \langle 13\rangle\langle 13\rangle^* = \epsilon_1\epsilon_3\langle 13\rangle[31] \tag{623}$$

dove si è fatto uso della (586). Sappiamo che sia ϵ_1 che ϵ_3 sono -1 in quanto nell'effetto Compton questi due impulsi sono entrambi entranti fisicamente anche se assegnati come uscenti. Ricordando poi la (590) abbiamo dunque

$$|\langle 13\rangle|^2 = s_{13} \tag{624}$$

Consideriamo ancora un altro caso

$$|\langle 23\rangle|^2 = \epsilon_2\epsilon_3 s_{23} \tag{625}$$

Stavolta il prodotto $\epsilon_2\epsilon_3$ è negativo perchè il fermione 2 è fisicamente uscente. D'altra parte $s_{23} = (p_2 - k_3) = -2p \cdot k_3$ se lo si scrive in termini degli impulsi fisici. Il segno meno derivante dai prodotti degli ϵ elide questo segno meno e quindi possiamo scrivere semplicemente

$$|\langle 23\rangle|^2 = |s_{23}| \tag{626}$$

Conviene scrivere gli s di Mandelstam sempre in valore assoluto. Si arriva quindi facilmente al seguente risultato

$$\overline{|T|^2} = 2e^4 \left(\frac{|s_{13}|}{|s_{14}|} + \frac{|s_{14}|}{|s_{13}|} \right) \tag{627}$$

Esercizio. Provare il risultato precedente usando il fatto che valgono relazioni cinematiche come $s_{14} = s_{23}$ e $s_{24} = s_{13}$.

Si noti infine la relazione fra le s_{ij} e le variabili di Mandelstam

$$s_{13} = s \tag{628}$$

$$s_{12} = t \tag{629}$$

$$s_{14} = u \tag{630}$$

21.1 Appendice: Le matrici di polarizzazione $\not{\epsilon}_\pm$

Ci vogliamo ora occupare della derivazione delle espressioni (603) e (604). Consideriamo un fotone che si muova lungo la direzione dell' asse z, quindi avente impulso

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega) \tag{631}$$

Il modo più generale di scrivere la polarizzazione positiva (destrorsa) è

$$\epsilon_+^\mu = e^{i\varphi}\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) + Ck^\mu \tag{632}$$

dove φ è una generica fase e la costante C è un generico numero complesso. Il fatto che alla polarizzazione si possa sommare un addendo proporzionale al quadriimpulso k^μ deriva dalla libertà di gauge residua una volta fissata la gauge di Lorentz.

Si consideri ora il termine

$$\langle q|\gamma^\mu|k] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{633}$$

dove si è fatto uso della definizione di twistore

$$|k] = u_-(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \phi_a \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2\omega} \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{634}$$

e nel nostro caso $\theta = 0$ visto che supponiamo $\mathbf{k}$ orientato lungo l'asse z. Si osservi che servono due twistori per costruire uno spin 1. Si consideri anche che α e β sono due generici numeri complessi che quindi possono corrispondere ad un generico impulso $\mathbf{q}$; la loro posizione all'interno del quadrispinore è invece dettata dal fatto che vogliamo rappresentare uno spinore di tipo $\langle q|$. La scelta opportuna di q condiziona in molti casi la semplificazione dei calcoli. A questo punto è semplice osservare che il quadrivettore $\langle q|\gamma^\mu|k]$ ha le seguenti componenti

$$\langle q|\gamma^\mu|k] = \sqrt{2\omega}(\beta, -\alpha, i\alpha, \beta) \tag{635}$$

Esercizio. Mostrare che il prodotto

$$\langle qk\rangle = \sqrt{2\omega}\alpha \tag{636}$$

facendo uso di $\langle q|$ introdotto sopra e passando da $|k]$ a $|k\rangle$. [N.B. Il passaggio da $|k]$ a $|k\rangle$ equivale a passare da u_- a u_+. Se u_- ha ϕ_a nelle due componenti alte, allora u_+ avrà $\phi^{*\dot{a}}$ nelle due componenti basse (è right). Ma $\phi^{*\dot{a}} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\phi^*_{\dot{b}}$. In questo senso si può ricavare uno dall'altro.]

Se scegliamo la fase $\varphi = \pi$ e la costante C in (632) come indicato nella (636) abbiamo direttamente

$$\frac{\langle q|\gamma^\mu|k]}{\sqrt{2}\langle qk\rangle} = \epsilon^\mu_+(\mathbf{k}) \equiv \epsilon^\mu_+(k;q) \tag{637}$$

dove si è visto esplicitamente come si arriva ad una definizione della polarizzazione contenente l'impulso di riferimento q.

Nello stesso modo si può calcolare la polarizzazione left. Il prodotto twistoriale da usare è stavolta

$$\langle k|\gamma^\mu|q] = \sqrt{2\omega}(\beta, -\alpha, -i\alpha, \beta) \tag{638}$$

Per ottenere questo risultato si è osservato che

$$\langle k| = \sqrt{2\omega}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{639}$$

e che il generico $|q]$ non può che essere (è left!)

$$|q] = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \tag{640}$$

Nel passare da $|q]$ a $|q\rangle$ si ha

$$|q\rangle = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \beta^*\\ -\alpha^*\end{pmatrix} \tag{641}$$

in quanto

$$|q] = \begin{pmatrix}\phi_a\\ 0\end{pmatrix} \tag{642}$$

mentre

$$|q\rangle = \begin{pmatrix}0\\ \phi^{*\dot{a}}\end{pmatrix} \tag{643}$$

ed $\phi^{*\dot{a}} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\phi^*_{\dot{b}}$. Troveremmo pertanto

$$\langle kq\rangle = -\alpha^*\sqrt{2\omega} \tag{644}$$

Prendiamo il complesso coniugato di questa equazione

$$\langle kq\rangle^* = [qk] = -\alpha\sqrt{2\omega} \tag{645}$$

Pertanto fissando la fase $\varphi = 0$ abbiamo

$$\frac{\langle k|\gamma^\mu|q]}{\sqrt{2}[qk]} = \epsilon^\mu_-(\mathbf{k}) \equiv \epsilon^\mu_-(k;q) \tag{646}$$

Esercizio. Provare che

$$\langle k|\gamma^\mu|q] = [q|\gamma^\mu|k\rangle \tag{647}$$

[Basta moltiplicare ambo i membri per un generico vettore light-like ed usare la (587).]

Quindi

$$\frac{[q|\gamma^\mu|k\rangle}{\sqrt{2}[qk]} = \epsilon^\mu_-(\mathbf{k}) \equiv \epsilon^\mu_-(k;q) \tag{648}$$

Utilizziamo infine (601) e (602) per ottenere le (603) ed (604).

Possiamo ricavare delle formule per i prodotti scalari $\epsilon_\pm(k;q)\cdot\epsilon_{\pm(\mp)}(k';q')$.

$$\epsilon_+(k;q)\cdot\epsilon_+(k';q') = \frac{\langle q|\gamma^\mu|k]}{\sqrt{2}\langle qk\rangle}\frac{\langle q'|\gamma_\mu|k']}{\sqrt{2}\langle q'k'\rangle} = \frac{1}{2}\frac{[k|\gamma^\mu|q\rangle}{\langle qk\rangle}\frac{\langle q'|\gamma_\mu|k']}{\langle q'k'\rangle} \tag{649}$$

dove nell'ultima egualianza abbiamo fatto uso della (647). Ricordiamo ora le (601) e (602)

$$\frac{1}{2}\langle p|\gamma_\mu|k]\gamma^\mu = |k]\langle p| + |p\rangle[k| \tag{650}$$

$$\frac{1}{2}[p|\gamma_\mu|k\rangle\gamma^\mu = |k\rangle[p| + |p]\langle k| \tag{651}$$

Chiudendo a sinistra e a destra una delle due precedenti relazioni fra, $\langle r|$ ed $|s]$ si ottiene l'equazione

$$[p|\gamma_\mu|k\rangle\langle r|\gamma^\mu|s] = 2\langle rk\rangle[ps] \tag{652}$$

Questa puøessere utilizzata per scrivere la (649) come

$$\epsilon_+(k;q)\cdot\epsilon_+(k';q') = \frac{\langle q'q\rangle[kk']}{\langle qk\rangle\langle q'k'\rangle} \tag{653}$$

Esercizio. Si dimostri che analogamente a quanto fatto sopra

$$\epsilon_+(k;q)\cdot\epsilon_-(k';q') = \frac{\langle k'q\rangle[kq']}{\langle qk\rangle[q'k']} \tag{654}$$

$$\epsilon_-(k;q)\cdot\epsilon_-(k';q') = \frac{\langle k'k\rangle[qq']}{[qk][q'k']} \tag{655}$$