UNIVERSITÀ DI ROMA "LA SAPIENZA"
Dipartimento di Fisica

MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA

Anno Accademico 2010-2011

L. Maiani[1]

O. Benhar[2]

[1]e-mail: luciano.maiani@roma1.infn.it

[2]e-mail: omar.benhar@roma1.infn.it

APPUNTI DELLE LEZIONI
WORK IN PROGRESS

Commenti, correzioni e suggerimenti, in particolare da parte degli studenti del Corso, sono apprezzati.

Indice

7

1 LE SIMMETRIE DELLO SPAZIO-TEMPO **9**

1.1 Il Principio di Relatività 9

1.2 Trasformazioni di Lorentz proprie e ortocrone 12

1.3 Struttura causale dello Spazio-Tempo 13

1.4 Vettori contravarianti e covarianti 14

2 LA PARTICELLA LIBERA CLASSICA **17**

2.1 Equazione oraria 17

2.2 Particelle di massa nulla 19

2.3 Principio di Azione per la particella libera 20

2.4 La relazione massa-energia 21

3 TEORIA LAGRANGIANA DEI CAMPI **25**

3.1 Il Principio di Azione 25

3.2 Hamiltoniana e formalismo canonico 27

3.3 Trasformazioni dei campi 30

3.4 Simmetrie continue 33

3.5 Il Teorema di Noether 35

3.6 Tensore impulso-energia e tensore dei momenti 37

4 QUANTIZZAZIONE DELL' EQUAZIONE DI KLEIN GORDON 43

4.1 Il campo scalare reale 43

4.2 Le funzioni di Green del campo scalare 46

4.3 Quantizzazione del campo scalare 50

5 QUANTIZZAZIONE DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO 55

5.1 Equazioni di Maxwell in forma covariante 55

5.2 Funzioni di Green del campo eletromagnetico 57

5.3 Le equazioni di Maxwell Lorentz 60

5.4 Formalismo Hamiltoniano e sostituzione minimale 65

5.5 Quantizzazione del campo elettromagnetico nel vuoto 69

5.6 Spin del fotone 74

6 L' EQUAZIONE DI DIRAC 77

6.1 Forma e proprietá dell'equazione di Dirac 78

6.1.1 Spin 81

6.1.2 Invarianza relativistica 82

6.1.3 Boost 88

6.1.4 Soluzioni dell'equazione di Dirac libera 89

6.1.5 Il momento magnetico dell'elettrone 94

6.2 Particelle e antiparticelle 96

6.3 Seconda quantizzazione: come funziona 99

6.4 Tracce delle matrici gamma 101

7 QUANTIZZAZIONE CANONICA DEL CAMPO DI DIRAC 103

7.1 Quantizzazione del campo di Dirac 103

7.2 La rappresentazione del gruppo di Lorentz 107

7.3 Microcausalitá 109
7.4 Relazione tra spin e statistica 111

8 I PROPAGATORI DEI CAMPI LIBERI 113

8.1 Prodotto cronologico 113
8.2 Propagatore del campo scalare 114
8.3 Il propagatore del campo di Dirac 116

9 NEUTRINO DI WEYL E NEUTRINO DI MAJORANA 119

9.1 Il neutrino di Weyl 119
9.2 Il neutrino di Majorana 122
9.3 Relazione tra neutrini di Weyl, Majorana e Dirac 124

10 INTERAZIONI 129

10.1 L' Elettrodinamica Quantistica (QED) 130
10.2 L' Interazione di Fermi per i decadimenti β 136
10.3 Le interazioni forti o nucleari 137

11 LA RAPPRESENTAZIONE DI INTERAZIONE 139

11.1 Evoluzione nel tempo dei sistemi quantistici 139
11.2 La Rappresentazione di Interazione 142
11.3 Lo sviluppo perturbativo 143
11.4 Prodotti tempo-ordinati 144

12 TEORIA RELATIVISTICA DELLE PERTURBAZIONI 147

12.1 La formula di Dyson 149
12.2 Leggi di conservazione 150
12.3 Sezione d' urto e vita media 151

13 APPLICAZIONI: QED **157**

13.1 Diffusione in un campo coulombiano classico 157

13.2 La formula di Rosenbluth 162

13.3 Diffusione Compton 168

13.4 Diffusione Compton su elettroni relativistici 174

13.5 Annichilazione $e^+ e^- \to \mu^+ \mu^-$ 176

14 APPLICAZIONI: INTERAZIONI DEBOLI **183**

14.1 Il decadimento del neutrone 183

14.2 Il decadimento del muone 189

14.3 Universalitá, teoria corrente x corrente 193

14.4 Verso una teoria fondamentale 196

APPENDICI **198**

A Richiami di Meccanica Quantistica **199**

A.1 Il Principio di Sovrapposizione 199

A.2 Operatori Lineari 201

A.3 Grandezze Osservabili ed Operatori Hermitiani 203

A.4 La Particella Non-Relativistica con Spin 0 204

A.4.1 Traslazioni e Rotazioni 205

A.4.2 Spin 208

A.5 Evoluzione nel tempo dei sistemi quantistici 209

A.5.1 La Rappresentazione di Schroedinger 210

A.5.2 La Rappresentazione di Heisenberg 211

A.5.3 La Rappresentazione di Interazione 212

A.6 Lo sviluppo perturbativo 214

A.7 Prodotti tempo-ordinati 215
A.8 Simmetrie e costanti del moto 216

BIBLIOGRAFIA **218**

Capitolo 1

LE SIMMETRIE DELLO SPAZIO-TEMPO

1.1 Il Principio di Relatività

Il punto di partenza della Teoria della Relatività Speciale è la possibilità di identificare dei *sistemi di riferimento inerziali* (SI), definiti come quei sistemi in cui vale il Primo Principio della Dinamica:

(1). Un corpo non soggetto a forze in un SI si muove di moto rettilineo uniforme.

A ben vedere, siamo in presenza di un ragionamento circolare: l' assenza di forze si puo' accertare solo osservando il moto rettilineo uniforme, che pero' richiede la definizione a priori di un sistema di riferimento. I fisici risolvono il problema in modo pragmatico, partendo da quelli che sicuramente non sono sistemi inerziali (un sistema solidale con la mia auto su una strada dissestata non è di sicuro inerziale, il moto degli oggetti nell' auto è fortemente influenzato dalle *forze apparenti*) e individuando dei sistemti di riferimento in Natura che sono delle approssimazioni via via migliori di un SI ideale.

- la nostra casa (su tempi corti rispetto al periodo di rotazione della Terra);
- la Terra (su tempi corti rispetto all' anno solare);
- il Sole (se ignoriamo il moto orbitale intorno al centro della Galassia);
- la Galassia...

Identificato un SI se ne possono costruire infiniti, di fatto ∞^6, che differiscono per la posizione dell'origine (3 coordinate) e per una velocità relativa costante (3 componenti). Il Principio di Relatività Speciale (formulato da Galileo) afferma che:

(2). Le leggi della Fisica sono invarianti per cambiamento di SI

In un SI dato, i fenomeni fisici sono analizzabili in termini di *eventi*: accadimenti che si verificano in un punto $\vec{x}$ e ad un dato tempo t. Un evento è quindi caratterizzato da un 4-vettore che fornisce le coordinate dell'evento in un dato SI:

$$\text{coordinate} = (t, \vec{x}) = x^\mu \ \ (\mu = 0, .., 3) \ .$$

Per dare contenuto al Principio di Relatività dobbiamo stabilire quale sia la legge di trasformazione delle coordinate di un dato evento da un SI, O, ad un altro SI, O'.

Assuminamo, per semplicità che le origini di O e di O' coincidano al tempo $t = 0$. La richiesta che un moto rettilineo uniforme in O sia visto come tale in O' richiede che la trasformazione sia lineare e omogenea:

$$(x')^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \ , \tag{1.1}$$

dove si intende che gli indici ripetuti sono sommati (da 0 a 3) e Λ e' indipendente da x^μ.

Ai principi *(1)* e *(2)*, A. Einstein aggiunge:

(3). La velocità della luce nel vuoto, c, è una costante universale, indipendente dal sistema di riferimento.

Consideriamo due eventi che differiscono per $\Delta\vec{x}$ e Δt, che supponiamo infinitesimi. Definiamo *lunghezza invariante* dell'intervallo $(\Delta t, \Delta\vec{x})$ la quantità:

$$\Delta s = (c\Delta t)^2 - (\Delta\vec{x})^2 \ .$$

Se $|\Delta\vec{x}| = c|\Delta t|$, i due eventi sono connessi dalla propagazione di un raggio di luce che parte dal primo evento ed arriva esattemente in coincidenza del secondo. Questa coincidenza si verifica, ovviamente, in tutti i sistemi di riferimento e, data l'invarianza della velocità della luce, questo implica che anche le coordinate trasformate debbono corrispondere ad una lunghezza invariante nulla. In formule:

$$\Delta s = (c\Delta t)^2 - (\Delta\vec{x})^2 = 0 \ \rightarrow \Delta s' = (c\Delta t')^2 - (\Delta\vec{x}')^2 = 0$$

Questa condizione si può verificare solo se la legge di trasformazione è tale che:

$$\Delta s' = \lambda \Delta s \ ,$$

con λ indipendente dalle coordinate ed eventualmente dipendente dal modulo della velocità. Teniamo conto, adesso, che la relazione tra O ed O' è perfettamente simmetrica: visto da O, O' si allontana con la stessa velocità con cui O' vede viaggiare O. Quindi scambiando i ruoli dei due sistemi si deve anche avere:

$$\Delta s = \lambda \Delta s' \ , \tag{1.2}$$

ovvero $\lambda = \pm 1$. Il caso -1 è escluso dal fatto che le trasformazioni di coordinate sono connesse con continuità alla trasformazione identica, che evidentemente ha $\lambda = +1$; quindi concludiamo che le trasformazioni (1.1) devono *conservare la lunghezza invariante* dell'intervallo tra due eventi

(d'onde il nome attribuito a Δs). Data la linearità delle trasformazioni, la condizione si estende immediatamente ad intervalli finiti.

Per formalizzare la condizione (1.2), introduciamo il tensore metrico $g_{\mu\nu}$, che ci permette di riscrivere Δs come:

$$\Delta s = g_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu \tag{1.3}$$
$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)\ . \tag{1.4}$$

La condizione (1.2) si riscrive come segue:

$$s' = g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma x^\rho x^\sigma = (\Lambda^\mu_\rho g_{\mu\nu}\Lambda^\nu_\sigma)x^\rho x^\sigma = s \tag{1.5}$$

che implica evidentemente:

$$(\Lambda^\mu_\rho g_{\mu\nu}\Lambda^\nu_\sigma) = g_{\rho\sigma}\ . \tag{1.6}$$

Considerando il prodotto righe per colonne tra le matrici Λ e g, l'equazione si riscrive:

$$\Lambda g \Lambda^T = g\ . \tag{1.7}$$

Questa equazione definisce un insieme di matrici che formano, in termini matematici, un *gruppo*, il *Gruppo di Lorentz*. Le trasformazioni di coordinate sono solo una parte di queste trasformazioni, come vedremo tra poco. Prima, vediamo come funzionano le considerazioni di cui sopra nel caso concreto delle *trasformazioni di Lorentz speciali*.

Il sistema) O' scorre lungo l'asse positivo delle x di O con velocità v. La forma esplicita di (1.1) è:

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \alpha\Delta x - \delta c\Delta t\\ c\Delta t' &= -\epsilon\Delta x + \zeta c\Delta t\\ \Delta y' &= \Delta y;\ \ \Delta z' = \Delta z\ ,\end{aligned}$$

con $\alpha, \delta, \epsilon, \zeta$ da determinare. Inoltre:

$$s' = (\zeta^2-\delta^2)(c\Delta t)^2 - (\alpha^2-\epsilon^2)(\Delta x)^2 - 2(\epsilon\zeta-\alpha\delta)(\Delta x)(c\Delta t) - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2\ .$$

Ponendo $\lambda = 1$ nella (1.2) dobbiamo richiedere $s' = s$, cioè:

$$\begin{aligned}\zeta^2 - \delta^2 &= \alpha^2 - \epsilon^2 = 1\\ \epsilon\zeta - \alpha\delta &= 0\ .\end{aligned}$$

La (1.8) si risolve con:

$$\begin{aligned}\alpha &= \zeta = \cosh(\theta)\\ \delta &= \epsilon = \sinh(\theta)\ ,\end{aligned}$$

dove θ è un parametro reale (la *rapidità*) collegato alla velocità relativa tra O e O'. Infatti, se poniamo $\Delta x' = 0$ nella (1.8), il secondo membro deve dare l' equazione oraria di un oggetto fermo in O' visto da O, cioè $\Delta x = v\cdot\Delta t$. Confrontando otteniamo:

$$\tanh(\theta) = \frac{v}{c}\ , \tag{1.8}$$

e quindi, dalla (1.8), troviamo la forma ben nota della trasformazioni di Lorentz speciali:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) \\ c\Delta t' &= \gamma(-\beta \Delta x + c\Delta t) \\ \beta = \frac{v}{c} \quad &, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ . \end{aligned} \tag{1.9}$$

Commenti.

- Dalla (1.8) vediamo che la velocità di un sistema fisico non può superare c;
- Newton faceva l'ipotesi di un tempo universale, che scorre uguale in tutti i sistemi di riferimento. Se, invece di usare il *Principio (3)*, poniamo $t' = t$, le trasformazioni di Lorentz speciali si riducono alle *trasformazioni di Galileo*:

  $$\begin{aligned} x' &= x - v \cdot t \\ t' &= t \end{aligned}$$

  che si ottengono dalle (1.9) nel limite $c \to \infty$ (*limite non-relativistico*).
- Le rotazioni in uno spazio euclideo lasciano invariante la lunghezza pitagorica: $s_E = x^2 + y^2 + ...$ In corrispondenza, esse soddisfano alla relazione di ortogonalitá $R \cdot R^T = 1$, analoga alla (1.7) salvo la sostituzione della matrice g con $\mathbb{1}$.

Problema 1. Mostrare se Λ_1 e Λ_2 soddisfano la (1.7) anche il loro prodotto righe per colonne, $\Lambda_1 \cdot \Lambda_2$ la soddisfa.

Problema 2. Mostrare che eseguendo due trasformazioni di Lorentz speciali con rapiditá θ_1 e θ_2 si ottiene una trasformazione di Lorentz con rapiditá $\theta_1 + \theta_2$. Derivare da qui la legge di composizione delle velocitá:

$$v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}} \ .$$

1.2 Trasformazioni di Lorentz proprie e ortocrone

Dalla (1.7), prendendo il determinante di ambo i membri, troviamo la condizione:

$$\det(\Lambda) \cdot \det(g) \cdot \det(\Lambda^T) = \det(\Lambda)^2 \det(g) = \det(g) \ , \tag{1.10}$$

quindi deve essere $\det(\Lambda) = \pm 1$: il gruppo di Lorentz è costituito da almeno due componenti sconnesse tra loro. Solo la componente con determinante uguale a $+1$ (trasformazioni di Lorentz *proprie*) è connessa con continuità alla trasformazione identità. Le trasformazioni con determinante -1 sono dette *improprie*. Un esempio importante di trasformazione impropria è la *trasformazione di Parità*, indicata con P:

$$P : \vec{x}' = -\vec{x}, \ .t' = t \ . \tag{1.11}$$

La componente delle trasformazioni proprie è a sua volta costituita da due componenti sconnesse, che sono distinte dal fatto di cambiare o no il verso del tempo. Gli eventi di coordinate $(t, \vec{0})$ in O descrivono, al variare di t, la storia di un orologio fermo nell'origine di O. Se applichiamo la relazione (1.1) troviamo:

$$t' = \Lambda^0_0 \cdot t \ ,$$

quindi, il segno di Λ^0_0 determina se gli orologi di O' vanno o no nello stesso verso degli orologi di O. Le trasformazioni caratterizzate da:

$$\Lambda^0_0 > 0 \tag{1.12}$$

si chiamano *ortocrone*. Evidentemente, se da O' passo ad un altro sistema di riferimento O'' con una trasformazione ortocrona, la trasformazione complessiva: $O \to O' \to O''$ è anch'essa ortocrona. Le trasformazioni caratterizzate dalla (1.12) formano dunque un sottogruppo delle trasformazioni di Lorentz. Un esempio importante di trasformazione impropria e non ortocrona è l' *inversione del tempo*, indicata con T:

$$T : \vec{x}'' = \vec{x}; \ \ t' = -t \ . \tag{1.13}$$

Combinando le trasformazioni P e T si ottiene l' *inversione totale*, I, che è una trasformazione non ortocrona anche se propria:

$$I : x'^{\mu} = -x^{\mu} \ . \tag{1.14}$$

I cambiamenti tra SI fisicamente realizzabili sono connessi con continuità alla trasformazione identica e sono ortocroni. Il Principio di Relatività deve valere strettamente solo per queste trasformazioni:

Le leggi della fisica sono invarianti per trasformazioni di Lorentz proprie e ortocrone il gruppo corrispondente si indica usualmente con $L^{\uparrow}_{+}$.

Commento. Nella fisica classica si è esteso tacitamente questo principio alle trasformazioni P e T. Tuttavia alcuni processi nucleari e subnucleari *non* sono invarianti sotto P (decadimenti β) o sotto T (decadimenti dei mesoni K neutri): la Natura non fa sconti. Per l'inversione totale, I, vale un discorso diverso. In Meccanica Quantistica Relativistica si può *dimostrare* l'invarianza delle leggi fisiche sotto l'azione combinata dell'inversione, I, e dell'operazione di scambio particella-antiparticella (teorema TPC).

1.3 Struttura causale dello Spazio-Tempo

L' invarianza per trasformazioni di Lorentz della lunghezza dell' intervallo tra due eventi, s, induce una decomposizione dello spazio-tempo in regioni con una diversa connessione causale ad un dato evento. Poniamo, per convenienza, un evento A all' origine delle coordinate spaziali e al tempo t=0, in un dato SI. Lo spazio-tempo degli eventi $(t, \vec{x})$ si decompone in quattro regioni *in modo indipendente dal sistema di riferimento scelto.*

- Eventi con $s = 0$. Si trovano sulle falde di due coni (*coni di luce*), che rappresentano le traiettorie dei raggi di luce uscenti da A (*cono futuro*) o convergenti in A (*cono passato*). Si indicano col nome di eventi di *tipo luce* (light-like).

- Eventi con $s > 0, t > 0$. Riempiono l' interno del cono di luce futuro: sono gli eventi che possono essere influenzati dall' evento A, in quanto raggiungibili da A con segnali fisicamente realizzabili che viaggiano con velocitá inferiore a c.

- Eventi con $s > 0, t < 0$. Riempiono l' interno del cono di luce passato: sono gli eventi che possono influenzare l' evento A, con segnali fisicamente realizzabili che viaggiano con velocitá inferiore a c. Questi e quelli del caso precedente si indicano col nome di eventi di *tipo tempo* (time-like, cfr. Problema 1)

- Eventi con $s < 0$. Sono all' esterno dei coni di luce: sono gli eventi che non possono avere alcuna relazione causale con A, perché questo richiederebbe segnali con velocitá superiore a c. Gli eventi in questa regione formano il *presente assoluto* di A. Si indicano col nome di eventi di *tipo spazio* (space-like, cfr. Problema 2)

In Meccanica Quantistica la non osservabilità simultanea di due grandezze fisiche è collegata all'influenza causale che la misura di una di esse può esercitare sulla misura dell'altra (ad esempio la misura di p e di x). Consideriamo due grandezze osservabili i cui apparati di misura sono localizzati in regioni finite dello spazio-tempo (osservabili locali). Quando la regione relativa ad una delle due osservabili sta interamente nel presente dell'altra, il principio di causalitá richiede che le due osservabili *debbano essere simultaneamente misurabili* e gli operatori corrispondenti devono commutare tra loro. Questo principio prende il nome di *Microcausalità* .

Problema 1. Usando le trasformazioni (1.9) mostrare che se un evento ha $s > 0$ è possibile trovare un SI in cui $x^\mu = (t, \vec{0})$ (in conseguenza, questi si chiamano eventi di *tipo tempo*, o time-like).

Problema 2. Mostrare che se un evento ha $s < 0$ è possibile trovare un SI in cui $x^\mu = (0, \vec{x})$ (in conseguenza, questi si chiamano eventi di *tipo spazio*, o space-like).

1.4 Vettori contravarianti e covarianti

Siano x^μ ed y^μ due 4-vettori che si trasformano secondo la (1.1). Nella letteratura, questi oggetti si indicano col nome di *vettori contravarianti* (indici in alto). Il prodotto scalare formato con il tensore metrico è invariante:

$$\begin{aligned} &(x \cdot y) = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^\mu y_\nu = y^\mu x_\nu \\ &(x' \cdot y') = (x \cdot y) \ . \end{aligned} \tag{1.15}$$

Nell' eq.(1.15) abbiamo introdotto dei vettori con gli *indici in basso*, comunemente indicati come 4-vettori *covarianti*. La legge di trasformazione di questi vettori, evidentemente, deve essere tale da fornire un invariante quando un vettore covariante viene moltiplicato per un vettore contravariante. In effetti è immediato ricavare questa legge partendo dalla (1.15):

$$y'_\mu = g_{\mu\nu} y'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho y^\rho \ .$$

Moltiplicando la (1.6) per $(\Lambda^{-1})^{\rho}_{\tau}$ troviamo:

$$g_{\tau\nu}\Lambda^{\nu}_{\sigma} = (\Lambda^{-1})^{\rho}_{\tau} g_{\rho\sigma}; \text{ ovvero :} \tag{1.16}$$
$$y'_{\mu} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}_{\rho} y^{\rho} = (\Lambda^{-1})^{\rho}_{\mu} g_{\rho\sigma} y^{\sigma} = (\Lambda^{-1})^{\rho}_{\mu} y_{\rho} \ ,$$

quindi: *i vettori covarianti si trasformano secondo la matrice* Λ^{-1}.

Il quadrivettore $\partial/\partial x^{\mu}$ trasforma secondo la

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \to \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \ , \tag{1.17}$$

cioè come un quadrivettore *covariante*. Quindi possiamo scrivere

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} \ , \ \vec{\nabla} \right) = \partial_{\mu} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} \ , \ -\vec{\nabla} \right) = \partial^{\mu} \ , \tag{1.18}$$

da cui segue che, dato un quadrivettore u

$$\partial_{\mu} u^{\mu} = \frac{\partial u^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \partial^{\mu} u_{\mu} \ , \tag{1.19}$$

e l'operatore dalambertiano è definito come

$$\Box = \partial_{\mu}\partial^{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \ . \tag{1.20}$$

In termini formali, i vettori covarianti sono gli elementi dell *spazio duale* allo spazio vettoriale dei vettori contravarianti. In generale, il duale $\widetilde{V}$ di uno spazio vettoriale V è definito come lo spazio dei *funzionali lineari sui vettori* y^{μ}, di funzioni, cioè, definite per ogni y e z, tali che:

$$f = f(y) \ ,$$
$$f(\alpha y + \beta z) = \alpha f(y) + \beta f(z)$$

con α e β dei numeri (nel nostro caso, numeri reali). È facile convincersi che ogni elemento f di $\widetilde{V}$ può essere scritto come:

$$f(y) = \sum_{\mu} f_{\mu} y^{\mu} = f_{\mu} y^{\mu} = (f \cdot y) \ , \tag{1.21}$$

quindi $\widetilde{V}$ ha le stesse dimensioni di V ed *esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di* V *e quelli di* $\widetilde{V}$ (F. Riesz).

Nel nostro caso, questa corrispondenza si realizza con la matrice metrica $g_{\mu\nu}$ che ci dà l' elemento di $\widetilde{V}$, $y_{\mu} = g_{\mu\nu} y^{\mu}$, che corrisponde a y^{μ}. Con questa relazione, gli elementi di $\widetilde{V}$ sono funzioni invarianti sotto trasformazioni di Lorentz:

$$f'(y') = f(y), \ \text{ se } \ y' = \Lambda y \ .$$

Usando la relazione (A.5) è immediato vedere che l'equazione precedente richiede le due leggi di trasformazione:

$$y'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} y^{\nu} \quad , \quad f'_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\rho}_{\mu} f_{\rho}$$

in modo tale che:

$$f'(y') = f'_{\mu} y'^{\mu} = f_{\rho} (\Lambda^{-1})^{\rho}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} y^{\nu} = f_{\rho} (\Lambda^{-1} \cdot \Lambda)^{\nu}_{\rho} y^{\nu} = f_{\rho} \delta^{\rho}_{\nu} y^{\nu} = f_{\rho} y^{\rho} = f(y)$$

dove δ^{ρ}_{ν} è la delta di Kronecker.

Capitolo 2

LA PARTICELLA LIBERA CLASSICA

2.1 Equazione oraria

Il moto nello spazio-tempo di una particella classica (cioè non quantistica) è descritto da un' equazione oraria: $x^\mu = x^\mu(t)$. Consideriamo l' intervallo che separa due posizioni molto vicine nel tempo e la sua lunghezza invariante:

$$\Delta x^\mu = (c\Delta t, \vec{v} \cdot \Delta t) \tag{2.1}$$
$$\Delta s = (\Delta x \cdot \Delta x) = (1 - \frac{v^2}{c^2})(c\Delta t)^2$$

Evidentemente, Δx^μ è un intervallo di tipo tempo, perché la particella viaggia a velocitá inferiore a quella della luce, quindi esiste un SI in cui Δx^μ ha solo la componente temporale. In questo SI la particella è ferma (nell' intervallo di tempo considerato) e $\sqrt{\Delta s}/c$ dá l' intervallo di tempo segnato da un orologio momentaneamente in quiete rispetto ad essa. La nuova variabile si chiama *tempo proprio* (proper-time) della particella e lo indicheremo con τ. Per la sua definizione, un intervallo di tempo proprio è un invariante relativistico e la relazione tra τ ed il tempo t nel SI da noi scelto, è data dalla relazione:

$$d\tau = \sqrt{1 - \beta^2}\, dt = \frac{dt}{\gamma(t)} \tag{2.2}$$

Se usiamo il tempo proprio per caratterizzare l' equazione oraria della particella, possiamo definire un quadrivettore velocitá, u^μ:

$$u^\mu = \frac{d\, x^\mu(\tau)}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu(t)}{dt} \tag{2.3}$$

u^μ è evidentemente un 4-vettore covariante, cioè si trasforma come x^μ. Notiamo il valore delle sue componenti e dell' invariante relativo:

$$u^\mu = \gamma(c, \vec{v}); \tag{2.4}$$
$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = u^\mu u_\mu = c^2 \tag{2.5}$$

In Meccanica non-relativistica, la quantitá di moto si definisce come $\vec{p} = m\vec{v}$, dove m è la massa inerziale. Analogamente definiamo il 4-vettore quantitá di moto come:

$$p^\mu = mu^\mu \tag{2.6}$$

dove m è una costante che caratterizza la particella e che evidentemente coincide con la massa inerziale per piccole velocitá. Per questo, m si chiama la *massa di riposo* della particella. La massa di riposo è un invariante relativistico, come si vede dalla relazione:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = (mc)^2 \tag{2.7}$$

La componente temporale di p^μ è legata all' energia della particella. Calcoliamola esplicitamente a partire dalla relazione:

$$p^2 = (mc)^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2 \tag{2.8}$$

da cui :

$$p^0 = \sqrt{(mc)^2 + (\vec{p})^2} \simeq \frac{1}{c}(mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m}) \tag{2.9}$$

dove il passaggio finale è valido per piccole velocitá. La componente temporale di p^μ, in questo limite, è eguale all' energia cinetica divisa per c piu' una costante legata alla massa di riposo. In meccanica classica, l' energia è sempre definita a meno di una costante, quindi possiamo identificare p^0 con l' energia della particella divisa per c:

$$p^\mu = (\frac{\epsilon}{c}, \vec{p}) \tag{2.10}$$

Arriviamo dunque alla conclusione importante che in una formulazione relativistica *la quantitá di moto e l' energia fanno parte di un unico oggetto fisico*, il 4-vettore impulso-energia (o 4-momento) p^μ.

Le leggi di trasformazione delle componenti di p^μ per trasformazioni di coordinate seguono immediatamente dalla natura di 4-vettore di p^μ . Nel caso particolare delle trasformazioni di Lorentz speciali lungo l' asse x, abbiamo (le quantitá con accento si riferiscono al SI O', quelle senza accento ad O):

$$\begin{aligned} p'^1 &= \gamma(p^1 - \beta\frac{\epsilon}{c}) \\ \frac{\epsilon'}{c} &= \gamma(-\beta p^1 + \frac{\epsilon}{c}) \\ p'^2 &= p^2; \;\; p'^3 = p^3 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Se la particella è in quiete in O, troviamo, in particolare:

$$\epsilon' = \gamma mc^2; \; p' = \gamma\beta mc \tag{2.12}$$

La velocitá della particella, in qualsiasi SI, è data da:

$$\beta = \frac{cp'}{\epsilon'} \tag{2.13}$$

Commento: Nel derivare il valore di p^0 nella (7.29) a partire dalla (2.8) abbiamo scelto la radice positiva. Sembra un passaggio innocuo, ma vediamolo meglio. La radice negativa è separata da quella positiva da un intervallo di almeno di $2mc^2$. In Meccanica Classica l' energia varia con continuitá, quindi se se assumiamo che la particella abbia $E > mc^2$ all' inizio, essa non potrá mai finire in uno stato con $E < -mc^2$. In Meccanica Quantistica, tuttavia, l' energia puo' variare con discontinuitá e non possiamo escludere transizioni da stati con $E > mc^2$ a stati con $E < -mc^2$. L' aggiramento di questa difficoltá porta direttamente al concetto di *antiparticella*.

2.2 Particelle di massa nulla

La condizione (2.7) permette di considerare il limite $m \to 0$. In questo caso, in qualunque SI:

$$\begin{aligned} &|\vec{p}| = p^0; \\ &\beta = 1 \end{aligned} \tag{2.14}$$

la particella viaggia alla velocitá della luce in qualsiasi stato di moto ed in qualsiasi SI. Evidentemente, i quanti di luce, fotoni, godono di questa proprietá: *il fotone è una particella con massa di riposo nulla.*

Nonostante la (2.7) ammetta un limite continuo per $m \to 0$, le particelle con massa $m > 0$ sono intrinsecamente diverse da quelle con massa nulla, comunque piccolo sia il valore di m: *il limite $m \to 0$ è intrinsecamente discontinuo.*

Il modo piu' semplice di ottenere questo risultato sta nel constatare che il gruppo di simmetria della quantitá di moto (il *Gruppo Piccolo* (little group) introdotto da E. Wigner) è diverso nei due casi.

- Se p^μ è il momento di una particella di massa non nulla, possiamo trovare un SI in cui p^μ ha solo la componente temporale (il suo *sistema di quiete*). Nel sistema di quiete, $p^\mu = (mc^2, \vec{0})$ e il gruppo di trasformazioni che lasciano invariato il momento è l' intero gruppo delle rotazioni dello spazio tridimensionale, O(3), il gruppo delle matrici ortogonali a tre dimensioni.

- Se p^μ è il momento di una particella di massa nulla, possiamo porlo nella forma: $p^\mu = (|\vec{p}|, \vec{p})$. Il gruppo di invarianza è adesso quello delle rotazioni nel piano ortogonale al versore di $\vec{p}$, le matrici ortogonali in due dimensioni, O(2), un gruppo commutativo molto piu' piccolo di O(3).

Si vede dunque che se facciamo tendere $m \to 0$ il gruppo piccolo cambia con discontinuitá da O(3) and O(2). In Meccanica Quantistica, il gruppo piccolo determina le proprietá dello *spin* della particella. Per una particella con massa, lo spin coincide con il momento angolare a riposo e gli stati formano quindi una rappresentazione del gruppo delle rotazioni in 3 dimensioni: una particella di spin S possiede $2S + 1$ stati di spin.

Al contrario, una particella di massa nulla non puo' essere messa a riposo, il suo momento angolare intrinseco è definito dalle rotazioni intorno a $\vec{p}$, gli elementi di O(2), che ammettono rappresentazioni unidimensionali corrispondenti a $S_z = n/2$ con un dato n intero. Se ammettiamo

la paritá, P, come una buona simmetria, devono esistere due stati con $S_z = \pm n/2$. Ad esempio, il fotone ha due stati di spin, corrispondenti a $S_z = \pm 1$ e non tre, come competerebbe ad una particella di spin 1.

2.3 Principio di Azione per la particella libera

I risultati della precedente Sezione sono talmente importanti da meritare una derivazione indipendente. Allo stesso tempo, questo ci permette di introdurre la formulazione della dinamica relativistica basata sul Principio di Azione, che ha un' importanza fondamentale nella Meccanica Quantistica.

Consideriamo una traiettoria nello spazio-tempo, $x^\mu(t)$, che parte ed arriva in due eventi fissati:

$$\begin{aligned} x^\mu(t_1) &= x_1^\mu = (ct_1, \vec{x}_1) \\ x^\mu(t_2) &= x_2^\mu = (ct_2, \vec{x}_2) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Data $x^\mu(t)$, possiamo definire l' *Azione*, $S(x_1^\mu, x_2^\mu)$:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{x}(t), \vec{v}(t))\, dt \tag{2.16}$$

La traiettoria effettivamente percorsa è determinata dal Principio di Azione:

- La traiettoria della particella corrisponde al minimo dell' Azione.

Nota la funzione Lagrangiana, il principio di Minima Azione dá luogo alle equazioni di Lagrange, che in Meccanica Classica rimpiazzano a tutti gli effetti le equazioni di Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} \tag{2.17}$$

La richiesta che le leggi del moto siano invarianti per cambiamento di SI si traduce nel semplice enunciato:

- L' Azione deve essere invariante per trasformazioni di Lorentz.

Applicato al nostro caso, questo vuol dire:

$$L(\vec{x}(t), \vec{v}(t))\, dt \;=\; invariante$$

Per una particella libera, l' unico invariante non trivialmente costante è il tempo proprio, $d\tau$ e quindi deve essere:

$$L(\vec{x}(t), \vec{v}(t))\, dt \;= -\alpha\, d\tau = -\alpha\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}\, dt \tag{2.18}$$

con α una costante. Il valore di α è determinato dal limite non relativstico, in cui L deve tendere all' energia cinetica della particella, $1/2mv^2$, a meno di una costante additiva irrilevante. Per piccoli valori di $v(t)$ troviamo:

$$\begin{aligned} L &\to -\alpha + \frac{\alpha v^2}{2c^2}; \\ &\to \quad \alpha = mc^2 \end{aligned} \tag{2.19}$$

quindi la Lagrangiana della particella libera è:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} \tag{2.20}$$

La quantitá di moto è data dal momento coniugato alla $\vec{x}$ mentre l' energia è l' Hamiltoniana. Troviamo quindi:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\gamma\vec{v} \\ H &= \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \gamma mc^2 \end{aligned} \tag{2.21}$$

I risultati in (2.21) confermano la definizione del 4-momento data nella (2.6).

Le equazioni di Lagrange che discendono dalla (2.20) e dalla (2.17) sono:

$$\frac{d}{dt}p^i = 0; \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2.22}$$

Inoltre, dalla condizione (2.7) troviamo:

$$p^0 dp^0 - \vec{p}\cdot d\vec{p} = 0 \tag{2.23}$$

e quindi:

$$\frac{d}{dt}p^0 = 0 \tag{2.24}$$

In totale, abbiamo ottenuto le equazioni del moto covarianti:

$$\frac{d}{dt}p^\mu = 0 = \frac{d}{d\tau}p^\mu \tag{2.25}$$

che esprimono la conservazione della quantitá di moto e dell' energia.

2.4 La relazione massa-energia

Per illustrare il significato dell' energia di riposo, consideriamo un sistema costituito da diverse particelle (in breve, un gas). Il 4-momento totale è dato, naturalmente, da:

$$\begin{aligned} P^\mu &= \sum_i p_i^\mu; \ i.e. \\ \vec{P} &= \sum_i \vec{p}_i; \quad cP^0 = E = \sum \epsilon_i \end{aligned} \tag{2.26}$$

Per un sistema di questo tipo esiste un SI in cui $\vec{P}' = 0$ (sistema del *centro di massa*). Questo si vede dalla (2.11): orientiamo $\vec{P}$ lungo l' asse x e richiediamo che sia $P'^1 = 0$. Troviamo:

$$\beta = \frac{cP}{E} \tag{2.27}$$

che è sempre in modulo minore di uno, visto che:

$$c|\vec{P}| < c\sum_i |\vec{p}_i| < \sum \epsilon_i = E \tag{2.28}$$

L' energia totale, E_0, in questo sistema di riferimento definisce la massa di riposo del sistema

$$E_0 = M_0 c^2 \tag{2.29}$$

mentre l' energia in un altro SI, , è data da una formula analoga alla (2.12):

$$= \gamma M_0 c^2 \tag{2.30}$$

Vediamo adesso piu' da vicino M_0. Nel limite in cui le particelle del gas sono non-relativistiche, abbiamo:

$$M_0 = \frac{1}{c^2}\sum_i \epsilon_i \simeq \sum m_i + \frac{T}{c^2} \tag{2.31}$$

dove T è l' energia cinetica contenuta nel gas. Se aumentiamo o diminuiamo questa energia, scaldando o raffreddando il gas stesso, la massa di riposo varia secondo la legge:

$$\Delta M_0 = \frac{\Delta E}{c^2} \tag{2.32}$$

Se introduciamo un' interazione tra le particelle del gas, questo aggiunge al seconde termine della (2.31) una quantitá V che puo' essere positiva o negativa.

La conclusione è che la massa di riposo di un sistema composto differisce dalla somma delle masse di riposo dei suoi costituenti e la differenza puo' essere liberata (o deve essere fornita) sotto forma di una quantitá di energia data ancora dalla relazione (2.32):

$$\Delta E = Q = (M_0 - \sum_i m_i)c^2 \tag{2.33}$$

Le (2.32) e (2.33) forniscono la relazione massa-energia di Einstein, dalle innumerevoli applicazioni in fisica e nella pratica.

D' ora in avanti, le masse delle particelle atomiche e subatomiche saranno date sempre in unitá di energia, secondo la (2.32), usando le unitá: 1 MeV = 1000 KeV = 10^6 eV.

Da ricordare:

- elettrone: $M_e = 0.511$ MeV;
- protone: $M_P = 938.27$ MeV; neutrone: $M_N = 939.57$ MeV;
- deutone: $M_D = 1875.61$ MeV.

Un esempio importante. L' energia emessa dal Sole è prodotta dalla fusione di quattro protoni in due nuclei di Elio. La fusione avviene attraverso una sequenza di rezioni, la cosiddetta sequenza P-P (questa è la sequenza principale; ci sono diverse sequenze secondarie studiate da H. Bethe negli anni '30; ricordare che $Protone = H^1$, $Deutone = H^2$):

$$P + P \rightarrow H^2 + e^+ + \nu \tag{2.34}$$
$$H^2 + P \rightarrow He^3 + \gamma \tag{2.35}$$
$$He^3 + He^3 \rightarrow He^4 + P + P \tag{2.36}$$

La reazione complessiva puo' essere scritta come:

$$4P + 2e^- \rightarrow He^4 + 2e^+ + 2e^- + 2\nu \tag{2.37}$$

I positroni si annichilano con gli elettroni del mezzo liberando energia. Quindi in totale, l' energia termica liberata ogni 4 protoni è:

$$E_{term} = Q - 2 < E_\nu > \tag{2.38}$$
$$Q = 4M_P + 2M_e - 2M_{He} = 26.7MeV$$

$< E_\nu >$ è l' energia media portata via dai neutrini, che lasciano il Sole indisturbati. L'energia dei neutrini è distribuita con continuitá tra zero (assumendo la massa del neutrino trascurabile) e il valore del Q nella formazione del deuterio:

$$Q(H^1 + H^1 \rightarrow H^2) = 2M_P - M_D - M_e = 0.42MeV \tag{2.39}$$

Commento. Secondo la Meccanica Quantistica Relativistica, esistono reazioni in cui alcune particelle possono essere create o distrutte, ad esempio l' annichilazione protone-antiprotone. In questi casi la variazione di energia nella relazione (2.32) include l' intera massa di riposo delle particelle coinvolte.

Problema. Sapendo che: (i) il Sole contiene circa N$= 10^{56}$ protoni, (ii) la costante solare (flusso di energia solare sulla Terra) è: $K_0 = 3.3 \cdot 10^{-2} cal\ cm^{-2}\ sec^{-1}$; (iii) la Terra dista dal Sole 8 $minuti-luce$, (iv) l' energia portata dai neutrini è trascurabile, sapreste stimare la durata di vita del Sole dalle (2.37) e (2.38)?

Risposta. Cominciamo col calcolare il flusso di energia del Sole, che è uguale a quello che attraversa una sfera di raggio pari alla distanza Terra-Sole. Dai valori della velocitá della luce e della costante solare, troviamo:

$$R = 1.4 \cdot 10^{13}\text{cm} \tag{2.40}$$
$$W_{sol} = 4\pi R^2 K_0 \simeq 3.6 \cdot 10^{26}\ \text{J/sec} = 2.2 \cdot 10^{39}\ \text{MeV/sec}$$

dove abbiamo usato:

$$1\text{cal} = 4.584\ \text{J} = 2.6 \cdot 10^{19}\ \text{eV} \tag{2.41}$$

Il numero di protoni che fondono per secondo, sulla base della (2.37) è quindi:

$$R = -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N = \tag{2.42}$$
$$= 4 \cdot W_{sol}/Q = 3.4 \cdot 10^{38} \text{ protoni/sec} = 3.4 \cdot 10^{-18} \cdot N \text{ sec}^{-1} = 1.1 \cdot 10^{-10} \cdot N \text{ anni}^{-1}$$

la vita del Sole, stimata in questo modo approssimato, è:

$$\tau = \lambda^{-1} \simeq 10 \text{ miliardi di anni} \tag{2.43}$$

che fornisce un ordine di grandezza giustificato dai dati astronomici.

Capitolo 3

TEORIA LAGRANGIANA DEI CAMPI

In Meccanica Classica si considerano due tipi di sistemi fisici. I punti materiali (particelle) che hanno per variabili dinamiche le coordinate $\vec{x}(t)$ e i campi (onde): sistemi dinamici descritti da una o piu' funzioni continue delle coordinate e del tempo:

$$\phi = \phi(\vec{x}, t) = \phi(x) \tag{3.1}$$

L' esempio piu' importante di questo tipo di sistema è il *campo elettromagnetico* descritto da due vettori in ogni punto, corrispondenti ai valori del campo elettrico, $\vec{E}(\vec{x}, t)$ e del campo magnetico $\vec{B}(\vec{x}, t)$.

3.1 Il Principio di Azione

In analogia con la meccanica dei sistemi ad un numero finito di gradi di libertá, è conveniente derivare le equazioni del campo da un Principio di Azione. Si introduce l' Azione come integrale sul tempo della Lagrangiana, tra due istanti fissati, $t_1 < t_2$:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{L}\, dt \tag{3.2}$$

La Lagrangiana di un sistema di punti è la somma sui diversi gradi di libertá. Nel caso del campo, i gradi di libertá sono localizzate in ogni punto dell spazio, quindi:

$$\mathbf{L} = \int d^3x\, \mathcal{L}(\phi, \phi_\mu, x) \tag{3.3}$$

dove abbiamo indicato con ϕ_μ le derivate dei campi rispetto alle coordinate:

$$\phi_\mu(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$$

La funzione L prende il nome di *densitá di Lagrangiana*, o anche semplicemente, per brevitá, Langrangiana e dipende dai campi (le variabili dinamiche) e dalle loro derivate. Le derivate temporali sono la generalizzazione delle velocitá, mentre la dipendenza della Lagrangiana dalle derivate spaziali permette di accoppiare tra loro i gradi di libertá in punti vicini nello spazio.

Abbiamo considerato una possibile dipendenza esplicita della Lagrangiana dalle coordinate spazio-temporali, per descrivere l' azioni di possibili agenti esterni al sistema dei campi. Per un sistema isolato, questa dipendenza non puo' esserci e la Lagrangiana dipende dalle coordinate solo attraverso i campi e le loro derivate.

In termini di L:

$$S = \int_{V_4} d^4x \; \mathcal{L}(\phi, \phi_\mu, x) \tag{3.4}$$

dove V_4 è la regione dello spazio-tempo limitata dalle ipersuperfici $\Gamma_1 : t = t_1$ e , $\Gamma_2 : t = t_2$.

Immaginiamo di fissare i valori dei campi su $\Gamma_{1,2}$. Il Principio di Minima Azione stabilisce che:

- l' effettiva evoluzione del campo tra questi valori è data dalle funzioni $\phi(x) = \bar{\phi}(\vec{x}, t)$ che rendono S minima, con condizioni su $\Gamma_{1,2}$ fissate.

Notiamo che la densitá di Lagrangiana non è fissata univocamente. Poichè nel Principio di Azione si stipula di tenere fissi i campi sui bordi di V_4, possiamo aggiungere alla densitá di Lagrangiana la divergenza di un qualsiasi 4-vettore senza cambiare il minimo dell' Azione e quindi le equazioni del moto.

Per ricavare le equazioni differenziali che determinano l' evoluzione del campo, poniamo:

$$\phi(x) = \bar{\phi}(x) + \delta\phi(x); \;\; \delta\phi(\vec{x}, t_1) = \delta\phi(\vec{x}, t_2) = 0 \tag{3.5}$$

la condizione di Minima Azione si traduce nell' equazione:

$$\delta S = 0 = \int d^4x \; [\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\delta(\partial_\mu)\phi] = \int d^4x \; [\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial_\mu\delta\phi] = \tag{3.6}$$
$$= \int d^4x \; [\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \; - \; \partial_\mu(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi})]\delta\phi \; + \; \int d^4x \; \partial_\mu(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\delta\phi)$$

poichè $\delta(\partial_\mu)\phi = \partial_\mu\delta\phi$. Dato che le variazioni dei campi si annullano al bordo della regione di integrazione, l' ultimo termine nella (3.6) è nullo. Inoltre, la (3.6) deve valere per variazioni $\delta\phi$ arbitrarie, quindi la funzione tra parentesi quadre si deve annullare identicamente in x. Troviamo cosi' le *equazioni di Eulero-Lagrange*:

$$\partial_\mu(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \tag{3.7}$$

un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali. Naturalmente, se abbiamo diversi campi ϕ^i, $i = 1, ..., N$, abbiamo un' equazione per ciascuna componente.

Nella meccanica Newtoniana, il moto di un punto è determinato se diamo posizione e velocitá ad un istante fissato. L' estensione di questo principio sta nel richiedere che L sia al piu' quadratica nelle derivate dei campi e noi seguiremo questo principio. In questo caso, $\partial\mathcal{L}/\partial\partial_\mu\phi$ è lineare in $\partial_\mu\phi$, l' equazione di Eulero-Lagrange è alle derivate seconde e la soluzione è determinata *una volta assegnati il campo e la sua derivata temporale* sull' ipersuperficie $t = t_1$.

Invarianza Relativistica L' invarianza relativistica della teoria si traduce nella semplice richiesta che l' Azione sia relativisticamente invariante. La misura nello spazio-tempo è essa stessa invariante, visto che, per una trasformazione di Lorentz, Λ:

$$d^4x' = det(\Lambda)d^4x = d^4x \tag{3.8}$$

quindi

- l' invarianza relativistica dell' Azione richiede che la densitá di lagrangiana L sia essa stessa invariante.

3.2 Hamiltoniana e formalismo canonico

Il passaggio al formalismo canonico inizia con la definizione del momento coniugato a ciascuna variabile dinamica. Nel caso di una teoria di campo, definiamo la *densitá di momento coniugato*:

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_t \phi} \tag{3.9}$$

e si intende che l' equazione (3.9) deve servire ad esprimere $\partial_t\phi$ in funzione di $\phi, \vec{\nabla}\phi, \pi$. Successivamente si definisce la *densitá di Hamiltoniana*:

$$\mathcal{H}(\pi, \phi) = \pi\partial_t\phi - \mathcal{L}; \;\; \mathbf{H} = \int d^3x\mathcal{H}. \tag{3.10}$$

Da notare che la densitá di Hamiltoniana è una grandezza ausiliaria: solo l' Hamiltoniana è fisicamente rilevante mentre la densitá di Hamiltoniana è definita a meno della 3-divergenza di un vettore, che si integra a zero quando i campi si annullano all' infinito.

Le equazioni del moto dei campi si ottengono semplicemente differenziando la (3.10) ed usando le equazioni di Eulero-Lagrange.

Poniamo:

$$\phi(x) = \bar{\phi}(x) + \delta\phi(x); \;\; \pi(x) = \bar{\pi}(x) + \delta\pi(x); \quad t = \bar{t} + \delta t \tag{3.11}$$

Troviamo allora:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{H} &= \int d^3x \left(\partial_t\phi \; \delta\pi + \pi\delta(\partial_t\phi) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\nabla}\phi} \cdot \delta(\vec{\nabla}\phi) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_t\phi}\delta(\partial_t\phi) \right) - \\ &- \int d^3x \; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\delta t = \\ &= \int d^3x \left(\partial_t\phi \; \delta\pi - \partial_t\pi \; \delta\phi - \vec{\nabla} \cdot (\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\nabla}\phi}\delta\phi) \right) - \int d^3x \; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\delta t \end{aligned} \tag{3.12}$$

dove abbiamo usato le equazioni di Eulero-Lagrange nella forma:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \vec{\nabla}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\nabla}\phi} = \partial_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_t\phi} = \partial_t\pi \tag{3.13}$$

Possiamo scartare la 3-divergenza dal differenziale dell' Hamiltoniana, ed otteniamo cosí:

$$\delta\mathbf{H} = \int d^3x \, (\partial_t\phi \, \delta\pi - \partial_t\pi \, \delta\phi) - \int d^3x \, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\delta t. \tag{3.14}$$

D' altro canto, dal fatto che la densitá di Hamiltoniana dipende da ϕ, $\vec{\nabla}\phi$ e π, risulta (sempre scartando 3-divergenze):

$$\delta\mathbf{H} = \int d^3x \left[\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi}\delta\pi + \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} - \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{\nabla}\phi}\right)\delta\phi\right] + \int d^3x \, \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\delta t \tag{3.15}$$

Eguagliando i coefficienti dei differenziali nelle (3.14) e (3.15), troviamo le equazioni di Hamilton:

$$\begin{aligned} \partial_t\phi &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi}; \\ \partial_t\pi &= -(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} - \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{\nabla}\phi}); \\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Nella seconda equazione appare la derivata rispetto a $\vec{\nabla}\phi$, dovuta al fatto che in $\mathcal{L}$, e quindi in $\mathcal{H}$, abbiamo trattato separatamente la dipendenza da ϕ e da $\vec{\nabla}\phi$. Di fatto tutto il termine tra parentesi corrisponde alla quantitá $(\partial H/\partial q)$ nel caso di un grado di libertá. Dalla terza equazione troviamo:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \int d^3x \, \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = -\int d^3x \, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \tag{3.17}$$

Per un sistema isolato, come abbiamo visto, la densitá di Lagrangiana puo' dipendere dal punto dello spazio-tempo solo attraverso i campi. Di conseguenza, per un sistema isolato ritroviamo la legge di conservazione dell' energia: L' Hamiltoniana di un sistema isolato è una costante del moto. Lo stesso vale sotto la condizione piu' debole che il sistema sia indipendente dal tempo.

Funzionali e derivate funzionali Da un punto di vista matematico, la Hamiltoniana in (3.10) è un *funzionale* della densità di hamiltoniana: una legge che ad ogni funzione data, $\mathcal{H}$, associa un numero. Il funzionale è quindi una funzione definita sullo spazio delle funzioni, piuttosto che sullo spazio dei reali o dei complessi. Analogamente a quello che si fa per le funzioni, possiamo introdurre il concetto di derivata di un funzionale al modo seguente.

Sia: $\mathbf{H}[f]$ un funzionale della funzione $f(\vec{x})$[1] . Definiamo la derivata funzionale a partire dalla variazione:

$$\delta\mathbf{H} = \mathbf{H}[f(\vec{x}) + \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\epsilon] - \mathbf{H}[f(\vec{x})] \tag{3.18}$$

ponendo:

$$\frac{\delta\mathbf{H}}{\delta f(\vec{y})} = lim_{\epsilon\to 0}\frac{\mathbf{H}[f(\vec{x}) + \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\epsilon] - \mathbf{H}[f(\vec{x})]}{\epsilon} \tag{3.19}$$

[1]in linea con il caso considerato in questa Sezione, consideriamo funzioni di una variabile tridimensionale. La generalizzazione ad altre dimensioni è ovvia.

Nel caso dell' Hamiltoniana abbiamo:

$$\mathbf{H} = \int d^3x \, \mathcal{H}(\phi, \pi) \tag{3.20}$$

da cui, ad esempio:

$$\frac{\delta \mathbf{H}}{\delta \pi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \tag{3.21}$$

Anche una normale funzione puó essere considerata un particolare funzionale, secondo la formula:

$$f(y) = \int dx \, \delta(x - y) f(x) \tag{3.22}$$

In questo caso, la variabile y che compare al primo membro è semplicemente un simbolo inerte, e $f(x)$ è l' argomento del funzionale. Per la derivata funzionale, si trova facilmente:

$$\frac{\delta f(y)}{\delta f(x)} = \delta(x - y) \tag{3.23}$$

Se introduciamo il concetto di derivata funzionale, il secondo membro delle equazioni di Hamilton prende un aspetto piú simile a quello del caso ad un numero finito di gradi di libertá. Applicando la definizione (3.19), le equazioni di Hamilton (3.17) si possono porre nella forma[2]:

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(x) &= \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta \pi(x)} \\ \partial_t \pi(x) &= -\frac{\delta \mathbf{H}}{\delta \phi(x)} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Parentesi di Poisson Le osservabili nel formalismo canonico sono, in genere, funzionali di $\pi(x)$ e $\phi(x)$. Date due osservabili, A e B, possiamo introdurre le *Parentesi di Poisson*, in analogia al caso finito dimensionale, definite come:

$$\{A, B\} = \int d^3x \left(\frac{\delta A}{\delta \phi(x)} \frac{\delta B}{\delta \pi(x)} - \frac{\delta B}{\delta \phi(x)} \frac{\delta A}{\delta \pi(x)} \right) = - \{B, A\} \tag{3.25}$$

Si dimostra facilmente che:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} &= \frac{\delta \pi(x)}{\delta \pi(y)} = 0 \\ \frac{\delta \phi(x)}{\delta \pi(y)} &= \delta^3(x - y) \end{aligned} \tag{3.26}$$

Usando le parentesi di Poisson possiamo dare ancora un' altra forma alle equazioni di Hamilton:

$$\begin{aligned} \partial_t \phi &= \{\phi, \mathbf{H}\} \\ \partial_t \pi &= \{\pi, \mathbf{H}\} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Le equazioni (3.26) e (3.27) sono il punto di partenza della quantizzazione canonica di una teoria di campo.

[2]Notiamo, sulla base della (3.19), che le dimensioni fisiche delle derivate funzionali che appaiono nelle equazioni precedenti sono eguali alle dimensioni di $\mathbf{H}$ meno le dimensioni di ϕ o di π meno [lunghezza^3], ovvero sono la dimensioni di $\mathcal{H}$ meno le dimensioni di ϕ o di π.

Problema Dimostrare che:

$$\{A,\{B,C\}\}+\{B,\{C,A\}\}+\{C,\{A,B\}\}=0 \tag{3.28}$$

3.3 Trasformazioni dei campi

Per costruire lagrangiane relativisticamente invarianti, dobbiamo partire dalle leggi di trasformazione dei campi, le relazioni che legano il campo osservato nel SI O, $\phi(x)$, al valore osservato in O', $\phi'(x')$, in corripondenza ad uno stesso evento nello spazio-tempo, descritto dalle coordinate x^μ e x'^μ in O e in O':

$$x'^\mu=\Lambda^\mu_\nu\, x^\nu \tag{3.29}$$

Il caso piu' semplice è quello di un *campo scalare* in cui i due valori sono gli stessi:

$$\phi'(x')=\phi(x) \tag{3.30}$$

Le derivate di ϕ si trasformano come vettori *covarianti*, Sez 1.4:

$$\frac{\partial\phi'(x')}{\partial x'^\mu}=\frac{\partial\phi(x)}{\partial x'^\mu}=\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\lambda}=(\Lambda^{-1})^\lambda_\mu\,\frac{\partial\phi}{\partial x^\lambda} \tag{3.31}$$

è immediato controllare che, invece, le derivate rispetto alle x_μ trasformano come vettori contravarianti:

$$\frac{\partial\phi'(x')}{\partial x'_\mu}=\Lambda^\mu_\lambda\,\frac{\partial\phi}{\partial x_\lambda} \tag{3.32}$$

In conseguenza, indicheremo le derivate come:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}=\phi_\mu=\partial_\mu\phi;\quad \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}=\phi^\mu=\partial^\mu\phi. \tag{3.33}$$

Con le derivate successive, si possono costruire tensori a molti indici, con le corrispondenti proprietá di trasformazione:

$$\phi^{\nu_1,\nu_2,\cdots}_{\mu_1,\mu_2,\ldots}(x)=\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu_2}}\ldots\frac{\partial}{\partial x_{\nu_1}}\frac{\partial}{\partial x_{\nu_2}}\ldots\phi(x); \tag{3.34}$$

$$(\phi')^{\nu_1,\nu_2,\cdots}_{\mu_1,\mu_2,\ldots}(x')=(\Lambda^{-1})^{\lambda_1}_{\mu_1}(\Lambda^{-1})^{\lambda_2}_{\mu_2}\ldots\Lambda^{\nu_1}_{\rho_1}\Lambda^{\nu_2}_{\rho_2}\ldots\phi^{\rho_1,\rho_2,\cdots}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots}(x)$$

Estendendo il caso del campo scalare, possiamo definire dei campi *tensoriali*, funzioni di x^μ dotate di un certo numero di indici in alto (covarianti), n_s, e in basso (contravarianti), n_g, $F^{\nu_1,\nu_2,\cdots}_{\mu_1,\mu_2,\ldots}(x)$ le cui leggi di trasformazione sono le stesse della (3.34):

$$(F')^{\nu_1,\nu_2,\cdots}_{\mu_1,\mu_2,\ldots}(x')=(\Lambda^{-1})^{\lambda_1}_{\mu_1}(\Lambda^{-1})^{\lambda_2}_{\mu_2}\ldots\Lambda^{\nu_1}_{\rho_1}\Lambda^{\nu_2}_{\rho_2}\ldots F^{\rho_1,\rho_2,\cdots}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots}(x) \tag{3.35}$$

Esempi importanti sono il tensore antisimmetrico di Maxwell, $F^{\mu\nu}(x)=-F^{\nu\mu}(x)$, che descrive il campo elettromagnetico, ed il campo vettoriale, $A^\mu(x)$, che descrive il potenziale vettore.

Il rango di un tensore (il numero di indici covarianti e contravarianti) si puo' ridurre contraendo gli indici con tensori invarianti (cioè tali che $T'=T$). Per le trasformazioni di Lorentz ci sono tre tipi di operazioni invarianti:

- contrazione di un indice covariante e uno contravariante con la delta di Kronecker: δ^{μ}_{ν};
- contrazione di due indici covarianti con il tensore: $g_{\mu\nu}$ (ovvero due indici contravarianti con $g^{\mu\nu}$);
- contrazione con il tensore di Levi-Civita: $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, completamente antisimmetrico e definito come:

$$\begin{aligned} &\epsilon_{0123} = +1 \\ &\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = 0 \ (\textit{due indici uguali}) \\ &\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \pm 1 : \ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 = \textit{permutazione pari/dispari di } 0123 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Per mostrare che il tensore di Levi-Civita è invariante, consideriamo:

$$X_{0123} = \epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\Lambda^{\mu_1}_0\Lambda^{\mu_2}_1\Lambda^{\mu_3}_2\Lambda^{\mu_4}_3 \tag{3.37}$$

X è la somma di tutti i prodotti formati con elementi presi da righe e da colonne tutte diverse tra loro, con il segno della permutazione che trasforma $(0, 1, 2, 3,)$ in $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$. Quindi $X = det\Lambda = 1$. Inoltre $X_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ se due indici sono eguali, $X_{\mu\nu\rho\sigma} = \pm 1$ a seconda che la permutazione sia pari o dispari. Ne segue:

$$\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\Lambda^{\mu_1}_{\rho_1}\Lambda^{\mu_2}_{\rho_2}\Lambda^{\mu_3}_{\rho_3}\Lambda^{\mu_4}_{\rho_4} = \epsilon_{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4} \tag{3.38}$$

e quindi l' invarianza richiesta.

I tensori di un dato rango n_s, n_g descrivono una varietá lineare. Un tensore si dice *riducibile* se questa varietá lineare contiene sottospazi invarianti sotto le trasformazioni (3.35) che siano non-triviali (cioè diversi da 0 e dalla varietá stessa). Altrimenti il tensore è *irriducibile*.

Eventuali sottospazi invarianti si possono ottenere proiettando il tensore generico con le operazioni invarianti descritte prima. Per un tensore irriducibile le operazioni invarianti danno zero o proiettano su tutto lo spazio di partenza.

Contraendo completamente gli indici di prodotti di campi tensoriali e delle loro derivate si ottengono tensori di rango nullo (privi di indici liberi) che sono invarianti (si trasformano come il campo scalare nella (3.30)). Queste combinazioni invarianti sono i blocchi con cui costruire la *densitá di lagrangiana*, che descrive la dinamica del campo.

Esempio 1. Un caso importante è quello dei tensori a due indici covarianti antisimmetrici. Evidentemente, questi tensori hanno $4 \cdot 3/2 = 6$ componenti indipendenti, che possono essere organizzate in 3-vettori al modo seguente:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & E^1 \\ -B^3 & 0 & B^1 & E^2 \\ B^2 & -B^1 & 0 & E^3 \\ -E^1 & -E^2 & -E^3 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

L' applicazione del tensore di Levi-Civita porta alla definizione del *tensore duale*, $\bar{F}^{\mu\nu}$:

$$\bar{F}^{\mu\nu} = g^{\mu\mu_1} g^{\nu\nu_1} \frac{1}{2}\, \epsilon_{\mu_1\nu_1\lambda\rho}\, F^{\lambda\rho} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu}{}_{\lambda\rho}\, F^{\lambda\rho} \tag{3.40}$$

Non è difficile vedere che $\bar{F}$ si ottiene da F con le sostituzioni: $\vec{E} \to -\vec{B}$; $\vec{B} \to \vec{E}$:

$$\bar{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^3 & -E^2 & -B^1 \\ -E^3 & 0 & E^1 & -B^2 \\ E^2 & -E^1 & 0 & -B^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

L' applicazione del tensore di Levi-Civita trasforma lo spazio di questi tensori in se stesso:

$$\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu}{}_{\lambda\rho}\, F^{\lambda\rho} = \bar{F}^{\mu\nu};\ \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu}{}_{\lambda\rho} \bar{F}^{\lambda\rho} = -F^{\mu\nu} \tag{3.42}$$

(abbiamo usato la relazione $\epsilon^{0123} = -1$). A partire da queste relazioni, possiamo definire due componenti irriducibili, che corrispondono agli autovalori $\pm i$ delle trasformazioni di dualitá (3.42):

$$\begin{aligned} &(X^{\pm})^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} \pm i\bar{F}^{\mu\nu} \\ &\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu}{}_{\lambda\rho}\, (X^{\pm})^{\lambda\rho} = \mp i (X^{\pm})^{\lambda\rho} \end{aligned} \tag{3.43}$$

Poichè abbiamo usato solo operazioni invarianti, la decomposizione (3.43) è invariante per trasformazioni di Lorentz e lo spazio dei tensori antisimmetrici a due indici si decompone in due sottospazi invarianti di dimensione 3 ciascuno.

Questi due sottospazi formano un complesso unico se aggiungiamo l' operazione Paritá (cfr. Cap. 1). Sotto Paritá, i vettori $\vec{E}$ e $\vec{B}$ si comportano, rispettivamente, come un vettore *polare* ed un vettore *assiale*:

$$P : \vec{E}(\vec{x}, t) \to -\vec{E}(\vec{-}x, t);\ \ \vec{B}(\vec{x}, t) \to +\vec{B}(\vec{-}x, t) \tag{3.44}$$

e quindi:

$$P : X^{\pm}(\vec{x}, t) = f(\vec{E} \mp i\vec{B}) \to f(-\vec{E} \mp i\vec{B}) = -f(\vec{E} \pm i\vec{B}) = -X^{\mp}(-\vec{x}, t) \tag{3.45}$$

Alle stesse conclusioni si arriva considerando i *due invarianti quadratici* che possiamo costruire a partire da F e $\bar{F}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{2}\, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = (\vec{E})^2 - (\vec{B})^2 \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2}\, \bar{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = (\vec{E} \cdot \vec{B}) \end{aligned} \tag{3.46}$$

La forma delle (3.46) suggerisce di considerare i vettori complessi:

$$\begin{aligned} &(\vec{Z})^{\pm} = \vec{E} \mp i\vec{B}; \\ &(\vec{Z})^{\pm} \cdot (\vec{Z})^{\pm} = L_1 \mp\ 2\mathcal{L}_2 \end{aligned} \tag{3.47}$$

I quadrati dei due 3-vettori sono separatamente conservati nelle trasformazioni di Lorentz, che quindi trasformano tra di loro le componenti di ciascuno di essi. La trasformazione di Paritá scambia evidentemente Z^+ con $-Z^-$.

Esempio 2. Tensori a due indici simmetrici, entrambi covarianti (o contravarianti): $T^{\mu\nu}$ (ovvero $T_{\mu\nu}$). In questo caso, la proiezione con $g_{\mu\nu}$ dá un invariante e lo spazio si decompone nello spazio dei tensori *simmetrici e senza traccia*, $g_{\mu\nu}\, T^{\mu\nu} = 0$, di dimensione 9, e in uno spazio unidimensionale dei tensori della forma $g^{\mu\nu}\, T$.

Commento. La classificazione dei tensori irriducibili è discussa in [1]. Da un punto di vista algebrico, si trova che il gruppo di Lorentz è equivalente al prodotto di due gruppi di rotazioni: $L_+^\uparrow = SU(2) \otimes SU(2)$. Quindi i tensori irriducibili sono caratterizzati da *due momenti angolari:* j_1 *e* j_2. I tensori che appartengono alla rappresentazion irriducibile (j_1, j_2) hanno dimensione $d = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$.

I quadrivettori (contravarianti o covarianti) corrispondono alla rappresentazione $(1/2, 1/2)$ di $SU(2) \otimes SU(2)$. I tensori a molti indici descritti prima si ottengono dai prodotti tensoriali di questa rappresentazione. Ad esempio, i tensori a due indici contravarianti: $T_{\mu,\nu}$ sono generati dal prodotto

$$(1/2, 1/2) \otimes (1/2, 1/2) = (1 + 0, 1 + 0) = [(1, 1) \oplus (0, 0)] \oplus [(1, 0) \oplus (0, 1)] \tag{3.48}$$

Abbiamo posto le parentesi per separare i tensori simmetrici (quelli senza traccia piu' la traccia) da quelli antisimmetrici. Notiamo la semplicitá con cui la legge di composizione dei momenti angolari riproduce la decomposizione in componenti irriducibili, in particolare la loro dimensionalitá.

Problema. Scrivere esplicitamente le trasformazioni delle componenti di $F^{\mu\nu}$ per trasformazioni di Lorentz Speciali (velocitá lungo l' asse 1) e mostrare che queste trasformano separatamente tra loro le componenti di $\vec{E} + i\vec{B}$ e $\vec{E} - i\vec{B}$. Questo risulatto dimostra ancora una volta la decomposizione di $F^{\mu\nu}$ in componenti invarianti (infatti, la stessa proprietá è evidentemente vera anche per le rotazioni spaziali, quindi per tutte le trasformazioni di $L_+^\uparrow$ che si ottengono combinando i due tipi di trasformazioni).

3.4 Simmetrie continue

Nelle Sezioni precedenti abbiamo fatto riferimento a due osservatori che studiano lo stesso sistema di eventi (ad esempio una certa configurazione fisica di campi) a partire da due differenti Sistemi Inerziali.

Il Principio di Relativitá richiede che i due SI siano assolutamente equivalenti, quindi ciascun osservatore arriverá, per suo conto, a descrivere la dinamica dei campi con un' Azione e una densitá di Lagrangiana che hanno la stessa dipendenza funzionale dai campi. L' invarianza

relativistica richiede allora:

$$S(\phi') = \int d^4x' \ \mathcal{L}[\phi'(x'), \phi'_\mu(x'), x'] = S(\phi) = \int d^4x \ \mathcal{L}[\phi(x), \phi_\mu(x), x] \tag{3.49}$$

se $\phi(x)$, x e $\phi'(x')$, x' sono le componenti del campo e le coordinate associate ad un dato evento nei due SI, eqq. (3.29) e (3.35).

Possiamo considerare l' eq. (3.49) da un altro punto di vista, come l' invarianza (o simmetria) dell' Azione per la trasformazione che sostituisce $\phi(x)$, x con $\phi'(x')$, x' in uno stesso sistema di riferimento:

$$\begin{aligned} &x \to x'; \\ &\phi(x) \to \phi'(x') \end{aligned} \tag{3.50}$$

Visto cosí, il Principio di Relativitá esprime semplicemente la simmetria dell' Azione sotto il gruppo di simmetria delle trasformazioni di Lorentz (proprie ed ortocrone) e possiamo studiare le conseguenze di questa simmetria allo stesso tempo di altre possibili simmetrie dellá Azione che pure prendono la forma generale (3.50), con diverse realizzazioni della legge di trasformazione.

Per quanto riguarda le coordinate, ci limiteremo ad aggiungere le *traslazioni dell' origine dello spazio tempo*. Queste trasformazioni, unite alle trasforrmazioni di Lorentz proprie e ortocrone, formano il *Gruppo di Poincaré*, che è il gruppo di simmetria naturale dello spazio-tempo della Relativitá Speciale.

Rientrano anche nella forma (3.50) le trasformazioni che cambiano i campi ma non le coordinate, $x' = x$, che prendono il nome di *simmetrie interne*, ad esempio le trasformazioni della fase dei campi complessi che considereremo estesamente nel seguito.

In questa Sezione ci restringiamo a trasformazioni che appartengono a *gruppi continui*. In questo caso, esistono trasformazioni infinitesimamente vicine alla trasformazione identica. Con i prodotti di trasformazioni infinitesime possiamo raggiungere tutte le trasformazioni del gruppo (almeno per quanto riguarda la componente connessa all' idenititá). Possiamo quindi esplorare le conseguenze della simmetria sotto un gruppo continuo restringendoci alle trasformazioni infinitesime.

Consideriamo quindi la trasformazione individuata dalle variazioni infinitesime:

$$\begin{aligned} &x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu; \\ &\phi'(x') = \phi(x) + \delta_T \phi \end{aligned} \tag{3.51}$$

Per semplicitá, abbiamo omesso nella (3.51) eventuali indici del campo ϕ, che sono sottointesi. Indichiamo $\delta_T \phi$ come la *variazione totale del campo*. Possiamo decomporre $\delta_T \phi$ al modo seguente:

$$\delta_T \phi = \phi'(x') \ - \ \phi(x) = \phi'(x') \ - \ \phi(x') \ + \ \phi(x') \ - \ \phi(x) = \delta\phi(x) \ + \ \partial_\mu \phi(x) \delta x^\mu \tag{3.52}$$

La variazione totale è la somma della *variazione funzionale*, $\delta\phi$, e di una traslazione di δx^μ.

Le trasformazioni del Gruppo di Poincaré e, a maggior ragione, le trasformazioni associate alle simmetrie interne lasciano invariante la misura d^4x. Questo richiede che:

$$d^4x' = ||\frac{\partial x'}{\partial x}|| d^4x = det(\delta^\lambda_\mu + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}) d^4x = d^4x \tag{3.53}$$

Se usiamo l' identitá:

$$det(1+\epsilon) = 1 + Traccia(\epsilon) \tag{3.54}$$

valida a meno di termini di ordine superiore nella matrice infinitesima ϵ, la condizione di invarianza della misura di integrazione prende la forma:

$$\begin{aligned} &1 = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu; \text{ ovvero :} \\ &\partial_\mu \delta x^\mu = 0 \end{aligned} \tag{3.55}$$

In queste condizioni, l' invarianza dell' Azione, eq. (3.49) richiede piú semplicemente l' invarianza della densitá di Lagrangiana:

$$\delta_T \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi', \partial\phi', x') - \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, x) = 0 \tag{3.56}$$

Nel caso delle trasformazioni di Lorentz, la richiesta è soddisfatta se costruiamo la densitá di Lagrangiana come polinomio nei campi e nelle loro derivate, saturando gli indici in modo invariante, come indicato nella Sezione precedente.

3.5 Il Teorema di Noether

Esplicitiamo la relazione (3.56) usando la (3.52). Troviamo:

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi}\delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu = \\ = [\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi})]\delta\phi + \partial_\mu[(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi})\delta\phi] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \end{aligned} \tag{3.57}$$

dove:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\mathcal{L}[\phi(x), \phi_\mu(x), x] \tag{3.58}$$

Usando le equazioni del moto e la relazione (12.31), otteniamo l' equazione di conservazione:

$$\partial_\mu[(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi})\delta\phi + \mathcal{L}\delta x^\mu] = 0 \tag{3.59}$$

Possiamo esprimere le variazioni infinitesime dei campi e delle coordinate come combinazioni lineari dei parametri infinitesimi che caratterizzano la trasformazione:

$$\delta x^\mu = \sum_A \epsilon_A\ (\Delta^A)^\mu(x);\ \ \delta\phi = \sum_A \epsilon_A\ (\Sigma^A)\phi \tag{3.60}$$

dove Δ^A e Σ^A sono le matrici che rappresentano i generatori delle trasformazioni infinitesime sulle coordinate e sui campi. Poichè la (10.21) deve essere soddisfatta per valori arbitrari dei parametri infinitesimi, otteniamo le equazioni di conservazione:

$$\partial_\mu(J^A)^\mu = \partial_\mu[(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\phi})\Sigma^A\phi + (\Delta^A)^\mu\ \mathcal{L}] \tag{3.61}$$

per le correnti associate a ciascun generatore infinitesimo. Il risultato (3.61) rappresenta il Teorema di Noether:

- Ad ogni generatore infinitesimo di una simmetria continua è associata una corrente conservata.

La corrente conservata è determinata dalla densitá di Lagrangiana, secondo la formula canonica:

$$(J^A)^\mu = (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, \partial_\mu \phi})\Sigma^A \phi + (\Delta^A)^\mu\, \mathcal{L} \tag{3.62}$$

La corrente conservata determina una costante del moto additiva, rappresentata dall' integrale su tutto lo spazio della sua componente temporale. Scriviamo:

$$(J^A)^\mu = ((J^A)^0, \frac{1}{c}\vec{J}^A) \tag{3.63}$$

e integriamo l' equazione di conservazione su un volume fisso ($x^0 = ct$):

$$\int_V d^3x [\frac{\partial}{\partial t}(J^A)^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}^A] = \frac{d}{dt} Q^A + \int_\Sigma d\sigma\ \vec{n} \cdot \vec{J}^A = 0 \tag{3.64}$$

dove $Q^A = \int_V d^3x\ (J^A)^0$. L' equazione (3.64) esprime il fatto che una variazione della carica contenuta all' interno del volume V è bilanciata da un corrispondente flusso della densitá di corrente attraverso la superficie Σ di V. Se estendiamo l' integrazione a tutto lo spazio, l' integrale di superficie si annulla, visto l' annullarsi dei campi all' infinito, ed otteniamo la legge di conservazione della *carica totale*:

$$\frac{d}{dt} Q^A = 0 \tag{3.65}$$

Se le trasformazioni di simmetria coinvolgono lo spazio tempo, l' indice A include uno o piu' indici vettoriali e la (3.62) si trasforma in realtá come un tensore di rango superiore.

Per simmetrie interne, in cui le trasformazioni del gruppo di simmetria non coinvolgono lo spazio tempo, la carica totale è un *invariante di Lorentz*. Per verificare questa proprietá, consideriamo due ipersuperfici: Γ_0, corrispondente a $t = 0$ nel nostro sistema di riferimento, e Γ_1, corrispondente a $t' = cost$ in un sistema trasformato di Lorentz. Integriamo l' equazione di conservazione nel volume 4-dimensionale limitato da queste due ipersuperfici. Otteniamo:

$$0 = \int\ \partial_\mu J^\mu\ d^4x = -\int_{\Gamma_0} n_\mu J^\mu d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_1} n'_\mu J^\mu d\Gamma_1 + I \tag{3.66}$$

dove n^μ ed n'^μ sono le normali alle due ipersuperfici, che puntano nella direzione tempo dei due sistemi di riferimento e I rappresenta il contributo delle superfici laterali del nostro 4-volume. Se facciamo tendere verso l' infinito queste superfici, $I \to 0$ ed abbiamo dunque:

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_0} n_\mu J^\mu d\Gamma_0 = \int_{\Gamma_1} n'_\mu J^\mu d\Gamma_1; \quad i.e. \\ &\int d^3x\ J^0(\vec{x}, t) = \int d^3x'\ J^0(\vec{x}', t'). \end{aligned} \tag{3.67}$$

Il teorema di Noether stabilisce l' esistenza di un dato numero di correnti conservate, ma non ne determina univocamente la forma. Possiamo aggiungere alla corrente nella (3.62) un altro

4-vettore purchè conservato, in virtu' delle equazioni del moto o per motivi algebrici. Un esempio del secondo caso è dato dalla 4-divergenza di un tensore antisimmetrico:

$$s^\mu = \partial_\lambda \, T^{\lambda\mu} \tag{3.68}$$

Se $T^{\lambda\mu} = -T^{\mu\lambda}$ la corrente s^μ è trivialmente conservata: $\partial_\mu \partial_\lambda T^{\mu\lambda} = 0$ in virtu' dell' antisimmetria di T. In questo caso, l' aggiunta di s^μ modifica la corrente ma non la carica conservata, in quanto:

$$\int d^3x \; s^0 = \int d^3x \; \partial_i \cdot T^{i0} = 0 \tag{3.69}$$

se i campi si annullano all' infinito.

3.6 Tensore impulso-energia e tensore dei momenti

Consideriamo esplicitamente la trasformazioni del gruppo di Poincarè, ottenute componendo le traslazioni nello spazio-tempo e le trasformazioni di Lorentz speciali.

1. *Traslazioni nello spazio-tempo.* Sono le trasformazioni di coordinate:

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu \tag{3.70}$$

con $a^\mu =$ costante. Per i campi, poniamo:

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{3.71}$$

(eventuali indici tensoriali di ϕ non sono toccati dalla trasformazione).

L' invarianza per traslazioni richiede:

$$\mathcal{L}(\phi', (\partial\phi)', x') = \mathcal{L}(\phi, (\partial\phi), x) \tag{3.72}$$

Ovvero, usando le (3.70) e (3.71):

$$\mathcal{L}(\phi, (\partial\phi), x + a) = \mathcal{L}(\phi, (\partial\phi), x) \tag{3.73}$$

L' invarianza per traslazioni richiede dunque che $\mathcal{L}$ non dipenda esplicitamente da x.

Dalla (3.71) ricaviamo la forma della variazione funzionale dei campi:

$$\begin{aligned} &\delta_T \phi = 0 = \delta\phi + (\partial_\mu \phi) a^\mu; \\ &\delta\phi = -(\partial_\mu \phi) a^\mu \end{aligned} \tag{3.74}$$

La corrente conservata ricavata dalla (3.62) e dalla (3.74) è un tensore di rango due che prende il nome di *tensore energia-impulso canonico*:

$$\begin{aligned} &T^{\mu,\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial^\nu \phi \; - \; g^{\mu\nu} \mathcal{L}; \\ &\partial_\mu \, T^{\mu,\nu} = 0 \end{aligned} \tag{3.75}$$

In effetti, la componente 00 è proprio la densitá di Hamiltoniana, definita nella Sez. 3.2.

$$T^{0,0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \phi} \partial_t \phi \; - \mathcal{L} = \pi \; \partial_t \phi \; - \; \mathcal{L} \tag{3.76}$$

in corrispondenza, l' integrale spaziale di $T^{0,0}$ è l' Hamiltoniana del sistema, l' integrale primo associata all' indipendenza dal tempo del sistema (cioè all' invarianza rispetto a traslazioni del tempo: $ct \to ct + a^0$):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \int d^3x \; T^{0,0} = E \\ \frac{d}{dt} E &= 0 \end{aligned} \tag{3.77}$$

L' energia è la componente temporale di un 4-vettore, le cui componenti spaziali sono la quantitá di moto. Possiamo dunque identificare:

$$\int d^3x \; T^{0,\mu} = \mathbf{P}^\mu \tag{3.78}$$

con il 4-momento complessivo del campo.

Il teorema di Noether ci assicura che le componenti di P^μ sono conservate per sistemi indipendenti dalla posizione nello spazio-tempo. Troviamo cosi' l' importante risultato secondo cui *conservazione di energia e momento sono conseguenza dell' invarianza per traslazioni spazio-temporali*. Per un sistema isolato, l' invarianza per traslazioni è associata all' omogenitá dello spazio-tempo: la conservazione del 4-momento per questi sistemi fornisce una prova concreta di questo importante fatto fisico.

2. *Trasformazioni di Lorentz*. Sono associate alle trasformazioni di coordinate:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \; x^\nu \tag{3.79}$$

Per trasformazioni infinitesime, poniamo:

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \epsilon^\mu_\nu \tag{3.80}$$

I parametri infinitesimi ϵ^μ_ν non sono indipendenti, perchè le matrici Λ devono essere tali da lasciare invariante il tensore metrico:

$$\begin{aligned} &\Lambda^T g \Lambda = g; \; i.e. \\ &\epsilon^\lambda_\mu \; g_{\lambda\nu} \; + \; g_{\mu\lambda} \; \epsilon^\lambda_\nu = \epsilon_{\mu\nu} + \epsilon_{\nu\mu} = 0 \end{aligned} \tag{3.81}$$

dove abbiamo tenuto i termini fino al primo ordine in ϵ ed abbiamo definito un nuove tensore infinitesimo con due indici contravarianti, $\epsilon_{\mu\nu}$. La condizione (3.81) ci dice che questo tensore deve essere antisimmetrico nei due indici. Le (3.79) si riscrivono come:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + g^{\mu\alpha} x^\beta \epsilon_{\alpha\beta}; \\ \delta x^\mu &= \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} (g^{\mu\alpha} x^\beta - g^{\mu\beta} x^\alpha) \end{aligned} \tag{3.82}$$

Le trasformazioni di Lorentz infinitesime dipendono dunque da sei parametri: tre per le rotazioni spaziali ($\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji};\ i \neq j = 1,2,3$) e tre per le trasformazioni di Lorentz speciali ($\epsilon_{0i} = -\epsilon_{i0};\ i = 1,2,3$).

Per campi tensoriali generici, le trasformazioni sono quelle date nella (3.35). Useremo qui una notazione piu' compatta che si applica anche al caso piu' generale di campi spinoriali. Definiamo un indice che percorre tutte le componenti indipendenti del campo, che indichiamo con M, N, etc. La trasformazione infinitesima associata ai parametri $\epsilon_{\mu\nu}$ ($\mu,\nu = 0,1,2,3$) sono trasformazioni sui campi ϕ_M date dalla combinazione lineare di $\epsilon_{\mu\nu}$ con sei matrici $\Sigma^{\mu\nu}_{MN}$, antisimmetriche in $\mu\nu$, associate ai generatori delle trasformazioni di Lorentz sui campi stessi:

$$\phi'_M(x') = (\delta_{MN} + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}_{MN})\phi_N(x) \tag{3.83}$$

(Il fattore 1/2 è convenzionale, la somma sugli indici ripetuti è sottointesa in tutti i casi).

La variazione funzionale dei campi si ottiene da $\delta_T\phi$:

$$\delta_T\phi_M = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}_{MN}\phi_N(x) = \delta\phi_M \ + \ \partial_\mu\phi_M\ \delta x^\mu;\ i.e. \tag{3.84}$$
$$\delta\phi_M = \frac{1}{2}[\Sigma^{\alpha\beta}_{MN}\phi_N(x) \ - \ \partial_\mu\phi_M\ (g^{\mu\alpha}x^\beta \ - \ g^{\mu\beta}x^\alpha)]\epsilon_{\alpha\beta}$$

Con queste posizioni, possiamo scrivere la corrente conservata infinitesima come:

$$\delta M^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_M}\ \delta\phi_M \ + \delta x^\mu\ \mathcal{L} = \tag{3.85}$$
$$= \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}[-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_M}\partial_\lambda\phi_M(g^{\lambda\alpha}x^\beta - g^{\lambda\beta}x^\alpha) + (g^{\mu\alpha}x^\beta - g^{\mu\beta}x^\alpha)\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_M}\Sigma^{\alpha\beta}_{MN}\ \phi_N] =$$
$$= \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}[(x^\alpha\ T^{\mu,\beta} - x^\beta\ T^{\mu,\alpha}) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_M}\Sigma^{\alpha\beta}_{MN}\ \phi_N]$$

Questo risultato ci porta a definire il *tensore canonico del momento angolare*:

$$M^{\mu[\alpha\beta]} = (x^\alpha\ T^{\mu,\beta} - x^\beta\ T^{\mu,\alpha}) + \Sigma^{\mu[\alpha\beta]}; \tag{3.86}$$
$$\Sigma^{\mu[\alpha\beta]} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_M}\Sigma^{\alpha\beta}_{MN}\ \phi_N;$$
$$\partial_\mu M^{\mu[\alpha\beta]} = 0$$

Le componenti associate alle rotazioni spaziali ($\alpha\beta = ij$) danno come carica conservata il momento angolare totale del campo, ad es.:

$$\mathbf{J}^1 = \int d^3x\ M^{0[23]} = \int d^3x[(x^2T^{0,3} - x^1T^{0,2}) + \Sigma^{0[23]}] \tag{3.87}$$

Commento. Sarebbe suggestivo identificare il primo termine nella (3.87) come dovuto al momento angolare orbitale ed il secondo al momento angolare intrinseco del campo (che in Meccanica Quantistica corrisponderá allo spin dei quanti del campo). In effetti, nel caso del campo scalare, il secondo termine è assente. Tuttavia, i due termini separatamente sono ambigui, come vedremo nella Sezione prossima. Ad esempio, possiamo ridefinire il tensore energia-impulso in modo da eliminare completamente il secondo termine. Le uniche quantitá definite univocamente sono le costanti del moto, $\vec{\mathbf{J}}$.

Il tensore energia-impulso simmetrico Nella Teoria della Relativitá Generale, le equazioni di Einstein, che collegano il tensore energia-impulso alla geometria dello spazio-tempo, richiedono che il tensore energia-impulso sia simmetrico nei due indici. In generale, il tensore energia-impulso canonico definito dalla (3.75) non è simmetrico. Tuttavia, facendo uso delle ambiguitá inerenti la sua definizione, è possibile costruire un nuovo tensore energia-impulso, $\theta^{\mu\nu}$, simmetrico e conservato allo stesso tempo. La costruzione generale è dovuta a Belinfante e Rosenfeld [3].

Il punto di partenza per la costruzione di $\theta^{\mu\nu}$ è l' equazione di conservazione di $M^{\mu[\alpha\beta]}$. Usando la (3.86), troviamo:

$$0 = \partial_\mu M^{\mu[\alpha\beta]} = T^{\alpha,\beta} - T^{\beta,\alpha} + \partial_\mu \Sigma^{\mu[\alpha\beta]} \tag{3.88}$$

La parte antisimmetrica di $T^{\mu,\nu}$ puo' essere quinidi eliminata in favore della 4-divergenza di Σ, e possiamo definire la *parte simmetrica di* $T^{\mu,\nu}$ secondo la :

$$S^{\mu\nu} = T^{\mu,\nu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda \Sigma^{\lambda[\mu\nu]} = S^{\nu\mu} \tag{3.89}$$

Questo tensore non è ancora la soluzione del problema, in quanto $S^{\mu\nu}$ non è conservato:

$$\partial_\mu S^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\lambda \partial_\mu \Sigma^{\lambda[\mu\nu]} \tag{3.90}$$

Tuttavia, questo risultato coincide con la 4-divergenza del tensore simmetrico:

$$R^{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}[\partial_\lambda \Sigma^{\mu[\lambda\nu]} + \partial_\lambda \Sigma^{\nu[\lambda\mu]}]; \tag{3.91}$$

$$\partial_\mu R^{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}\partial_\lambda \partial_\mu \Sigma^{\mu[\lambda\alpha]}$$

Definiamo quinidi:

$$\theta^{\mu\nu} = T^{\mu,\nu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda [\Sigma^{\lambda[\mu\nu]} + \Sigma^{\mu[\nu\lambda]} - \Sigma^{\nu[\lambda\mu]}] \tag{3.92}$$

il nuovo tensore è simmetrico e conservato. Calcoliamo la carica corrispondente:

$$\int d^3x\ \theta^{0\nu} = \int d^3x [T^{0,\nu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda (\Sigma^{\lambda[0\nu]} + \Sigma^{0[\nu\lambda]} - \Sigma^{\nu[\lambda 0]})] \tag{3.93}$$

Nei termini con le derivate dobbiamo tenere solo quelli con $\lambda = 0$, i termini con le derivate spaziali corrispondono a termini di superficie che si annullano all' infinito. Otteniamo:

$$\int d^3x\ \theta^{0\nu} = \int d^3x [T^{0,\nu} + \frac{1}{2}(\partial_0 (\Sigma^{0[0\nu]} + \Sigma^{0[\nu 0]} - \Sigma^{\nu[00]})] = \int d^3x\ T^{0,\nu} \tag{3.94}$$

data l' antisimmetria di $\Sigma^{\mu[\nu\lambda]}$ in $\nu\lambda$. Quindi il tensore $\theta^{\mu\nu}$ è un sostituto perfettamente legittimo del tensore energia-impulso canonico.

Una conseguenza importante di quanto visto dianzi è che possiamo costruire un nuovo tensore dei momenti basato su $\theta^{\mu\nu}$:

$$\widetilde{M}^{\mu[\alpha\beta]} = x^\alpha \theta^{\mu\beta} - x^\beta \theta^{\mu\alpha} \tag{3.95}$$

Questo nuovo tensore è conservato, poichè θ è simmetrico e conservato, e rappresenta un legittimo sostituto del tensore canonico. Notiamo che, apparentemente, il momento angolare è ora esclusivamente orbitale, la prova che la separazione tra momento orbitale e momento di spin non è fisicamente significativa in una teoria relativistica.

Con il nuovo tensore dei momenti possiamo analizzare le costanti del moto associate alle trasformazioni di Lorentz speciali. Troviamo:

$$K^i = \int d^3x \widetilde{M}^{0[0i]} = \int d^3x (ct\theta^{0i} - x^i\theta^{00}) = cost. \tag{3.96}$$

La costanza di K^i esprime semplicemente il fatto che il baricentro dell' energia, per un sistema isolato, si muove di moto rettilineo uniforme:

$$\begin{aligned} < x^i > &= \frac{\int d^3x\ x^i\theta^{00}}{\int d^3x\ \theta^{00}} \\ < x^i > &= ct \cdot \frac{\int d^3x\ \theta^{0i}}{\int d^3x\ \theta^{00}} + cost. \end{aligned} \tag{3.97}$$

Problema. Mostrare che le cariche corrispondenti al tensore dei momenti nella (3.95) coincidono con quelle del tensore canonico (3.86). Capitolo 5

Capitolo 4

QUANTIZZAZIONE DELL' EQUAZIONE DI KLEIN GORDON

4.1 Il campo scalare reale

Il campo scalare reale fornisce l' esempio piu' semplice di quanto detto finora. Possiamo scegliere, in generale:

$$L = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \; - \; V(\phi) \tag{4.1}$$

m e' una costante di dimensione $[lunghezza]^{-1}$, $V(\phi)$ e' una funzione di grado superiore al secondo in ϕ.

Dalla (4.1) troviamo le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\Box\phi + m^2\phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \tag{4.2}$$

nel caso $V = 0$, troviamo l'*equazione di Klein-Gordon*:

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \tag{4.3}$$

che costituisce la piu' semplice equazione di campo relativistica.

Per costruire l' Hamiltoniana, calcoliamo la densita' di momento coniugato (ricordiamo che $x^0 = ct$):

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\partial_t \phi \tag{4.4}$$

cosicche':

$$H = \pi \, \partial_t \phi - L = \frac{1}{2}[c^2\pi^2 + (\tilde{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2 + V(\phi)] \tag{4.5}$$

La stabilita' del campo richiede che l' Hamiltoniana sia inferiormente limitata, al variare di ϕ su tutte le configurazioni possibili. Restringendoci alle configurazioni spazialmente costanti, vediamo dalla (4.5) che $V(\phi)$ *deve essere una funzione limitata inferiormente.*

Le equazioni di Hamilton sono:

$$\partial_t \phi = c^2 \pi; \tag{4.6}$$
$$\partial_t \pi = -(m^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi)$$

sostituendo la prima nella seconda ritroviamo, naturalmente, l' equazione relativisticamente invariante (4.2).

Commento. La (4.1) rappresenta la forma piu' generale di lagrangiana invariante e quadratica nelle derivate. Si potrebbe aggiungere un termine lineare in ϕ. Anche in presenza di un termine di questo tipo, il potenziale $V(\phi)$ nell' Hamiltoniana deve avere un minimo assoluto. Possiamo quindi eliminare il termine lineare con un cambiamento di variabile: $\phi' = \phi - \phi_0$, $\partial^\mu \phi' = \partial^\mu \phi$dove ϕ_0 e' il punto di minimo. Lo sviluppo di L in ϕ' non contiene piu' il termine lineare.

Detrminiamo adesso la soluzione generale dell' Equazione di Klein-Gordon. Riprendiamo l' equazione di Klein-Gordon (K-G):

$$(\Box + m^2)\phi = 0$$

che vogliamo risolvere con *condizioni periodiche* ai bordi di un grande volume cubico spaziale di spigolo L:

$$\phi(x, y, z, t) = \phi(x + L, y, z,),\ etc.$$

La soluzione generica ha la forma di un'onda piana:

$$\phi = N e^{-i k_\mu x^\mu};\ k^\mu = (k^0, \vec{k})$$

dove $\vec{k}$ e' il vettore numero d'onda. La condizione di periodicita' implica:

$$k^1 L = 2\pi n^1, etc. \rightarrow \vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n^1, n^2, n^3) \tag{4.7}$$

dove n^i sono interi relativi arbitrari. L'equazione di Klein-Gordon, a sua volta, richiede:

$$k_\mu k^\mu - m^2 = 0$$

da cui deduciamo le due soluzioni:

$$k^0 = \pm \frac{\omega}{c};\ \ \frac{\omega}{c} = \sqrt{(m)^2 + (\vec{k})^2} \tag{4.8}$$

La soluzione generale dell' equazione di K-G e' una sovrapposizione delle onde piane appena trovate. Per ogni $\vec{k}$ abbiamo due onde piane, a frequenza positiva, $e^{-i\omega t}$, e frequenza negativa, $e^{+i\omega t}$. Scriviamo:

$$\phi(x) = \Sigma_{\vec{n}} N(\omega)[a(\vec{k})\ e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + c(\vec{k})\ e^{+i(\omega t + \vec{k}\cdot\vec{x})}] \tag{4.9}$$

dove N e' un fattore di normalizzazione che definiremo tra poco e la somma va su tutti i vettori a componenti intere. Nel secondo termine possiamo sommare su $-\vec{n}$ e definire $c(-\vec{k}) = b^*(\vec{k})$:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \Sigma_{\vec{n}} N(\omega)[a(\vec{k})\ e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + b^*(\vec{k})\ e^{+i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}] = \\ &= \Sigma_{\vec{n}} N(\omega)[a(\vec{k})\ e^{-ik_\mu x^\mu} + b^*(\vec{k})\ e^{+ik_\mu x^\mu}]\end{aligned} \tag{4.10}$$

dove, da ora in poi, porremo $k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$.

La soluzione generale (4.10) produce un campo in generale complesso. Per un campo reale, dobbiamo avere $b(\vec{k}) = a(\vec{k})$ e troviamo:

$$\phi(x) = \Sigma_{\vec{n}} N(\omega)[a(\vec{k})\ e^{-ik_\mu x^\mu} + a^*(\vec{k})\ e^{+ik_\mu x^\mu}] \tag{4.11}$$

La ϕ data dalla (4.11) e' reale e dipende da due funzioni reali di $\vec{k}$, la parte reale e la parte immaginaria di $a(\vec{k})$. Questo corrisponde al fatto che per determinare completamente ϕ occorre dare due complessi di dati iniziali: i valori di $\phi(\vec{x}, 0)$ e di $\partial_t\phi(\vec{x}, 0)$.

Per concludere questa Sezione, possiamo dare esplicitamente la relazione tra $a(\vec{k})$ e i dati iniziali. Consideriamo il sistema di funzioni $f_{\vec{k}}(x)$, soluzioni delle' quazione di K-G a frequenza positiva:

$$f_{\vec{k}}(x) = Ne^{-ik_\mu x^\mu} \tag{4.12}$$

Usando le condizioni di ortonormalita' delle funzioni esponenziali, possiamo calcolare le due proiezioni (ricordiamo che $\omega(\vec{k}) = \omega(-\vec{k})$):

$$\begin{aligned}X &= \int d^3x\ [(\partial_t f_{\vec{k}}(\vec{x}, t))^*\ \phi(\vec{x}, t)]_{t=0} = i\omega(\vec{k})N^2\ V[a(\vec{k}) + a^*(-\vec{k})]; \\ Y &= \int d^3x\ [(f_{\vec{k}}(\vec{x}, t))^*\ \partial_t\phi(\vec{x}, t)]_{t=0} = -i\omega(\vec{k})N^2\ V[a(\vec{k}) - a^*(-\vec{k})];\end{aligned}$$

da cui possiamo ricavare $a(\vec{k})$. Se scegliamo $N = (2\omega(\vec{k})V)^{-1/2}$, si trova:

$$\begin{aligned}a(\vec{k}) &= i(Y - X) = i \int d^3x[f^*_{\vec{k}} \cdot (\partial_t\phi) - (\partial_t f^*_{\vec{k}}) \cdot \phi]_{t=0} \\ \phi(x) &= \Sigma_{\vec{n}} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}}\ [a(\vec{k})\ e^{-ik_\mu x^\mu} + a^*(\vec{k})\ e^{+ik_\mu x^\mu}]\end{aligned} \tag{4.13}$$

Il campo di Klein-Gordon complesso. L' estensione al caso di un campo complesso e$'$ immediata. La lagrangiana si scrive:

$$L = (\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi^*) - m^2\phi\phi^*\ -\ V(\phi\phi^*) \tag{4.14}$$

che conduce di nuovo all' equazione di Klein-Gordon (4.3) per ϕ e ϕ^*.

La lagrangiana (4.14) esibisce una simmetria per cambiamenti di fase costante, questa volta una simmetria interna:

$$\phi(x) \to e^{i\alpha}\phi(x); \quad \phi(x)^* \to e^{-i\alpha}\phi(x)^* \tag{4.15}$$

In termini della parte reale ed immaginaria di ϕ:

$$\phi = \frac{\phi^1 + i\phi^2}{\sqrt{2}}$$

la lagrangiana (4.14) si riduce alla somma di due lagrangiane identiche per i campi reali ϕ^1 e ϕ^2. La simmetria (4.15), in questa nuova rappresentazione, corrisponde ad una rotazione ortogonale dei campi $\phi^{1,2}$ tra di loro:

$$\phi^i = \mathcal{O}^{ij}\phi^j \quad \mathcal{O}^T\mathcal{O} = 1 \tag{4.16}$$

Il campo complesso ϕ si puo' di nuovo sviluppare nelle soluzioni dell' equazione di Klein-Gordon secondo la (4.10) ma ora $a(\vec{k})$ e $b(\vec{k})$ sono indipendenti:

$$\phi(x) == \Sigma_{\vec{n}} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}}[a(\vec{k})\ e^{-ik_\mu x^\mu} + b^*(\vec{k})\ e^{+ik_\mu x^\mu}] \tag{4.17}$$

Problema. Usando l' equazione di K-G, dimostrate che:

$$\int d^3x[f^*_{\vec{k}} \cdot (\partial_t\phi) - (\partial_t f^*_{\vec{k}}) \cdot \phi]$$

e' indipendente dal tempo: le ampiezze di oscillazione di ciascun modo normale del campo costituiscono un insieme di infinite costanti del moto.

Limite del continuo. L' inclusione del sistema in un cubo di spigolo L e' un artificio matematico che serve ad avere uno spettro discreto di soluzioni per l' equazione di K-G. Alla fine, occorre in genere passare al limite $L \to \infty$. La somma sui vettori interi, in questo limite, tende ad un integrale sulla densita' degli oscillatori, di cui diamo la forma esplicita. Dalla (4.7) si vede che l' intervallo Δn^1 corrisponde a $\frac{L}{2\pi}\Delta k^1$, etc.. Quindi:

$$\Sigma_{\vec{n}}... \to V \int \frac{\Delta k^1 \Delta k^2 \Delta k^3}{(2\pi)^3}... = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}...$$

4.2 Le funzioni di Green del campo scalare

Consideriamo, adesso, le soluzioni dell' equazione del moto del campo reale in presenza di una sorgente assegnata, J(x):

$$(-\Box - \mu^2)\phi(x) = J(x) \tag{4.18}$$

L' equazione omogenea associata e' l' equazione di Klein-Gordon, (4.3).

Le soluzioni della (4.18) si ottengono a partire dalla *funzione di Green* del problema, la soluzione dell' equazione relativa ad una sorgente puntiforme descritta da una funzione delta di Dirac localizzata nell' origine dello spazio-tempo:

$$(-\Box - \mu^2)G(x) = \delta^{(4)}(x) \tag{4.19}$$

Data la funzione di Green, la soluzione della (4.18) e' semplicemente:

$$\phi(x) = \int d^4x'\ G(x - x')J(x') \tag{4.20}$$

come si verifica facilmente.

Di funzioni di Green ce ne sono, naturalmente, un numero infinito, ciascuna determinata dalle particolari condizioni al contorno che assegnamo alla (4.19). Queste soluzioni differiscono tra loro per una soluzione dell' equazione omogenea, per cui la *soluzione generale* della (4.18) si scrive:

$$\phi(x) = \int d^4x' \; G(x - x')J(x') + \phi_0(x) \tag{4.21}$$

dove G e' una funzione di Green fissata e ϕ_0 la soluzione generale dell' equazione di K-G omogenea (4.3), che abbiamo caratterizzato in precedenza, (4.13).

Per risolvere la (4.19) si usano le trasformate di Fourier. Data una $f(x)$, definiamo la sua trasformata di Fourier (ci poniamo direttamente nel limite $V \to \infty$):

$$\tilde{f}(k) = \int \; d^4x \; f(x)e^{i(k\cdot x)}; \;\; f(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{f}(k)e^{-i(k\cdot x)} \tag{4.22}$$

L' eq.(4.19) e la (4.20) diventano quindi:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(k) &= \frac{1}{k^2 - \mu^2}; \\ \tilde{\phi}(k) &= \tilde{G}(k) \cdot \tilde{J}(k) \end{aligned} \tag{4.23}$$

Una soluzione particolare della (4.18) si trova formalmente dalla (4.23):

$$\phi(x) = \int d^4k e^{-i(k\cdot x)} \frac{1}{k^2 - \mu^2} \cdot \tilde{J}(k) \tag{4.24}$$

Per dare un significato preciso alla (4.24) dobbiamo tenere conto del fatto che il denominatore nell' integrale e' singolare nei punti che corrispondonon alla propagazione delle onde libere, (4.8). Per fare questo, e' conveniente porsi nel *piano complesso della variabile* k^0. Le singolarita' di $\tilde{G}$(k) si trovano sull' asse reale, per $k^0 = \pm\omega$, ed ogni particolare soluzione si trova assegnando un cammino nel piano complesso per l' esecuzione dell' integrale in k^0.

Per essere definiti consideriamo l' integrale:

$$F(x) = \int_C d^4k \; \frac{-1}{k^2 - \mu^2} \tilde{g}(k)e^{-i(kx)} \tag{4.25}$$

con $\tilde{g}$(k) una funzione data, analitica in k^0 e C un cammino assegnato nel piano complesso di k^0. Dobbiamo distinguere separatmente l' integrazione sui cammini chiusi e sui cammini aperti.
1. Cammini chiusi. Questi integrali danno soluzioni dell' equazione omogenea. Infatti, applicando l' operatore di Klein-Gordon, si ottiene un fattore $k^2 - \mu^2$ al numeratore dell'integrando, che elimina il polo; a questo punto possiamo ridurre a zero il cammino di integrazione, ottenendo quindi:

$$(\Box + \mu^2)F(x) = 0$$

Usando il teorema dei residui, si vede facilmente che l' integrale e' uguale a zero, se il cammino non include alcuna delle due singolaritá, ovvero e' una combinazione delle due soluzioni dell' omogenea, rappresentate dai residui degli integrali intorno a ciascune singolaritá.

Indichiamo con C^+ un cammino che gira (una sola volta!) in senso *orario* intorno al punto $k^0 = +\omega(k)$ e definiamo:

$$
\begin{aligned}
i\Delta^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^+} d^4k\; e^{-i(k\cdot x)}\frac{i}{k^2-\mu^2} = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\;\int_{C^+} dk^0 \frac{i}{(k^0-\omega)(k^0+\omega)} e^{-i(k\cdot x)}; \\
i\Delta^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-i(k\cdot x)}
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Analogamente, indichiamo con C^- il cammino che gira in verso orario intorno alla singolarita' in $k^0 = -\omega(k)$ e definiamo:

$$
\begin{aligned}
i\Delta^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^-} d^4k\; e^{-i(k\cdot x)}\frac{i}{k^2-\mu^2}; \\
i\Delta^{(-)}(x) &= \frac{-1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-i(-\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})} = \\
&= \frac{-1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2\omega} e^{+i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})} = \frac{-1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2\omega} e^{+i(k\cdot x)}
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Nella (4.26) e nella (4.27), $k^\mu = [+\omega(k), \vec{k}]$. Evidentemente,

$$
\Delta^{(-)}(x) = -\Delta^{(+)}(-x) = -[\Delta^{(+)}(x)]^*. \tag{4.28}
$$

In conclusione, l' integrale (4.25) su un cammino chiuso, C_0, da' una soluzione dell' equazione omogenea, combinazione lineare dei residui nei due poli:

$$
\begin{aligned}
\phi_0(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2\omega(k)}\tilde{g}(\vec{k})e^{-i(k\cdot x)} + \frac{-1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2\omega(k)}\tilde{g}(-\vec{k})e^{+i(k\cdot x)} = \\
&= \int \Delta^{(+)}(x-x')g(x') + \int \Delta^{(-)}(x-x')h(x')
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

dove abbiamo posto $\tilde{g}(\vec{k}) = \tilde{g}(\omega(k), \vec{k})$ e g ed h sono due funzioni indipendenti. La (4.29) ci da' una rappresentazione della soluzione generale della equazione omogenea che riproduce quella data in precedenza, nella (4.13), nel caso complesso (in cui $\tilde{g}(\vec{k})$ e $\tilde{g}(-\vec{k})$ sono indipendenti) e nel limite continuo, in cui:

$$
\tilde{g}(\vec{k}) = \sqrt{2\omega(k)V}\; a(\vec{k}) \tag{4.30}
$$

(da notare che nel limite continuo, $V \to \infty$, le $a(\vec{k})$ devono tendere a zero come $1/\sqrt{V}$ se vogliamo configurazoini del campo in cui l' energia totale del campo, piuttosto che la densitá di energia, sia finita).

2. Cammini aperti. Questi cammini danno, in genere, una soluzione dell' equazione inomogenea. Due cammini diversi danno lo stesso risultato se possiamo deformarli l' uno nell' altro senza incontrare i punti di singolarita' di $\tilde{G}$, altrimenti differiscono per combinazioni degli integrali intorno ai punti singolari, cioe' per soluzioni dell' equazione omogenea.

Tra le soluzioni particolari dell' equazioni omogenea, sono utili da notare quelle che corrispondono alla funzione di Green *ritardata* o alla funzione di Green *avanzata* o alla funzione di Feynman.

- La *funzione di Green ritardata*, G_{ret} corrisponde alla condizione che sia $G(x) = 0$ per $t < 0$, cioe' che la risposta sia diversa da zero solo *dopo* l' accensione della sorgente nell' origine delle coordinate (condizione di causalità). In questo caso, il cammino di integrazione deve essere tutto al *di sopra delle singolaritá*. Poniamo $k^0 = Re\ k^0 + i\eta$ e scriviamo esplicitamente l' esponenziale nella (4.25):

$$e^{-i(k\cdot x)} = e^{(-iRek^0 t + \eta t + ...)}$$

  Per $t < 0$ devo chiudere il cammino di integrazione nella parte superiore del piano complesso ($\eta > 0$). Per ottenere un risultato nullo, il cammino chiuso in questo modo non deve contenere le singolaritá, che devono quindi essere al disotto del cammino di integrazione. Al contrario, quando pongo $t > 0$ e chiudo il cammino di integrazione nel semipiano inferiore, il cammino include le due singolaritá, girando intorno in senso orario. Il risultato e' dunque:

$$i\Delta_{ret}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{Imk^0>0} d^4k \frac{i}{k^2-\mu^2} = \theta(t)[i\Delta^{(+)}(x) + i\Delta^{(-)}(x)] \tag{4.31}$$

- La condizione simmetrica, che G sia nulla per $t > 0$ porta alla *funzione di Green avanzata*:

$$i\Delta_{adv}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{Imk^0<0} d^4k \frac{-1}{k^2-\mu^2} = -\theta(-t)[i\Delta^{(+)}(x) + i\Delta^{(-)}(x)] \tag{4.32}$$

- La *funzione di propagazione di Feynman* si ottiene dalla condizione che essa coincida con $i\Delta^{(+)}(x)$ per $t > 0$ e con $-i\Delta^{(-)}(x)$ per $t < 0$. Questa condizione identifica un cammino di integrazione, C_F, che provenendo dall' asse reale negativo di k^0 passa *al di sotto* della singolarita' in $k^0 < 0$, e *al di sopra* di quella in $k^0 > 0$. In questo modo, per $t > 0$, quando devo chiudere nel semipiano inferiore, il cammino gira intorno al punto $k^0 = \omega$ in senso orario ed ottengo $i\Delta^{(+)}(x)$, mentre per $t < 0$ chiudo il cammino nel semipiano superiore, girando in senso antiorario intorno alla singolaritá in $k^0 < 0$. Lo stesso risultato si ottiene, evidentemente, integrando sull' asse reale, dopo aver spostato i poli nel piano complesso, di una grandezza infinitesima $\epsilon > 0$, al modo seguente:

$$k^0 = -\omega(k) \rightarrow k^0 = -\omega + i\epsilon;$$
$$k^0 = +\omega(k) \rightarrow k^0 = +\omega - i\epsilon$$

  In formule, otteniamo la definizione seguente:

$$\begin{aligned} i\,D_F(x) &= \int_{C_F} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-\mu^2}e^{-i(k\cdot x)} = \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{(k^0-\omega+i\epsilon)(k^0+\omega-i\epsilon)}e^{-i(k\cdot x)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-\mu^2+i\epsilon}e^{-i(k\cdot x)} = \\ &= \theta(t)i\Delta^{(+)}(x) - \theta(-t)i\Delta^{(-)}(x). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Le funzioni di propagazione $\Delta^{(\pm)}$(x) si possono esprimere in termini di funzioni note, vedi [5].

4.3 Quantizzazione del campo scalare

Riprendiamo la Lagrangiana classica del campo scalare complesso:

$$L = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \tag{4.34}$$

che riproduce l' equazione di Klein -Gordon (KG):

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0 \tag{4.35}$$

La Lagrangiana (4.34) é invariante per traslazioni nello spazio-tempo e per trasformazioni di Lorentz, sotto cui ϕ si trasforma come uno scalare:

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{4.36}$$

La Lagrangiana é, inoltre, invariante sotto le trasformazioni di fase:

$$\phi'(x) = e^{i\alpha}\phi(x);\ \phi'^\dagger(x) = e^{-i\alpha}\phi^\dagger \tag{4.37}$$

con α costante.

Dal Teorema di Noether seguono:

- il tensore energia-impulso (simmetrico, poiché non c'e' parte di spin):

$$\theta^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi^\dagger \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} L \tag{4.38}$$

- il tensore dei momenti:

$$M^{\mu,\alpha\beta} = x^\alpha \theta^{\mu\beta} - x^\beta \theta^{\mu\alpha} \tag{4.39}$$

- la corrente conservata corrispondente alle (4.37) (il fattore $1/\hbar$ e' inserito per una normalizzazione conveniente della carica):

$$J^\mu(x) = \frac{i}{\hbar}[\phi^\dagger(\partial^\mu \phi) - (\partial^\mu \phi^\dagger)\phi] \tag{4.40}$$

Dalla (4.35) si trovano immediatamente i momenti coniugati e l' Hamiltoniana:

$$\begin{aligned}
&\pi = \frac{\partial L}{\partial \partial_t \phi} = \partial_t \phi^\dagger;\ \pi^\dagger = \partial_t \phi \\
&H = \pi^\dagger \pi + \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^\dagger \phi;\ \mathbf{H} = \int d^3x\ H \\
&\mathbf{Q} = \int d^3x J^0(\mathbf{x}, t) = \frac{i}{\hbar} \int d^3x\ \left[\phi^\dagger(\partial^0 \phi) - (\partial^0 \phi^\dagger)\phi\right]
\end{aligned} \tag{4.41}$$

La quantizzazione canonica prevede che le parentesi di Poisson classiche per le variabili canoniche (cfr. Cap. 3) siano rimpiazzate dai *commutatori a tempi uguali*, secondo la regola:

$$\{A, B\} \to \frac{[A, B]}{i\hbar} \tag{4.42}$$

Dalle equazioni (3.26) otteniamo i *commutatori canonici a tempi uguali*:

$$\begin{aligned}
&[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = [\phi(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = 0 \\
&[\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = [\pi(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = 0 \\
&[\phi(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = 0 \\
&[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = [\phi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = i\hbar\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Possiamo anche riassumere i commutatori non nulli come:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \partial_t\phi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = i\hbar\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{4.44}$$

insieme alla equazione hermitiana coniugata. Le equazioni (A.25) determinano la struttura operatoriale della teoria, in particolare i commutatori delle variabili dinamiche con l' Hamiltoniana e quindi le equazioni del moto. É immediato infatti ottenere le equazioni di Hamilton[1]:

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi &= [\phi, \mathbf{H}] = i\hbar\phi^\dagger; \\
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\pi &= [\pi, \mathbf{H}] = i\hbar(\nabla \cdot \nabla - m^2)\phi^\dagger
\end{aligned} \tag{4.45}$$

da cui segue la (4.35). Notiamo la regola di commutazione carica-campo:

$$[\phi, \mathbf{Q}] = +\phi \tag{4.46}$$

Le soluzioni dell' equazione di KG sono della forma trovata nella Sez. 4.1. Infatti, l' equazione KG essendo lineare in ϕ, le soluzioni sono le stesse, che ϕ sia un c-numero o un operatore. Quelle che erano le ampiezze dei modi normali di oscillazione, $a(\vec{k})$ e $b(\vec{k})$, diventano ora degli operatori lineari, con regole di commutazione determinate dalle (A.25). (normalizziamo $a(\vec{k})$ e $b(\vec{k})$ in modo da eliminare $\hbar$ dalle loro regole di commutazione):

$$\phi(x) = \Sigma_{\vec{k}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega V}}[a(\vec{k})e^{-i(kx)} + b^\dagger(\vec{k})e^{i(kx)}] \tag{4.47}$$

Invertendo la relazione (4.47) troviamo:

$$\begin{aligned}
a(\vec{k}) &= i \int d^3x[f^*_{\vec{k}} \cdot (\partial_t\phi) - (\partial_t f^*_{\vec{k}}) \cdot \phi]_{t=0} =; \\
b(\vec{k}) &= i \int d^3x[f^*_{\vec{k}} \cdot (\partial_t\phi^\dagger) - (\partial_t f^*_{\vec{k}}) \cdot \phi^\dagger]_{t=0} \\
f_{\vec{k}} &= \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega(\vec{k})V}}e^{-ikx}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

[1]che si ottengono anche applicando la regola (4.42) alle parentesi di Poisson (3.27).

Dalle (A.25) troviamo quindi:

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'} \tag{4.49}$$

con tutti gli altri commutatori uguali a zero.

- Le regole di commutazione canonica danno agli operatori a, $a^\dagger$ e b, $b^\dagger$ la struttura di *operatori di creazione e distruzione* di oscillatori armonici quantistici, due tipi di oscillatore per ogni modo di vibrazione del campo classico.

Lo spazio di Hilbert su cui agiscono gli operatori di campo é costituito dal prodotto tensoriale degli stati dei diversi oscillatori. Piú precisamente, lo spazio degli stati comprende:

- lo *stato di vuoto*, lo stato in cui tutti gli oscillatori sono nel livello fondamentale. Matematicamente, $|0>$ é determinato dalla condizione di essere annullato dall' applicazione di ciascun operatore di distruzione:

$$a_s(\vec{p})|0>= b_r(\vec{q})|0>= 0, \text{ per ogni } s, r, \vec{p}, \vec{q}; \tag{4.50}$$

- gli stati con dati numeri di eccitazione dei diversi oscillatori, ottenuti applicando al vuoto gli operatori di creazione $a^\dagger$ e $b^\dagger$:

$$\begin{aligned} &|n_1, n_2, \ldots; m_1, m_2, \cdots >= \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \ldots m_1! m_2! \ldots}} \cdot \\ &\cdot [a^\dagger_{s_1}(\vec{p}_1)]^{n_1} [a^\dagger_{s_2}(\vec{p}_2)]^{n_2} \ \ldots [b^\dagger_{r_1}(\vec{q}_1)]^{m_1} [b^\dagger_{r_2}(\vec{q}_2)]^{m_2} \ldots |0> \end{aligned} \tag{4.51}$$

La natura fisica di questi oscillatori é chiarita dalla considerazione delle grandezze conservate, energia e momento del campo, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{P}$, e carica conservata, $\mathbf{Q}$. Sostituendo lo sviluppo (4.47) nelle (4.38) e (4.40) ed usando l' ortogonalitá delle onde piane, troviamo (senza mai cambiare l' ordine in cui compaiono gli operatori nelle diverse espressioni):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \int d^3x \ \theta^{00} = \Sigma_{\vec{k}} \ \hbar\omega(k) \ [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + b(\vec{k})b^\dagger(\vec{k})] \\ \mathbf{P}^i &= \int d^3x \ \theta^{0i} = \Sigma_{\vec{k}} \ \hbar k^i \ [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + b(\vec{k})b^\dagger(\vec{k})] \\ \mathbf{Q} &= \int d^3x \ J^0 = \Sigma_{\vec{k}} \ [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b(\vec{k})b^\dagger(\vec{k})] \end{aligned} \tag{4.52}$$

Possiamo adesso riordinare gli operatori in modo da avere sempre gli operatori di distruzione a destra, trovando:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \Sigma_{\vec{k}} \ \hbar\omega(k) \ [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})] \ + \ \text{cost.} \\ \mathbf{P}^i &= \Sigma_{\vec{k}} \ \hbar k^i \ [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})] \\ \mathbf{Q} &= \Sigma_{\vec{k}} \ [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})] \end{aligned} \tag{4.53}$$

Gli operatori ordinati danno tutti zero sullo stato di vuoto e danno il numero di occupazione dell' oscillatore corrispondente, quando applicati agli stati (4.51).

La costante (infinita) nell' espressione dell' energia rappresenta l' energia dello stato di vuoto che (finché restiamo nell' ambito della Teoria della Relativitá Speciale) é inosservabile. Misurando le energie a partire dall' energia del vuoto, la prima delle (4.53) mostra che tutti gli stati hanno *energia positiva*.

I valori dell' energia e del momento corrispondenti agli stati $a^\dagger(\vec{k})|0>$ sono quelli di una particella relativistica con 4-momento $p^\mu = (\hbar\omega(k), \hbar\vec{k})$ e $p_\mu p^\mu = (\hbar m)^2$. Il complesso degli stati che abbiamo trovato é quello di un gas perfetto quantistico formato da particelle identiche di due tipi (le particelle create dagli operatori $a^\dagger$ e $b^\dagger$), con eguale massa e con carica ± 1, rispettivamente.

Dalle regole di quantizzazione canoniche (A.25) vediamo che le particelle obbediscono alla statistica di Bose-Einstein: $n_1, n_2, \ldots, m_1, m_2, \ldots = 0, 1, 2, \ldots$.

Prodotti Normali La traduzione della Lagrangiana classica e delle altre osservabili del campo (energia, momento, etc.) soffre di una ambiguitá intrinseca, perché dobbiamo tradurre dei prodotti di grandezze classiche (commutanti) in prodotti di operatori lineari (in genere, non commutanti tra loro). Possiamo rimuovere questa ambiguitá definendo, come abbiamo appena fatto, i prodotti di operatori quantistici in modo che essi abbiano valore sul vuoto uguale a zero. Quando imponiamo questa condizione, diciamo di avere a che fare con *prodotti normali*, o *bene ordinati*

Per formalizzare questa condizione, osserviamo che gli operatori di campo sono la somma due componenti, caratterizzate dal segno del' esponenziale in t nello sviluppo in onde piane:

$$\begin{aligned} &\phi^{(+)}(x) \sim e^{-i(px)} \text{ (convenzionalmente, frequenza positiva)} \\ &\phi^{(-)}(x) \sim e^{+i(px)} \text{ (convenzionalmente, frequenza negativa)} \end{aligned} \tag{4.54}$$

Il prodotto normale di due operatori di campo é definito come quello ottenuto portando gli operatori a frequenza positiva *alla destra* dell' espressione ed ignorando il risultato di eventuali commutatori. Il prodotto normale si indica comunemente col simbolo N o, piú semplicemente incapsulando il prodotto tra i simboli dei due punti $(: \cdots :)$. Ad esempio:

$$\begin{aligned} &N(\phi(x)\phi^\dagger(y)) =: \phi(x)\phi^\dagger(y) :=: (\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x))((\phi^\dagger)^{(+)}(x) + (\phi^\dagger)^{(-)}(x)) := \\ &= \phi^{(+)}(x)(\phi^\dagger)^{(+)}(y) + (\phi^\dagger)^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x)(\phi^\dagger)^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(x)(\phi^\dagger)^{(-)}(y) \end{aligned} \tag{4.55}$$

Nel seguito, intenderemo che Lagrangiana, Hamiltoniana ed altre osservabili siano costruite con i prodotti normali dei campi. In corrispondenza, l' espressione dell' energia é data dalla (4.53) senza la costante infinita.

Capitolo 5

QUANTIZZAZIONE DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

5.1 Equazioni di Maxwell in forma covariante

Le equazioni che descrivono il comportamento del campo elettrico e del campo magnetico in presenza di densitá di carica, $\rho(\vec{x},t)$ e di corrente, $\vec{J}(\vec{x},t)$, assegnate si scrivono al modo seguente:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho \tag{5.1}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \tag{5.2}$$

$$\mathrm{rot}\vec{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{J} \tag{5.3}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0 \tag{5.4}$$

Queste equazioni si possono trascrivere immediatamente in forma covariante per trasformazioni di Lorentz [4].

Introduciamo il tensore antisimmetrico $F^{\mu\nu}$, collegato al campo elettrico e magnetico dalle relazioni:

$$\begin{aligned}&F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu}\\&F^{0i}=E^i;\ \ F^{12}=B^3,\ \text{etc.}\end{aligned} \tag{5.5}$$

e la 4-densitá di corrente:

$$j^\mu=(\rho,\frac{1}{c}\vec{j}) \tag{5.6}$$

Le equazioni di Maxwell non omogenee equivalgono alle equazioni:

$$\partial_\nu\ F^{\mu\nu}=j^\mu \tag{5.7}$$

mentre le equazioni omogenee si riducono alle equazioni:

$$\begin{aligned}&\partial_\mu F_{\nu\lambda}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}+\partial_\lambda F_{\mu\nu}=0;\\&(\mu\neq\lambda\neq\nu)\end{aligned} \tag{5.8}$$

Le equazioni omogenee prendono una forma piú simmetrica se esprimiamo i tre indici antisimmetrici in termini del tensore di Levi-Civita e $F^{\mu\nu}$ in termini del tensore duale introdotto nela Parte 1. Le equaioni diventano allora:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0 = \\ = \partial_\nu(\tilde{F}^{\mu\nu}) \tag{5.9}$$

L' eq. (5.9) esprime il fatto che *il tensore duale non possiede sorgenti*, a differenza di $F^{\mu\nu}$. Poiché il passaggio tra F ed $\tilde{F}$ comporta lo scambio tra campi elettrici e magnetici, le (5.9) indicano l' assenza di *monopoli magnetici*, cioé dell' analogo magnetico della carica elettrica.

Potenziale vettore Le equazioni (5.8) sono un vincolo sulle componenti di $\mathrm{F}^{\mu\nu}$. In conseguenza, non tutte le sei componenti di $\vec{E}$ e di $\vec{B}$ sono variabili indipendenti.

I modi di scegliere tre indici diversi, ciascuno con quattro possibili valori, sono evidentemente quattro e tante sono le equazioni omogenee indipendenti. In totale, quindi, il campo elettromagnetico contiene solo *due variabili dinamiche*. Un primo passo, per isolare le componenti indipendenti, consiste nell' osservare che le equazioni (5.8) sono identicamente soddisfatte dalla posizione:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \tag{5.10}$$

come si verifica immediatamente usando la forma data in (5.9). L' equazione (5.10) definisce un nuovo campo, indicato col nome di *potenziale vettore*. Notiamo le espressioni esplicite ($\Phi = A^0$ = potenziale scalare):

$$F^{0i} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -\partial_i\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}; \tag{5.11}$$

$$\vec{B} = \mathbf{rot}\vec{A} \tag{5.12}$$

Se usiamo come variabili dinamiche le componenti del potenziale vettore, le equazioni di Maxwell nel vuoto si possono ricavare da un Principio di Azione, a partire dalla lagrangiana di Maxwell:

$$L_{e.m.} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \tag{5.13}$$

Invarianza di gauge Le componenti di A^μ sono quattro variabili, quindi ancora ridondanti. Se eseguiamo una *trasformazione di gauge*:

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f \tag{5.14}$$

il nuovo potenziale vettore da' luogo alle stesse osservabili $\vec{E}$ e $\vec{B}$, *qualunque sia la funzione f.*

E' possibile e conveniente usare l' arbitrarieta' nella definizione di A^μ per imporre una condizione covariante su A^μ. Una condizione spesso usata e' la *condizione di Lorentz*:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{5.15}$$

E' facile vedere che questa condizione puo' *sempre* essere imposta. Se partiamo da un A^μ dato che non soddisfa la (5.15), possiamo ottenere un A'^μ equivalente che la soddisfa risolvendo l' equazione:

$$0 = \partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu(x) + \Box f(x) \tag{5.16}$$

che ha per incognita la $f(x)$. Possiamo dare esplicitamente una soluzione particolare di questa equazione in termini dell' inverso dell' operatore $\Box$. Tuttavia la soluzione non e' unica, in quanto l' equazione omogenea corrispondente

$$\Box f = 0 \tag{5.17}$$

ammette soluzioni non triviali (come abbiamo visto nel caso dell' equazione di Klein-Gordon). Questo e' in linea con il conteggio dei gradi di libertà. Tenendo conto della (5.15) scendiamo a tre gradi di libertà per A^μ, ma il conteggio precedente ci dice che i gradi di libertà devono essere due.

Purtroppo, la ulteriore condizione non puo' essere data, in generale, in forma covariante. Questa e' la fonte di numerosi problemi, che verrano affrontati e risolti nel seguito.

5.2 Funzioni di Green del campo eletromagnetico

In termini del potenziale vettore, le equazioni di Maxwell inomogenee, (5.7) si scrivono:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = J^\mu$$

che, se A^μ soddisfa la condizione di Lorentz (5.15), si riduce all' equazione delle onde:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = J^\mu \tag{5.18}$$

con la condizione supplementare che la corrente sia conservata:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \rightarrow k_\mu \tilde{J}^\mu(k) = 0 \tag{5.19}$$

Nel caratterizzare le soluzioni della (5.18) possiamo usare i risultati della Sezione precedente, nel limite di massa nulla, $\mu^2 \rightarrow 0$. Come abbiamo visto, le funzioni di Green dell' equazione di Klein-Gordon presentano singolaritá nella trasformata di Fourier, localizzate nei punti $k^0 = \pm\sqrt{\mu^2 + (\vec{k})^2}$. Nel discutere il campo elettromagnetico, conviene tenere in un primo tempo una massa fittizia, λ, piccola ma non nulla, per evitare che le singolaritá collidano tra loro quando $\vec{k} \rightarrow 0$. Il limite $\lambda \rightarrow 0$ si puo' effettuare alla fine dei calcoli.

Dalla (5.18), vediamo che la funzione di Green del potenziale vettore soddisfa l' equazione:

$$-\Box G^{\mu\nu}(x) = -g^{\mu\nu}\delta^{(4)}(x) \tag{5.20}$$

ovvero, per la trasformata di Fourier:

$$k^2 \tilde{G}^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu} \tag{5.21}$$

La soluzione della (5.18) si scrive quindi (nella gauge di Lorentz, con le condizioni al contorno di Feynman):

$$A^\mu(x) = lim_{\lambda\to 0}\left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-g^{\mu\nu}}{k^2-\lambda^2+i\epsilon}\tilde{J}_\nu(k)\; e^{-i(k\cdot x)}\right) + A_0^\mu(x) \tag{5.22}$$

dove A_0^μ soddisfa l' equazione delle onde libere.

Come indicato nel paragrafo precedente, la condizione di Lorentz non determina completamente la gauge e possiamo imporre un' ulteriore condizione. Per procedere, dobbiamo individuare una base appropriata su cui proiettare le quattro componenti di A^μ.

Fissiamo il quadrivettore $k^\mu = (\omega(k), \vec{k})$ e, in corrispondenza, un sistema di coordinate nello spazio-tempo individuato dai seguento quadrivettori:

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{1,2}^\mu = (0, \vec{\epsilon}_{1,2});\;\; \vec{k}\cdot\vec{\epsilon}_{(1,2)} = 0;\\
&\epsilon_3^\mu = (0, \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|});\\
&\epsilon_0^\mu = \eta^\mu = (1, \vec{0})
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Notiamo le condizioni di normalizzazione:

$$\epsilon_\alpha^\mu \epsilon_\beta^\nu\; g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \tag{5.24}$$

e le relazioni di completezza:

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{i=1,2}\; \epsilon_i^m \epsilon_i^n = (\delta^{mn} - \frac{k^m k^n}{|\vec{k}|});\\
&\Sigma_\alpha\; g_{\alpha\alpha}\epsilon_\alpha^\mu\epsilon_\alpha^\nu = g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Questi quadrivettori formano una base in cui si puo' sviluppare qualsiasi vettore.

Usando la seconda relazione di completezza nelle (5.25), riscriviamo la funzione di Green di Feynman nella (5.22) al modo seguente (il limite di massa nulla e' sottointeso):

$$\begin{aligned}
&\frac{-g^{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon} = \frac{-(\Sigma_\alpha\; g_{\alpha\alpha}\epsilon_\alpha^\mu\epsilon_\alpha^\nu)}{k^2+i\epsilon} = \frac{(\Sigma_{1,2}\;\epsilon_i^\mu\epsilon_i^\nu)}{k^2+i\epsilon} +\\
&+\frac{(\epsilon_3^\mu\epsilon_3^\nu - \eta^\mu\eta^\nu)}{k^2+i\epsilon}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Avendo in mente la condizione (5.19), elimiamo ϵ_3 in favore di k$^\mu$ e di η^μ:

$$\epsilon_3^\mu = \frac{k^\mu}{|\vec{k}|} - \frac{\omega}{|\vec{k}|}\eta^\mu \tag{5.27}$$

e di conseguenza:

$$\epsilon_3^\mu\epsilon_3^\nu - \eta^\mu\eta^\nu = \frac{k^\mu k^\nu}{(\vec{k})^2} - \frac{\omega}{(\vec{k})^2}(k^\mu\eta^\nu + \eta^\mu k^\nu) - (1 - \frac{\omega^2}{(\vec{k})^2})\eta^\mu\eta^\nu \tag{5.28}$$

In conclusione, possiamo riscrivere l' integrando nella (5.22):

$$\frac{-g^{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}\tilde{J}_\nu(k)e^{-i(k\cdot x)} =$$
$$= \frac{(\Sigma_{1,2}\ \epsilon_i^\mu\epsilon_i^\nu)}{k^2+i\epsilon}\ \tilde{J}_\nu(k)\ e^{-i(k\cdot x)} +$$
$$+\frac{1}{k^2+i\epsilon}\ [\frac{k^\mu k^\nu}{(\vec{k})^2} - \frac{\omega}{(\vec{k})^2}(k^\mu\eta^\nu+\eta^\mu k^\nu)]\ \tilde{J}_\nu(k)\ e^{-i(k\cdot x)} + \tag{5.29}$$
$$+\frac{1}{(\vec{k})^2}\eta^\mu\eta^\nu\tilde{J}_\nu(k)e^{-i(k\cdot x)} \tag{5.30}$$

Analizziamo i diversi termini.

- I termini nella prima linea corrispondono alle onde generate dalla corrente, sono onde *trasverse* rispetto alla direzione di propagazione, e rappresentano i due gradi di libertá effettivamente presenti nel campo;
- Nella seconda linea, i termini proporzionali a k^μ contribuiscono, dopo integrazione, con termini del tipo $\partial^\mu f$, che possono essere eliminati con una ulteriore (l' ultima) trasformazione di gauge; i termini proporzionali a $k_\nu\tilde{J}^\nu$ si annullano per la conservazione della corrente; in totale possiamo ignorare la seconda linea;
- nella terza linea il propagatore di Feynman e' stato sostituito dalla trasformata di Fourier del campo coulombiano: questo termine rappresenta il potenziale elettrostatico generato dalla densita' di carica elettrica in J^μ.

Esplicitamente:

$$A^i(x) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2+i\epsilon}(\delta^{ij}-\frac{k^ik^j}{|\vec{k}|^2})\tilde{J}^j(k)e^{-i(k\cdot x)};$$
$$A^0(x) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{|\vec{k}|^2}\ \tilde{\rho}(k)e^{-i(k\cdot x)} \tag{5.31}$$

notiamo:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(x) = 0;$$
$$-\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}A^0(x) = \rho(x)$$

In generale, possiamo fissare la gauge in modo tale che il campo elettrico si divida in una parte longitudinale e una parte trasversa:

$$\vec{E} = \vec{E}_L + \vec{E}_T;$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_T = 0;\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_L = \rho \tag{5.32}$$

Dai risultati precedenti, otteniamo esplicitamente:

$$\vec{E}_L(\vec{x},t) = -\vec{\nabla}A^0 = -\vec{\nabla}\int d^3y\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\rho(\vec{y},t);$$
$$\vec{E}_T = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2+i\epsilon}e^{-ikx}\ [\vec{\tilde{J}} - \frac{\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{\tilde{J}})}{|\vec{k}|^2}]. \tag{5.33}$$

5.3 Le equazioni di Maxwell Lorentz

Specializziamo al caso in cui il campo elettromagnetico è accoppiato ad una particella puntiforme di carica q. Per l' elettrone, $q = -e$, dove e è la carica elettrica elementare:

$$e = +1.60217653(14)10^{-19} C \tag{5.34}$$

Per una particella puntiforme:

$$\begin{aligned} &j^\mu = (\rho,\ \frac{1}{c}\ \vec{j});\\ &\rho = q\ \delta^{(3)}[x - x(t)];\ \vec{j} = q\ \vec{v}\ \delta^{(3)}[x - x(t)] \end{aligned} \tag{5.35}$$

Notiamo le equazioni:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\rho = -q\frac{d\vec{x}(t)}{dt}\cdot\vec{\nabla}\ \delta^{(3)}[x - x(t)]\\ &\frac{1}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = q\vec{v}(t)\cdot\vec{\nabla}\ \delta^{(3)}[x - x(t)] \end{aligned} \tag{5.36}$$

Come conseguenza, j^μ verifica l' equazione di continuitá:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \tag{5.37}$$

L' estensione al caso di molte cariche è immediata.

L' Azione complessiva del sistema campo+carica si ottiene dalle equazioni della Sez. 5.1, specificando la corrente secondo la (5.35) ed aggiungendo l' Azione della carica. Nel complesso, abbiamo la densitá di Lagrangiana:

$$L(x) = -\frac{1}{4}\ F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \delta^{(3)}[x - x(t)](-mc^2\ \sqrt{1 - \frac{\tilde{v}^2}{c^2}}\ ) - j_\mu\ A^\mu(x) \tag{5.38}$$

Da qui si ottengono, come prima, le equazioni del campo, nella forma:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu = q\frac{1}{\gamma}\ u_\mu A^\mu[x(t)]\ \delta^{(3)}[x - x(t)] \tag{5.39}$$

dove u^μ è la 4-velocitá e, come al solito, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Per ricavare le equazioni del moto della carica, calcoliamo il momento coniugato ($\mathbf{L} = \int d^3x L$):

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \vec{v}} = m\gamma\ \vec{v} + q\vec{A}[\vec{x}(t),\ t] \tag{5.40}$$

da cui:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \vec{v}} = \frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) + q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q\frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} \tag{5.41}$$

e la forza generalizzata:

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \vec{x}} = -q[\vec{\nabla} A^0 - \ \Sigma_i \ v^i \ \vec{\nabla} A^i] \tag{5.42}$$

Le equazioni del moto sono quindi:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \vec{x}};\\
&\frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\vec{p}) = -q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - q\vec{\nabla} A^0 + q\frac{1}{c}[-(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \Sigma_i \ v^i(\vec{\nabla} A^i)] =\\
&= q\vec{E} + q\frac{1}{c}\ \vec{v}\times rot(\vec{A}) = q\vec{E} + q\frac{1}{c}\ \vec{v}\times\vec{B}
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Queste sono le equazioni per le componenti spaziali del 4-momento della carica, $\vec{p}$. L' equazione per la componente temporale si ottiene moltiplicando la precedente equazione per $\vec{p}$ ed usando le relazioni:

$$\begin{aligned}
&p^0 dp^0 = \vec{p}\cdot d\vec{p};\\
&\vec{v}/c = \vec{\beta} = \vec{p}/p^0
\end{aligned}$$

Troviamo quindi:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = c\frac{dp^0}{dt} = q\ \vec{v}\cdot\vec{E} \tag{5.44}$$

L' equazione (5.44) esprime la conservazione dell' energia: *l' energia acquisita dalla particella nell' unitá di tempo è pari alla potenza fornita dal campo elettrico* (la forza di Lorentz, il secondo termine a secondo membro della (5.43), non compie lavoro).

Le precedenti equazioni si possono porre in forma covariante, notando che:

$$\begin{aligned}
&\vec{v}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\gamma}\ F^{0\mu}u_\nu\\
&\frac{dp^1}{dt} = qF^{01} + \frac{q}{c}(v^2F^{12} - v^3F^{31}) = \frac{1}{c\gamma}F^{1\mu}u_\mu
\end{aligned}$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}
&\frac{dp^\mu}{dt} = \frac{q}{c}\frac{1}{\gamma}F^{\mu\nu}u_\nu; \text{ ovvero}\\
&\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu
\end{aligned} \tag{5.45}$$

in termini del tempo proprio. Nel caso di piú particelle, otteniamo un' equazione del tipo (5.45) per ciascuna particella, mentre nelle equazioni (5.39) dobbiamo includere nella corrente il contributo di ciascuna particella.

Con la condizione al contorno che non ci siano campi esterni e campi all' infinito, le equazioni di Maxwell-Lorentz (5.39, 5.45) descrivono l' evoluzione temporale di un sistema di particelle cariche, ciascuna sotto l' azione del campo generato da essa stessa e dalle altre particelle.

Assumendo che le altre forze siano trascurabili, questo sistema di equazioni descrive il comportamento della materia in termini dei loro costituenti elementari. Le equazioni di Maxwell-Lorentz sono il primo esempio di una *Teoria del Tutto*, una teoria atta a descrivere tutti i fenomeni presenti in Natura.

La descrizione sistematica delle proprietá della materia sulla base delle equazioni (5.39, 5.45) e' stata affrontata da H. A. Lorentz [6] nei primi del Novecento con notevole successo, ed ha costituito un passo fondamentale nella comprensione della costituzione della materia.

Per quanto riguarda il comportamento della materia alla scala di laboratorio, l' ipotesi che le forze elettromagnetiche siano dominanti e' assolutamente adeguata. Su scale astronomiche, occorre tenere conto delle forze gravitazionali, che possono essere inserite nello schema estendendo il Principio di Relativitá Speciale alla Relativitá Generale di Einstein. Le equazioni di Maxwell-Lorentz-Einstein danno una descrizione accurata dei fenomeni su scala macroscopica, non ancora superata.

Su scala microscopica, alle dimensioni atomiche (10^{-8} cm) e subatomiche, lo schema di Maxwell-Lorentz deve essere sostituito dalla Elettrodinamica Quantistica (Quantum Electro-Dynamics, QED in breve). E' un fatto assolutamente notevole che le equazioni di Maxwell-Lorentz, una volta tradotte nello schema della Teoria Quantistica dei Campi, matengono essenzialmente inalterata la loro forma e sono capaci di descrivere in modo straordinariamente accurato le proprieta' della materia condensata e degli atomi.

A livello nucleare e subnucleare (al disotto di 10^{-13} cm) entrano in gioco altre forze: le *Forze Nucleari* descritte per la prima volta in modo covariante e quantistico da H. Yukawa, all' inizio degli anni '30, e le *Interazioni Deboli*, identificate da E. Fermi, sempre all' inizio degli anni '30, come responsabili del decadimento del neutrone e della radioattivitá β dei nuclei.

Conservazione dell' energia e del momento A partire dalla Lagrangiana di Maxwell-Lorentz, possiamo costruire le grandezze conservate corrispondenti all' energia ed alla quantitá di moto totali (campo piú cariche).

E' conveniente partire dal caso del campo elettromagnetico in assenza di cariche (cfr Sez. 5.1):

$$L_{e.m.} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{5.46}$$

Il tensore impulso-energia canonico é dato da (cfr. Parte 1):

$$\begin{aligned} T^{\mu,\nu}_{e.m.} &= \frac{\partial L}{\partial_\mu A_\beta} \partial^\nu A_\beta \; - \; g^{\mu\nu} L_{e.m.} = \\ &= F^{\mu\beta} \partial^\nu A_\beta + \frac{g^{\mu\nu}}{4} F^{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{5.47}$$

Accanto a $T^{\mu,\nu}_{e.m.}$ consideriamo il tensore simmetrico, $\Theta^{\mu\nu}_{e.m.}$ ottenuto con la procedura di Belinfante e Rosenfeld. $\Theta^{\mu\nu}_{e.m.}$ si ottiene, piú semplicemente, sommando alla (5.47) il tensore conservato:

$$S^{\mu,\nu} = -\partial_\beta (F^{\mu\beta} A^\nu) = -F^{\mu\beta} (\partial_\beta A^\nu)$$

in quanto, in assenza di cariche, $\partial_\beta F^{\mu\beta} = 0$. Notiamo che:

$$\partial_\mu S^{\mu,\nu} = 0; \quad \int d^3x S^{0\nu} = 0$$

In conclusione:

$$\Theta^{\mu\nu}_{e.m.} = -g_{\rho\sigma}F^{\rho\mu}F^{\sigma\nu} + \frac{g^{\mu\nu}}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \tag{5.48}$$

Esplicitamente, le densitá di energia e momento ottenute dalla (5.48) sono:

$$\begin{aligned} E_{e.m.} &= \Theta^{00}_{e.m.} = \frac{1}{2}(\tilde{E}\cdot\tilde{E} + \tilde{B}\cdot\tilde{B}); \\ P^i_{e.m.} &= \Theta^{0i}_{e.m.} = (\tilde{E}\times\tilde{B})^i \end{aligned} \tag{5.49}$$

Consideriamo adesso la *densitá di lagrangiana* completa, (5.38), che riscriviamo per comoditá:

$$\begin{aligned} &L = L_{e.m.} + L_q + L_{int}; \\ &L_q = -mc^2\frac{1}{\gamma}\delta^{(3)}[\tilde{x} - \tilde{x}(t)];\ L_{int} = -j_\mu A^\mu = q\frac{1}{\gamma}\delta^{(3)}[\tilde{x} - \tilde{x}(t)]u_\mu A^\mu \end{aligned}$$

Il tensore impulso-energia canonico complessivo si ottiene differenziando rispetto ai gradi di libertá del campo e della particella. Ci limitiamo a considerare l' integrale spaziale delle componenti temporali ($\mathbf{L}_q + \mathbf{L}_{int} = \int d^3x(L_q + L_{int})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{tot} &= \int d^3x T^{0,0}_{tot} = \int d^3x[\frac{\partial L}{\partial_0 A_\beta}\partial^0 A_\beta - \ g^{00}L_{e.m.}] \ + \frac{\partial(\mathbf{L_q} + \mathbf{L_{int}})}{\partial\tilde{v}}\cdot\tilde{v} - \ (\mathbf{L_q} + \mathbf{L_{int}}) = \\ &= \int d^3x T^{0,0}_{e.m.} + mc^2\gamma + qA^0[\vec{x}(t), t] \end{aligned} \tag{5.50}$$

$$\mathbf{P}^i_{tot} = \int d^3x T^{0i}_{e.m.} + \frac{\partial(\mathbf{L_q} + \mathbf{L_{int}})}{\partial v^i} = \int d^3x T^{0i}_{e.m.} + m\gamma v^i + qA^i[\vec{x}(t), t] \tag{5.51}$$

Il tensore $T^{\mu,\nu}_{e.m.}$ non é piú conservato. Usando l' eqazione del moto di $F^{\mu\nu}$, eq. (5.39) si trova:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}^\nu_{e.m.}}{dt} &= \int d^3x\partial_0 T^{0,\nu}_{e.m.} = \int d^3x\partial_\mu T^{\mu,\nu}_{e.m.} = \\ &= -\int d^3x j_\beta\partial^\nu A^\beta + \int d^3x\frac{1}{2}F_{\mu\sigma}(\partial^\mu F^{\sigma\nu} + \partial^\sigma F^{\nu\mu} + \partial^\nu F^{\mu\sigma}) \end{aligned}$$

Nella parentesi del secondo termine $\sigma \neq \mu$. Se abbiamo anche: $\nu \neq \sigma \neq \mu$, la parentesi é nulla per le equazioni di Maxwell omogenee, (5.8), se invece: $\nu = \sigma \neq \mu$, si annulla per l' antisimmetria di $F^{\mu\nu}$. In ogni caso, quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{E}_{e.m.}}{dt} &= -\int d^3x j_\beta\partial^0 A^\beta = -q\partial_0 A^0 + q\vec{v}\cdot(\partial_0\vec{A}); \\ \frac{d\mathbf{P}^i_{e.m.}}{dt} &= q\vec{v}\cdot(\partial_i\vec{A}) \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{E}_{tot}}{dt} &= \frac{d\mathbf{E}_{e.m.}}{dt} + \frac{d\mathbf{E}_q}{dt} = -q\partial_0 A^0 + q\vec{v}\cdot(\partial_0\vec{A}) + \frac{d(mc^2\gamma)}{dt} + q\partial_0 A^0 + q\vec{v}\cdot\partial A^0 = \\ &= -q\vec{v}\cdot\vec{E} + \frac{d(mc^2\gamma)}{dt} = 0 \end{aligned} \tag{5.52}$$

come conseguenza della equazione del moto della particella, (5.44). In modo analogo, sulla base dell' equazione del moto (5.43), troviamo;

$$\frac{d\mathbf{P}^i_{tot}}{dt} = \frac{d\mathbf{P}^i_{e.m.}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}^i_q}{dt} = q\vec{v}\cdot(\partial_i\vec{A}) + \frac{dm\gamma v^i}{dt} + q\partial_0 A^i + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}A^i =$$
$$= \frac{dm\gamma v^i}{dt} - qE^i - q(\vec{v}\times\vec{B})^i = 0 \tag{5.53}$$

L' evoluzione nel tempo del sistema consiste in uno scambio continuo di energia e quantitá di moto tra campo e particella, conservando costanti i valori dell' energia e del momento complessivi.

Tuttavia, la definizione dell' energia e della quantitá di moto associate alla particella o al campo ad un dato istante non é univoca, in quanto queste grandezze non sono, individualmente, costanti del moto. Una descrizione particolarmente semplice si ottiene eliminando $T^{\mu,\nu}_{e.m.}$ in favore di $\Theta^{\mu\nu}_{e.m.}$. Confrontando la (5.47) e la (5.48) si ottiene:

$$T^{\mu,\nu} = \Theta^{\mu\nu} + F^{\mu\beta}\partial_\beta A^\nu = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\beta(F^{\mu\beta}A^\nu) - j^\mu A^\nu$$

La derivata totale si puó omettere e possiamo combinare l' ultimo termine con l' espressione del momento-energia della particella. In questo modo ottieniamo:

$$\mathbf{E}_{tot} = \frac{1}{2}\int d^3x(E^2+B^2) + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$
$$\mathbf{P}^i_{tot} = \int d^3x(\vec{E}\times\vec{B})^i + \frac{mv^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{5.54}$$

Nelle espressioni in (5.54) compare apparentemente solo l' energia della particella libera. Nel caso di piú particelle, ci si puó chiedere dove sia finita l' energia di interazione elettrostatica tra le particelle stesse. La risposta é che questa energia é inglobata nel primo termine, come si vede al modo seguente. Separiamo il campo elettrico nelle componenti longitudinale e trasversa, secondo la (5.32). Troviamo:

$$\frac{1}{2}\int d^3x\ E^2 = \frac{1}{2}\int d^3x(E_L^2+E_T^2) = \frac{1}{2}\int d^3x\ E_T^2 + \frac{1}{2}\int d^3x\ (\vec{\nabla}\Phi)\cdot(\vec{\nabla}\Phi) =$$
$$= \frac{1}{2}\int d^3x\ E_T^2 - \frac{1}{2}\int d^3x\Phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi) = \frac{1}{2}\int d^3x\ E_T^2 + \int d^3x\ \Phi\rho \tag{5.55}$$

dove Φ é il potenziale elettrostatico. Il secondo termine nell' espressione finale é l' energia elettrostatica che, per un sistema di particelle puntiformi, si riduce all' espressione:

$$V_{Coul} = \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\frac{1}{4\pi}\frac{q_i\ q_j}{|\vec{x}_i(t)-\vec{x}_j(t)|} \tag{5.56}$$

Troviamo:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}\int d^3x(E_T^2+B^2) + \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\frac{1}{4\pi}\frac{q_i\ q_j}{|\vec{x}_i-\vec{x}_j|} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{5.57}$$

Il primo termine contiene solo i gradi di libertá del campo di radiazione, il secondo e terzo i gradi di libertá delle particelle.

A partire dalle (5.54) si puó ricavare, infine, il tensore impulso-energia non integrato, nella forma:

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu}_{e.m.} + \theta^{\mu\nu};$$
$$\theta^{\mu\nu} = mc^2 \frac{1}{\gamma}\, u^\mu u^\nu\, \delta^{(3)}[\vec{x} - \vec{x}(t)]$$

Problema . Partendo dalla legge di trasformazione:$(A^\mu)'(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$ calcolare le matrici del momento angolare, $(\Sigma^{\alpha\beta})^\mu_\nu$, introdotte nella Parte 1 e mostrare che $\Theta^{\mu\nu}_{e.m.}$ in eq.(5.48) si ottiene dal tensore canonico $T^{\mu,\nu}_{e.m.}$ con la costruzione di Belinfante e Rosenfeld.

Commento. Per una particella puntiforme abbiamo introdotto le *densitá* di lagrangiana, corrente e impulso-energia nella forma:

$$L = -mc^2 \frac{1}{\gamma}\, \delta[\vec{x} - \vec{x}(t)];$$
$$j^\mu = q\frac{1}{\gamma}\, u^\mu\, \delta[\vec{x} - \vec{x}(t)];$$
$$\theta^{\mu\nu} = mc^2 \frac{1}{\gamma}\, u^\mu u^\nu\, \delta[\vec{x} - \vec{x}(t)];$$

E' interessante osservare che il fattore $1/\gamma$ é essenziale per compensare la non covarianza della funzione delta e produrre delle grandezze appropriatamente covarianti, come si vede con l' argomento seguente. Moltiplichiamo j^μ per una 4-densitá esplicitamente covariante e per un elemento finito ma piccolo di 4-volume intorno a $(\vec{x}(t), t)$:

$$\Delta(jA) = \Delta^3 x \Delta t (j_\mu A^\mu) = q\frac{\Delta t}{\gamma} u_\mu A^\mu(\vec{x}(t), t) = q\Delta\tau\ [u_\mu A^\mu(\vec{x}(\tau), \tau)] \tag{5.58}$$

dove τ é il tempo proprio della particella. Abbiamo ottenuto un risultato invariante *qualunque sia* il 4-vettore A^μ, quindi j^μ deve esso stesso trasformare come un 4-vettore. Analogo ragionamento vale per le altre densitá.

5.4 Formalismo Hamiltoniano e sostituzione minimale

Il momento coniugato della particella é stato giá calcolato nella (5.51):

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} + q\vec{A}[\vec{x}(t), t] \tag{5.59}$$

di qui dobbiamo ricavare $\vec{v}$ come funzione di $\vec{p}$. Troviamo

$$\vec{v} = \frac{c\vec{\pi}}{\sqrt{|\vec{\pi}|^2 + (mc)^2}};$$
$$\vec{\pi} = \vec{p} - q\vec{A}$$

L' Hamiltoniana della particella carica si ottiene da:

$$\mathbf{H}_p = \vec{p}\cdot\vec{v} - (\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_{int}) = \vec{p}\cdot\vec{v} + qA^0 - q\vec{v}\cdot\vec{A} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} =$$
$$= qA^0 + \vec{v}\cdot\vec{\pi} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Eliminando $\vec{v}$ troviamo infine:

$$\mathbf{H}_p = qA^0 + \sqrt{(mc^2)^2 + c^2(\vec{p}-q\vec{A})^2} \tag{5.60}$$

Se confrontiamo con l' Hamiltoniana della particella libera:

$$\mathbf{H}_p = \sqrt{(mc^2)^2 + (c\vec{p})^2} \tag{5.61}$$

vediamo che l' interazione di una particella carica in un campo elettromagnetico assegnato si introduce con la *Sostituzione Minimale*:

$$\begin{aligned} &\mathbf{H}_p \to \mathbf{H}_p - qA^0; \\ &\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A} \end{aligned} \tag{5.62}$$

ovvero, in termini covarianti:

$$p^\mu \to p^\mu - qA^\mu \tag{5.63}$$

Concludiamo con l' Hamiltoniana del campo elettromagnetico. Si parte dalla definizione del momento coniugato di A^μ:

$$\Pi^\mu = \frac{\partial L}{\partial\partial_0 A_\nu} = F^{0\mu} \tag{5.64}$$

Notiamo che $\Pi^0 = F^{00} = 0$, coerentemente con il fatto che A^0 non é una reale variabile del campo elettromagnetico. Inoltre, come abbiamo visto nelle equazioni (5.31) e seguenti, possiamo scegliere una gauge in cui il potenziale vettore é trasverso: $\partial_i A^i = 0$. In questa gauge,

$$\Pi^i = -\partial_0 A^i = E^i_T \tag{5.65}$$

L' Hamiltoniana del campo é data da:

$$\mathbf{H}_{e.m.} = \int d^3x\{\vec{\Pi}\cdot(\partial_0\vec{A}) - L_{e.m.}\} = \int d^3x\{E_T^2 - \frac{1}{2}(E^2 - B^2)\} =$$
$$= \frac{1}{2}\int d^3x\{(E_T^2 + B^2)\} - \frac{1}{2}\int d^3x E_L^2$$

Dobbiamo aggiungere questo risultato all' Hamiltonian della particella (5.60). Consideriamo il caso di diverse particelle cariche, troviamo ($A^\mu_i = A^\mu[\vec{x}_i(t), t]$):

$$\mathbf{H}_{tot} = \frac{1}{2}\int d^3x(E_T^2 + B^2) - \frac{1}{2}\int d^3x\ E_L^2 + \Sigma_i qA_i^0 + \Sigma_i\sqrt{(m_ic^2)^2 + c^2(\vec{p}_i - \vec{A}_i)^2}\} =$$
$$= \frac{1}{2}\int d^3x(E_T^2 + B^2) + \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\frac{q_iq_j}{4\pi|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} + \Sigma_i\sqrt{(m_ic^2)^2 + c^2(\vec{p}_i - \vec{A}_i)^2} \tag{5.66}$$

Nel limite non-relativistico troviamo il risultato ben noto:

$$\mathbf{H}_{tot} = \frac{1}{2}\int d^3x(E_T^2 + B^2) + \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\frac{q_i q_j}{4\pi|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} + \Sigma_i \frac{(\vec{p}_i - q_i\vec{A}_i)^2}{2m_i^2} \tag{5.67}$$

L' effetto Zeeman classico. La sostituzione minimale conduce alla forza di Lorentz e quindi la sua validitá trova numerose conferme nei fenomeni elettromagnetici classici.

Un' applicazione caratteristica della sostituzione minimale é quella dell' *effetto Zeeman*, la moltiplicazione delle righe spettrali emesse o assorbite dagli atomi quando sono posti in un campo magnetico, considerata nella teoria classica da H. A. Lorentz [6]. Consideriamo un elettrone in un sistema atomico descritto dall' Hamiltoniana:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \cdots + V(\mathbf{x}, \ldots) \tag{5.68}$$

dove $\vec{x}, \vec{p}$ sono le variabili canoniche dell' elettrone e i punti di sospensione indicano ulteriori termini nell' energia cinetica o nel potenziale dovuti agli altri gradi di libertá del sistema. Supponiamo inoltre che V abbia una simmetria sferica, $V = V(r^2, \ldots)$ con $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Le equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m}; \\ &\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \vec{x}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}} = -\frac{\partial V}{\partial r^2} 2\vec{x} \end{aligned} \tag{5.69}$$

Adesso introduciamo un campo magnetico costante diretto lungo l' asse z, generato dal potenziale vettore:

$$\mathbf{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0);\ rot\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Secondo la sostituzione minimale, la nuova Hamiltoniana é adesso:

$$\mathbf{H} = \frac{(\vec{p} + e\vec{A})^2}{2m} + \ldots + V(r^2, \ldots) \tag{5.70}$$

La simmetria sferica é ridotta ad una simmetria assiale, intorno alla direzione di $\vec{B}$, per cui dobbiamo trattare separatamente le variabili z, p_z dalle x, p_x e y, p_y. Introduciamo, al posto di queste ultime, le variabili complesse:

$$\zeta = x + iy;\ p = p_x + ip_y \tag{5.71}$$

ed inoltre:

$$A = A_x + iA_y = i\frac{B}{2}\zeta \tag{5.72}$$

Le equazioni di Hamilton per le coordinate trasverse a B sono:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_x} + i\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_y} = \frac{p}{m} + i\omega_L\zeta$$

dove abbiamo introdotto la *frequenza di Larmor*:

$$\omega_L = \frac{eB}{2m}. \tag{5.73}$$

Definiamo una nuova variabile $\chi(t)$ ponendo:

$$\zeta(t) = \chi(t)e^{i\omega_L t} \tag{5.74}$$

L' equazione precedente ci dá:

$$\frac{d\chi}{dt}e^{i\omega_L t} = \frac{p}{m} \tag{5.75}$$

che suggerisce di ridefinire anche il momento coniugato, ponendo:

$$p(t) = \pi(t)e^{i\omega_L t} \tag{5.76}$$

La equzione di Hamilton per p si scrive allora:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= (\frac{d\pi}{dt} + i\omega_L\pi)e^{i\omega_L t} = -(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} + i\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y}) = \\ &= -\frac{\partial V}{\partial r^2}2\zeta + i\omega_L p = (-\frac{\partial V}{\partial r^2}2\chi + i\omega_L\pi)e^{i\omega_L t}\end{aligned} \tag{5.77}$$

dove abbiamo omesso termini quadratici nel campo magnetico, che sono trascurabili nelle condizioni sperimentali usuali.

La conclusione che si ottiene dalle equazioni (5.73) e (5.77) é che le variabili χ e π obbediscono alle stesse equazioni del moto dell' atomo imperturbato. Dalla (5.74) vediamo che al moto imperturbato si sovrappone un movimento di precessione intorno al campo magnetico con la frequenza di Larmor. Il moto lungo z non é influenzato affatto dal campo (del resto, la componente z della forza di Lorentz é nulla).

Se assumiamo che il moto imperturbato sia armonico con frequenza ω_0, abbiamo:

$$\chi(t) = ae^{+i\omega_0 t} + be^{-i\omega_0 t},\ z = ce^{i\omega_0 t}$$

per le soluzioni della (5.69) mentre:

$$\zeta(t) = ae^{+i(\omega_0+\omega_L)t} + be^{-i(\omega_0-\omega_L)t},\ z = ce^{i\omega_0 t} \tag{5.78}$$

per il moto nel campo magnetico.

La riga spettrale con frequenza ω_0 assorbita o emessa dall' atomo in condizioni normali, nel campo magnetico si scinde in tre componenti di frequenza $\omega_0 \pm \omega_L,\ \omega_0$. Inoltre, la luce che va nella direzione del campo magnetico, cui non puó contribuire il moto lungo z, contiene solo le prime due componenti.

Le previsioni classiche sono rispettate in un certo numero di casi (effetto Zeeman *normale*). In altri casi, tuttavia, la struttura delle linee nel campo magnetico é piú complicata. L' effetto Zeeman *anomalo* si puó spiegare solo tenendo conto del momento magnetico di spin dell' elettrone, su cui torneremo nella Sez. 6.1.5.

5.5 Quantizzazione del campo elettromagnetico nel vuoto

A dispetto del fatto che l'osservazione dei fenomeni elettromagnetici è stata all'origine dello sviluppo della teoria dei campi classici, la quantizzazione del campo elettromagnetico nel formalismo canonico presenta problemi non banali.

Il punto di partenza è la densità di lagrangiana (5.13)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu\right)\partial_\nu A_\mu = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2\right) \tag{5.79}$$

dalla quale si ricavano, attraverso il principio di azione, le equazioni di Maxwell in assenza di cariche e correnti. Le variabili canoniche coniugate alle componenti del potenziale vettore A^μ, che si ottengono dalla

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = F^{0\mu} \tag{5.80}$$

sono $(i = 1, 2, 3)$

$$\pi^0 = F^{00} = 0 \quad , \quad \pi^i = F^{0i} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = E^i \ . \tag{5.81}$$

Dall'espressione corrispondente della densità hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{3}\pi^i \dot{A}_i - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{3} E^i \dot{A}_i - \frac{1}{2}\left(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2\right) = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2\right) + \mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi \ , \tag{5.82}$$

con $\phi = A^0$, segue che (si confronti con la (5.54))

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x \left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2\right) \ , \tag{5.83}$$

cone si vede facilmente integrando per parti ed usando la $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 0$.

Le regole di commutazione canoniche per le A^μ e π^i $(i, k = 1, 2, 3)$

$$\left[A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)\right] = 0 \tag{5.84}$$

$$\left[\pi^i(\mathbf{x}, t), \pi^k(\mathbf{x}', t)\right] = 0 \tag{5.85}$$

$$\left[\pi^k(\mathbf{x}, t), A^0(\mathbf{x}', t)\right] = 0 \tag{5.86}$$

mostrano che, a causa dell'annullarsi del momento coniugato π^0, la componente A^0 del potenziale vettore, a differenza delle A^i, commuta con tutte le A^μ e π^i, e può quindi essere descritta da un numero, invece che da un operatore. Ci si può quindi limitare ad applicare il formalismo quantistico alle sole componenti A^i, e trattare A^0 come un campo classico. Questa procedura, seguita originariamente da Dirac [7], pur essendo di grande utilità in molte applicazioni ha lo svantaggio di non essere manifestamente covariante, in quanto le componenti del quadrivettore A^μ sono trattate in modo asimmetrico. La quantizzazione covariante del campo elettromagnetico presenta problemi tecnici non banali e sarà discussa più avanti.

Energia e impulso del campo elettromagnetico. Nella gauge definita dalla condizione

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0 \ , \tag{5.87}$$

il potenziale vettore sodisfa alla

$$\Box \mathbf{A}(x) = \mathbf{j}(x) - \boldsymbol{\nabla} \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} \ , \tag{5.88}$$

come segue dalla (5.3), mentre la (5.1) implica che il potenziale scalare $A^0 = \phi$, soluzione dell'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \phi(x) = -\rho(x) \ , \tag{5.89}$$

è il potenziale coulombiano generato dalla distribuzione di carica $\rho(x)$

$$\phi(x) = \int d^3x' \ \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \ . \tag{5.90}$$

Per questo motivo la gauge (5.87) è chiamata gauge di Coulomb.

In linea di principio, il termine contenente ϕ nel secondo membro della (5.88) si può ottenere dalla (5.90). Tuttavia, separando le componenti longitudinale e trasversa della corrente, cioè scrivendo

$$\mathbf{j}(x) = \mathbf{j}_T(x) + \mathbf{j}_L(x) \tag{5.91}$$

con

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{j}_T = 0 \quad , \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j}_L = 0 \tag{5.92}$$

e usando l'identità $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{j}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j}) - \nabla^2 \mathbf{j}$ si dimostra facilmente che

$$\boldsymbol{\nabla} \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} = \mathbf{j}_L(x) \ , \tag{5.93}$$

cioè che il termine di sorgente nell'equazione che determina il potenziale vettore $\mathbf{A}$ si riduce alla componente trasversa della corrente, $\mathbf{j}_T(x)$.

In assenza di cariche e correnti, $\phi(x) \equiv 0$ e la (5.88), diventa

$$\Box \mathbf{A} = 0 \ . \tag{5.94}$$

Una soluzione particolare della (5.94) che soddisfa alle condizioni di periodicità sui bordi di una scatola cubica, discusse nella Sez. 4.1, si può scrivere nella la forma

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \ \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}} \ \mathrm{e}^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \ , \tag{5.95}$$

dove V è il volume di normalizzazione e

$$\omega_k = |\mathbf{k}| \ . \tag{5.96}$$

La condizione di gauge (5.87) implica che il vettore di polarizzazione gode della proprietà

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}} = 0 \ , \tag{5.97}$$

cioè che per ogni vettore d'onda $\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}}$ giace sul piano perpendicolare a $\mathbf{k}$. Possiamo quindi definire due vettori unitari reali, $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}1}$ and $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}2}$, tali che $(r, r' = 1, 2)$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r'} = \delta_{rr'} \tag{5.98}$$

e

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r} \cdot \mathbf{k} = 0 \ . \tag{5.99}$$

La soluzione generale della (5.94) che soddisfa alla condizione di gauge (5.87) si ottiene dalla combinazione lineare delle $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t)$ (ricordiamo che $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ è una funzione reale)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^{2} [c_{\mathbf{k}r} \mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x}, t) + c^*_{\mathbf{k}r} \mathbf{u}^*_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x}, t)] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^{2} [c_{\mathbf{k}r}(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x}) + c^*_{\mathbf{k}r}(t) \mathbf{u}^*_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x})] \ , \end{aligned} \tag{5.100}$$

dove abbiamo definito

$$c_{\mathbf{k}r}(t) = c_{\mathbf{k}r} \mathrm{e}^{-i\omega_k t} \tag{5.101}$$

e le funzioni

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \ \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r} \ \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \ . \tag{5.102}$$

soddisfano le relazioni di ortonormalità

$$\int d^3x \ \mathbf{u}^*_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{\mathbf{k}'r'}(\mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}'r'}}{V} \int d^3x \ \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = \delta_{rr'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \ . \tag{5.103}$$

Sostituendo nell'espressione dell'energia del campo elettromagnetico classico (si confronti con la (5.54))

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \ \left(\ |\mathbf{B}|^2 + |\mathbf{E}|^2 \ \right) = \frac{1}{2} \int d^3x \ \left(\ |\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}|^2 \ + \left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right|^2 \ \right) \tag{5.104}$$

lo sviluppo di Fourier (5.100) si ottiene

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}r} \sum_{\mathbf{k}'r'} \int d^3x \ \Big\{ [c_{\mathbf{k}r}(t) \ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x}) + c.c.] \cdot [c^*_{\mathbf{k}'r'}(t) \ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}^*_{\mathbf{k}'r'}(\mathbf{x}) + c.c.] \\ &\qquad + \left[\frac{\partial c_{\mathbf{k}r}}{\partial t} \ \mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x}) + c.c. \right] \cdot \left[\frac{\partial c^*_{\mathbf{k}'r'}}{\partial t} \ \mathbf{u}^*_{\mathbf{k}'r'}(\mathbf{x}) + c.c. \right] \Big\} \ . \end{aligned} \tag{5.105}$$

Il calcolo del contributo del campo magnetico richiede integrazioni del tipo

$$\begin{aligned} &\int d^3x \ (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x})) \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}^*_{\mathbf{k}'r'}(\mathbf{x})) \\ = \ &\int d^3x \ \boldsymbol{\nabla} \cdot [\mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x}) \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}^*_{\mathbf{k}'r'}(\mathbf{x}))] + \int d^3x \ \mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x}) \cdot [\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}^*_{\mathbf{k}'r'}(\mathbf{x}))] \\ = \ &- \int d^3x \ \mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x}) \nabla^2 \mathbf{u}^*_{\mathbf{k}'r'}(\mathbf{x}) \\ = \ &\frac{|\mathbf{k}'|^2}{V} \ \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}'r'} \int d^3x \ \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = \omega^2_{k'} \ \delta_{rr'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \ , \end{aligned}$$

che si effettuano facilmente usando le condizioni di periodicità sui bordi del volume di integrazione e le identità $(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot[\mathbf{u}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v})]+\mathbf{u}\cdot[\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v})]$ e $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u})-\nabla^2\mathbf{u}$. Gli integrali corrispondenti al contributo del campo elettrico sono invece del tipo

$$\int d^3x\ \frac{\partial c_{\mathbf{k}r}}{\partial t}\mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x})\cdot\frac{\partial c^*_{\mathbf{k}'r'}}{\partial t}\mathbf{u}^*_{\mathbf{k}'r'}(\mathbf{x}) = \omega_k\omega_{k'}\ \delta_{rr'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\ c_{\mathbf{k}r}(t)c^*_{\mathbf{k}'r'}(t)\ .$$

Il risultato finale è

$$H = \sum_{\mathbf{k}r}\omega_k^2\ [c_{\mathbf{k}r}(t)c^*_{\mathbf{k}r}(t) + c^*_{\mathbf{k}r}(t)c_{\mathbf{k}r}(t)]\ , \tag{5.106}$$

dove le funzioni $c_{\mathbf{k}r}(t)$ soddisfano all'equazione differenziale

$$\ddot{c}_{\mathbf{k}r}(t)\ =\ -\omega_k^2\ c_{\mathbf{k}r}(t)\ , \tag{5.107}$$

cioè all'equazione del moto di un oscillatore armonico classico di frequenza angolare ω_k e massa unitaria. Si noti che, se le funzioni $c_{\mathbf{k}r}(t)$ sono numeri complessi, $[c_{\mathbf{k}r}(t)c^*_{\mathbf{k}r}(t) + c^*_{\mathbf{k}r}(t)c_{\mathbf{k}r}(t)] = 2c_{\mathbf{k}r}(t)c^*_{\mathbf{k}r}(t)$. Il motivo per cui abbiamo scritto H nella forma (5.106) sarà chiaro tra poco.

L'energia di un sistema di oscillatori classici di massa unitaria, oscillanti nelle direzioni individuate dai vettori d'onda $\mathbf{k}$ con frequenza angolare ω_k è

$$H_{osc} = \sum_{\mathbf{k}r}\frac{1}{2}\ (p^2_{\mathbf{k}r} + \omega_k^2 x^2_{\mathbf{k}r})\ , \tag{5.108}$$

dove $x_{\mathbf{k}r}$ and $p_{\mathbf{k}r}$ sono le variabili canoniche classiche, che soddisfano alle equazioni del moto

$$\ddot{x}_{\mathbf{k}r}(t)\ =\ -\omega_k^2\ x_{\mathbf{k}r}(t)\quad ,\quad \ddot{p}_{\mathbf{k}r}(t)\ =\ -\omega_k^2\ p_{\mathbf{k}r}(t)\ . \tag{5.109}$$

Confrontando la (5.106) alla (5.108) vediamo subito che H coincide con H_{osc} se

$$c_{\mathbf{k}r} = \frac{1}{2\omega_k}(\omega_k x_{\mathbf{k}r} + ip_{\mathbf{k}r})\quad ,\quad c^*_{\mathbf{k}r} = \frac{1}{2\omega_k}(\omega_k x_{\mathbf{k}r} - ip_{\mathbf{k}r})\ , \tag{5.110}$$

ovvero se

$$x_{\mathbf{k}r} = c_{\mathbf{k}r} + c^*_{\mathbf{k}r}\quad ,\quad p_{\mathbf{k}r} = -i\omega_k(c_{\mathbf{k}r} - c^*_{\mathbf{k}r})\ . \tag{5.111}$$

Questo risultato suggerisce di interpretare H come l'energia di un insieme di oscillatori classici. Il passaggio al caso quantistico è immediato. L'energia di un sistema di oscillatori quantistici ha infatti la forma

$$H = \sum_{\mathbf{k}r}\frac{\omega_k}{2}\left(a^\dagger_{\mathbf{k}r}a_{\mathbf{k}r} + a_{\mathbf{k}r}a^\dagger_{\mathbf{k}r}\right)\ , \tag{5.112}$$

che coincide con quella dell'energia del campo elettromagnetico (5.106) se si interpretano i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di $\mathbf{A}$ come operatori quantistici definiti dalle relazioni

$$c_{\mathbf{k}r} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\ a_{\mathbf{k}r}\quad ,\quad c^*_{\mathbf{k}r} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\ a^\dagger_{\mathbf{k}r}\ . \tag{5.113}$$

Il potenziale vettore $\mathbf{A}$ si può quindi esprimere in termini degli operatori di creazione e distruzione $a^\dagger_{\mathbf{k}r}$ e $a_{\mathbf{k}r}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(x) &= \sum_{\mathbf{k}r} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r} \left[a_{\mathbf{k}r}(t) \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger_{\mathbf{k}r}(t) \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] \qquad (5.114)\\ &= \sum_{\mathbf{k}r} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r} \left[a_{\mathbf{k}r} \mathrm{e}^{-i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + a^\dagger_{\mathbf{k}r} \mathrm{e}^{i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right]\\ &= \mathbf{A}^+(x) + \mathbf{A}^-(x) \ . \qquad (5.115)\end{aligned}$$

ed è un'operatore nello spazio di Hilbert i cui vettori di stato sono

$$|n_{\mathbf{k}_1 r_1}, n_{\mathbf{k}_2 r_2}, \ldots n_{\mathbf{k}_n r_n} \ldots\rangle \ , \qquad (5.116)$$

dove $n_{\mathbf{k}r}$ è il numero di quanti nel modo di oscillazione caratterizzato dal vettore d'onda $\mathbf{k}$ e dal vettore di polarizzazione $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r}$. Lo stato (5.116) si può ottenere a partire dallo stato di vuoto, che corrisponde a $n_{\mathbf{k}r} \equiv 0$, usando la

$$|n_{\mathbf{k}_1 r_1}, n_{\mathbf{k}_2 r_2}, \ldots\rangle = \prod_{\mathbf{k}_i r_i} \frac{(a^\dagger_{\mathbf{k}_i r_i})^{n_{\mathbf{k}_i r_i}}}{\sqrt{n_{\mathbf{k}_i r_i}!}} |0\rangle \ . \qquad (5.117)$$

Si noti che nella (5.115) abbiamo separato il contributo dei termini contenenti operatori di creazione ($\mathbf{A}^-(x)$) e annichilazione ($\mathbf{A}^+(x)$). Ovviamente si ha che

$$\mathbf{A}^+(x)|0\rangle \ = \ 0 \ . \qquad (5.118)$$

Scegliendo $\langle 0|H|0\rangle$ come zero della scala delle energie, l'hamiltoniana del campo elettromagnetico ri riduce a

$$H = \sum_{\mathbf{k}r} \omega_k \ N_{\mathbf{k}r} \ , \qquad (5.119)$$

con $N_{\mathbf{k}r} = a^\dagger_{\mathbf{k}r} a_{\mathbf{k}r}$, e soddisfa l'equazione agli autovalori

$$H|n_{\mathbf{k}_1 r_1}, n_{\mathbf{k}_2 r_2}, \ldots\rangle = \sum_{\mathbf{k}_i r_i} n_{\mathbf{k}_i r_i} \omega_{k_i} \ |n_{\mathbf{k}_1 r_1}, n_{\mathbf{k}_2 r_2}, \ldots\rangle \ . \qquad (5.120)$$

Poichè $\mathbf{A}(x)$ è lineare negli operatori di creazione e distruzione, dalle regole di commutazione

$$[a_{\mathbf{k}r}, N_{\mathbf{k}'r'}] = \left[a_{\mathbf{k}r}, a^\dagger_{\mathbf{k}'r'} a_{\mathbf{k}'r'} \right] = \delta_{rr'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}r} \qquad (5.121)$$

e

$$\left[a^\dagger_{\mathbf{k}r}, N_{\mathbf{k}'r'} \right] = \left[a^\dagger_{\mathbf{k}r}, a^\dagger_{\mathbf{k}'r'} a_{\mathbf{k}'r'} \right] = \delta_{rr'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} a^\dagger_{\mathbf{k}r} \ , \qquad (5.122)$$

segue che l'operatore $N_{\mathbf{k}r}$ non commuta con $\mathbf{A}(x)$, e quindi neppure con i campi elettrico e magnetico $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Questo risultato implica che i valori di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ e gli $n_{\mathbf{k}r}$ non possono essere misurati simultaneamente con precisione arbitraria. Inoltre, dalla linearità di $\mathbf{A}(x)$ negli $a_{\mathbf{k}r}$ e $a^\dagger_{\mathbf{k}r}$, segue anche che i valori di aspettazione $\langle \mathbf{E} \rangle$ and $\langle \mathbf{B} \rangle$ negli stati (5.116) sono tutti nulli.

Classicamente, l'impulso del campo elettromagnetico è dato dal vettore di Poynting (si confronti con la (5.54))

$$\mathbf{P} = \int d^3x\ \mathbf{E}\times\mathbf{B} = -\int d^3x\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\ . \tag{5.123}$$

Sostituendo la (5.114) nella (5.123) troviamo

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \sum_{\mathbf{k}r}\mathbf{k}\ \frac{1}{2}\left(a^\dagger_{\mathbf{k}r}a_{\mathbf{k}r}+a_{\mathbf{k}r}a^\dagger_{\mathbf{k}r}\right)\\ &= \sum_{\mathbf{k}r}\mathbf{k}\ \left(a^\dagger_{\mathbf{k}r}a_{\mathbf{k}r}+\frac{1}{2}\right)\\ &= \sum_{\mathbf{k}r}\mathbf{k}\ N_{\mathbf{k}r}\ .\end{aligned} \tag{5.124}$$

Per ottenere la (5.124) è conveniente riscrivere la (5.123) nella forma

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{2}\int d^3x\ \ (\mathbf{E}\times\mathbf{B}-\mathbf{B}\times\mathbf{E})\ . \tag{5.125}$$

In questo modo si vede subito che i termini contenenti due operatori di creazione o due operatori di distruzione non contribuiscono. Per il calcolo degli altri termini si utilizza la

$$\begin{aligned}&\int d^3x\ \sum_{\mathbf{k}r}\sum_{\mathbf{k}'r'}\ \frac{1}{2V}\frac{1}{\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r}\times(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}'r'})\omega_k\left[a_{\mathbf{k}r}a^\dagger_{\mathbf{k}'r'}e^{-i(k-k')x}+a^\dagger_{\mathbf{k}r}a_{\mathbf{k}'r'}\mathrm{e}^{i(k-k')x}\right]\\ &=\sum_{\mathbf{k}r}\sum_{\mathbf{k}'r'}\frac{1}{2}\frac{\omega_k}{\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r}\times(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}'r'})\left(a_{\mathbf{k}r}a^\dagger_{\mathbf{k}'r'}+a^\dagger_{\mathbf{k}r}a_{\mathbf{k}'r'}\right)\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\\ &=\sum_{\mathbf{k}r}\mathbf{k}\ \left(a^\dagger_{\mathbf{k}r}a_{\mathbf{k}r}+\frac{1}{2}\right)\ ,\end{aligned} \tag{5.126}$$

dove, ovviamente, $\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{k}=0$.

L'equazione (5.124) mostra che il quanto del campo eletromagnetico di energia $\omega_k=|\mathbf{k}|$ ha impulso $\mathbf{k}$, e può quindi essere identificato con una particella di massa nulla (come segue dalla $\omega_k^2-|\mathbf{k}^2|=0$), il fotone. La natura corpuscolare della radiazione elettromagnetica è stata confermata nel 1922 dall'osservazione dell'effetto Compton, cioè della conservazione di impulso ed energia nell'urto elastico tra fotoni ed elettroni atomici.

5.6 Spin del fotone

Lo stato di polarizzazione del fotone è determinato dalla proiezione del suo momento angolare lungo l'asse di quantizzazione, che possiamo prendere lungo x^3. Applichiamo la definizione del tensore canonico del momento angolare del Capitolo 3 (eq.(3.86) e (3.87)), al caso del campo

elettromagnetico. Poichè si tratta di un campo vettoriale (che cioè trasforma come un quadrivettore sotto trasformazioni di Lorentz) gli indici MN che compaiono nella definizione della $\Sigma^{\alpha\beta}_{MN}$ (Eq.(3.83)) in questo caso sono indici di Lorentz. Troviamo così la

$$\Sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} g^{\nu}_{\beta} - g^{\nu\alpha} g^{\mu}_{\beta} \ , \tag{5.127}$$

che sostituita nell'equazione analoga alla (3.87) per J^3 da il risultato

$$J^3 = \int d^3x \left[\sum_{i=1}^{3} \dot{A}^i \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) A^i - (\dot{A}^1 A^2 - \dot{A}^2 A^1) \right] \ . \tag{5.128}$$

Sostituendo ora la (5.114) nella (5.128) vediamo che J^3 soddisfa alle regole di commutazione

$$\left[J^3, a^{\dagger}_{\mathbf{k}r} \right] = i \left(\epsilon^1_{\mathbf{k}r} a^{\dagger}_{\mathbf{k}2} - \epsilon^2_{\mathbf{k}r} a^{\dagger}_{\mathbf{k}1} \right) \ , \tag{5.129}$$

dove abbiamo scelto l'asse x^3 lungo la direzione del vettore d'onda $\mathbf{k}$. Si noti che solo il secondo termine nell'integrando della (5.128), che possiamo interpretare come momento angolare di spin, dà contributo non nullo al commutatore (5.129).

Definiamo ora i due nuovi operatori

$$a^{\dagger}_{\mathbf{k}R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a^{\dagger}_{\mathbf{k}1} + i a^{\dagger}_{\mathbf{k}2} \right) \quad , \quad a^{\dagger}_{\mathbf{k}L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a^{\dagger}_{\mathbf{k}1} - i a^{\dagger}_{\mathbf{k}2} \right) \ , \tag{5.130}$$

che creano fotoni polarizzati *circolarmente*, cioè fotoni il cui stato di polarizzazione è descritto dai vettori

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}1} + i \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}2} \right) \quad , \quad \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}1} - i \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}2} \right) \ . \tag{5.131}$$

Ponendo $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}1} \equiv (1,0,0)$ e $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}2} \equiv (0,1,0)$ e riscrivendo la (5.129) in termini dei nuovi operatori otteniamo le regole di commutazione

$$\left[J^3, a^{\dagger}_{\mathbf{k}R} \right] = a^{\dagger}_{\mathbf{k}R} \quad , \quad \left[J^3, a^{\dagger}_{\mathbf{k}L} \right] = -a^{\dagger}_{\mathbf{k}L} \ , \tag{5.132}$$

dalle quali segue che la terza componente del momento angolare dello stato con un fotone è data dalle

$$J^3 a^{\dagger}_{\mathbf{k}R} |0\rangle = \left[J^3, a^{\dagger}_{\mathbf{k}R} \right] |0\rangle = a^{\dagger}_{\mathbf{k}R} |0\rangle \ , \tag{5.133}$$

$$J^3 a^{\dagger}_{\mathbf{k}L} |0\rangle = \left[J^3, a^{\dagger}_{\mathbf{k}L} \right] |0\rangle = -a^{\dagger}_{\mathbf{k}L} |0\rangle \ . \tag{5.134}$$

Questo risultato mostra che il fotone ha spin $|\mathbf{J}| = 1$, come richiesto dalla natura vettoriale del campo elettromagnetico, e che le due proiezioni $J_3 = \pm 1$ corrispondono agli stati polarizzati circolarmente. L'assenza dello stato con $J_3 = 0$ è una conseguenza della condizione di trasversalità (5.87), che abbassa di uno il numero di gradi di libertà.

Capitolo 6

L' EQUAZIONE DI DIRAC

In questo Capitolo e nei seguenti useremo unitá di misura naturali, in cui $\hbar = c = 1$.

Secondo la meccanica quantistica non relativistica, l'evoluzione della funzione d'onda di una particella libera di massa m ed impulso $\mathbf{p}$ è descritta dall'equazione di Schrödinger

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathbf{H}\psi \ , \tag{6.1}$$

con l'operatore hamiltoniano $\mathbf{H} = -\boldsymbol{\nabla}^2/2m$ che si ottiene dall'espressione dell'energia

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \ , \tag{6.2}$$

con le sostituzioni

$$E \to i\frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{p} \to -i\boldsymbol{\nabla} \ . \tag{6.3}$$

Lo stesso Schrödinger [8] suggerì per primo una generalizzazione della (6.1) basata sull'uso dell'espressione relativistica

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \ . \tag{6.4}$$

Il risultato di questa procedura è l'equazione di Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\psi = 0 \ , \tag{6.5}$$

Moltiplicando per ψ^* e sotttraendo al risultato il prodotto tra la ψ e la complessa coniugata della (6.5) si ottiene l'equazione di continuità

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\mathbf{j} \ , \tag{6.6}$$

con

$$\rho = \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} \tag{6.7}$$

e

$$\mathbf{j} = -\boldsymbol{\nabla}\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*\right) \ . \tag{6.8}$$

Tuttavia, la ρ che compare a primo membro della (6.6) non può essere identificata con la densità di probabilità, come la quantità analoga che si ottiene dall'equazione di Schrödinger, poichè non gode della proprietà di essere sempre positiva. Per convincersi di questo basta sostituire $i\partial/\partial t \to E$ nella (6.7). Il risultato,

$$\rho = E|\psi|^2 \ ,$$

mostra infatti che la ρ può essere sia positiva sia negativa, dal momento che l'equazione di Klein-Gordon ha soluzioni con energia di entrambi i segni

$$E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \ ,$$

Si noti che nel limite non relativistico $E \approx m > 0$ e si trova il familiare risultato $\rho \propto |\psi|^2$.

La presenza della derivata seconda rispetto al tempo contraddice, inoltre, il postulato della meccanica quantistica secondo il quale la funzione d'onda contiene tutta l'informazione sullo stato di un sistema fisico, e deve quindi essere completamente determinata dal suo valore al tempo iniziale.

A causa di questi problemi l'equazione di Klein-Gordon venne inizialmente accantonata, fino a quando Pauli e Weisskopf [9] suggerirono che la sua soluzione doveva essere intepretata come un campo quantistico, anzichè come la funzione d'onda di una particella.

6.1 Forma e proprietá dell'equazione di Dirac

Se la funzione d' onda ad un dato istante deve contenere tutta l' informazione sullo stato, l'equazione d'onda deve essere del primo ordine rispetto al tempo. Poichè la trattazione relativistica richiede che il tempo e le coordinate spaziali siano trattate in modo simmetrico, questo implica che anche le derivate spaziali devono apparire al primo ordine. Inoltre, le soluzioni debbono essere compatibili con l'equazione di Klein Gordon, che si ottiene direttamente dall'espressione relativistica dell'energia (6.4).

Per soddisfare a tutte queste condizioni, Dirac propose di scrivere l'equazione d'onda nella forma

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)\psi \ , \tag{6.9}$$

dove ψ è un vettore ad N componenti

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_1 \\ \cdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

e le α_i $(i = 1, 2, 3)$ e β sono matrici $N \times N$, con N da determinare. Si noti che funzioni d'onda del tipo (6.10) si incontrano anche in meccanica meccanica quantistica non relativistica. Per esempio, la funzione d'onda di una particella di spin 1/2 è un vettore a due componenti.

Poichè l' Hamiltoniana è un operatore hermitiano, deve essere $\alpha = \alpha^\dagger$ e $\beta = \beta^\dagger$. Inoltre, dalla richiesta che la (6.9) sia compatibile con l'equazione di Klein Gordon, cioè che

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}+\beta m)(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}+\beta m)=E^2=\mathbf{p}^2+m^2$$

segue la condizione:

$$\begin{aligned}&\alpha_i\alpha_j p_i p_j + m(\alpha_i\beta+\beta\alpha_i)p_i+\beta^2m^2\\&=\frac{1}{2}\left(\{\alpha_i,\alpha_j\}+[\alpha_i,\alpha_j]\right)p_ip_j+m\left\{\alpha_i,\beta\right\}p_i+\beta^2m^2\\&=p_ip_j\delta_{ij}+m^2\ ,\end{aligned}$$

Si noti che p_ip_j è un tensore simmetrico, la cui contrazione col tensore antisimmetrico $[\alpha_i,\alpha_j]$ è nulla. Troviamo quindi:

$$\{\alpha_i,\alpha_j\}=2\delta_{ij} \tag{6.11}$$

$$\{\alpha_i,\beta\}=0 \tag{6.12}$$

$$\alpha_i^2=\beta^2=1\ . \tag{6.13}$$

È conveniente introdurre un nuovo set di matrici γ^μ ($\mu=0,1,2,3$) definito dalle ($i=1,2,3$)

$$\gamma^0=\beta\quad,\quad\gamma^i=\beta\alpha_i=\gamma^0\alpha_i\ . \tag{6.14}$$

che soddisfano alle regole di anticommutazione

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu} \tag{6.15}$$

e godono delle proprietà

$$(\gamma^0)^2=1\quad,\quad(\gamma^i)^2=-1\ , \tag{6.16}$$

$$\gamma^{\mu\dagger}=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\ . \tag{6.17}$$

Usando le matrici γ^μ si può riscrivere l'equazione di Dirac nella forma data da Feynman. Moltiplicando la (6.9) da sinistra per $\beta=\gamma^0$ si ottiene:

$$i\beta\frac{\partial\psi}{\partial t}=i\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t}=(\beta\alpha_ip_i+\beta^2m)\psi=\left(-i\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i}+m\right)\psi\ ,$$

cioè

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0\ . \tag{6.18}$$

Infine, introducendo la notazione $\not\partial=\gamma^\mu\partial_\mu$ si può porre la (6.18) nella forma

$$(i\not\partial-m)\psi=0\ . \tag{6.19}$$

Proprietà delle matrici di Dirac Le regole di anticommutazione (6.11)-(6.12) e la (6.13) determinano le proprietà cui devono soddisfare le matrici α_i e β. La (6.13) implica che gli autovalori delle matrici α_i e β sono tutti uguali a ± 1, mentre dalla (6.11) segue che, per $j \neq i$

$$\begin{aligned} \alpha_i\alpha_j\alpha_j = \alpha_i &= -\alpha_j\alpha_i\alpha_j \\ Tr(\alpha_i) = -Tr(\alpha_j\alpha_i\alpha_j) &= -Tr(\alpha_j\alpha_j\alpha_i) = -Tr(\alpha_i) \ , \end{aligned}$$

cioè

$$Tr(\alpha_i) = 0 \ . \tag{6.20}$$

Usando lo stesso procedimento si dimostra anche che dalla (6.11) segue che

$$Tr(\beta) = 0 \ . \tag{6.21}$$

Una matrice $N \times N$ i cui autovalori sono tutti uguali a ± 1 può avere traccia nulla solo se N è un numero pari. Quindi le dimensioni possibili delle matrici di Dirac sono $N = 2, 4, \ldots$.

Possiamo escludere subito il caso $N = 2$. Le matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \tag{6.22}$$

utilizzate nella Meccanica Quantistica non relativistica per descrivere particelle di spin 1/2, soddisfano le regole di anticommutazione:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \ , \tag{6.23}$$

analoghe alle (6.11). È però impossibilie trovare una quarta matrice indipendente che anticommuti con le σ_i. Infatti, le matrici di Pauli formano, insieme alla matrice unità I, una base per le matrici 2×2, per cui ogni matrice 2×2, M, si può scomporre secondo la

$$M = M_0 I + M_i \sigma_i$$

con

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Una matrice M che sia indipendente dalle σ_i deve avere $M_0 \neq 0$, ma in questo caso non può ovviamente anticommutare con le σ_i stesse.

La dimensione minima della matrici α_i e β è $N = 4$. Si può verificare facilmente che le matrici 4×4

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \tag{6.24}$$

soddisfano alle (6.11)-(6.13).

La rappresentazione della matrici γ^μ ottenute dalle (6.24), chiamata rappresentazione di Pauli, non è unica. Data una matrice non singolare S, le nuove matrici:

$$\widetilde{\gamma}^\mu = S^{-1}\gamma^\mu S \ . \tag{6.25}$$

soddisfano alle stesse regole di anticommutazione delle γ^μ:

$$\{\widetilde{\gamma}^\mu, \widetilde{\gamma}^\nu\} = S^{-1}\gamma^\mu S S^{-1}\gamma^\nu S + S^{-1}\gamma^\nu S S^{-1}\gamma^\mu S = S^{-1}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} S = 2g^{\mu\nu} \ .$$

Si può dimostrare che, dati due set di matrici γ^μ e $\widetilde{\gamma}^\mu$ che soddisfano alle regole di anticommutazione (6.15), esse sono sempre collegate da una trasformazione del tipo (6.25), con una particolare matrice non-singolare S.

6.1.1 Spin

L'operatore hamiltoniano dell'equazione di Dirac

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m \tag{6.26}$$

non commuta con il momento angolare orbitale:

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} \ . \tag{6.27}$$

Usando le regole di commutazione $[p_i, x_j] = -i\delta_{ij}$ si ottiene, ad esempio:

$$\begin{aligned} [H, L_3] &= [\alpha_i p_i, x_1 p_2 - p_2 x_1] \\ &= \alpha_1 p_2 [p_1, x_1] - \alpha_2 p_1 [p_2, x_2] \\ &= -i(\alpha_1 p_2 - \alpha_2 p_1) \neq 0 \ . \end{aligned}$$

Le costanti del moto associate all' invarianza per rotazioni della (6.9) sono le componenti del *momento angolare totale*, definito come

$$\begin{aligned} &\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}; \\ &\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \ , \end{aligned} \tag{6.28}$$

che infatti commuta con l'hamiltoniana (6.26). Per vedere questo, definiamo il tensore antisimmetrico

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \ , \tag{6.29}$$

le cui componenti σ^{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ sono

$$\sigma^{ij} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} [\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & [\sigma^i, \sigma^j] \end{pmatrix} = \epsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} = \epsilon^{ijk}\ \Sigma_k \ .$$

Otteniamo quindi:

$$\Sigma_3 = \frac{i}{2}(\gamma_1\gamma_2 - \gamma_2\gamma_1) = -\frac{i}{2}(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1) \ .$$

In questa forma possiamo calcolare agevolmente il commutatore di H con Σ_3:

$$\frac{1}{2}[H, \Sigma_3] = -\frac{i}{4}[\alpha_i p_i, \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1] = -i(\alpha_2 p_1 - \alpha_1 p_2) = -[H, L_3] \ ,$$

cioè

$$[H, J_3] = \left[H, L_3 + \frac{1}{2}\Sigma_3\right] = 0 \ .$$

Gli autovalori di Σ_3 sono ± 1. La (6.28) mostra che l'equazione di Dirac descrive particelle con spin 1/2.

Quando l'impulso della particella non è nullo, mentre la proiezione dello spin lungo un asse generico non si conserva, come abbiamo appena visto, la proiezione dello spin lungo la direzione del moto commuta con l' Hamiltoniana. Questa grandezza prende il nome di elicità, ed è descritta dall'operatore

$$\sigma_p = \frac{(\mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{p})}{|\mathbf{p}|} \ , \tag{6.30}$$

Commento 1. La comparsa dello spin spiega perché la funzione d' onda che soddisfa l' equazione di Dirac deve essere un vettore multidimensionale. Tuttavia, per spin 1/2 ci aspetteremmo una funzione d' onda a due componenti, mentre la dimensione minima delle matrici di Dirac é $N = 4$. La duplicazione delle componenti é dovuta alla necessaria presenza dell' antiparticella, come vedremo piú avanti.

6.1.2 Invarianza relativistica

Vogliamo dimostrare che se $\psi(x)$ soddisfa l' equazione di Dirac in un dato sistema di riferimento O, la funzione d' onda determinata da un osservatore in un altro sistema O', soddisfa l' equazione di Dirac in O'.

Questo é analogo a quanto succede nel caso del tensore del campo elettromagnetico: le componenti di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ si trasformano da un riferimento all' altro, ma la forma delle equazioni di Maxwell rimane invariata.

Consideriamo la trasformazione di Lorentz omogenea da O ad O'

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \ ,$$

In corrispondenza, le componenti della ψ si devono trasformare linearmente[1], con una matrice che dipende dalla trasformazione Λ

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \tag{6.31}$$

La dipendenza di S da Λ deve essere tale da rispettare la regola di composizione delle trasformazioni di Lorentz, almeno per quanto riguarda le trasformazioni prossime all' identitá:

$$S(\Lambda_1\Lambda_2) = S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) \tag{6.32}$$

Si noti che noi non conosciamo *a priori* la forma di $S(\Lambda)$. L' invarianza relativistica della equazione di Dirac richiede che *sia possibile determinare* delle $S(\Lambda)$ tali che:

[1] per rispettare il Principio di Sovrapposizione

- soddisfino le legge di composizione (6.32)
- conducano ad una ψ' che soddisfa l' equazione di Dirac in O' se ψ la soddisfa in O.

Consideriamo adesso l' equazione di Dirac in O:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(i\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - m\right)\psi(x) = \left(i\gamma^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - m\right) S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = \\ &= \left(i\gamma^\lambda \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m\right) S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = \\ &= \left(i\gamma^\lambda \Lambda^\mu{}_\lambda \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m\right) S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') \end{aligned}$$

Moltiplicando per la matrice $S(\Lambda)$, otteniamo:

$$\begin{aligned} &\left(i\widetilde{\gamma}^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m\right)\psi'(x') = 0; \\ &\widetilde{\gamma}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \; S(\Lambda)\gamma^\nu S^{-1}(\Lambda) \end{aligned} \tag{6.33}$$

L' equazione (6.33) coincide con l' equazione di Dirac nel sistema O' se le matrici $\widetilde{\gamma}^\mu$ coincidono con γ^μ, ovvero se $S(\Lambda)$ soddisfa la relazione:

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \tag{6.34}$$

Per risolvere la (6.34), ci restringiamo alle trasformazioni infinitesime, che abbiamo visto nella (3.81) essere della forma (cfr. la Sez. 3.6):

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu \ ,$$

con

$$\begin{aligned} &\epsilon^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha}\epsilon_{\alpha\nu}; \\ &\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha} \end{aligned} \tag{6.35}$$

Ora scriviamo

$$S = 1 + T \ , \quad S^{-1} = 1 - T$$

con T infinitesimo:

$$T = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} \ , \tag{6.36}$$

e $T^{\alpha\beta}$ è antisimmetrico.

Sostituendo nell'equazione (6.34) ottieniamo (al primo ordine in ϵ)

$$\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu = \gamma^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu\gamma^\nu = S^{-1}\gamma^\mu S = \gamma^\mu + (\gamma^\mu T - T\gamma^\mu) \ .$$

cioè (usiamo la (6.36) e la (6.35))

$$\left(g^{\beta\mu}\gamma^\alpha - g^{\alpha\mu}\gamma^\beta\right) = \left[\gamma^\mu, T^{\alpha\beta}\right] \ . \tag{6.37}$$

La (6.37) ammette come soluzione il tensore antisimmetrico (si confronti con la (6.29))

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\left[\gamma^\alpha, \gamma^\beta\right] = -\frac{i}{2}\sigma^{\alpha\beta} \ ,$$

La trasformazione S che cercavamo è quindi:

$$S = 1 - \frac{i}{4}\ \epsilon_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} \ , \tag{6.38}$$

Notiamo la proprietà

$$\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = S^{-1} \ . \tag{6.39}$$

La (6.39) si dimostra usando la

$$\sigma^{\mu\nu\dagger} = \gamma^0\ \sigma^{\mu\nu}\gamma^0 \ , \tag{6.40}$$

che implica

$$\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = 1 + \frac{i}{4}\ \epsilon_{\mu\nu}\gamma^0\sigma^{\mu\nu\dagger}\gamma^0 = 1 + \frac{i}{4}\ \epsilon_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = S^{-1} \ . \tag{6.41}$$

Si noti che la (6.39) vale per qualsiasi trasformazione di Lorentz propria, che può essere ottenuta come prodotto di trasformazioni infinitesime. Per convincerci di ciò, consideriamo il caso in cui

$$S = S_1 S_2 \quad , \quad S^{-1} = S_2^{-1} S_1^{-1} \ ,$$

con S_1 e S_2 trasformazioni infinitesime. Dalla (6.39) segue che

$$\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 S_2^\dagger S_1^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 S_2^\dagger \gamma^0 \gamma^0 S_1^\dagger \gamma^0 = S_2^{-1} S_1^{-1} = S^{-1} \ .$$

Lo spinore aggiunto In generale ψ é una funzione d' onda complessa. Accanto a ψ possiamo introdurre lo spinore complesso coniugato ψ^*. Se consideriamo ψ come un vettore colonna, vedi la (6.10), possiamo introdurre lo spinore $\psi^\dagger$, un vettore riga che ha per componenti gli elementi di ψ^*:

$$\psi^\dagger = (\psi^*)^T \tag{6.42}$$

Notiamo che $\psi^\dagger\psi$ non é invariante sotto trasformazioni di Lorentz, visto che la matrice $S(\Lambda)$ non é unitaria. Un invariante si costruisce considerando lo *spinore aggiunto*:

$$\bar\psi = \psi^\dagger\gamma^0 \tag{6.43}$$

Usando la relazione (6.41) si vede che

$$\bar\psi'(x') = \psi^\dagger(x) S^\dagger \gamma^0 = \bar\psi(x) S^{-1} \tag{6.44}$$

in modo tale che:

$$(\bar\psi\psi)'(x') = \bar\psi(x) S^{-1} S\psi(x) = (\bar\psi\psi)(x) \tag{6.45}$$

Forme bilineari covarianti Moltiplicando tra loro due o più matrici γ si genera un'algebra di matrici. Poichè il prodotto simmetrico di due matrici γ è $\pm I$, possiamo limitarci a considerare i prodotti antisimmetrizzati negli indici di Lorentz. Si trovano così quindici matrici 4×4 linearmente indipendenti (le quattro matrici γ , sei prodotti di due γ, quattro di tre ed uno di quattro), che insieme all'identità formano l'algebra di Dirac

$$\Gamma^S = I \quad , \quad \Gamma^V_\mu = \gamma_\mu \quad , \quad \Gamma^T_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} \ ,$$

$$\Gamma^P = \gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad , \quad \Gamma^A_\mu = \gamma_\mu\gamma_5 \ .$$

Notiamo che γ_5 é hermitiana mentre per le altre matrici dell' algebra valgono relazioni analoghe alle (6.17):

$$\Gamma = \gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0 \tag{6.46}$$

Usando i risultati del paragrafo precedente si ottengono facilmente le leggi di trasformazione delle forme bilineari del tipo

$$\psi^\dagger\gamma^0\Gamma\psi = \bar\psi\Gamma^n\psi \ , \tag{6.47}$$

in termini dello spinore aggiunto $\bar\psi$, che si trasforma secondo la (6.44). Le forme bilineari (6.47) svolgono un ruolo importante, poichè hanno proprietà di trasformazione definite sotto trasformazioni di Lorentz. Sono gli ingredienti base con cui costruire le grandezze osservabili e le densitá di Lagrangiana invarianti.

Consideriamo, per esempio, l'equazione di continuità (6.6) che si ottiene dall'equazione di Dirac. Si trova facilmente che

$$\rho = \psi^\dagger\psi = \bar\psi\gamma^0\psi \quad , \quad \mathbf{j} = \psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi = \bar\psi\boldsymbol{\gamma}\psi \ .$$

La forma bilineare $\bar\psi\gamma^\mu\psi$ è la quadricorrente associata alla particella descritta dall'equazione di Dirac e $j^0 = \rho$ è la densità di probabilità, il cui integrale di volume è una grandezza conservata.

Possiamo ora procedere a determinare le leggi di trasformazione delle forme bilineari.

- $\bar\psi\Gamma_S\psi = \bar\psi\psi$ trasforma come uno scalare, perchè

$$\bar\psi'\psi' = \bar\psi S^{-1}S\psi = \bar\psi\psi \ .$$

- Le $\bar\psi\Gamma^\mu_V\psi = \bar\psi\gamma^\mu\psi$ trasformano come le componenti di un quadrivettore covariante, perchè

$$\bar\psi'\gamma^\mu\psi' = \bar\psi S^{-1}\gamma^\mu S\psi = \Lambda^\mu{}_\nu\bar\psi\gamma^\nu\psi \ .$$

- Le $\bar\psi\Gamma^{\mu\nu}_T\psi = \bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi = \bar\psi \ i[\gamma^\mu,\gamma^\nu]/2 \ \psi$ trasformano come gli elementi di un tensore antisimmetrico, perchè

$$\bar\psi'\gamma^\mu\gamma^\nu\psi' = \bar\psi S^{-1}\gamma^\mu SS^{-1}\gamma^\nu S\psi = \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\bar\psi\gamma^\alpha\gamma^\beta\psi \ .$$

- $\bar\psi\Gamma_P\psi = \bar\psi\gamma^5\psi$ trasforma secondo la

$$\bar\psi'\gamma^5\psi' = \det(\Lambda) \ \bar\psi\gamma^5\psi \ ,$$

cioè trasforma come uno scalare nel caso di trasformazioni di Lorentz proprie ($\det(\Lambda) = 1$) ma cambia segno nel caso di trasformazioni di parità $(x_0, x_i) \to (x_0, -x_i)$, il cui determinante vale -1. Quindi $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ é una densitá *pseudoscalare*.

La legge di trasformazione si ottiene usando la definizione

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta \ ,$$

dove $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ è il tensore unità antisimmetrico nei quattro indici. Si trova così

$$\begin{aligned} S^{-1}\gamma^5 S &= \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\Lambda^\mu{}_\delta\Lambda^\nu{}_\lambda\Lambda^\alpha{}_\sigma\Lambda^\beta{}_\rho\gamma^\delta\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^\rho \\ &= \frac{i}{4!}\det(\Lambda)\epsilon_{\delta\lambda\sigma\rho}\gamma^\delta\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^\rho = \det(\Lambda)\gamma^5 \ . \end{aligned}$$

- Le $\bar{\psi}\Gamma^{\mu\nu}_A\psi = \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$ trasformano secondo la

$$\bar{\psi}'\gamma^5\gamma^\mu\psi' = \det(\Lambda)\ \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\psi \ ,$$

cioè come le componenti di un quadrivettore nel caso di trasformazioni di Lorentz proprie ed in modo opposto sotto trasformazioni di parità.

Commento 1. Una corrispondenza $\Lambda \to S(\Lambda)$ tra gli elementi di un gruppo ed un insieme di matrici che verificano la stessa legge di composizione del gruppo, definisce una *rappresentazione* del gruppo stesso. Le relazioni (6.31), (6.32) definiscono una rappresentazione del gruppo di Lorentz, che si aggiunge a quelle giá viste nella Sez. 3.3 a proposito dei tensori irriducibili. Secondo la classificazione ivi considerata, la rappresentazione 4-dimensionale degli spinori di Dirac, corrisponde alla $(0, 1/2) \oplus (1/2, 0)$. Si tratta di una rappresentazione *riducibile*, infatti esiste una matrice non triviale (la matrice γ_5) che commuta con tutti i generatori del gruppo. I prodotti tensoriali di un numero dispari di rappresentazioni spinoriali generano una nuova serie di rappresentazioni che, dal punto di vista delle rotazioni, contengono rappresentazioni di spin semintero.

Commento 2. Secondo la (6.39) le matrici $S(\Lambda)$ sono *pseudounitarie*, quindi non unitarie. In effetti si puó dimostrare che le rappresentazioni con operatori unitari del gruppo di Lorentz sono necessariamente infinito-dimensionali. Questo é dovuto al fatto che $L^\uparrow_+$ é un gruppo *non compatto*: lo spazio dei parametri che descrivono le trasformazioni costituisce un insieme non compatto, a differenza delle rotazioni. Per queste ultime, infatti, gli elementi di matrice sono funzioni limitate degli angoli di rotazione, sempre compresi nell' intervallo $(0, 2\pi)$. Al contrario, il parametro $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ che compare in Λ^μ_ν é illimitato.

Commento 3. Secondo la Meccanica Quantistica, il modulo quadro del prodotto tra due stati, $| < B|A > |^2$, rappresenta la probabilitá di trovare la stato $|B >$ come risultato di una misura sullo stato $|A >$. Questa probabilitá deve essere la stessa in tutti i sistemi di riferimento,

quindi se $|\Lambda A>$ e $|\Lambda B>$ sono i ket che rappresentano gli stati trasformati, dobbiamo avere, qualsiasi siano $|A>$ e $|B>$:

$$|<\Lambda B|\Lambda A>|^2 = |<B|A>|^2 \tag{6.48}$$

Sempre secondo la Meccanica Quantistica, gli stati trasformati si ottengono applicando un operatore lineare $U(\Lambda)$, che rappresenta la trasformazione di Lorentz Λ. Deve quindi essere:

$$|<B|U(\Lambda)^\dagger U(\Lambda)|A>|^2 = |<B|A>|^2 \tag{6.49}$$

Wigner ha mostrato che la (A.105) ha due possibili soluzioni:

$$<B|U(\Lambda)^\dagger U(\Lambda)|A> = <B|A> \quad \text{ovvero} \quad <B|U(\Lambda)^\dagger U(\Lambda)|A> = <B|A>^* \tag{6.50}$$

Possiamo escludere il secondo caso per continuitá: quando Λ tende alla trasformazione unitá, $|\Lambda A>$ deve tendere ad $|A>$, quindi $U(\Lambda)$ all' identitá che soddisfa la prima condizione e non la seconda. In conclusione

- le trasformazioni di Lorentz sono rappresentate sugli stati quantistici da operatori unitari

Commento 4. Vista la non-unitarietá delle matrici $S(\Lambda)$ é interessante chiederci in che modo i prodotti scalari tra stati che sono soluzioni dell' equazioni di Dirac possano fornire una rappresentazione unitaria del gruppo di Lorentz, come richiesto dalle considerazioni del commento precedente. Nella teoria di Dirac, per due stati $|A>$ e $|B>$, si ha:

$$<A|B> = \int d^3x\ \psi_A^*(\mathbf{x},t)\psi_B(\mathbf{x},t)$$

La densitá all' interno dell' integrale non é invariante. Piuttosto, la forma della $S(\Lambda)$ implica che essa sia la componente temporale di una 4-corrente, conservata per l' equazione di Dirac:

$$\psi_A^*(\mathbf{x},t)\psi_B(\mathbf{x},t) = \bar{\psi}_A(\mathbf{x},t)\gamma^0\psi_B(\mathbf{x},t) = J^0_{A,B};$$
$$\partial_\mu J^\mu_{A,B} = 0$$

Ma, come abbiamo visto nella Sez. 3.5, l' integrale sullo spazio della componente temporale di una 4-corrente conservata é un invariante relativistico. Quindi, per una qualsiasi trasformazione di Lorentz:

$$<\Lambda A|\Lambda B> = <A|B>$$

che é proprio la condizione di invarianza dei prodotti scalari. La non invarianza di $\psi^*\psi$ é quanto richiesto per compensare esattamente la non invarianza della misura d^3x, in modo tale che le matrici $S(\Lambda)$ inducano sugli stati fisici una rappresentazione unitaria del gruppo di Lorentz. Questo risultato sará derivato in modo esplicito nel seguito, Sez. 7.2.

6.1.3 Boost

Con questo termine si indica una trasformazione di Lorentz speciale, che corrisponde a passare da un dato sistema di riferimento, O, ad un sistema O$'$ che si muove rispetto ad O con velocitá β lungo l' asse x positivo.

La legge di trasformazione tra le coordinate di O ed O$'$ coinvolge solo x^0 e x^1, e si scrive:

$$x^{0,\prime} = \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^0_1 x^1 = \gamma(t - \beta x)$$
$$x^{1,\prime} = \Lambda^1_0 x^0 + \Lambda^1_1 x^1 = \gamma(-\beta t + x)$$

dove:

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \cosh\theta \tag{6.51}$$

e θ è la rapiditá, con:

$$\beta = \tanh\theta. \tag{6.52}$$

L' origine di O$'$, x$'$=0, si muove con l' equazione oraria: x=βt come deve.

Poniamo β infinitesimo:

$$\beta = \delta\theta$$

e definiamo i parametri infinitesimi della trasformazione secondo le (6.35). Otteniamo:

$$\epsilon_{1,0} = -\epsilon_{0,1} = \delta\theta$$

La matrice S(Λ), che regola la trasformazione tra ψ(x) e ψ'(x$'$) è quindi, secondo la (6.38):

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4}\,\epsilon_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} =$$
$$= 1 - \frac{i\delta\theta}{2}\sigma^{10} \tag{6.53}$$

usando la definizione:

$$\sigma^{10} = \frac{i}{2}[\gamma^1, \gamma^0] = i\gamma^1\gamma^0 = -i\alpha_1$$

troviamo:

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{\delta\theta}{2}\alpha_1$$

Trasformazioni con rapiditá finita, $\theta = \tanh^{-1}\beta$ si ottengono componendo le trasformazioni infinitesime, che corrisponde a moltiplicare tra loro le relative matrici (6.54). Posto:

$$\delta\theta = \frac{\theta}{N}; \quad \text{(N grande)}$$

troviamo:

$$S(\Lambda) = \left(1 - \frac{\theta}{2N}\alpha_1\right)^N \;\rightarrow\; e^{-\frac{\theta}{2}\alpha_1} \tag{6.54}$$

L' esponenziale di α_1 si esprime facilmente in termini elementari, poiché $(\alpha_1)^2 = 1$. Sviluppando in serie troviamo:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\theta}{2}\alpha_1} &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{\theta}{2}\alpha_1\right)^n = \\ &= \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(2k)!}\left(-\frac{\theta}{2}\right)^{2k} + \alpha_1 \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\left(-\frac{\theta}{2}\right)^{2k+1} = \cosh\frac{\theta}{2} - \alpha_1 \sinh\frac{\theta}{2} \end{aligned} \tag{6.55}$$

Infine, usiamo le ben note relazioni di trigonomentria iperbolica:

$$\cosh^2\frac{\theta}{2} = \frac{\cosh\theta + 1}{2}; \quad \sinh^2\frac{\theta}{2} = \frac{\cosh\theta - 1}{2} \tag{6.56}$$

per ottenere:

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= \cosh\frac{\theta}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\tanh\frac{\theta}{2}\sigma_1 \\ -\tanh\frac{\theta}{2}\sigma_1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta\gamma}{\gamma+1}\sigma_1 \\ -\frac{\beta\gamma}{\gamma+1}\sigma_1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.57}$$

La (6.57) si generalizza immediatamente al caso in cui la velocitá sia diretta lungo un versore generico, $\vec{n}$:

$$S(\Lambda) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta\gamma}{\gamma+1}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) \\ -\frac{\beta\gamma}{\gamma+1}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) & 1 \end{bmatrix} \tag{6.58}$$

6.1.4 Soluzioni dell'equazione di Dirac libera

L' equazione di Dirac, nella forma (6.9) o (6.18) ammette soluzioni nella forma di onde piane relativistiche. Scriviamo:

$$\psi(x) = u(p)e^{-i(px)};\; p^\mu = (E, \vec{p}) \tag{6.59}$$

L' equazione per la $u(p)$ prende la forma:

$$(\not{p} - m)u(p) = (p_\mu\gamma^\mu - m)u(p) = 0 \tag{6.60}$$

dove u è uno spinore a quattro componenti.

Consideriamo, per cominciare, le soluzioni dell'equazione di Dirac per una particella in quiete. In questo caso la (6.60) si riduce a

$$(\gamma^0 E - m)u(p) = 0\ , \tag{6.61}$$

ovvero, esplicitamente:

$$\begin{pmatrix} E-m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E-m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = 0 \ . \tag{6.62}$$

La (6.62) ammette i quattro autovalori $E^{(1)} = E^{(2)} = m$ ed $E^{(3)} = E^{(4)} = -m$, e gli autovettori corrispondenti sono

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad u^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad u^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ . \tag{6.63}$$

Anche l' equazione di Dirac, come l'equazione di Klein Gordon, ammette quindi soluzioni con energia sia positiva che negativa. Le due soluzioni ad energia positiva corrispondono ai due stati possibili di una particella di spin 1/2. Discuteremo piú avanti il significato delle soluzioni ad energia negativa.

Nel caso generale $\vec{p} \neq 0$ scriviamo il quadrispinore $u^{(r)}(p)$ in termini di due spinori a due componenti u_A ed u_B

$$u^{(r)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \ , \tag{6.64}$$

dalla (6.60) otteniamo il sistema

$$\begin{pmatrix} E-m & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -E-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0 \ , \tag{6.65}$$

che ha soluzioni non banali per

$$E^2 - m^2 = (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2 \ . \tag{6.66}$$

Riscrivendo la (6.65) nella forma

$$u_A = \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})}{E-m}\, u_B \tag{6.67}$$

$$u_B = \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})}{E+m}\, u_A \ , \tag{6.68}$$

si vede subito che le soluzioni ad energia positiva si possono ottenere dalla (6.68), scegliendo u_A uguale ad uno degli spinori di Pauli a due componenti

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ . \tag{6.69}$$

Le soluzioni ad energia negativa si ottengono in modo analogo a partire dalla (6.67). Possiamo quindi scrivere le quattro soluzioni della (6.60) nella forma

$$u_r^{(+)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})}{E_p+m}\chi_r \end{pmatrix} \quad , \quad u_r^{(-)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})}{E_p+m}\chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix} \ , \tag{6.70}$$

con $r = 1, 2$ e $E_p = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = |E|$. Ovviamente, per $\mathbf{p} \to 0$ le (6.70) si riducono alle (6.63).

Per descrivere gli stati ad energia negativa, è conveniente introdurre due nuovi quadrispinori $v_r(\mathbf{p})$ $(r = 1, 2)$, definiti dalle

$$v_1(\mathbf{p}) = u_2^{(-)}(-\mathbf{p}) \quad , \quad v_2(\mathbf{p}) = -u_1^{(-)}(-\mathbf{p}) \ . \tag{6.71}$$

ovvero:

$$v_r(\mathbf{p}) = \epsilon^{rs}\ u_s^{(-)}(-\mathbf{p}), \quad (\mathrm{r},\ \mathrm{s} = 1,\ 2) \tag{6.72}$$

dove ϵ^{rs} è il tensore a due indici completamente antisimmetrico[2] ed è sottintesa la somma sugli indici ripetuti. Poniamo inoltre:

$$u_r(\mathbf{p}) = u_r^{(+)}(\mathbf{p}) \tag{6.73}$$

Dalle definizioni segue immediatamente che u_r e v_r soddisfano alle equazioni:

$$(\not{p} - m)u_r = 0 \quad , \quad (\not{p} + m)v_r = 0 \ . \tag{6.74}$$

La normalizzazione dei quadrispinori si determina scrivendo la soluzione della (6.60) nella forma

$$\psi(x) = N\left(\frac{m}{VE_p}\right)^{1/2} \times \begin{cases} u_r(\mathbf{p})\mathrm{e}^{-ipx} & \text{(energia positiva)} \\ \\ v_r(\mathbf{p})\mathrm{e}^{ipx} & \text{(energia negativa)} \end{cases} \tag{6.75}$$

e richiedendo che sia

$$\int d^3x\ \psi^\dagger(x)\psi(x) = 1 \ , \tag{6.76}$$

cioè

$$u_r{}^\dagger(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) = v_r{}^\dagger(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) = \frac{E_p}{m} \ . \tag{6.77}$$

Si ottiene così $N = [(E_p + m)/2m]^{1/2}$.

Con questa scelta della normalizzazione le relazioni di ortonormalità per i quadrispinori sono:

$$\begin{aligned} u_r{}^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = v_r{}^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs}\ \frac{E_p}{m} \\ u_r{}^\dagger(\mathbf{p})v_s(-\mathbf{p}) = u_r^{(+)\dagger}(\mathbf{p})u_s^{(-)}(\mathbf{p}) = 0 \end{aligned} \tag{6.78}$$

inoltre, con semplici manipolazioni formali [3] otteniamo dalle (6.74) le relazioni:

$$\begin{aligned} m\ \bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu u(\mathbf{p}) = p^\mu\ \bar{u}(\mathbf{p})u(\mathbf{p}) \\ \bar{u}(\mathbf{p})v(\mathbf{p}) = 0 \end{aligned} \tag{6.79}$$

[2] $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1$, $\epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0$

[3] moltiplicando a sinistra la (6.74) per $\bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\mu$ e sommando l' aggiunta della stessa equazione moltiplicata a destra per $\gamma^\mu u(\mathbf{p})$ si ottiene la prima delle (6.79); la seconda si ottiene con manipolazioni simili sull' equazione per $v(\mathbf{p})$ in (6.74).

Dalla prima di queste seguono le relazioni di ortonormalitá delle u e v rispetto alla moltiplicazione per gli spinori aggiunti:

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = -\bar{v}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs} \ .$$
$$\bar{u}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \bar{v}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = 0 \ . \tag{6.80}$$

La completezza dell'insieme formato dalle soluzioni dell'equazione di Dirac è espressa dalla relazione

$$\sum_r [(u_r)_\alpha(\mathbf{p})(\bar{u}_r)_\beta(\mathbf{p}) - (v_r)_\alpha(\mathbf{p})(\bar{v}_r)_\beta(\mathbf{p})] = \delta_{\alpha\beta} \ , \tag{6.81}$$

dove $(u_r)_\alpha(\mathbf{p})$ è la componente α del quadrispinore. La (6.81) si ottiene facilmente dalle definizioni dei quadrispinori, che implicano

$$\sum_r (u_r)_\alpha(\mathbf{p})(\bar{u}_r)_\beta(\mathbf{p}) = \left(\Lambda_p^+\right)_{\alpha\beta} = \left(\frac{\not{p} + m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \tag{6.82}$$

$$-\sum_r (v_r)_\alpha(\mathbf{p})(\bar{v}_r)_\beta(\mathbf{p}) = \left(\Lambda_p^-\right)_{\alpha\beta} = -\left(\frac{\not{p} - m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \ . \tag{6.83}$$

Gli operatori Λ_p^+ e Λ_p^- sono proiettori sugli stati di energia rispettivamente positiva e negativa, cioè

$$\Lambda_p^+ u_r = u_r \ \ , \ \ \Lambda_p^- v_r = v_r \ , \tag{6.84}$$

$$\Lambda_p^+ v_r = \Lambda_p^- u_r = 0 \tag{6.85}$$

Sulla base della completezza delle soluzioni dell' equazioni di Dirac, posiamo sviluppare ogni soluzione, secondo l' espressione:

$$\psi(x) = \sum_{\mathbf{p},r} \sqrt{\frac{m}{E(p)V}}[a_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})e^{-i(px)} + (b_r(\mathbf{p}))^* v_r(\mathbf{p})e^{i(px)}] \tag{6.86}$$

Per gli ulteriori sviluppi registriamo l' espressione della normalizzazione della funzione d' onda nonché il valore medio dell' energia e del momento in termini delle ampiezze dei modi normali di oscillazione che appaiono nella (6.86). Con l' aiuto delle relazioni di ortogonalitá (6.78) troviamo:

$$N = \int d^3x \ \psi^\dagger(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{x},t) = \sum_{\mathbf{p},r}[a_r(\mathbf{p})(a_r(\mathbf{p}))^* + (b_r(\mathbf{p}))^* b_r(\mathbf{p})]; \tag{6.87}$$

$$< E >= \int d^3x \ \psi^\dagger(\mathbf{x},t)[-i\alpha\cdot\nabla + \beta m]\psi(\mathbf{x},t) =$$
$$= \sum_{\mathbf{p},r} E(p)[a_r(\mathbf{p})(a_r(\mathbf{p}))^* - (b_r(\mathbf{p}))^* b_r(\mathbf{p})]; \tag{6.88}$$

$$< \mathbf{P} >= \int d^3x \ \psi^\dagger(\mathbf{x},t)(-i\nabla)\psi(\mathbf{x},t) =$$
$$= \sum_{\mathbf{p},r} \mathbf{p}[a_r(\mathbf{p})(a_r(\mathbf{p}))^* - (b_r(\mathbf{p}))^* b_r(\mathbf{p})] \ . \tag{6.89}$$

(il fattore di normalizzazione $\sqrt{m/EV}$ é stato preso in modo che l' energia del modo di oscillazione $\mathbf{p}, r$ sia uguale ad $E(p)$ per ampiezza di oscillazione unitaria).

Soluzioni con p$\neq 0$ e boost di Lorentz. Le soluzioni a $\mathbf{p} \neq 0$ si possono ottenere con una trasformazione di Lorentz a partire da quelle che descrivono una particella in quiete, utilizzando la rappresentazione del boost di Lorentz determinata nella Sez. 6.1.3.

Indichiamo con:

$$\psi'(x') = e^{-i(p'x')}\ u'(p') \tag{6.90}$$

lo spinore nel riferimento O$'$ introdotto nella Sez. 6.1.3. Avremo:

$$\psi(x) = e^{-i(px)}\ u(p) = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = e^{-i(p'x')}S^{-1}(\Lambda)u'(p') \tag{6.91}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} &u(p) = S^{-1}(\Lambda)u'(p'); \\ &S^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{\beta\gamma\sigma_1}{\gamma+1} \\ \frac{\beta\gamma\sigma_1}{\gamma+1} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.92}$$

poiché $(p'x') = (px)$.

Se la particella è in quiete in O$'$, energia e momento in O sono date da:

$$p = \pm m\beta\gamma; \quad p^0 = \pm E = \pm m\gamma \tag{6.93}$$

per le soluzioni ad energia positiva e negativa. Per le prime troviamo, quindi (si confronti con le definizioni (6.70)-(6.63)):

$$\begin{aligned} &u_r^{(+)}(p) = u(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{p\sigma_1}{E+m} \\ \frac{p\sigma_1}{E+m} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \chi_r \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{p\sigma_1}{E+m}\chi_r \end{pmatrix} \quad (\mathrm{r} = 1,\ 2) \end{aligned} \tag{6.94}$$

e per le soluzioni ad energia negativa:

$$\begin{aligned} &u_r^{(-)}(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{-p\sigma_1}{E+m} \\ \frac{-p\sigma_1}{E+m} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_r \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-p\sigma_1}{E+m}\chi \\ \chi_r \end{pmatrix} \\ &v_r(p) = \epsilon^{rs}u_s^{(-)}(-p) = \epsilon^{rs}\begin{pmatrix} \frac{p\sigma_1}{E+m}\chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} \quad (\mathrm{r},\ \mathrm{s} = 1,\ 2) \end{aligned} \tag{6.95}$$

Le soluzioni corrispondenti a energia positiva e negativa non vengono mescolate dalla trasformazione di Lorentz.

6.1.5 Il momento magnetico dell'elettrone

Consideriamo un elettrone in un campo elettromagnetico assegnato $A^\mu \equiv (\phi, \mathbf{A})$. L' equazione di Dirac in presenza del campo si ottiene con la sostituzione minimale considerata nella Sez. 5.4:

$$i\partial^\mu \to i\partial^\mu + eA^\mu \ , \tag{6.96}$$

dove e è la carica elettronica. Otteniamo:

$$(i\not{\partial} + e\not{A} - m)\psi = 0 \ , \tag{6.97}$$

ovvero

$$\left[\beta\left(i\frac{\partial}{\partial t} + e\phi\right) - \beta\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) - m\right]\psi = 0 \tag{6.98}$$

Se ci restringiamo alle soluzioni con energia positiva, l' equazione (6.96) fornisce una descrizione straordinariamente accurata del comportamento dell' elettrone in un campo elettromagnetico dato, sia esso il campo elettrico generato da un nucleo atomico sia un un campo esterno classico. Vogliamo ora studiare l'equazione (6.98) in quest' ultimo caso, nel limite non relativistico, per

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \approx m\left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2}\right) = m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \ , \tag{6.99}$$

con $m \gg \mathbf{p}^2/2m$. In queste condizioni è conveniente isolare il fattore di fase rapidamente variabile che corrisponde all' energia di riposo, e riscrivere la soluzione della (6.98) nella forma

$$\psi = \widetilde{\psi}\mathrm{e}^{-imt} \ , \tag{6.100}$$

dove $\widetilde{\psi}$ oscilla molto più lentamente che $\exp(-imt)$.

Sostituendo la (6.100) nella (6.98) e moltiplicando da sinistra per $\beta\exp(imt)$ si ottiene

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + m\right)\widetilde{\psi} = \left[\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{p} + e\mathbf{A}) + \beta m - e\phi\right]\widetilde{\psi} \ , \tag{6.101}$$

$\widetilde{\psi}$ è unno spinore a quattro componenti che possiamo scrivere nella forma

$$\widetilde{\psi} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix} \ , \tag{6.102}$$

con φ ed η spinori a due componenti. Dalle

$$\boldsymbol{\alpha}\widetilde{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\eta \\ \boldsymbol{\sigma}\varphi \end{pmatrix} \tag{6.103}$$

$$\beta\widetilde{\psi} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ -\eta \end{pmatrix} \ , \tag{6.104}$$

si ottiene un sistema di equazioni accoppiate per φ e η

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + e\phi\right)\varphi = \boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p} + e\mathbf{A})\eta \tag{6.105}$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + e\phi + 2m\right)\eta = \boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p} + e\mathbf{A})\varphi \ . \tag{6.106}$$

Utilizziamo ora di nuovo l' approssimazione non relativistica, per cui:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - e\phi + 2m\right)\eta \approx 2m\eta \tag{6.107}$$

e quindi

$$\eta \approx \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p} + e\mathbf{A})}{2m}\ \varphi \ . \tag{6.108}$$

L' equazione (6.108) mostra che η è la *componente piccola* di $\widetilde{\psi}$, essendo di ordine $\mathbf{p}/m$ rispetto a φ.

Sostituendo la (6.108) nella (6.105) si ottiene l'equazione per φ

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + e\phi\right)\varphi = \frac{[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p} + e\mathbf{A})]^2}{2m}\ \varphi \ , \tag{6.109}$$

che può essere riscritta in una forma più familiare usando la relazione

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p} + e\mathbf{A})]^2 &= (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + i\boldsymbol{\sigma}\cdot[(\mathbf{p} + e\mathbf{A})\times(\mathbf{p} + e\mathbf{A})] \\
&= (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + ie\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{A} + \mathbf{A}\times\mathbf{p}) \\
&= (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + e\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} + \mathbf{A}\times\boldsymbol{\nabla}) \\
&= (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + e\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) \\
&= (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + e\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B} \ ,
\end{aligned}$$

dove $\mathbf{B} = (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})$ è il campo magnetico. Si ottiene così la

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + e\phi\right)\varphi = \left[\frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}\right]\varphi \ , \tag{6.110}$$

cioè l'equazione di Schrödinger per una particella con carica eletrica $-e$ e spin $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}/2$, in interazione col campo elettromagnetico descritto dai potenziali ϕ e $\mathbf{A}$.

L'ultimo termine nel secondo membro dell'equazione (6.110) è l'energia di interazione tra il campo magnetico $\mathbf{B}$ ed un dipolo magnetico di momento

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{-e}{2m}\boldsymbol{\sigma} = g\frac{-e}{2m}\mathbf{s} \ , \tag{6.111}$$

Il coefficiente g prende il nome di *fattore giromagnetico* ed esprime il rapporto tra il momento magnetico, espresso in magnetoni di Bohr, ed il momento angolare corrispondente.

L' interazione completa con il campo magnetico si ottiene esplicitando nella (6.110) il potenziale vettore corrispondente ad un campo costante lungo l' asse z:

$$\mathbf{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0);\ \nabla\cdot\mathbf{A};\ rot\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Trascurando termini di ordine B^2, otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{e}{2m}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{p}) + \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B} = \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{eB}{2m}(xp_y - yp_x) + \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B} = \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{e}{2m}(\mathbf{L} + 2\mathbf{S})\cdot\mathbf{B} \end{aligned} \tag{6.112}$$

Il termine che contiene il momento orbitale fornisce la spiegazione quantistica dell' effetto Zeeman normale. L' emissione o assorbimento di un fotone obbedisce alla regola di selezione $\Delta L_z = \pm 1, 0$. Per gli atomi in cui L_z é un buon numero quantico, la linea spettrale in presenza del campo magnetico si divide in tre componenti distanziate di $\pm eB/2m, 0$, che restituisce proprio la frequenza di Larmor (5.73). Negli atomi complessi, tuttavia, L_z ed S_z non sono separatamente diagonali e la differenza tra i livelli coinvolti nella transizione é funzione anche del fattore giromagnetico di spin [10]. La (6.111) descrive correttamente il comportamento dell' elettrone: si trova $g = 2$, come originariamente ipotizzato da S. A. Goudsmit e G. Uhlenbeck per spiegare l'effetto Zeeman anomalo.

Il risultato (6.112) costitutisce uno straordinario successo della teoria di Dirac, nella quale il termine d'interazione spin-campo magnetico, che nella Meccanica Quantistica non Relativistica deve essere aggiunto *ad hoc* all'equazione di Scrödinger, emerge in modo naturale dalla sostituzione minimale quantistica applicata all' equazione di Dirac libera.

6.2 Particelle e antiparticelle

Come abbiamo visto, l' equazione di Dirac é l' unica equazione per la funzione d' onda in linea con le richiesta della Meccanica Quantistica e della Relativitá, e conduce univocamente a particelle con spin 1/2 e ad una descrizione straordinariamente accurata delle proprietá dell' elettrone, libero o legato negli atomi. Tuttavia, l' equazione di Dirac possiede soluzioni con energia negativa, di difficile interpretazione quantistica.

Dai principi generali segue che uno stato quantistico deve evolvere nel tempo secondo la:

$$|t> = e^{-i\mathbf{H}t}|0> \tag{6.113}$$

da cui, se ψ é autofunzione dell' energia, segue:

$$\psi(\vec{x}, t) = e^{-iEt}\psi(\vec{x}, 0) \tag{6.114}$$

Inoltre, per avere un sistema stabile sotto piccole perturbazioni, E deve essere limitata inferiormente al variare degli altri numeri quantici, cosa evidentemente non vera per le soluzioni dell' equazioni di Dirac con $E = -\omega(p) = -\sqrt{(\vec{p})^2 + m^2} \leq -m$.

La soluzione del problema della stabilitá proposta da Dirac é semplice e radicale: tutti gli stati ad energia negativa sono occupati, il vuoto é in realtá un *mare* di elettroni che riempiono tutto i livelli con $E \leq -m$. Il Principio di Esclusione impedisce ad un elettrone con energia positiva di finire in uno degli stati proibiti.

Eccitando un elettrone da uno stato ad energia negativa ad uno stato di energia positiva si crea una *lacuna* nel mare di Dirac, che si comporta in tutto e per tutto come una particella di massa m, uguale alla massa dell' elettrone, spin $1/2$ e *carica elettrica positiva*.

Una particella rispondente a questa descrizione, il *positrone*, é stata scoperta da C. D. Anderson nel 1932, osservando i prodotti delle interazioni dei raggi cosmici in una camera a nebbia, Fig. 6.1.

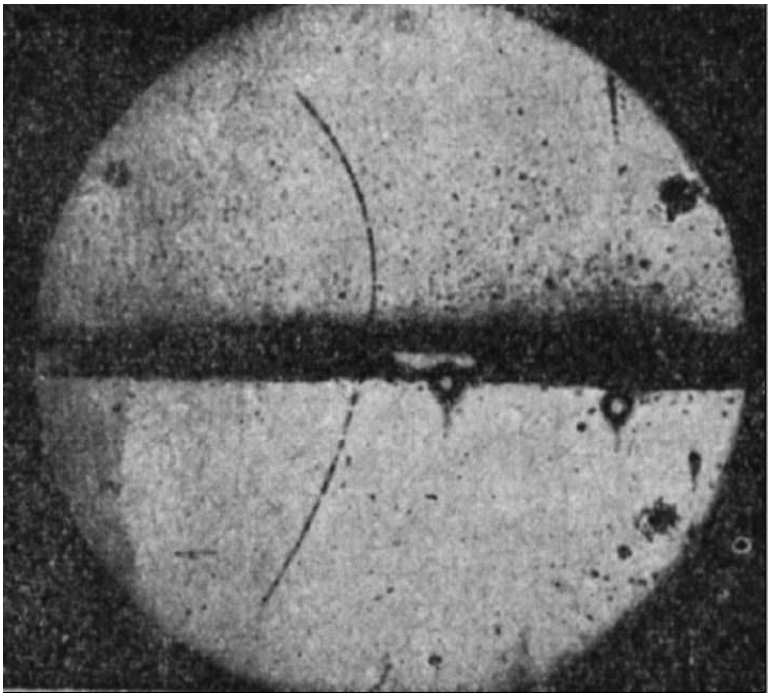

Figura 6.1: Foto di una camera a nebbia con una delle prime immagini di un positrone, C. D. Anderson, 1932. Il positrone si muove *dal basso verso l' alto*, come indicato dal fatto che la curvatura é inferiore nella parte alta della traiettoria, dovuto alla perdita di energia del positrone nell' attraversare la lastra di piombo, visibile in sezione a metá della camera. Da questa informazione si deduce che la carica della particella é *positiva*, mentra la massa é consistente con la massa di un elettrone.

La soluzione proposta da Dirac, tuttavia, non é soddisfacente sotto diversi punti di vista. Tra questi, il fatto che la soluzione non funzionerebbe per particelle di spin zero, che sono bosoni. Si puó rispondere, con Dirac, che per queste particelle la *coordinata x non é osservabile* e quindi una particella di spin zero non ammette una funzione d'onda: *Per tali particelle vi é ancora una rappresentazione dell' impulso che é sufficiente per gli scopi pratici* [10].

In realtá, si puó arguire, sulla base del Principio di Indeterminazione, che la coordinata di una particella relativistica non é un' osservabile, indipendentemente dal valore del suo spin.

Immaginiamo di misurare la coordinata di un elettrone con un microscopio. Ovviamente dobbiamo usare luce di lunghezza d' onda, λ, via via decrescente per ottenere precisioni sempre

maggiori. In corrispondenza, l' elettrone riceve un impulso casuale dell' ordine della quantitá di moto del fotone, $k = \hbar/\lambda$, in modo tale che l' indeterminazione raggiunta per la coordinata e quella dell' impulso soddisfino la relazione di incertezza:

$$\Delta x \sim \lambda = \frac{\hbar}{\Delta p} \tag{6.115}$$

Quando l' energia del fotone supera il valore $\omega = ck \sim 2mc^2$ si verifica un nuovo fenomeno: la creazione di una coppia elettrone-positrone. Nel linguaggio del mare di Dirac, un elettrone in uno stato di energia negativa assorbe il fotone e passa ad uno stato di energia positiva lasciando una lacuna dietro di se. Abbiamo adesso *due* elettroni nel nostro stato e non é piú possibile neanche parlare di *coordinata dell' elettrone*.

Affinché le coordinate dei due elettroni si possano confondere, essi si devono trovare a distanze dell' ordine della lunghezza d' onda del fotone. Quindi l' effetto di non localitá si instaura quando arriviamo a precisioni nella coordinata del' elettrone dell' ordine di:

$$\Delta x \sim \lambda = \frac{\hbar c}{mc^2} \simeq 4.0 \cdot 10^{-11} \text{ cm} \tag{6.116}$$

La lunghezza definita dalla (6.116) si indica col nome di *lunghezza Compton*, λ_C. Per il protone, $\lambda_C \sim 0.2\ fermi = 0.2 \cdot 10^{-13}\ cm$.

Si arriva allo stesso risultato se cerchiamo di costruire pacchetti d' onda sempre piú piccoli con le soluzioni dell' equazione di Dirac. Utilizzando le soluzioni con energia positiva, che evidentemente non formano un sistema completo, non si possono ottenere dimensioni del pacchetto inferiori a λ_C.

La conclusione é che *la rappresentazione x* e quindi la funzione d' onda, semplicemente non esistono per particelle relativistiche. Anche per l' elettrone, tuttavia, *vi é ancora una rappresentazione dell' impulso che é sufficiente per gli scopi pratici*. Il modo in cui soddisfare questi scopi pratici é fornito dalla *seconda quantizzazione*.

Secondo la seconda quantizzazione, piu′ modernamente indicata col nome di *Teoria dei Campi Relativistici e Quantistici* (Relativistic Quantum Field Theory), l' oggetto che soddisfa l' equazione di Dirac é un *campo quantizzato*, descritto matematicamente da un operatore lineare funzione del punto nello spazio tempo, $\psi(\mathbf{x}, t)$.

Il campo e′ una variabile dinamica quantistica nella reppresentazione di Heisenberg. Come operatore, Il campo agisce sullo spazio degli stati fisici che, sempre nella rappresentazione di Heisenberg, sono costanti nel tempo.

La difficoltá collegata alle soluzioni a energia negativa (adesso, piú propriamente, a frequenza negativa) si risolvono perché la dipendenza dal tempo di un operatore nella rappresentazione di Heisenberg é un esponenziale *il cui segno non é definito*. Il segno puó essere positivo o negativo, a seconda della differenza di energia degli stati tra cui l' operatore stesso induce transizioni.

Nella seconda quantizzazione, le quantitá riportate nelle (6.87) sono anch' esse operatori lineari, piuttosto che valori medi rappresentati da c-numeri. Come vedremo nel prossimo Capitolo, la prima di queste quantitá deve essere identificata con la carica associata alle particelle, che deve essere opposta tra le particelle distrutte da $\psi^{(+)}$ e quelle create da $\psi^{(-)}$, come avviene per l' elettrone ed il positrone.

É ragionevole identificare la seconda e la terza nelle (6.87) con l' Hamiltoniana e la quantitá di moto totale del campo. La struttura operatoriale degli operatori di creazione e distruzione e ulteriori caratteristiche fisiche delle particelle associate ad essi si ottengono dalla richiesta di stabilitá, che l' Hamiltoniana abbia uno spettro limitato inferiormente. Questa condizione ci porterá univocamente alla statistica di Fermi-Dirac per le particelle create o distrutte dalle componenti del campo di Dirac.

6.3 Seconda quantizzazione: come funziona

Consideriamo separatamente nella (6.86) le soluzioni con frequenza positiva e negativa, che scriviamo genericamente come:

$$\psi^{(+)}(x) = Xe^{-i(px)}; \quad \text{(frequenza positiva)} \tag{6.117}$$

$$\psi^{(-)}(x) = Ye^{+i(px)}; \quad \text{(frequenza negativa)} \tag{6.118}$$

$$p^\mu = (E(p), \vec{p}); \quad E > m; \quad p^2 = m^2. \tag{6.119}$$

Il campo in x si puó ottenere dal campo nell' origine con una traslazione spazio-temporale secondo la espressione (cfr. Richiami di Meccanica Quantistica):

$$\psi(x) = e^{i\mathbf{P}_\mu x^\mu}\psi(0)e^{-i\mathbf{P}_\mu x^\mu} \tag{6.120}$$

dove $\mathbf{P}^\mu$ é l' operatore energia-momento. Prendiamo adesso l' elemento di matrice di questa equazione tra autostati del 4-momento:

$$< E', \vec{P}'|\psi(x)|E, \vec{P} >= e^{-i(P-P')_\mu x^\mu} < E', \vec{P}'|\psi(0)|E, \vec{P} >$$

Se confrontiamo la (6.121) con le (6.117) vediamo che deve essere:

$$P' = P - p; \quad \text{(frequenza positiva)} \tag{6.121}$$

$$P' = P + p; \quad \text{(frequenza negativa)} \tag{6.122}$$

ovvero:

- le componenti del campo a frequenza positiva o negativa distruggono o creano, rispettivamente, una particelle di massa m.

Sulla base di queste considerazioni, riscriviamo lo sviluppo (6.86) sostituendo le ampiezze dei modo normali di oscillazione con operatori di distruzione e creazione di elettroni e positroni, rispettivamente a, $a^\dagger$ e b, $b^\dagger$:

$$\psi(x) = \sum_{\mathbf{p},r} \sqrt{\frac{m}{E(p)V}}[a_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})e^{-i(px)} + b_r(\mathbf{p})^\dagger v_r(\mathbf{p})e^{i(px)}] \tag{6.123}$$

La struttura algebrica di questi operatori si determina considerando le espressioni in (6.87) che adesso interpretiamo come energia e quantitá di moto del campo. Eseguendo la moltiplicazione di operatori senza cambiare l' ordine in cui essi appaiono nella (6.87) otteniamo:

$$\mathbf{H} = \int d^3x\ \psi^\dagger(\mathbf{x},t)[-i\alpha\cdot\nabla + \beta m]\psi(\mathbf{x},t) =$$
$$= \sum_{\mathbf{p},r} E(p)[a_r(\mathbf{p})^\dagger a_r(\mathbf{p}) - b_r(\mathbf{p})b_r(\mathbf{p})^\dagger]; \tag{6.124}$$
$$\mathbf{P} = \int d^3x\ \psi^\dagger(\mathbf{x},t)(-i\nabla)\psi(\mathbf{x},t) =$$
$$= \sum_{\mathbf{p},r} \mathbf{p}[a_r(\mathbf{p})^\dagger a_r(\mathbf{p}) - b_r(\mathbf{p})b_r(\mathbf{p})^\dagger]\ . \tag{6.125}$$

Consideriamo il secondo termine nell' Hamiltoniana. L' operatore $bb^\dagger$ é semi-definito positivo [4]. Questo impedisce di assegnare relazioni di commutazione agli operatori di creazione e distruzione uguali a quelle dell' oscillatore armonico quantistico. In questo caso, infatti, si avrebbe, per $\mathbf{p}$ fissato:

$$-bb^\dagger = -b^\dagger b - 1 = -N(\mathbf{p}) - 1 \tag{6.126}$$

dove $N(\mathbf{p})$ é il numero di occupazione del modo $\mathbf{p}$. Il secondo membro puó assumere valori arbitrariamente negativi e l' Hamiltoniana risultante sarebbe illimitata inferiormente.

Per ottenere una teoria consistente l' operatore $b^\dagger b$ deve essere *limitato*, come accade per l' oscillatore di Fermi [5] che soddisfa regole di *anticommutazione*. In questo caso otteniamo:

$$-bb^\dagger = +b^\dagger b - 1 = +N(\mathbf{p}) - 1 \tag{6.127}$$

che ha autovalori $0, -1$ (-1 per il vuoto). Usando le relazioni (6.127) per tutti i valori di $\mathbf{p}$ e di r, si ottiene:

$$H = \sum_{\mathbf{p}r} E_p \left(N_r(\mathbf{p}) + \bar{N}_r(\mathbf{p})\right)\ , \tag{6.128}$$

dove $N_r(\mathbf{p}) = a_r^\dagger(\mathbf{p})a_r(\mathbf{p})$ ed $\bar{N}_r(\mathbf{p}) = b_r^\dagger(\mathbf{p})b_r(\mathbf{p})$ sono gli operatori numero per le particelle e le antiparticelle. Nel passare dalla (6.124) alla (6.128) abbiamo omesso un termine costante corrispondente all' energia di punto zero degli oscillatori. Fisicamente, questo equivale a scegliere il valore $\langle 0|H|0\rangle$ come zero della scala delle energie.

Le equazioni precedenti si generalizzano alle seguenti regole di anticommutazione:

$$\{a_r(\mathbf{p}), {a^\dagger}_{r'}(\mathbf{p}')\} = \{b_r(\mathbf{p}), {b^\dagger}_{r'}(\mathbf{p}')\} = \delta_{rr'}\delta_{\mathbf{pp}'} \tag{6.129}$$

$$\{a_r(\mathbf{p}), a_{r'}(\mathbf{p}')\} = \{b_r(\mathbf{p}), b_{r'}(\mathbf{p}')\} = \{a_r(\mathbf{p}), b_{r'}(\mathbf{p}')\} = \{a_r^\dagger(\mathbf{p}), {b^\dagger}_{r'}(\mathbf{p}')\} = 0\ , \tag{6.130}$$

Consideriamo adesso il fattore di normalizzazione nella (6.87), che riconosciamo essere l' integrale della componente temporale della 4-corrente $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. Procedendo in modo analogo

[4] infatti, $< A|bb^\dagger|A >= \sum_n < A|b|n >< n|b^\dagger|A >= \sum_n | < A|b|n > |^2 \geq 0$, qualunque sia lo stato $|A>$.

[5] L' oscillatore di Fermi é definito dalle regole di anticommutazione $\{b, b\} = \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0$; $\{b, b^\dagger\} = 1$. Dalla prima segue $b^2 = 0$ e quindi $N^2 = b^\dagger bb^\dagger b = b^\dagger b = N$, ovvero $N(N-1) = 0$. Gli autovalori di N sono dunque $0, 1$.

a prima ed omettendo una costante (infinita!) che rappresenta la carica del vuoto, otteniamo:

$$\int d^3x\ J^0(x) = \sum_{\mathbf{p}r} \left(N_r(\mathbf{p}) - \bar{N}_r(\mathbf{p})\right) \tag{6.131}$$

riconosciamo quindi che le particelle create da $b^\dagger$, mentre hanno proprietá meccaniche, massa e spin, uguali a quelle create da $a^\dagger$, hanno carica opposta.

6.4 Tracce delle matrici gamma

Le tracce di prodotti delle matrici gamma entrano in praticamente tutti i calcoli di teoria dei campi. Diamo qui le prescrizioni per calcolare queste tracce, e il risultato esplicito nei casi piú semplici. Oggi ci sono programmi in grado di eseguire numericamente o simbolicamente tracce di prodotti fino a gradi moto elevati, ma é comunque utile acquistare una certa familiaritá con le proprietá delle tracce ed i metodi di calcolo. La definizione delle matrici gamma e di γ_5 é quella della Sez. 6.1.

Il punto di partenza sono le proprietá elementari giá discusse:

$$Tr(\gamma^\mu) = 0; \tag{6.132}$$

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \tag{6.133}$$

γ_5 La matrice γ_5 é definita come:

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{6.134}$$

di qui, segue che[6]:

- la traccia di γ_5 con un numero di matrici gamma ≤ 3 é nulla
- $$Tr\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_5\right) = +4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{6.135}$$

Numero dispari di matrici gamma La regola (6.132) implica che le matrici gamma hanno dimensione pari ed un numero uguale di autovalori $+1$ e -1. La sua generalizzazione é che

- la traccia di un numero dispari di matrici gamma é $= 0$.

Numero pari di matrici gamma Consideriamo dapprima il caso di quattro matrici gamma:

$$Tr\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right)$$

Possiamo avanzare di un posto la prima matrice utilizzando le regole di anticommutazione:

$$Tr\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right) = -Tr\left(\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right) + 2g^{\mu\nu}Tr\left(\gamma^\rho\gamma^\sigma\right)$$

[6] ricordiamo che il tensore di Levi-Civita completamente antisimmetrico é definito da $\epsilon_{0123} = +1 = -\epsilon^{0123}$, Eq. (3.36).

il secondo termine contiene due matrici gamma di meno ed é elementare. Se continuiamo ad avanzare usando le regole di anticommutazione, otteniamo:

$$\begin{aligned} &Tr\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right) = \\ &= +8g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - 8g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + 8g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - Tr\left(\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu\right) \end{aligned}$$

L' ultima traccia é eguale a quella di partenza, per la proprietá ciclica, quindi, portandolo a secondo membro, possiamo risolvere:

$$Tr\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right) = +4\left(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\right) \tag{6.136}$$

La regola si generalizza, in quanto, con un numero pari di matrici gamma, se spostiamo in avanti la prima matrice fino a portarla all' ultimo posto si finisce sempre con la traccia di partenza moltiplicata per -1. Quindi possiamo ridurre la traccia di $2n$ matrici gamma ad una combinazione con segni alternati di tracce di $2n-2$ matrici gamma. Iterando, ci riduciamo a $n = 2$.

Naturalmente, il numero di termini nello sviluppo della traccia aumenta molto rapidamente, come $2n-1!!$, rendendo necessario l' uso di programmi di calcolatore.

In alternativa al metodo precedente, possiamo ridurre il numero di matrici in una traccia, usando la relazione che riduce il prodotto di tre matrici gamma ad una combinazione di γ^α e $\gamma^\alpha\gamma_5$, che segue dalla completezza della base di matrici introdotta nell(6.46):

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda = g^{\mu\nu}\gamma^\lambda + g^{\nu\lambda}\gamma^\mu - g^{\mu\lambda}\gamma^\nu - i\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\gamma_\rho\gamma_5 \ . \tag{6.137}$$

Capitolo 7

QUANTIZZAZIONE CANONICA DEL CAMPO DI DIRAC

7.1 Quantizzazione del campo di Dirac

Percorriamo, per quanto possibile, un percorso analogo a quello della Sezione precedente, per costruire un campo quantizzato che obbedisca all' equazione di Dirac.

La densitá di Lagrangiana (in assenza di interazione) si scrive ($\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$):

$$L = \bar{\psi}(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi \tag{7.1}$$

Di qui, si trova;

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \psi} = i\bar{\psi}\gamma^\mu; \;\; \frac{\partial L}{\partial \psi} = -m\bar{\psi} \\ &\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \bar{\psi}} = 0; \;\; \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} = (i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi \end{aligned} \tag{7.2}$$

le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi:

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi = 0; \;\; i\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu) + m\bar{\psi} = 0 \tag{7.3}$$

Usando la relazione $\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu$, si vede che la seconda equazione é l' aggiunta della prima. In altre parole, se consideriamo ψ e $\bar{\psi}$ come variabili indipendenti, le due equazioni ci dicono che $\bar{\psi}\gamma^0$ é l' hermitiano coniugato di ψ.

La Lagrangiana (7.1) é invariante per traslazioni e per trasformazioni di Lorentz. Queste ultime, per trasformazioni infinitesime, si scrivono:

$$\begin{aligned} &x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu = x^\mu + \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta}(g^{\alpha\mu}\delta^\beta_\nu - g^{\beta\mu}\delta^\alpha_\nu)x^\nu \\ &\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = \psi(x) - i\frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}\psi(x) \end{aligned} \tag{7.4}$$

con:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \tag{7.5}$$

La Lagrangiana (7.1) possiede, inoltre, una simmetria globale, associata alle trasformazioni dei campi con una *fase costante*:

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x); \;\; \bar{\psi} \to e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x) \tag{7.6}$$

Dalle (7.2), (7.4) e (7.6) si trovano immediatamente:

- il tensore impulso-energia canonico:

$$T^{\mu,\nu} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial^{\nu}\psi - g^{\mu\nu}L \tag{7.7}$$

- l' energia ed il momento del campo:

$$E = \int d^3x\psi^{\dagger}(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + m\beta)\psi$$
$$\vec{P} = \int d^3x\psi^{\dagger}(-i\vec{\nabla})\psi \tag{7.8}$$

- il tensore impulso-energia simmetrico:

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial^{\nu}\psi - (\partial^{\nu}\bar{\psi})\gamma^{\mu}\psi + (\mu \to \nu)] \tag{7.9}$$

- La corrente conservata collegata alle trasformazioni (7.6):

$$j^{\mu}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x); \;\; \partial_{\mu}j^{\mu}(x) = 0. \tag{7.10}$$

Commento . Per costruire il tensore energia-impulso simmetrico secondo la procedura di Belinfante e Rosenfeld, si parte dalla parte di spin del tensore dei momenti angolari. Sulla base delle (7.4) possiamo scrivere:

$$\Sigma^{\mu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\bar{\psi}(\gamma^{\mu}\sigma^{\alpha\beta})\psi = \frac{i}{4}\bar{\psi}(\gamma^{\mu}[\gamma^{\alpha},\gamma^{\beta}])\psi \tag{7.11}$$

Definendo:

$$S_1^{\alpha\beta} = \partial_{\mu}\Sigma^{\mu,\alpha\beta}; \;\; S_2^{\alpha\beta} = \partial_{\mu}\Sigma^{\alpha,\mu\beta} = S_3^{\beta\alpha} \tag{7.12}$$

si ha:

$$\theta^{\alpha\beta} = T^{\alpha,\beta} + \frac{1}{2}(S_1 - S_2 - S_3)^{\alpha\beta} \tag{7.13}$$

(il tensore $1/2S_1$ cancella la parte antisimmetrica di $T^{\alpha,\beta}$ mentre la sottrazione del tensore simmetrico $S_2 + S_3$ compensa la 4-divergenza di S_1). Esplicitamente abbiamo:

$$\frac{1}{2}(S_1 - S_2 - S_3) = \frac{i}{8}(\partial_{\mu}\bar{\psi})\mathbf{X}^{\mu}\psi + \bar{\psi}\mathbf{X}^{\mu}(\partial_{\mu}\psi);$$
$$\mathbf{X}^{\mu,\alpha\beta} = \mathbf{\frac{1}{4}}[\gamma^{\mu}[\gamma^{\alpha},\gamma^{\beta}] - \gamma^{\alpha}[\gamma^{\mu},\gamma^{\beta}] - \gamma^{\beta}[\gamma^{\mu},\gamma^{\alpha}]) \tag{7.14}$$

Usando le regole di anticommutazione delle matrici gamma, possiamo portare gli operatori $\partial_{\mu}\gamma^{\mu}$ ad operare sui campi, dove danno $\pm im$. É facile vedere che i termini proporzionali ad m si cancellano e restiamo con i risultati delle anticommutazioni, per cui:

$$\frac{1}{2}(S_1 - S_2 - S_3)^{\alpha\beta} = \frac{i}{4}\bar{\psi}(\partial^{\alpha}\gamma^{\beta} - 3\partial^{\beta}\gamma^{\alpha})\psi - \frac{i}{4}[(\partial^{\alpha}\bar{\psi})\gamma^{\beta}\psi + (\partial^{\beta}\bar{\psi})\gamma^{\alpha}\psi] \tag{7.15}$$

Sommando questo risultato alla (7.7) si ottiene la (7.9).

Formalismo Hamiltoniano Il momento coniugato al campo ψ si trova dalle (7.2):

$$\Pi(x) = i\psi^\dagger(x) \tag{7.16}$$

mentre il momento coniugato di $\bar{\psi}$ é nullo: nello schema Hmiltoniano c' é solo una coppia di variabili coniugate, che sono ψ e $i\psi^\dagger$. La densitá di Hamiltoniana coincide con la prima della (7.8) che é giá espressa in termini delle variabili coniugate.

La quantizzazione canonica prevede che le variabili coniugate soddisfino regole di commutazione analoghe a quelle della Meccanica Quantistica non-relativistica (**??**). Tuttavia, la richiesta di avere un' energia limitata inferiormente richiede regole di *anticommutazione* per gli operatori di creazione e distruzione di elettroni e positroni, come abbiamo visto nella sezione precdente. Questo corrisponde a tradurre le (**??**) nelle *regole di anticommutazione a tempi uguali*:

$$\{\psi_\alpha(\vec{x},t), \Pi_\beta(\vec{y},t)\} = i\delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

ovvero

$$\{\psi_\alpha(\vec{x},t), \bar{\psi}_\beta(\vec{y},t)\} = \gamma^0_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \tag{7.17}$$

Le equazioni (7.17) determinano i commutatori delle variabili dinamiche con l' Hamiltoniana e quindi le equazioni del moto. Utilizziamo l' identitá:

$$[a, b\cdot c] = \{a,b\}c - b\{a,c\} \tag{7.18}$$

per trovare:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = [\psi(x), \mathbf{H}] = (-i\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m)\psi \tag{7.19}$$

le equazione del moto di Heisenberg riproducono l' equazione di Dirac, come deve essere. Possiamo anche calcolare il commutatore del campo con la carica conservata, con il risultato:

$$[\psi(x), \mathbf{Q}] = +\psi(x) \tag{7.20}$$

Lo spazio degli stati Procedendo in modo analogo a quanto fatto per l' equazione di Klein-Gordon, possiamo ricavare dalla (6.86) gli operatori $a_s(\vec{p})$ e $b_s(\vec{p})$, sfruttando le relazioni di ortonormalitá degli spinori u e v. Si trova:

$$\begin{aligned} a_s(\vec{p}) &= \int d^3x\ \sqrt{\frac{m}{EV}} e^{i(px)}(\bar{u}_s(\vec{p})\gamma^0\psi(x)); \\ b_s(\vec{p}) &= \int d^3x\ \sqrt{\frac{m}{EV}} e^{i(px)}(\bar{\psi}(x)\gamma^0 v_s(\vec{p})); \end{aligned} \tag{7.21}$$

Partendo dagli anticommutatori canonici, si calcolano gli anticommutatori di questi operatori, che naturalmente coincidono con gli anticommutatori giá trovati in precedenza:

$$\{a_s(\vec{p}), a^\dagger_{s'}(\vec{p}')\} = \{b_s(\vec{p}), b^\dagger_{s'}(\vec{p}')\} = \delta_{s,s'}\ \delta_{\vec{p},\vec{p}'} \tag{7.22}$$

e tutti gli altri anticommutatori uguali a zero.

Usando le regole di anticommutazione, possiamo esprimere le grandezze conservate in modo formalmente identico alle (4.52):

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \int d^3x\ \theta^{00} = \Sigma_{\vec{k}}\ \omega(k)\ [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})]\ +\ \text{cost.} \\
\mathbf{P}^i &= \int d^3x\ \theta^{0i} = \Sigma_{\vec{k}}\ k^i\ [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})] \\
\mathbf{Q} &= \int d^3x\ J^0 = \Sigma_{\vec{k}}\ [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})]
\end{aligned} \tag{7.23}$$

Vediamo che lo spazio di Hilbert della teoria é quello di un insieme di oscillatori di Fermi. Esplicitamente, esso é costituito da:

- lo stato $|0>$, il *vuoto*, annullato dall' applicazione degli operatori di distruzione:

$$|0> \text{ tale che : } a_s(\vec{p})|0> = b_r(\vec{q})|0> = 0,\ \text{per ogni } s, r, \vec{p}, \vec{q}; \tag{7.24}$$

- gli stati con dati numeri di occupazione, ottenuti applicando al vuoto gli operatori di creazione $a^\dagger$ e $b^\dagger$:

$$\begin{aligned}
&|n_1, n_2, \ldots; m_1, m_2, \cdots> = \\
&= [a^\dagger_{s_1}(\vec{p}_1)]^{n_1}[a^\dagger_{s_2}(\vec{p}_2)]^{n_2}\ \ldots [b^\dagger_{r_1}(\vec{q}_1)]^{m_1}[b^\dagger_{r_2}(\vec{q}_2)]^{m_2}\ldots|0>
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Come si vede dall' espressione dell' impulso, gli operatori a e b distruggono particelle relativistiche di massa m e spin $1/2$. Gli stati quantistici sono quelli di un gas perfetto costituto di fermioni di due tipi diversi con uguali proprietá meccaniche.

Ulteriori informazioni sulla natura di queste particelle sono fornite dalla carica conservata. Cosideriamo l' elemento di matrice del commutatore (7.20). Otteniamo[1]:

$$\begin{aligned}
&< q'|[\psi, \mathbf{Q}]|q> = (q - q') < q'|\psi|q> = + < q'|\psi|q> \\
&\text{ovvero : } q' = q - 1
\end{aligned} \tag{7.26}$$

In entrambi i casi, l' azione del campo fa diminuire di un' unitá la carica conservata, quindi:

- la particella distrutta da $\psi^{(+)}$ ha carica opposta a quella creata da $\psi^{(-)}$.

In conclusione, la duplicazione del segno di $p^0 = \pm\omega(p)$, che é inevitabile in una teoria relativistica, si riflette nella caratterizzazione delle componenti a frequenza positiva e negativa come operatori di distruzione o creazione di particelle. In presenza di una carica conservata con autovalori non nulli, le particelle create da $\psi^{(-)}$ sono una sorta di immagine speculare di quelle distrutte da $\psi^{(+)}$, nel senso che hanno uguali proprietá meccaniche (massa e spin) e carica opposta.

La combinazione della Relativitá Speciale con la Meccanica Quantistica richiede l'esistenza dell' *antimateria*.

[1] lo stesso risultato si ottiene per il campo di Klein Gordon partendo dalla (4.46).

Commento. L' antiparticella del protone, l' antiprotone con carica negativa, é stato scoperto nel 1955 con l' acceleratore di particelle Bevatron di Berkeley, da E. Segré, O. Chamberlain, C. Wiegand e T. Ypsilantis. Sperimentalmente, la massa dell' antiprotone coincide con la massa del protone entro un errore molto piccolo, dell' ordine di una parte su 100 Milioni [11]. Anche il neutrone possiede un' antiparticella, l' antineutrone. Questo é dovuto al' esistenza di una carica conservata indipendente dalla carica elettrica. Questa nuova carica conservata, il *numero barionico*, é necessaria per rendere conto dell' estrema stabilitá della materia. Il numero barionico é associato alla corrente:

$$B^\mu = \bar{\psi}_P \gamma^\mu \psi_P + \bar{\psi}_N \gamma^\mu \psi_N \tag{7.27}$$

dove $\psi_{P,N}$ indicano i campi di Dirac associati a protone e neutrone. Convenzionalmente si assegna il valore $+1$ al numero barionico di protone e neutrone (e quindi il valore -1 ad antiprotone e antineutrone), mentre le particelle leggere, elettrone e neutrino, hanno numero barionico nullo. Si conoscono molte altre particelle che decadono in protone e/o neutrone e che quindi hanno numero barionico diverso da zero.

La conservazione simultanea di carica elettrica e numero barionico ha per conseguenza la stabilitá di sistemi elettricamente neutri come l' atomo di idrogeno (che ha Q=0 e B=1), che altrimenti potrebbero trasformarsi in pura radiazione elettromagnetica.

Problema. Dimostrare le relazioni (7.22) a partire dalle (7.17).

7.2 La rappresentazione del gruppo di Lorentz

Mostriamo qui quanto anticipato nella Sez. 6.1.2, che tramite le matrici $S(\Lambda)$ possiamo costruire un complesso di operatori unitari che rappresentano le trasformazioni di Lorentz nello spazio dei numeri di occupazione (secondo la costruzione di Wigner). Basta limitarci agli stati con una sola particella. Consideriamo quindi gli stati:

$$|p, r >= a_r(\mathbf{p})^\dagger |0> \tag{7.28}$$

Dobbiamo definire l' azione delle trasformazioni di $L_+^\uparrow$ su questi stati, mediante operatori unitari $U(\Lambda)$ che soddisfano alle regole di composizione del gruppo. Le trasformazioni di Lorentz trasformano tra loro 4-vettori sull' iperboloide di massa definito da $p_\mu p^\mu = p^2 = m^2$.

Scegliamo un 4-vettore particolare, p_0. Le trasformazioni di $L_+^\uparrow$ trasformano p_0 nei 4-vettori della falda con $p_0 > +m$. Viceversa, ogni p^μ é caratterizzato dalla trasformazione di Lorentz che trasforma p_0 in p. Per particelle con massa $m \neq 0$, scegliamo:

$$p_0^\mu = (m, \mathbf{0}) \tag{7.29}$$

Per ogni p possiamo definire una trasformazione che chiamiamo *boost*, che porta p_0 in p. Sinteticamente scriviamo:

$$L(p) p_0 = p \tag{7.30}$$

e definiamo l' azione di $U(L(p))$ sugli stati $|p_0, r>$ al modo seguente:

$$|p, r >= U(L(p))|p_0, r > \tag{7.31}$$

(da notare che U é definita in modo da non cambiare l' indice di spin).

Adesso consideriamo un trasformazione generica:

$$p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu} \tag{7.32}$$

L' osservazione cruciale é che:

$$p' = L(\Lambda p) p_0 = \Lambda p = \Lambda L(p) p_0 \tag{7.33}$$

quindi la trasformazione $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ trasforma p_0 in se stesso e quindi deve appartenere al sottogruppo delle trasformazioni di Lorentz che *lasciano invariante* p_0. Wigner chiama questo sottogruppo il *gruppo piccolo* della rappresentazione. Nel nostro caso, vista la forma di p_0 nella (7.29) queste trasformazioni sono le *rotazioni dello spazio tridimensionale*, che indichiamo con R. Da questa osservazione discende immediatamente la forma esplicita delle trasformazioni unitarie $U(\Lambda)$. Poniamo:

$$U(\Lambda) = U(L(\Lambda p))U(R)U(L^{-1}(p)); \tag{7.34}$$

da cui:

$$\begin{aligned} &U(\Lambda)|p, r >= U(L(\Lambda p))U(R)U(L^{-1}(p))|p, r >= U(L(\Lambda p))U(R)|p_0, r >= \\ &= U(L(\Lambda p)) \sum_s S(R)_{r,s}(R)|p_0, s >= \sum_s S(R)_{r,s}|\Lambda p, s >; \end{aligned} \tag{7.35}$$

$$S(R)_{r,s} = \bar{u}_s(\mathbf{0}) S(R) u_r(\mathbf{0}) = \chi^{\dagger}{}_s S(R) \chi_r \tag{7.36}$$

dove $S(R)$ sono le matrici determinate nella (6.38).

La corrispondenza $\Lambda \to R$ verifica la legge di composizione di $L_+^{\uparrow}$. Infatti, se $\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2$:

$$U(\Lambda_1)U(\Lambda_2) = \{U(L(\Lambda_1 q))U(R_1)U(L^{-1}(q))\}\{U(L(\Lambda_2 p))U(R_2)U(L^{-1}(p))$$

Poniamo $q = \Lambda_2 p$. Poiché $U(L^{-1}(q))U(L(q)) = 1$, otteniamo:

$$U(\Lambda_1)U(\Lambda_2) = U(L(\Lambda_1 \Lambda_2(p))U(R_1)U(R_2)U(L^{-1}(p))$$

Quindi,

$$\begin{aligned} &\text{se} : \Lambda_1 \to R_1;\ \Lambda_2 \to R_2; \\ &\text{allora} : \Lambda_1 \Lambda_2 \to R_1 R_2 \end{aligned}$$

e la relazione (7.35) definisce una rappresentazione del gruppo $L_+^{\uparrow}$.

In corrispondenza ad ogni rappresentazione unitaria del gruppo piccolo, la formula (7.35) produce quindi una rappresentazione unitaria del gruppo di Lorentz sugli autostati del momento della particella. Per le particelle di Dirac, la non-unitarietá della $S(\Lambda)$ giá notata in (6.1.2) non influenza il risultato. In effetti, secondo la costruzione di Wigner, la rappresentazione sugli stati utilizza solo la componente di S che corrisponde al gruppo delle rotazioni spaziali, per le quali la S é unitaria:

$$\begin{aligned} &S(R) = S = 1 - \frac{i}{4}\, \omega_{ij} \sigma^{ij}\ (i, j = 1, 2, 3) \\ &(\sigma^{ij})^{\dagger} = \sigma^{ij},\ \to\ \ S(R)^{\dagger} S(R) = 1 \end{aligned}$$

In conclusione, particelle relativistiche con massa diversa da zero sono caratterizzate da due numeri quantici:

- il valore della massa, $m \neq 0$;
- il valore (intero o semintero) dello spin, che caratterizza la rappresentazione del gruppo piccolo di p_0.

Per particelle di massa nulla, come il fotone, p_0 puó essere scelto come:

$$p_0 = (\omega, \omega \mathbf{n}_3) \tag{7.37}$$

dove $\mathbf{n}_3$ é il versore dell' asse z. Il gruppo piccolo é il gruppo unidimensionale delle rotazioni intorno all' asse z.

Lasciamo al lettore la cura di costruire le rappresentazioni corrispondenti, con il risultato anticipato nella Sez. 2.2.

Prodotti normali La prescrizione per ottenere espressioni multilineari nei campi fermionici con valore nullo sul vuoto deve essere modificata opportunamente per tenere conto delle regole di anticommutazione.

Una volta separati i campi in parte a frequenza positiva e negativa, la prescrizione corretta é di scrivere gli operatori a frequenza negativa a destra di quelli a frequenza negativa, con segno positivo o negativo a seconda che il numeri di scambi necessari per arrivare a questa configurazione a partire da quella di partenza, sia pari o dispari. Ad esempio:

$$\begin{aligned} &N(\psi(x)\bar{\psi}(y)) =: \psi(x)\bar{\psi}(y) :=: (\psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x))(\bar{\psi}^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x)) := \\ &= \psi^{(+)}(x)\bar{\psi}^{(+)}(y) - \bar{\psi}^{(-)}(y)\psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x)\bar{\psi}^{(+)}(y) + \psi^{(-)}(x)\bar{\psi}^{(-)}(y) \end{aligned} \tag{7.38}$$

7.3 Microcausalitá

Come abbiamo visto nella Sez. 1.3, dato un evento x, lo spazio tempo si divide in regioni distinte, per quanto riguarda la connessione causale dei diversi eventi y con l' evento x. La regione che si trova al di fuori dei due coni di luce uscenti da x rappresenta il *presente assoluto* di x. Questi eventi sono caratterizzati dal fatto che l' intervallo $y - x$ é di *tipo spazio*: $(y-x)^2 < 0$. Per brevitá, scriveremo: $y \sim x$.

Le misure effettuate su due osservabili localizzate rispettivamente in x ed in y non si possono influenzare l' una con l' altra quando $x \sim y$, perché questo implicherebbe la propagazione di segnali con velocitá superiore alla velocitá limite rappresentata dalla velocitá della luce nel vuoto. Dai principi della Meccanica Quantistica segue che, in queste condizioni, gli operatori corrispondenti commutano tra loro:

$$[O_1(x), O_2(y)] = 0, \text{ se } x \sim y \tag{7.39}$$

La relazione (7.39) prende il nome di *Condizione di Microcausalitá*. L' ipotesi che essa valga qualunque sia il valore della separazione $x - y$ é un' ipotesi molto stringente, che potrebbe essere violata a distanze microscopiche. Tuttavia, le conseguenze sperimentali della Microcausalitá sono state verificate sino alle piú piccole distanze raggiunte finora, dell' ordine di $10^{-15} cm$.

Usando l' invarianza relativistica, possiamo estendere le regole di quantizzazione canoniche (A.25) e (7.17), dalla regione $\vec{y} \neq \vec{x},\ y^0 = x^0$ a tutta la regione del presente di x. Per un campo generico χ, troviamo

$$[\chi_a(x), \chi_b^\dagger(y)]_\pm = [\chi_a(x), \chi_b(y)]_\pm = 0 \text{ per } x \sim y \tag{7.40}$$

dove il segno $\pm$ indica l' anticommutatore o il commutatore dei campi a seconda che χ sia un campo di Dirac o di Klein Gordon (gli indici a, b indicano possibili componenti del campo, spinoriali o legate a simmetrie interne).

Nel caso di campi bosonici, la (7.40) ci dice che le componenti del campo commutano per separazioni spaziali e sono quindi potenzialmente degli osservabili, come le componenti dei campi elettrici e magnetici [2].

I campi fermionici, al contrario, *non commutano* tra loro per separazioni di tipo spazio. L' unica interpretazione possibile di questo risultato é che i campi fermionici non siano osservabili.

La non-osservabilitá del campo fermionico é confermata dalla sue proprietá di trasformazione sotto rotazioni. Specializziamo le relazioni (7.4) al caso di rotazioni intorno all' asse z. In questo caso, le uniche componenti non nulle dei parametri infinitesimi corrispondono a $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = \epsilon$ e si trova:

$$\psi'(x') = (1 - i\frac{\epsilon}{2}\sigma^{12})\psi(x);\ \sigma^{12} = \Sigma^3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{7.41}$$

Per rotazioni finite, la relazione precedente si esponenzia nella:

$$\psi'(x') = e^{-i\frac{\theta}{2}\Sigma_3}\psi(x) \tag{7.42}$$

Dato che Σ_3 ha autovalori ± 1, la relazione esprime semplicemente il fatto che il campo é associato a particelle di spin $1/2$. Tuttavia, per $\theta = 2\pi$, quando $x' = x$, troviamo:

$$\psi' = -\psi \tag{7.43}$$

Questa relazione é evidentemente assurda per una grandezza osservabile, che deve ritornare in se stessa dopo una rotazione di 2π.

Se ψ puó non essere un osservabile, tali devono essere, tuttavia, le grandezze fisiche costruite a partire da ψ, come la densitá di energia o la densitá di carica. Sulla base della relazione (7.43), possiamo concludere che le *funzioni omogenee di grado pari* nei campi sono buoni candidati per essere degli osservabili.

Alla stessa conclusione si arriva a partire dalle regole di anticommutazione canoniche. Consideriamo come esempio il commutatore di due densitá di carica:

$$\left[j^0(x), j^0(y)\right] \text{ per } x \sim y \tag{7.44}$$

Usando ripetutamente l' identitá (7.18) e l' analoga per i commutatori, troviamo:

$$\begin{aligned} &[\psi^\dagger(x)\psi(x), j^0(y)] = \psi^\dagger(x)[\psi(x), j^0(y)] + [\psi^\dagger(x), j^0(y)]\psi(x) = \\ &= \psi^\dagger(x)(-\psi^\dagger(y)\{\psi(x), \psi(y)\} + \{\psi(x), \psi^\dagger(y)\}\psi(y)) + \ldots = 0 \end{aligned} \tag{7.45}$$

poiché tutti gli anticommutatori sono nulli per $x \sim y$.

[2] un campo scalare complesso non é osservabile, non essendo hermitiano, ma le sue parti hermitiana ed antihermitiana sono in linea di principio osservabili

7.4 Relazione tra spin e statistica

Capitolo 8

I PROPAGATORI DEI CAMPI LIBERI

In questa Sezione poniamo $\hbar = c = 1$.

8.1 Prodotto cronologico

Il *prodotto cronologico*, o *tempo-ordinato*, di due campi scalari é definito come:

$$T\{\phi(x)\phi^\dagger(0)\} = \begin{cases} \phi(x)\phi^\dagger(y) & x^0 - y^0 > 0 \\ \phi^\dagger(y)\phi(x) & 0 > x^0 - y^0 \end{cases} , \tag{8.1}$$

Il valore medio sul vuoto:

$$iD_F(x,y) = <0|\ T\{\phi(x)\phi^\dagger(y)\}\ |0> \tag{8.2}$$

fornisce l' ampiezza quantistica per il piú semplice processo osservabile con un campo quantizzato:

(i) creazione di una particella da parte di una sorgente localizzata in y e corrispondente assorbimento in x, se $x^0 > y^0$, ovvero

(ii) creazione di un' antiparticella da una sorgente localizzata in x e corrispondente assorbimento in y, se $y^0 > x^0$. La funzione (8.2) prende il nome di *propagatore* del campo corrispondente e la sua forma esplicita dipende dallo spin dei quanti associati al campo.

In vista delle relazioni di anticommutazione soddisfatte dai campi di Dirac, il prodotto tempo-ordinato di campi fermionici deve essere antisimmetrico:

$$T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} = \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(0) & x^0 - y^0 > 0 \\ -\bar{\psi}(0)\psi(x) & 0 > x^0 - y^0 \end{cases} , \tag{8.3}$$

ed il propagatore fermionico è definito da:

$$i(S_F)_{\alpha\beta}(x,y) = <0|\ T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\}\ |0> \tag{8.4}$$

In una teoria di campo invariante per traslazioni i propagatori sono funzioni della sola differenza $x - y$.

Questo si puó vedere inserendo nella (8.2) i prodotti $U^\dagger U = 1$, dove U é l' operatore che trasla di $-y$ (l' argomento si ripete identico nel caso fermionico, (8.4)). Essendo il vuoto invariante per l' applicazione di U, otteniamo:

$$< 0|\ T\{\phi(x)\phi^\dagger(y)\}\ |0 >=< 0|\ T\{\phi(x-y)\phi^\dagger(0)\}\ |0 >= iD_F(x-y,0) = iD_F(x-y) \qquad (8.5)$$

Quando la particella associata al campo possiede una carica, come avviene se il campo é complesso, la carica fluisce in entrambi i casi da y verso x. Il propagatore puó essere rappresentato da una linea orientata che va da y verso x.

8.2 Propagatore del campo scalare

Per calcolare esplicitamente $iD_F(x)$ dalla (8.2), procediamo come segue. Separiamo le componenti a frequanza positiva o negativa che danno luogo a valori sul vuoto diversi da zero. Otteniamo:

$$\begin{aligned} &< 0|\ T\{\phi(x)\phi^\dagger(0)\}\ |0 >= \\ &= \begin{cases} < 0|\ \phi^{(+)}(x)(\phi^\dagger)^{(-)}(0)\ |0 >=< 0|[\phi^{(+)}(x),(\phi^\dagger)^{(-)}(0)]|0 >; & x^0 > 0 \\ < 0|\ (\phi^\dagger)^{(+)}(0)\phi^{(-)}(x)\ |0 >= - < 0|[\phi^{(-)}(x),(\phi^\dagger)^{(+)}(0)]|0 >; & 0 > x^0 \end{cases} , \end{aligned} \qquad (8.6)$$

Definiamo le due funzioni:

$$i\Delta^{(+)}(x) =< 0|[\phi^{(+)}(x),(\phi^\dagger)^{(-)}(0)]|0 >; \qquad (8.7)$$

$$i\Delta^{(-)}(x) =< 0|[\phi^{(-)}(x),(\phi^\dagger)^{(+)}(0)]|0 > \qquad (8.8)$$

é immediato convincersi che queste due funzioni sono proprio le soluzioni dell' equazione omogenea di Klein-Gordon che abbiamo introdotto, con lo stesso nome, nella Sez. 4.2, Eq. (4.26) e (4.27). Ad esempio, a partire dallo sviluppo (4.47) e tenendo conto dei commutatori canonici, troviamo:

$$i\Delta^{(+)}(x) =< 0|[\phi^{(+)}(x),(\phi^\dagger)^{(-)}(0)]|0 >= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\omega(k)V} e^{-i(kx)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega(k)} e^{-i(kx)}$$

che coincide con la (4.26).

Per il propagatore, troviamo quindi:

$$iD_F(x) = \theta(x^0) i\Delta^{(+)}(x) - \theta(-x^0) i\Delta^{(-)}(x) \qquad (8.9)$$

che coincide con la soluzione dell' equazione inomogenea con le condizioni al contorno di Feynman riportata nell' Eq. (4.33) con lo stesso nome. *Le condizioni al contorno di Feynman sono le condizioni appropriate per riprodurre il propagatore quantistico.*

Riassumendo, se il campo scalare soddisfa l' equazione:

$$(-\Box - \mu^2)\phi = 0 \qquad (8.10)$$

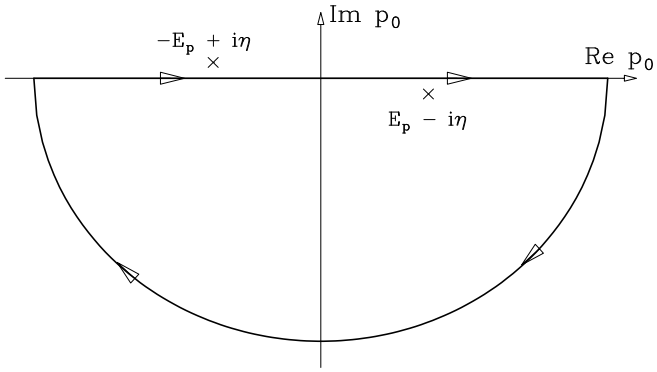

Figura 8.1: Seguendo la prescrizione $i\epsilon$ di Feynman, i poli della funzione di Green si spostano nel piano complesso come indicato in figura. Il cammino di integrazione per ottenere iD_F, Eq. (8.11), é adesso l' asse reale. In figura é indicato il modo in cui dobbiamo chiudere il cammino per ottenere: $iD_F = i\Delta^{(+)}$ per $x^0 > 0$. Per $x^0 < 0$ il cammino si deve chiudere nel semipiano superiore.

il propagatore di Feynman in termini della sua trasformata di Fourier é dato da:

$$iD_F(x) =< 0|\ T\{\phi(x)\phi^\dagger(0)\}\ |0 >= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-\mu^2+i\epsilon}e^{-i(kx)}. \tag{8.11}$$

Come discusso nella Sez. 4.2 l' integrazione nel piano complesso di k^0 é fatta lungo l' asse reale e la prescrizione dell' $i\epsilon$ nella (8.11) sposta i poli dell' integrando secondo quanto indicato nella Fig.8.1.

Nel limite di massa infinita, il propagatore completo diventa completamente localizzato nello spazio-tempo. In questo limite, le singolaritá nell' integrazione su k^0 nella (8.11) vanno all' infinito, ed otteniamo:

$$lim_{(\mu\to\infty}D_F(x) = \frac{-i}{\mu^2}\,\delta^{(4)}(x). \tag{8.12}$$

Commento. É utile mostrare con un calcolo diretto che il prodotto tempo-ordinato dei campi scalari soddisfa l' equazione di Klein-Gordon con sorgente puntiforme. Consideriamo l' espressione in (8.1) che scriviamo esplicitamente come:

$$T\{\phi(x)\phi^\dagger(0)\} = \theta(t)\phi(x)\phi^\dagger(0) + \theta(-t)\phi^\dagger(0)\phi(x) \tag{8.13}$$

Dalle relazioni:

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(t) = -\frac{\partial}{\partial t}\theta(-t) = \delta(t) \tag{8.14}$$

e dalle regole di commutazione (4.43), si calcola:

$$\begin{aligned}
&\partial_t\ T\{\phi(x)\phi^\dagger(0)\} = T\{\partial_t\phi(x)\phi^\dagger(0)\} + \delta(t)[\phi(\mathbf{x},0),\phi^\dagger(0)] = T\{\partial_t\phi(x)\phi^\dagger(0)\}\\
&\partial_t^2\ T\{\phi(x)\phi^\dagger(0)\} = T\{\partial_t^2\phi(x)\phi^\dagger(0)\} + \delta(t)[\partial_t\phi(\mathbf{x},0),\phi^\dagger(0)] =\\
&= T\{\partial_t^2\phi(x)\phi^\dagger(0)\} - i\delta^4(x)
\end{aligned} \tag{8.15}$$

ovvero, dato che ϕ soddisfa la (8.10), otteniamo:

$$(-\Box - \mu^2)T\{\phi(x)\phi^\dagger(0)\} = i\delta^{(4)}(x) \tag{8.16}$$

coerentemente con la (8.11).

8.3 Il propagatore del campo di Dirac

In analogia al caso del campo scalare, il propagatore di Feynman é definito come:

$$iS_F(x) = \langle 0|\ T\{\psi(x)\bar{\psi}(0)\}\ |0\rangle \tag{8.17}$$

Separiamo le parti a frequenza positiva e negativa nei campi ed omettiamo termini con operatori che annullano il vuoto. Otteniamo:

$$\begin{aligned}&\langle 0|\ \psi(x)\bar{\psi}(0)\ |0\rangle = \langle 0|\ \psi^{(+)}(x)\bar{\psi}^{(-)}(0)\ |0\rangle = \\ &= \langle 0|\{\psi^{(+)}(x), \bar{\psi}^{(-)}(0)\}|0\rangle = iS^{(+)}(x)\end{aligned} \tag{8.18}$$

$$\begin{aligned}&\langle 0|\ \bar{\psi}(0)\psi(x)\ |0\rangle = \langle 0|\ \bar{\psi}^{(+)}(0)\psi^{(-)}(x)\ |0\rangle = \\ &= \langle 0|\{\psi^{(-)}(x), \bar{\psi}^{(+)}(0)\}|0\rangle = iS^{(-)}(x)\end{aligned} \tag{8.19}$$

Usando le relazioni di completezza dei quadrispinori (6.82) e (6.83) possiamo riscrivere le equazioni (8.18) e (8.19) nella forma

$$\begin{aligned}&iS^{(+)}(x) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}s}\left(\frac{m}{E_p}\right)\frac{\not{p}+m}{2m}\mathrm{e}^{-ip(x')} = \\ &(i\not{\partial}+m)\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E(k)}e^{-i(px)} = \\ &= (i\not{\partial}+m)[i\Delta^{(+)}(x)]\end{aligned} \tag{8.20}$$

Similmente:

$$\begin{aligned}&iS^{(-)}(x) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}s}\left(\frac{m}{E_p}\right)\frac{\not{p}-m}{2m}\mathrm{e}^{ip(x)} \\ &= -(i\not{\partial}+m)\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E(k)}e^{+i(px)} = \\ &= (i\not{\partial}+m)[i\Delta^{(-)}(x)]\end{aligned} \tag{8.21}$$

Il propagatore di Feynman (8.17), tenendo conto del segno meno nel prodotto tempo-ordinato, risulta dunque (con il cammino di integrazione nel piano p^0 della Fig. 8.1):

$$\begin{aligned}&iS_F(x) = \theta(x^0)iS^{(+)}(x) - \theta(-x^0)iS^{(-)}(x) = \\ &= (i\not{\partial}+m)[\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-i(px)}] = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-i(px)}\end{aligned} \tag{8.22}$$

Talvolta, usando la relazione:

$$(\not{p} + m)(\not{p} - m) = p^2 - m^2 \tag{8.23}$$

la (8.22) viene riscritta simbolicamente come:

$$iS_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} e^{-i(px)} \tag{8.24}$$

Problema. Dimostrare la relazione:

$$(i\not{\partial} - m)T\{\psi(x)\bar{\psi}(0)\} = i\delta^{(4)}(x) \tag{8.25}$$

Capitolo 9

NEUTRINO DI WEYL E NEUTRINO DI MAJORANA

Abbiamo osservato che gli spinori di Dirac si trasformano secondo una rappresentazione riducibile delle trasformazioni di Lorentz. Sulla base delle sole trasformazioni di $L_+^\uparrow$ dovrebbe dunque essere possibile trovare rappresentazioni realmente irriducibili, *piú picole*, per descrivere una particella di spin 1/2. Questa riduzione conduce a due tipi diversi di teoria, il neutrino di Weyl e il neutrino di Majorana.

Come vedremo, le due teorie coincidono per fermioni di massa nulla, ma si separano per particelle con massa diversa da zero dando luogo alla teoria di Dirac o a quella di Majorana come alternative fisicamente distinte.

Occorre dire subito che nessuna di queste teorie si puó applicare all' elettrone o al protone o al neutrone. Per queste particelle, la presenza di una corrente vettoriale conservata associata alla carica elettrica o al numero barionico rende necessaria la struttura di Dirac. La questione é aperta nel caso del neutrino.

La recente osservazione di una piccolissima massa dei neutrini ha riproposto la teoria di Majorana quale miglior candidato per descrivere le proprietá di queste particelle.

9.1 Il neutrino di Weyl

Consideriamo l' equazione di Dirac nel limite di massa nulla:

$$i\partial\!\!\!/\psi = 0 \tag{9.1}$$

L' equazione (9.1) ammette un operatore invariante rappresentato dalla matrice γ_5. Se ψ é una soluzione della (9.1), anche $\gamma_5\psi$ soddisfa l' equazione. Possiamo separare quindi le soluzioni in due sottospazi invarianti mediante gli operatori di proiezione:

$$a^{(\pm)} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \tag{9.2}$$

Definiamo:

$$\psi_L = a^{(-)}\psi;\ \psi_R = a^{(+)} \tag{9.3}$$

Se, ad esempio, $\psi_R = 0$ ad un tempo t_0, tale resterá i tempi successivi. Il campo quindi si scinde in due componenti irriducibili ed indipendenti.

Nella rappresentazione di Pauli delle matrici gamma:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.4}$$

e gli autovettori di γ_5 con autovalore $h = \pm 1$ hanno la forma:

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ h\chi \end{pmatrix} \tag{9.5}$$

L' equazione di Dirac con $m = 0$ da luogo a due possibili equazioni per lo spinore bidimensionale:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\chi = \pm(-i\nabla \cdot \sigma)\chi \tag{9.6}$$

L' equazione (9.6) prende il nome di *equazione di Weyl* e descrive una particella di massa nulla (poiché é compatibile con l' equazione $\Box\chi = 0$) e spin $1/2$[1]. L' equazione di Weyl é usata per descrivere un neutrino di massa nulla, cui ci referiremo nel seguito.

Consideriamo piú da vicino le soluzioni dell' equazione di Dirac a massa nulla, (9.1). Gli spinori con energia positiva e momento p lungo l' asse z positivo prendono la forma:

$$\begin{gathered} u_+(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \chi^+ \\ \chi^+ \end{pmatrix};\ u_-(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \chi^- \\ -\chi^- \end{pmatrix}; \\ \chi^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \chi^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{9.7}$$

Abbiamo usato nelle (9.7) la normalizzazione appropriata per spinori di massa nulla, cioé:

$$u_s(p)^\dagger u_r(p) = \delta_{rs} \tag{9.8}$$

Da notare che (cfr. la Sez. 6.1.4) $\bar{u}(p)u(p) = m/E \to 0$ per $m = 0$.

Gli spinori con energia negativa e momento $-p$ lungo l' asse z, sono invece:

$$u_+^{(E<0)}(-p) = v_-(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \chi^+ \\ \chi^+ \end{pmatrix};\ u_-^{(E<0)}(-p) = v_+(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\chi^- \\ \chi^- \end{pmatrix} \tag{9.9}$$

Sia nelle (9.7) che nelle (9.9) i suffissi $\pm$ denotano l' autovalore di σ_3.

Gli spinori $u_+(p)$ e $v_-(p)$ sono autovettori di γ_5 con autovalore $+1$, mentre $u_-(p)$ e $v_+(p)$ appartengono all' autovalore -1.

Lo scambio di segni tra u e v nella (9.9) deriva dal fatto che, nella teoria delle lacune, gli spinori $u_\pm^{(E<0)}(-p)$ sono associati alla distruzione di un neutrino in uno stato di energia negativa

[1] se ripetiamo la costruzione di Dirac (Sez. 6.1) partendo direttamente con $m = 0$, dobbiamo introdurre solo tre matrici anticommutanti e quindi la soluzione $\alpha = \sigma$ é accettabile, la dimensionalitá minima dello spinore é 2 e invece dell' equazione di Dirac otteniamo l' equazione di Weyl.

con momento $-p$ e spin=$\pm 1/2$ lungo l' asse z. Questo corrisponde alla creazione di una *lacuna* (un antineutrino) con momento p e spin =$\mp 1/2$, descritta dallo spinore $v(p)$.

Gli stessi concetti si traducono nel linguaggio dei campi quantizzati come segue. Introduciamo i campi sinistrorsi, L (=left-handed), e destrorsi, R (=right-handed), definiti nella (9.3):

$$\psi_L = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \left[a_-(\mathbf{p}) u_-(\mathbf{p}) e^{-i(px)} + (b_+(\mathbf{p}))^\dagger v_+(\mathbf{p}) e^{+i(px)} \right] \tag{9.10}$$
$$\psi_R = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \left[a_+(\mathbf{p}) u_+(\mathbf{p}) e^{-i(px)} + (b_-(\mathbf{p}))^\dagger v_-(\mathbf{p}) e^{+i(px)} \right];$$

Dalla (9.11) segue che:

- il campo ψ_L distrugge un neutrino con elicitá $-1/2$ e crea un antineutrino con elicitá $+1/2$;
- il campo ψ_R distrugge un neutrino con elicitá $+1/2$ e crea un antineutrino con elicitá $-1/2$.

Alle stesse conclusioni si giunge considerando gli elementi di matrice della densitá invariante $\bar{\psi}(x)\psi(x)$. Scriviamo:

$$\psi(x) = \psi(x)_R + \psi(x)_L$$

si nota che $\bar{\psi_L} = (a^- \psi_L)^\dagger \gamma^0 = (\psi_L)^\dagger a^- \gamma^0 = \bar{\psi_L} a^+$, quindi $\bar{\psi_L}$ deve essere moltiplicato per ψ_R e $\bar{\psi_R}$ per ψ_L. Troviamo dunque:

$$\bar{\psi}(x)\psi(x) = \bar{\psi_L}\psi_R + (\bar{\psi_R})\psi_L \tag{9.11}$$

La densitá scalare ha elementi di matrice non nulli tra lo stato di vuoto e lo stato con una coppia neutrino-antineutrino. Per calcolare questi elementi di matrice, dobbiamo considerare gli spinori con momento $-p$:

$$u_\pm(-p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi^\mp \\ \pm\chi^\mp \end{pmatrix};$$
$$v_\pm(-p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mp\chi^\pm \\ \chi^\pm \end{pmatrix}; \tag{9.12}$$

ed elicitá ± 1 (gli spinori bidimensionali corrispondono sempre agli autostati di σ_3).

Tenendo solo i termini che danno elemento di matrice diverso da zero, abbiamo:

$$\langle \nu(p)\bar{\nu}(-p)|\bar{\psi_R}\psi_L|0\rangle = \bar{u_+}(p) v_+(-p) e^{-i(px)+i(p'x)};$$
$$\langle \nu(p)\bar{\nu}(-p)|\bar{\psi_L}\psi_R|0\rangle = \bar{u_-}(p) v_-(-p) e^{-i(px)+i(p'x)} \tag{9.13}$$

Il neutrino e l' antineutrino sono creati con la stessa elicitá, in accordo col fatto che lo stato deve avere momento angolare nullo, ed inoltre sono rispettate le regole appena enunciate. In Fig. 9.1 riportiamo gli stati creati dal vuoto dalle densitá scalari con chiralitá definita e quelli creati dalle densitá vettoriali. Lasciamo al lettore il compito di dimostrare che gli unici stati per cui si hanno elementi di matrice della corrente vettoriale diversi da zero sono quelli illustrati nella figura.

Problema. Estendere il calcolo illustrato in Fig. 9.1 alla densitá del vettore assiale, $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$.

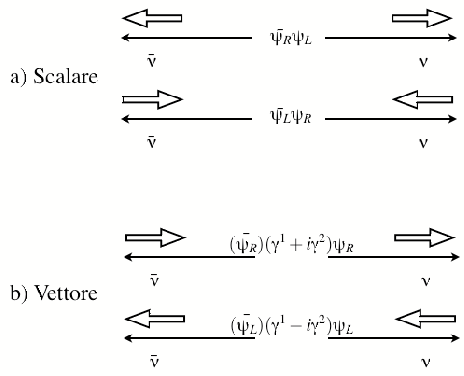

Figura 9.1: Stati con momento totale $\mathbf{P} = 0$ creati dal vuoto dalla densitá scalare, (a), e vettoriale, (b). Le freccie sottili rappresentano la direzione della quantitá di moto, le grandi la direzione dello spin. Gli elementi di matrice non nulli corrispondono alle regole enunciate nel testo per quanto riguarda gli operatori con chiralitá definita, ψ_R e ψ_L.

9.2 Il neutrino di Majorana

Nella rappresentazione di Pauli delle matrici gamma, l' equazione di Dirac (7.3) é un' equazione complessa: se ψ é reale ad un tempo t_0, in genere svilupperá una parte immaginaria ai tempi successivi. Tuttavia, esiste una simmetria della lagrangiana (7.1), la *coniugazione di carica*, che essenzialmente scambia ψ con ψ^*. Usando questa simmetria possiamo ridurre il campo di Dirac a due componenti indipendenti, come osservato per primo da E. Majorana [12].

Il modo piú diretto di vedere la questione é di partire dal fatto che esiste una rappresentazione, la rappresentazione di Majorana (RM nel seguito), in cui le matrice di Dirac sono tutte *immaginarie pure*.

In genere, non é necessario conoscere la forma esplicita delle matrici gamma nella rappresentazione di Majorana. Ne riportiamo qui un esempio, per rassicurare il lettore circa la sua effettiva esistenza. Partendo dalla rappresentazione di Pauli, usiamo le (6.25) con $S = (1+\gamma^2)/2$. Otteniamo:

$$\begin{aligned} &\widetilde{\gamma}^0 = \alpha_2;\ \widetilde{\gamma}^1 = -i\Sigma^3;\ \widetilde{\gamma}^2 = \gamma^2;\ \widetilde{\gamma}^3 = i\Sigma^1 \\ &\widetilde{\gamma}_5 = \gamma^2\gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.14}$$

Notiamo che anche γ_5 é immaginario (e quindi antisimmetrico). Tutte le altre realizzazioni della RM si ottengono applicando ancora le (6.25) con S=reale.

Nella rappresentazione di Majorana, l' equazione di Dirac (7.3) é un' equazione a coefficientio reali e quindi ammette soluzioni puramente reali. Per un campo reale ci aspettiamo la metá dei gradi di libertá rispetto ad un campo complesso, quindi il campo cosí trovato possiede solo 2 gradi di libertá, esattamente quanto richiesto per una particella di spin 1/2.

É interessante mostrare in dettaglio come sono organizzati i gradi di libertá in un campo di Majorana. Dalle (6.74) vediamo che, nella rappresentazione di Majorana,

$$v(\mathbf{p}) = u(\mathbf{p})^*$$

quindi lo sviluppo della ψ, con la condizione realtá, prende la forma (usiamo anche qui la normalizzazione (9.8) per facilitare il limite $m \to 0$):

$$\psi(x) = \sum_{\mathbf{p},r} \frac{1}{\sqrt{V}} [a_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-i(px)} + a_r(\mathbf{p})^\dagger u_r(\mathbf{p})^* e^{+i(px)}] \tag{9.15}$$

Le particelle create da $\psi^{(-)}$ coincidono con quelle annichilate da $\psi^{(+)}$: un fermione di Majorana coincide con la sua antiparticella, é intrinsecamente neutro come il fotone.

Partendo dalla lagrangiana (7.1) possiamo quantizzare il campo di Majorana senza difficoltá. Il momento coniugato a ψ é semplicemente $i\psi$. Le regole di anticommutazione canoniche si scrivono:

$$\{\psi(\mathbf{x}, t)_\alpha, i\psi(\mathbf{y}, t)_\beta\} = i\delta_{\alpha,\beta}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{9.16}$$

Si ritrovano di qui le relazioni di anticommutazione per gli operatori di creazione e distruzione a e $a^\dagger$.

La neutralitá dei fermioni di Majorana si puó vedere anche dalla forma della corrente conservata. Troviamo:

$$\begin{aligned} &j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \psi^T\gamma^0\gamma^\mu\psi = \\ &(\psi^T\psi, \psi^T\alpha\psi) \end{aligned} \tag{9.17}$$

(ψ^T indica un vettore riga con le stesse componenti di ψ). In tutte le componenti di j, gli spinori $\psi_\alpha\psi_\beta$ sono moltiplicati per delle matrici *simmetriche in* α *e* β, quindi, viste le relazioni di anticommutazione (9.16), la corrente é un numero-c. Se la definiamo in modo da essere nulla sullo stato di vuota, avremo $Q = 0$ in tutti gli stati.

Un risultato non triviale si ottiene per la corrente *assiale*:

$$A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi = \psi^T\gamma^0\gamma^\mu\gamma_5\psi \tag{9.18}$$

poiché, in questo caso, le matrici:

$$a^\mu = (\gamma_5, \alpha\gamma_5) \tag{9.19}$$

sono tutte antisimmetriche. Tuttavia la corrente (9.18) é conservata solo nel limite di massa nulla. Usando l' equazione di Dirac (7.3) si trova infatti:

$$\partial_\mu A^\mu = 2m\bar{\psi}i\gamma_5\psi \tag{9.20}$$

L' annullarsi della corrente vettoriale esclude che l' elettrone o il protone, per i quali la corrente elettromagnetica é certamente diversa da zero, si possano descrivere con un campo di Majorana. Anche il neutrone, alla luce della conservazione del numero barionico deve essere descritto da un campo di Dirac (cioé complesso).

Nella rappresentazione di Majorana, le matrici che rappresentano le trasformazioni di Lorentz, $S(\Lambda)$, eq. (6.38) prendono una forma particolare. Infatti, con matrici gamma immaginarie, le matrici $\sigma^{\mu\nu}$ sono anch' esse immaginarie e le $S(\Lambda)$ sono *matrici reali*.

Se consideriamo un campo di Dirac complesso, lo spinore:

$$\psi^T \gamma^0 \tag{9.21}$$

si trasforma come lo spinore aggiunto, cioé con S^{-1}:

$$\psi'^T \gamma^0(x') = \psi^T S^T(\Lambda)\gamma^0 = \psi^T S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^T \gamma^0 S^{-1}(\Lambda) \tag{9.22}$$

Ne segue che possiamo costruire, con ψ un termine di massa diverso da quello che compare nella lagrangiana di Dirac:

$$L_M = \mu\ \psi^T \gamma^0 \psi + \mu^*\ \psi^\dagger \gamma^0 \psi^\dagger \tag{9.23}$$

dove μ é un parametro *complesso* arbitrario. Il termine di massa (9.23) prende il nome di *massa di Majorana*. La lagrangiana:

$$\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/)\psi + \mu\psi^T\gamma^0\psi + \mu^*\psi^\dagger\gamma^0\psi^\dagger \tag{9.24}$$

descrive ancora fermioni di spin $1/2$ e massa diversa da zero, come vedremo, ma non é piú invariante per trasformazioni di fase globali del campo ψ. La corrispondente corrente vettoriale $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ non é conservata.

9.3 Relazione tra neutrini di Weyl, Majorana e Dirac

In questa Sezione consideriamo le diverse possibilitá per descrivere il campo di un neutrino. In tutte le formule che seguono utilizziamo la rappresentazione di Majorana.

Partendo da un campo di Dirac, $\nu(x)$, possiamo separare le componenti destrorse e sinistrorse utilizzando i proiettori $a^{(\pm)}$:

$$\nu(x) = \nu(x)_R + \nu(x)_L \tag{9.25}$$

Per campi di massa nulla la separazione é Lorentz-invariante e il campo di Dirac si scinde in componenti irriducibili, ciascuna delle quali descrive un fermione di Weyl. Il conteggio dei gradi di libertá si bilancia:

$$Dirac(4) = 2 \times Weyl(2) \tag{9.26}$$

Sempre a livello della teoria di massa nulla, ciascun fermione di Weyl é equivalente ad un fermione di Majorana. Per vedere questo definiamo:

$$\nu_1(x) = \nu_L(x) + [\nu_L(x)]^\dagger;\ \ \nu_2(x) = \nu_R(x) + [\nu_R(x)]^\dagger\ \ \text{(RM)} \tag{9.27}$$

Ricordando lo sviluppo (9.11) e la relazione di coniugazione (9.15) troviamo, ad esempio per ν_1:

$$\nu_1(x) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \times \tag{9.28}$$

$$\Big\{[a_-(\mathbf{p})u_-(\mathbf{p}) + b_+(\mathbf{p})u_+(\mathbf{p})]e^{-i(px)} + [a_-(\mathbf{p})^\dagger v_-(\mathbf{p}) + b_+(\mathbf{p})^\dagger v_+(\mathbf{p})]e^{+i(px)}\Big\}$$

La (9.29) mostra che le due componenti di spin del fermione di Majorana sono fornite dall' antineutrino detrorso e dal neutrino sinistrorso, le stesse componenti del campo di Weyl $\nu_L(x)$. Similmente le due componenti di spin di ν_2 sono fornite dal neutrino destrorso e dall' antineutrino sinistrorso del campo ν_R, vedi Fig. 9.3.

Le equazioni (9.27) si possono invertire ricordando che $\gamma_5^T = -\gamma_5$, da cui:

$$\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)(\nu_L)\dagger = [\nu_L\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)]^\dagger =$$
$$= [\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\nu_L]^\dagger = 0 \tag{9.29}$$

Otteniamo quindi:

$$\nu_L = \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\nu_1; \;\; (\nu_L)^\dagger = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\nu_1 \tag{9.30}$$

Le equazioni (9.27) e (9.30) mostrano l' equivalenza delle teorie di Weyl e Majorana per fermioni di massa nulla.

La Lagrangiana di Dirac si puó scrivere in termini dei campi di Weyl o di Majorana, secondo le eguaglianze:

$$\mathcal{L}_D = \bar{\nu} i\partial\!\!\!/ \nu = \bar{\nu}_R i\partial\!\!\!/ \nu_R + \bar{\nu}_L i\partial\!\!\!/ \nu_L = \mathcal{L}_W(\nu_R) + \mathcal{L}_W(\nu_L)$$
$$\mathcal{L}_W(\nu_{R(L)}) = \frac{1}{2}\nu^T_{2(1)}\gamma^0\partial\!\!\!/\nu_{2(1)} = \mathcal{L}_M(\nu_{2(1)}) \tag{9.31}$$

I possibili termini da aggiungere alla (9.31) per dare massa ai fermioni si classificano come segue.

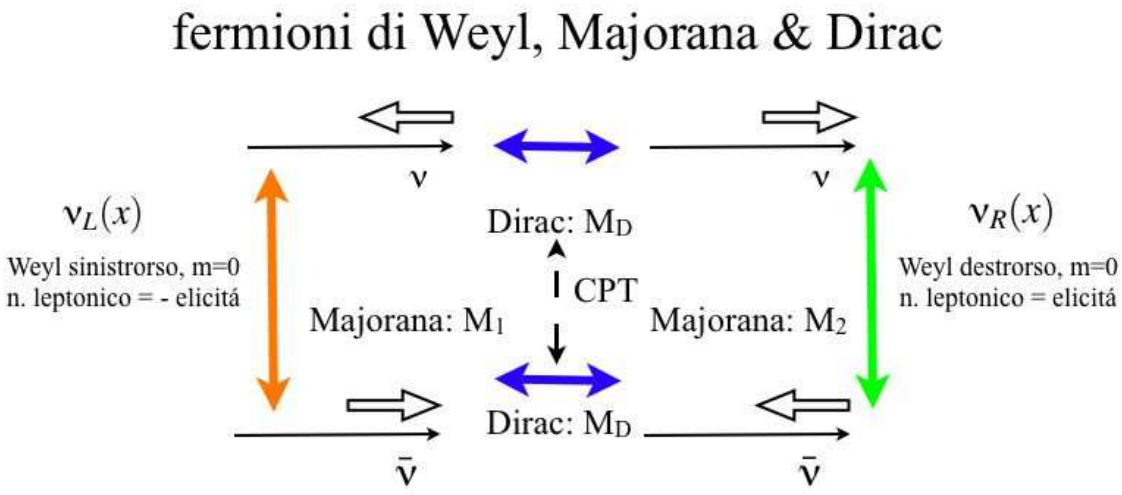

Figura 9.2:

Il termine di massa di Dirac ha la forma:

$$\mathcal{L}_{mD} = m_D \bar{\nu}\nu = m_D \bar{\nu}_L \nu_R + \text{h.c.} \tag{9.32}$$

dove h.c. indica l' operatore hermitiano coniugato, in questo caso[2] $m_D \bar{\nu}_R \nu_L$.

Usando di nuovo l' antisimmetria di γ_5, é facile vedere che, in termini di $\nu_{1,2}$, il termine di Dirac prende la forma:

$$\mathcal{L}_{mD} = m_D \nu_1^T \gamma^0 \nu_2 = m_D \nu_2^T \gamma^0 \nu_1 \tag{9.33}$$

Tuttavia, dati i campi di Majorana $\nu_{1,2}$ possiamo anche considerare due nuovi termini di massa:

$$\mathcal{L}_{mM} = \frac{1}{2} M_1 \nu_1^T \gamma^0 \nu_1 + \frac{1}{2} M_2 \nu_2^T \gamma^0 \nu_2 \tag{9.34}$$

Individualmente, i due termini corrispondono ad una massa di Majorana per il neutrino sinistrorso e destrorso, ad esempio:

$$\frac{1}{2} M_1 \nu_1^T \gamma^0 \nu_1 = \frac{1}{2} M_1 (\nu_L^T \gamma^0 \nu_L + \text{h.c.}) \tag{9.35}$$

Nel complesso, la massa dei neutrini é discritta da un *matrice simmetrica*:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} \zeta^T \gamma^0 \mathcal{M} \zeta \\ &\zeta = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_1 & m_D \\ m_D & M_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.36}$$

É istruttivo considerare le simmetrie della Lagrangiana a massa nulla, (9.31), e dei termini di massa di Dirac e Majorana, (9.33, 9.34).

La (9.31) é invariante sotto due gruppi abeliani e commutanti di trasformazioni[3]:

$$\begin{aligned} &\nu_1 \to \nu_1' = e^{i\alpha\gamma_5} \nu_1; \\ &\nu_2 \to \nu_2' = e^{i\beta\gamma_5} \nu_1 \end{aligned} \tag{9.37}$$

Tuttavia, i termini di massa di Majorana non sono invarianti, mentre il termine di Dirac é invariante per il sottogruppo delle trasformazioni con $\alpha = -\beta$:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{mM} \to \frac{1}{2} M_1 \nu_1^T \gamma^0 e^{2i\alpha\gamma_5} \nu_1 + \frac{1}{2} M_2 \nu_2^T \gamma^0 e^{2i\beta\gamma_5} \nu_2; \\ &\mathcal{L}_{mD} \to m_D \nu_1^T \gamma^0 e^{i(\alpha+\beta)\gamma_5} \nu_2 \end{aligned} \tag{9.38}$$

Nel caso particolare $M_1 = M_2 = 0$ resta quindi una simmetria, qualunque sia il valore di m_D ed una corrente conservata. In questo caso infatti, come vediamo dalla (9.32), il neutrino é descritto dal campo di Dirac $\nu_L + \nu_R$ con corrente conservata $\bar{\nu}\gamma^\mu\nu$, in corrispondenza alle familiari trasformazioni di fase.

[2] lasciamo al lettore di dimostrare che se partiamo da m_D complesso possiamo ridurci al caso reale con una ridefinizione della fase relativa tra ν_L e ν_R e conseguente ridefinizione di ν_1 e ν_2

[3] essendo γ_5 immaginario puro, le trasformazioni (9.37) sono *ortogonali*, come deve essere per mantenere la natura di Majorana dei campi $\nu_{1,2}$

Per vedere questo piú formalmente, osserviamo che nel caso $M_1 = M_2 = 0$ la matrice di massa é proporzionale alla matrice σ_2 ed é quindi diagonalizzata dalle combinazioni $\zeta^{(+)} = \nu_1 + \nu_2$, autovalore $+m_D$ e $\zeta^{(-)} = \nu_1 - \nu_2$, autovalore $-m_D$. Alla luce delle (9.27) poniamo allora:

$$\begin{aligned}
&\nu_{Dirac} = \frac{1}{2}[\zeta^{(+)} - \gamma_5\zeta^{(-)}] = \frac{1}{2}[\nu_L + (\nu_L)^\dagger + \nu_R + (\nu_R)^\dagger] + \\
&-\frac{1}{2}\gamma_5[\nu_L + (\nu_L)^\dagger - \nu_R - (\nu_R)^\dagger] = \\
&= \nu_L + \nu_R
\end{aligned} \tag{9.39}$$

La corrente conservata, in questo caso, prende il nome di *numero leptonico* e distingue il neutrino dall' antineutrino.

Nel caso generale, in cui almeno uno tra M_1 ed M_2 non é nullo, gli autovettori della matrice di massa sono due campi di Majorana, non cé alcuna corrente conservata né differenza tra neutrino ed antineutrino.

Le relazioni tra stati di neutrino e massa di Dirac o Majorana sono illustrate nella Fig. 9.3. La simmetria generale particella-antiparticella richiede che le masse di Dirac che collegano ν_L con ν_R ovvero $\bar{\nu}_L$ con $\bar{\nu}_R$ prendano lo stesso valore m_D.

Commento: il caso dell' elettrone. La richiesta che esista una corrente conservata, da indentificare con la corrente elettrica, implica che ci sia solo il termine di massa di Dirac e quindi che l' elettrone sia descritto da una coppia di campi di Majorana come nella (9.39), quindi da uno spinore di Dirac a quattro dimensioni. A sua volta, questo implica l' esistenza di antiparticelle (positroni) distinte dalle particelle. Lo stesso argomento, utilizzando la conservazione del numero barionico, vale per il protone e per il neutrone.

Commento: il meccanismo see-saw. Nella moderna teoria del neutrino, si suppone che sia $M_1 = 0$ e $M_2 >> m_D$. In questo caso, la matrice di massa nella (9.36) ha come autovalore e autovettore approssimati

$$\zeta^{(-)} \simeq \nu_1; \quad m \simeq \frac{m_D^2}{M_2} \tag{9.40}$$

Per M_2 sufficientemente grande, con fisso m_D, il neutrino leggero ha una massa piccolissima ed é con ottima approssimazione un neutrino di Majorana-Weyl. Come vedremo questa situazione descrive molto bene il neutrino dei decadimenti β.

Capitolo 10

INTERAZIONI

La teoria del campo libero descrive un mondo immutabile in cui l' energia e il momento di ogni particella del sistema si conservano separatamente.

La varietá dei fenomeni che osserviamo richiede invece delle forme di interazione tra i campi. In questo caso, come abbiamo visto nel limite classico, Sez. 5.3, le particelle possono scambiare energia e quantitá di moto dando luogo a processi di diffusione o all' assorbimento ed emissione della luce: il Sole puó brillare, il cielo essere blu e i nostri occhi possono percepire il mondo esterno attraverso i fotoni assorbiti nella retina.

In una teoria relativistica, non solo i fotoni ma anche le particelle associate alla materia, come elettroni, protoni etc. possono essere create o annichilate. Per un sistema isolato dal resto del mondo, i processi elementari devono rispettare le leggi di conservazione richieste dalle simmetrie del sistema: energia, quantitá di moto, momento angolare nonché eventuali cariche interne conservate, ad esempio la carica elettrica. Questo richiede che la *Lagrangiana di interazione*, che aggiungiamo alle lagrangiane dei campi liberi, debba essere *invariante sotto le trasformazioni della relativitá speciale*: il Gruppo di Poincaré, costitutito dalle traslazioni dello spazio-tempo e dalle trasformazioni di Lorentz proprie, $L_+^\uparrow$.

L' invarianza sotto il Gruppo di Poincaré permette ancora una grande varietá di forme per l' interazione, ad esempio tra il campo dell' elettrone e il campo elettromagnetico. In linea di principio, dobbiamo individuare l' interazione *giusta* con un un confronto iterativo tra previsioni ed esperimento (*trials and errors*). Si parte da una forma di interazione che spiega almeno un gruppo di dati iniziali e poi si estende la teoria ad altri processi, confrontando le previsioni con i successivi dati sperimentali. Quando qualche nuovo dato risulta in contraddizione con la teoria, la *falsifica* secondo la terminologia di K. Popper, non resta che modificare l' interazione per riportarla in accordo con il complesso esteso dei dati vecchi e nuovi[1].

In questo processo di prove ed errori, principi euristici *a priori*, quali la a richiesta di ripro-

[1]seguendo Popper, possiamo dire che le teorie non sono mai *verificate*, in quanto ogni complesso di dati ha inevitabilmente dei margini di errore che lo rendono compatibile con moltissime, di fatto infinite, teorie dell' interazione. Peró una teoria puó essere eliminata quando i dati la *falsificano* a favore di una teoria in accordo con il complesso esteso di dati. Ad esempio, la Meccanica Classica é rimpiazzata dalla Meccanica Quantistica quando vogliamo includere i fenomeni della fisica atomica. Il progresso scientifico si realizza attraverso la eliminazione di ipotesi di lavoro, piuttosto che la loro verifica.

durre la teoria classica nel limite di grandi sistemi o la presenza di certe simmetrie aggiuntive, forniscono un aiuto poderoso per restringere il campo delle forme dell' interazione, e quindi degli esperimenti discriminanti, naturalmente avendo chiara la necessitá di sottoporre i criteri euristici al vaglio dei fatti sperimentali.

Un risultato di grande portata della Fisica del secolo passato é stato di ricondurre i processi osservati nel mondo subatomico e subnucleare all' azione di tre diverse categorie di interazioni: elettromagnetiche, deboli e forti, come giá indicato nella Sez. 5.3. La forma di queste interazioni, in termini dei campi fondamentali, é grandemente ristretta da principi di simmetria che sono l' estensione della simmetria di gauge incontrata nella teoria del campo elettromagnetico, Sez. 5.1, e delle trasformazioni di fase delle Sezz. 4.3 e 7.1.

In quanto segue, ricaviamo la forma dell' interazione elettromagnetica per particelle fondamentali spinoriali, quali l' elettrone ed il muone, l' interazione di Fermi appropriata per descrivere il decadimento β del neutrone e discutiamo qualitativamente alcuni aspetti delle interazioni nucleari , soprattutto per indicare le difficoltá di una descrizione in termini dei campi associati alle particelle nucleari osservate, nucleoni e pioni.

Rimandiamo alla III Parte (Teorie di gauge) una trattazione sistematica delle interazioni, interazioni forti incluse, in termini dei costituenti fondamentali (quark, leptoni e campi di gauge).

10.1 L' Elettrodinamica Quantistica (QED)

La teoria libera che descrive fotoni ed elettroni si ottiene combinando la lagrangiana di Maxwell (10.37) e la lagrangiana di Dirac (7.1):

$$L_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \; + \; \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi \tag{10.1}$$

Nella teoria classica, l' interazione tra campo e particella é descritta dalla sostituzione minimale $p^\mu \to p^\mu - qA^\mu$ (Sez. 5.4). D' altro canto, in meccanica quantistica il 4-momento e' rappresentato dagli operatori:

$$p^0 = +i\frac{\partial}{\partial t};\; p^i = -i\frac{\partial}{\partial x^i} = -i\partial_i = +i\partial^i$$

e la sostituzione minimale prende la forma:

$$i\partial^\mu \to i\partial^\mu - qA^\mu \tag{10.2}$$

Per riottenere l' Elettrodinamica classica dalla teoria quantistica nel limite $\hbar \to 0$ (principio di corrispondenza) dobbiamo introdurre la sostituzione (10.2) nella (10.1). Per l' elettrone, che ha carica elettrica $-e$, otteniamo:

$$\begin{aligned} L_0 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \; + \; \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/ - m)\psi = \\ &= L_0 + eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \end{aligned} \tag{10.3}$$

La lagrangiana di interazione fa intervenire la corrente $J^\mu_e = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, la corrente di Noether associata all' invarianza della (10.3) per le trasformazioni globali di fase del campo di Dirac, (7.6).

Invarianza di gauge La lagrangiana che abbiamo ottenuto é invariante sotto un gruppo di trasformazioni piú ampio, le trasformazioni del campo di Dirac per una fase *variabile nello spazio-tempo*, compensate da un' opportuna trasformazione di gauge del campo A^μ.

Consideriamo le trasformazioni congiunte (che indichiamo come *trasformazioni di gauge di seconda specie*, o semplicemente trasformazioni di gauge):

$$\begin{aligned} &\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x);\ \bar{\psi}(x) \to e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}(x); \\ &A^\mu \to A^\mu + \frac{1}{e}\partial^\mu\alpha(x) \end{aligned} \tag{10.4}$$

con $\alpha(x)$ una funzione arbitraria dello spazio tempo. É immediato verificare che le (10.4) lasciano la (10.3) invariante.

Possiamo invertire l' argomento, come osservato da W. Pauli [14], e mostrare che la lagrangiana (10.3) é la piú semplice soluzione al problema di costruire una lagrangiana dell' elettrone che sia invariante sotto le trasformazioni (10.4).

Per mostrare questo notiamo che la combinazione (la *derivata covariante*):

$$D^\mu\psi = (\partial^\mu - ieA^\mu)\psi \tag{10.5}$$

si trasforma con un semplice cambiamento di fase, esattamente come ψ, se ψ ed A^μ sono sottoposti alla (10.4):

$$\begin{aligned} &(D^\mu\psi)' = \partial^\mu(e^{i\alpha}\psi) - ie(A^\mu + \frac{1}{e}\partial^\mu\alpha)e^{i\alpha}\psi = \\ &= e^{i\alpha}D^\mu\psi \end{aligned} \tag{10.6}$$

Da qui segue che:

- se eseguiamo la sostituzione $\partial^\mu \to D^\mu$ in una lagrangiana invariante per trasformazioni di fase globale, otteniamo una nuova lagrangiana invariante sotto le (10.4). La nuova lagrangiana contiene un termine di interazione esattamente prescritto dalla simmetria, che coincide con l' interazione in (10.3).

In particolare, la lagrangiana di Dirac cosí modificata:

$$L_D(\psi, D^\mu\psi) = \bar{\psi}(iD\!\!\!/ - m)\psi \tag{10.7}$$

é invariante di gauge.

La *soluzione generale* del problema si ottiene aggiungendo alla (10.7) dei termini che siano:

- funzioni di A^μ gauge-invarianti, ossia funzioni solo di $F^{\mu\nu}$: é il caso della lagrangiana di Maxwell, $L_{e.m.}$ nella (10.37), che aggiunta alla (10.7) riproduce esattamente la (10.3);

- funzioni di $F^{\mu\nu}$ e di ψ e $\bar{\psi}$, ma non delle loro derivate, che siano invarianti sotto le trasformazioni globali ottenute dalla (10.4) con $\alpha =$ costante.

La trasformazione minimale assume adesso un significato piú trasparente. Essa fornisce la piú semplice lagrangiana dell' elettrone che sia invariante di gauge: la possibilitá di aggiungere termini del secondo tipo tra quelli appena elencati, non viene usata.

Un termine gauge-invariante *non minimale* che possiamo aggiungere all' interazione é il cosiddetto termine di Pauli:

$$L_{non\ min.} = \frac{-e\kappa}{4m}\ \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi\ F^{\mu\nu} \tag{10.8}$$

che é ovviamente gauge-invariante.

In presenza del termine di Pauli, l' equazione del moto dell' elettrone diventa:

$$(i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/ - m)\psi = \frac{e\kappa}{4m}\psi \tag{10.9}$$

Il limite non-relativistico di questa equazione si trova facilmente ripetendo le considerazioni della Sez. 6.1.5. Il risultato é l' equazione del moto per lo spinore a due dimensioni:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\chi = \mathbf{H}\chi$$
$$\mathbf{H} = \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{e(1+\kappa)}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}$$

che sostituisce la (6.112). Il termine di Pauli cambia il rapporto giromagnetico dell' elettrone secondo la:

$$g_{tot} = 2(1+\kappa) \tag{10.10}$$

La QED per i leptoni carichi. La (10.10) fornisce un forte argomento per limitare l' interazione elettromagnetica dell' elettrone alla pura sostituzione minimale, che giá ben descrive il momento magnetico dell' elettrone. Il risultato trova conferma nel calcolo delle correzioni di ordine superiore alla quantitá $g-2$, calcolate per la prima volta da J. Schwinger, che mostrano che queste correzioni riproducono con grande precisione le piccole deviazioni dalla predizione di Dirac $g=2$ osservate sperimentalmente (vedi Parte II).

La stessa conclusione vale per la particella μ, o muone, particella di spin $1/2$ e massa circa 200 volte la massa dell' elettrone. Il muone rappresenta, a tutti gli effetti, una *replica pesante* dell' elettrone. Anche il momento magnetico del muone é noto sperimentalmente con grande precisione e le deviazioni dalla previsione di Dirac $g=2$ sono ben descritte dalle correzioni di ordine superiore.

Nel 1976 é stato osservato un leptone carico con spin $1/2$, analogo all' elettrone ed al muone, la particella τ.

Elettrone, μ, τ ed i corrispondenti neutrini sono classificati come *leptoni*, categoria di particelle che non sono sensibili alle interazioni nucleari. L' ipotesi piú ragionevole, in accordo con le nostre conoscenze sperimentali, é di descrivere le interazioni elettromagnetiche dei tre leptoni carichi con la sola sostituzione minimale, e quindi con la lagrangiana:

$$L_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\ +\ \bar{\psi}_e(iD\!\!\!/ - m_e)\psi_e +\ \bar{\psi}_\mu(iD\!\!\!/ - m_\mu)\psi_\mu +\ \bar{\psi}_\tau(iD\!\!\!/ - m_\tau)\psi_\tau =$$
$$= L_{e.m.} + L_{0e} + L_{0\mu} + L_{0\tau} - eA_\lambda J^\lambda_{lept};$$
$$J^\lambda_{lept} = -\{\bar{\psi}_e\gamma^\lambda\psi_e + \bar{\psi}_\mu\gamma^\lambda\psi_\mu + \bar{\psi}_\tau\gamma^\lambda\psi_\tau\} \tag{10.11}$$

Tabella 10.1: Proprietá elettromagnetiche dei leptoni carichi, dal Particle Data Group [17]. I numeri tra parentesi indicano l' errore sulle ultime cifre di ciascuna grandezza.

	m (MeV)	g
e	0.510998902(21)	2.002319304374(4)
μ	105.658357(5)	2.0023318320(6)
τ	1776.99(28)	2.000(58)

dove con L_0 indichiamo le lagrangiane libere.

I campi fermionici appaiono nella lagrangiana di interazione con la stessa costante di accoppiamento, la carica elettrica dell' elettrone, una proprietá indicata col termine di *universalitá* delle interazioni elettromagnetiche.

La teoria descritta dalla (10.11) prende il nome di *QED spinoriale* (QED=Quantum-Electro Dynamics).

Particelle nucleari. La sostituzione minimale non riproduce correttamente l' interazione elettromagnetica del protone e del neutrone. Entrambe queste particelle devono essere descritte da un campo di Dirac, poiché hanno spin 1/2, ma il loro rapporto giromagnetico non é in accordo con il valore minimale, $g = 2$ e $g = 0$, rispettivamente. Per il momento magnetico dei nucleoni poniamo ($N = p, n$):

$$\mu_N = g_N \mu_p \mathbf{S};\ \mu_p = \frac{e}{2M_p}$$

con M_p la massa del protone. Sperimentalmente, si trova [17]:

$$\frac{g_N}{2} = \begin{cases} 2.792847351 \pm 0.000000028 & \text{(protone)} \\ -1.9130427 \pm 0.0000005 & \text{(neutrone)} \end{cases} \tag{10.12}$$

Dobbiamo quindi aggiungere un termine di Pauli per ciascuno dei due nucleoni, con:

$$\begin{cases} \kappa_p = & +1.792847351 \pm 0.000000028 \\ \kappa_n = & -1.9130427 \pm 0.0000005 \end{cases} \tag{10.13}$$

La lagrangiana corrispondente al sistema complessivo (leptoni e nucleoni)si scrive:

$$\begin{aligned} L = L_{QED} + \bar{\psi}_p(i\partial\!\!\!/ - M_p)\psi_p + \bar{\psi}_n(i\partial\!\!\!/ - M_n)\psi_n - eA_\mu \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p \ + \\ + \frac{e}{4M_p}\{\kappa_p\ \bar{\psi}_p \sigma_{\mu\nu}\psi_p + \kappa_n\ \bar{\psi}_n \sigma_{\mu\nu}\psi_n\}\ F^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{10.14}$$

Possiamo riscrivere i termini di Pauli come correzioni aggiuntive alla corrente elettromagnetica complessiva delle particelle nucleari. Scriviamo, in generale:

$$\begin{aligned} \frac{e\kappa}{4m}\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi\ F^{\mu\nu} = \frac{e\kappa}{2m}\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi(\partial^\nu A^\mu) = \\ = -eA^\mu\{\frac{\kappa}{2m}(\partial^\nu(\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi)\} + \text{quadri} - \text{divergenza} \end{aligned} \tag{10.15}$$

Omettendo la 4-divergenza, che non contribuisce al Principio di Minima Azione, possiamo riscrivere la lagrangiana (10.14) come:

$$L = L_{QED} + \bar{\psi}_p(i\partial\!\!\!/ - M_p)\psi_p + \bar{\psi}_n(i\partial\!\!\!/ - M_n)\psi_n \; - \; eA_\mu J^\mu_{nucl};$$
$$J^\mu_{nucl} = \bar{\psi}_p\gamma^\mu\psi_p + \frac{\kappa_p}{2m}\partial^\nu(\bar{\psi}_p\sigma_{\mu\nu}\psi_p) + \frac{\kappa_n}{2m}\partial^\nu(\bar{\psi}_n\sigma_{\mu\nu}\psi_n) \tag{10.16}$$

I termini di Pauli si sono trasformati in termini aggiuntivi alla corrente di Noether del protone (quella del neutrone é ovviamente nulla) che descrivono le deviazioni del momento magnetico dal valore di Dirac. Notiamo che i termini aggiuntivi sono la divergenza di un tensore antisimmetrico, quindi rientrano nell' ambiguitá associata alla corrente di Noether (cfr. la Sez. 3.5), sono conservati identicamente e non contribuiscono alla carica conservata:

$$\partial_\mu J^\mu_{nucl} = 0; \int d^3x \; J^0_{nucl} = \int d^3x \; \bar{\psi}_p\gamma^0\psi_p$$

In conclusione possiamo scrivere la lagrangiana per le interazioni elettromagnetiche dei leptoni carichi e delle particelle nucleari al modo seguente:

$$L_{QED} = L_{0,tot} - eA_\mu J^\mu_{tot} \tag{10.17}$$

dove:

$$L_{0,tot} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_{i=e,\mu,\tau,p\,n} \bar{\psi}_i(i\partial\!\!\!/ - m_i)\psi_i;$$
$$J^\mu_{tot} = J^\mu_{lept} + J^\mu_{nucl} \tag{10.18}$$

con J^μ_{lept} e J^μ_{nucl} date dalle (10.11) e (10.16).

Conosciamo oggi molte particelle sensibili alle interazioni forti oltre al protone ed al neutrone. Queste particelle sono comunemente indicate col nome di *Adroni*, dal greco hadros=forte (in inglese *hadrons*). Se vogliamo descrivere ciascun adrone con un campo quantizzato, dobbiamo aggiungere la sua lagrangiana libera ad $L_{0,tot}$ e il suo contributo alla corrente elettromagnetica totale. La lagrangiana (10.17) mantiene la sua forma, con l' estensione di J^μ_{nucl} a J^μ_{hadr}.

Fattori di forma elettromagnetici. Consideriamo l' elemento di matrice $\langle p'|J^\mu_p|p\rangle$ della corrente del protone, eq. (10.16), tra stati con momenti p e p'.

Sostituendo lo sviluppo in onde piane dei campi, troviamo (per brevitá indichiamo con M la massa del protone):

$$\langle p'|J^\mu_p|p\rangle = \frac{M}{V\sqrt{E'E}}\bar{u}(p')\left[\gamma^\mu + \frac{\kappa}{2M}i\sigma_{\mu\nu}q^\nu\right]u(p) = \frac{M}{V\sqrt{E'E}}J^\mu(p',p) \tag{10.19}$$

dove abbiamo introdotto il *momento trasferito*:

$$q^\mu = p'^\mu - p^\mu \tag{10.20}$$

Possiamo chiederci quale sia la forma piú generale di $J^\mu(p',p)$ compatibile con essere un 4-vettore polare conservato:

$$q_\mu J^\mu(p',p) = 0 \tag{10.21}$$

Evidentemente la corrente deve avere la forma:

$$J^\mu(p',p) = \bar{u}(p')\Gamma^\mu(p',p)u(p) \tag{10.22}$$

con Γ^μ combinazione lineare dei 4-vettori a disposizione, che possiamo scegliere come:

$$\gamma_\mu,\ \sigma_{\mu\nu}q^\nu,\ q_\mu,\ p'_\mu + p_\mu,\ \sigma_{\mu\nu}(p'^\nu + p^\nu). \tag{10.23}$$

Tuttavia, presi tra i due spinori $\bar{u}(p')$ e $u(p)$, questi vettori non sono indipendenti tra loro, in virtú dell' equazione del moto cui soddisfa $u(p)$, (6.74), e della corrispondente equazione per $\bar{u}(p')$. Moltiplicando la prima delle (6.74) per $\bar{u}(p')\gamma_\mu$, otteniamo:

$$\bar{u}(p')\left[p_\mu - i\sigma_{\mu\nu}p^\nu\right]u(p) = M\ \bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)$$

procedendo simmetricamente sull' equazione di $\bar{u}(p')$, troviamo anche:

$$\bar{u}(p')\left[p'_\mu + i\sigma_{\mu\nu}p'^\nu\right]u(p) = M\ \bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)$$

Sommando e sottraendo le due equazioni, troviamo le relazioni:

$$\frac{p'^\mu + p^\mu}{2M}\bar{u}(p')u(p) + \frac{i}{2M}\bar{u}(p')\sigma_{\mu\nu}q^\nu u(p) = \bar{u}(p')\gamma_\mu u(p) \tag{10.24}$$

$$q_\mu\bar{u}(p')u(p) + \frac{i}{2M}\bar{u}(p')\sigma_{\mu\nu}(p'^\nu + p^\nu)u(p) = 0 \tag{10.25}$$

(la prima di queste relazioni é nota come *Gordon decomposition*) che mostrano che possiamo limitarci ai primi tre vettori:

$$\Gamma_\mu(p',p) = A\gamma_\mu + B\frac{i}{2M}\sigma_{\mu\nu}q^\nu + Cq_\mu \tag{10.26}$$

Inoltre, dall' equazione di conservazione (10.21) otteniamo:

$$q_\mu J^\mu(p',p) = Cq^2\bar{u}(p')u(p) = 0 \tag{10.27}$$

cioé $C = 0$. Possiamo quindi scrivere:

$$J^\mu(p',p) = \bar{u}(p')\left[A\gamma_\mu + B\frac{i}{2M}\sigma_{\mu\nu}q^\nu\right]u(p). \tag{10.28}$$

La richiesta che la (10.28) si trasformi come un 4-vettore implica, in generale, che i coefficienti A e B siano funzioni invarianti dei 4-momenti. Poiché $p^2 = p'^2 = m^2$, la sola combinazione invariante non triviale é q^2 ed otteniamo, in conclusione, la forma della corrente:

$$J^\mu(p',p) = \bar{u}(p')\left[F_1(q^2)\gamma_\mu + F_2(q^2)\frac{i}{2M}\sigma_{\mu\nu}q^\nu\right]u(p). \tag{10.29}$$

Si vede facilmente che la condizione (10.17) implica:

$$F_1(0) = 1 \tag{10.30}$$

mentre dalla (10.10) si trova:

$$F_2(0) = \kappa \tag{10.31}$$

Formule analoghe valgono per il neutrone, naturalmente con $F_{1,n}(0) = 0$.

Le funzioni $F_1(q^2)$ ed $F_2(q^2)$ prendono il nome di *fattori di forma di Pauli* e si possono misurare, come vedremo, dalla diffusione elastica di elettroni su idrogeno (per il protone) e su deuterio (ottenendo i fattori di forma del neutrone per sottrazione).

La forma (10.29) non é ovviamente unica, perché possiamo scegliere i 4-vettori di base in modi diversi. Una scelta particolarmente conveniente corrisponde a scrivere:

$$J^\mu(p', p) = \bar{u}(p') \left[F_E(q^2) \frac{p'^\mu + p^\mu}{2M} + F_M(q^2) \frac{i}{2M} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right] u(p) \tag{10.32}$$

I fattori di forma definiti dalla (10.32) prendono il nome di *fattori di forma di Sachs*. In vista della (10.25) otteniamo:

$$F_E(q^2) = F_1(q^2);\ F_M(q^2) = F_1(q^2) + F_2(q^2) \tag{10.33}$$

da cui seguono le condizioni di normalizzazione:

$$F_E(0) = 1;\ F_M(0) = 1 + \kappa \tag{10.34}$$

10.2 L' Interazione di Fermi per i decadimenti β

La prima teoria quantitativa dei decadimenti β dei nuclei é dovuta a E. Fermi. Seguendo un primo suggerimento di W. Pauli, Fermi assume che l' elettrone nei decadimenti β sia emesso insieme ad una particella neutra non osservata, il neutrino, a causa di un' interazione indipendente sia dalle interazioni elettromagnetiche sia dalle forze che legano i nuclei. La reazione corrispondente si scrive:

$$N(A, Z) \to N(A, Z + 1) + e + \bar{\nu} \tag{10.35}$$

dove A e Z sono il numero di massa e la carica dl nucleo. La costante di accoppiamento tipica di questa nuova interazione risulta tanto piccola, sulla scala dei fenomeni nucleari, da giustificare il nome di *Interazioni Deboli* dato all' interazione identificata da Fermi.

Fermi assume inoltre che la lagrangiana di interazione sia il prodotto di due termini: un operatore che induce la transizione dal nucleo iniziale a quello finale, ed un operatore che *crea* la coppia di particelle leggere. Vi é in questo un' analogia profonda con le transizioni elettromagnetiche negli atomi e nei nuclei:

$$A^* \to A + \gamma \tag{10.36}$$

La lagrangiana di interazione della (10.36) é anch' essa il prodotto di un' operatore che induce la transizione da A^* a A e di un operatore che crea il fotone. Ad esempio, come abbiamo visto nella Sezione precedente, Eq. (10.16), per una transizione nucleare si ha:

$$L_\gamma = -e J^\mu_{nucl} A_\mu \tag{10.37}$$

Nel caso della (10.35), Fermi assume che essa sia indotta dal processo elementare di disintegrazione del neutrone:

$$n \to p + e + \bar{\nu} \tag{10.38}$$

e scrive la piú semplice lagrangiana di interazione come:

$$L_F = G_F \left[\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n\right] \left[\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu\right] \tag{10.39}$$

Abbiamo assunto che tutte le particelle siano rappresentate da campi di Dirac, G_F é la costante di Fermi. Convenzionalmente, la particella emessa nel decadimento β^- é un *antineutrino*.

In notazioni moderne, la lagrangiana per il decadimento del neutrone si scrive piuttosto come:

$$L_F = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{\psi}_p \gamma^\mu (1 + \frac{g_A}{g_V}\gamma_5)\psi_n\right] \left[\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5)\psi_\nu\right] \tag{10.40}$$

La (10.40) riassume una gran messe di sviluppi sperimentali e teorici che hanno avuto luogo nello studio delle interazioni deboli, dalla formulazione di Fermi ad oggi.

- Teoria V, A: i termini adronici e leptonici in (10.40) sono combinazioni dei soli bilineari V^μ ed A^μ;
- Violazione della paritá: la lagrangiana é una sovrapposizione coerente di vettori polari ed assiali;
- Il campo del neutrino compare nella combinazione $(1 - \gamma_5)\psi_\nu$. Questo assicura che, per massa nulla, neutrino ed antineutrino sono emessi o assorbiti solo negli stati con elicitá negativa o positiva, rispettivamente. Neutrini (antineutrini) con elicitá positiva (negativa) non sono accoppiati e potrebbero non esistere affatto (teoria a due componenti del neutrino, cfr. la Sez. 9.1).
- Le particelle nucleari non compaiono nella combinazione $V - A$, ma con un coefficiente di normalizzazione relativa, g_A/g_V, da determinare sperimentalmente.

10.3 Le interazioni forti o nucleari

Capitolo 11

LA RAPPRESENTAZIONE DI INTERAZIONE

11.1 Evoluzione nel tempo dei sistemi quantistici

I valori medi delle grandezze osservabili dipengono in genere dal tempo. Nella Meccanica Quantistica, questi valori medi sono dati dall'espressione:

$$< X >_t =< A(t)|X(t)|A(t) > \tag{11.1}$$

C'é un'ambiguitá intrinseca nel determinare la dipendenza dal tempo dei vari elementi che compongono il secondo membro dell'eq. (A.67), bra, ket e operatore, poiché possiamo trasferire questa dipendenza da un elemento all'altro, purché il valore medio $< X >_t$, che poi è tutto quello che possiamo misurare sul sistema, resti immutato. L' ambiguitá dá luogo a descrizioni del moto diverse, collegate da trasformazioni unitarie dipendenti dal tempo, quindi equivalenti tra loro. Nelle prossime Sezioni, descriviamo la rappresentazione di Schroedinger e la rappresentazione di Heisenberg. Successivamente considereremo una terza descrizione del moto, la rappresentazione di Dirac, o di interazione, particolarmente conveniente nel caso di sistemi debolmente interagenti.

La Rappresentazione di Schroedinger. In questa rappresentazione, le variabili dinamiche (posizione, quantitá di moto etc.) sono associate ad operatori fissati. La variazione col tempo del valore medio (A.67) é dovuta alla variazione col tempo del ket che rappresenta lo stato fisico al tempo t. Dato il ket $|A>$ al tempo t_0 (lo stato iniziale), il Principio di Sovrapposizione richiede che $|A(t)>$ si ottenga da $|A>$ mediante l'applicazione di un operatore lineare, $U(t, t_0)$, indipendente da $|A>$:

$$|A(t)>= U(t, t_0)|A> \tag{11.2}$$

Inoltre, se $|A>$ é normalizzato, in modo che le sue componenti c_n sulla base di un dato osservabile **O** siano le ampiezze di probabilitá dei possibili risultati di una misura di **O**, é naturale richiedere che anche $|A(t)>$ sia normalizzato, in modo che:

$$\sum_n |c_n|^2 = \sum_n |c_n(t)|^2 = 1 \tag{11.3}$$

L'eq. (A.69) corrisponde alla conservazione della probabilitá di tutti i risultati possibili. Data questa condizione, l'operatore $U(t,t_0)$ risulta unitario:

$$U(t,t_0)^\dagger U(t,t_0) = 1 \tag{11.4}$$

Possiamo trasformare la (A.68) in una equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}|A(t)>= \frac{dU(t,t_0)}{dt}U(t,t_0)^\dagger|A(t)>= -\frac{i}{\hbar}H|A(t)> \tag{11.5}$$

H, a meno del fattore $1/\hbar$ é il generatore delle traslazioni infinitesime nel tempo. Poiché U é unitario, H é hermitiano:

$$H = i\hbar\frac{dU(t,t_0)}{dt}U(t,t_0)^\dagger = \tag{11.6}$$

$$= i\hbar\frac{d}{dt}[U(t,t_0)U(t,t_0)^\dagger] - i\hbar U(t,t_0)\frac{dU(t,t_0)^\dagger}{dt} = H^\dagger$$

L'equazione (A.71) é l'equazione di Schroedinger. E' un'equazione differenziale del primo ordine in t, in accordo con l'ipotesi che, al tempo t_0, il ket $|A>$ dia una descrizione completa dello stato del sistema e che quindi l' evoluzione sia determinata una sola condizione iniziale.

Nel caso in cui H sia indipendente dal tempo, possiamo integrare l' eq. (A.71) e scrivere direttamente la soluzione dell'equazione di Schroedinger che si riduce allo stato $|A>$ al tempo t_0:

$$|A(t)>= e^{-\frac{1}{\hbar}H(t-t_0)}|A> \tag{11.7}$$

Se sviluppiamo $|A>$ nella base degli autovettori di H:

$$|A(t)>= \sum_n c_n(t)|h_n> \tag{11.8}$$

otteniamo dalla (A.71):

$$c_n(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)}c_n(t_0) \tag{11.9}$$

L'energia é conservata: l' eq. (A.71) mostra che se $|A>$ é una autostato di H, lo é anche $|A(t)>$, con lo stesso autovalore. Per uno stato generico si conserva il valore medio di H:

$$< A(t)|H|A(t)>=< A|H|A>= cost. \tag{11.10}$$

La Rappresentazione di Heisenberg. In alternativa alla rappresentazione di Schroedinger, possiamo associare lo stato ad un vettore fisso, ed attribuire la dipendenza dal tempo dei valori medi (A.67) alla variazione dell' operatore che rappresenta l'osservabile. Formalmente, la rappresentazione di Heisenberg si ottiene applicando al ket $|A(t)>_S$ della rappresentazione di

Schroedinger la trasformazione unitaria che lo riporta al valore che aveva ad un tempo fissato, t_0:

$$|A>_H = e^{+\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|A(t)>_S \tag{11.11}$$

Al tempo t_0, le due rappresentazioni coincidono.

La dipendenza da t delle grandezze osservabili é fissata dalla richiesta che il valore medio (A.67) sia lo stesso nelle due rappresentazioni, ad ogni t e che il ket $|A>_H$ sia costante. Dall' equazione:

$${}_S<A(t)|X_S|A(t)>_S = {}_H<A|X_H(t)|A>_H \tag{11.12}$$

si ottiene, usando la (A.77):

$$X_H(t) = e^{+\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}X_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \tag{11.13}$$

Differenziando rispetto al tempo, otteniamo:

$$i\hbar\frac{dX_H(t)}{dt} = [X_H(t), H] \tag{11.14}$$

Per visualizzare la rappresentazione di Heisenberg, ricorriamo all'analogia col moto di un sistema classico.

Possiamo caratterizzare lo stato del sistema al tempo t dando la posizione istantanea del sistema nello spazio delle fasi, (p_t, q_t): questo corrisponde alla rappresentazione di Schroedinger. La rappresentazione di Heisenberg corrisponde invece a descrivere lo stato di moto dando la condizione iniziale (p_{t_0}, q_{t_0}), ad un tempo arbitrario ma fissato, t_0. La condizione iniziale determina completamente la traiettoria nello spazio delle fasi e naturalmente, come lo stato di Heisenberg, non cambia col tempo.

C'é un aspetto peculiare della rappresentazione di Heisenberg, che é implicito in quanto detto ma che vale la pena sottolineare.

Lo stato di Heisenberg é indipendente dal tempo t. Tuttavia, il vettore che lo rappresenta dipende implicitamente dal valore del tempo t_0, scelto per fissare la condizione iniziale (in altre parole, il tempo, al quale la rappresentazione di Heisenberg coincide con quella di Schroedinger). La scelta di t_0 é arbitraria, ma dobbiamo fissare t_0 allo stesso modo per tutti gli stati di moto, se vogliamo confrontare tra loro stati diversi.

I vettori che rappresentano lo stato di moto per una data scelta di t_0 differiscono da quelli relativi ad un'altra scelta per una trasformazione unitaria:

$$|A; t_0>_H = e^{+\frac{i}{\hbar}H(t_0-t_0')}|A; t_0'>_H \tag{11.15}$$

La (A.81) lascia invariati i valori medi (A.67). Tuttavia, al variare di t_0, il vettore che rappresenta uno stesso stato di moto puó assumere aspetti considerevolmente diversi tra loro.

11.2 La Rappresentazione di Interazione

In molti casi fisicamente interessanti, l'Hamiltoniana é la somma di due termini:

$$H = H_0 + V_0 \tag{11.16}$$

di cui H_0 é esattamente risolubile e V_0 puó essere considerato una modifica "piccola" di H_0. In questi casi, possiamo cercare di approssimare le soluzioni di H a partire dalle soluzioni di H_0, con uno sviluppo in potenze di V_0 limitato ad un numero finito di termini. Questa é la versione quantistica della Teoria delle Perturbazioni, ampiamente usata in Meccanica Classica.

Un esempio rilevante è l'Elettrodinamica Quantistica, QED, che abbiamo introdotto nella Sez. 10. H_0 é l'Hamiltoniana che descrive elettroni e fotoni liberi mentre V_0 descrive l'interazione dell'elettrone con il campo elettromagnetico. L'intensitá dell'interazione é determinata dalla carica elettrica dell'elettrone, e si esprime in termini di una grandezza adimensionale, la *costante di struttura fina*:

$$\alpha = (\frac{e^2}{4\pi\hbar c}) \simeq \frac{1}{137} \tag{11.17}$$

molto minore dell'unitá.

Per ottenere lo sviluppo perturbativo in modo sistematico, é conveniente descrivere il moto del sistema nella *rappresentazione di interazione*, o rappresentazione di Dirac.

Lo stato al tempo t nella rappresentazione di interazione si ottiene dallo stato nella rappresentazione di Schroedinger con la trasformazione unitaria:

$$|A(t)>_I = e^{+\frac{i}{\hbar}H_0 t}|A(t)>_S \tag{11.18}$$

I valori medi delle osservabili devono essere gli stessi nelle due rappresentazioni:

$${}_I<A(t)|O_I(T)|A(t)>_I = {}_S<A(t)|O_S|A(t)>_S \tag{11.19}$$

e quindi:

$$O_I(t) = e^{+\frac{i}{\hbar}H_0 t} O_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} \tag{11.20}$$

Differenziando rispetto a t, otteniamo le equazioni del moto degli stati e delle osservabili:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|A(t)>_I = V_{0I}(t)|A(t)>_I \tag{11.21}$$

$$i\hbar\frac{dO_I(t)}{dt} = [H_0, O_I(t)] \tag{11.22}$$

dove $V_{0I}(t)$ é l'Hamiltoniana di interazione nella rappresentazione di interazione:

$$V_{0I}(t) = e^{+\frac{i}{\hbar}H_0 t} V_0 e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} \tag{11.23}$$

Le osservabili variano nel tempo con l'Hamiltoniana libera, mentre la variazione col tempo degli stati é dovuta soltanto all'interazione.Da notare che V_{0I} dipende esplicitamente dal tempo, in quanto V_0 ed H_0, in genere, non commutano tra loro.

L' eq. (11.21) definisce un operatore di traslazione nel tempo tra t_0 e t:

$$|t>_I = U_I(t, t_0)|t_0>_I \tag{11.24}$$

dove abbiamo indicato con $|t>_I$ lo stato al tempo t che si riduce a $|t_0>_I$ al tempo t_0.

$U_I(t, t_0)$ é un operatore lineare. Inoltre, verifica la relazione:

$$U_I(t, t_0) = U_I(t, t_1)U_I(t_1, t_0) \ (t > t_1 > t_0) \tag{11.25}$$

U_I é unitario, come conseguenza del fatto che l'hamiltoniana di interazione. V_{0I}, é hermitiana:

$$U(t, t_0)^\dagger U(t, t_0) = U(t, t_0)U(t, t_0)^\dagger = I \tag{11.26}$$

Naturalmente, possiamo anche risolvere l'equazione del moto con una condizione finale, cioé assegnando lo stato ad un tempo $t_1 > t$. Il corrispondente operatore, $\bar{U}_I(t, t_1)$, definito da:

$$|t>_I = \bar{U}_I(t, t_1)|t_1>_I \quad (t_1 > t) \tag{11.27}$$

é l'hermitiano coniugato di $U_I(t_1, t)$:

$$\bar{U}_I(t, t_1) = U_I(t_1, t)^\dagger \tag{11.28}$$

11.3 Lo sviluppo perturbativo

Possiamo esprimere U_I come una serie di potenze in V_{0I}. Per fare questo, integriamo la (11.21) tra t_0 e t, ottenendo cosí l'equazione integrale:

$$|t>_1 = |t_0>_I - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' V_{0I}(t')|t'>_I \tag{11.29}$$

Ovviamente, $|t>_I$ differisce da $|t_0>_I$ per termini che sono almeno di ordine V_{0I}. La eq. (11.29) ci dá la soluzione al primo ordine sostituendo semplicemente $|t'>_I$ con $|t_0>_I$:

$$|t>_I = |t_0>_I - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' V_{0I}(t')|t_0>_I + O(V_0^2) \tag{11.30}$$

Il procedimento puó essere ripetuto. Ad esempio, sostituendo di nuovo la (11.30) nella (11.29), otteniamo la soluzione al secondo ordine:

$$\begin{aligned} |t>_1 &= |t_0>_I - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' V_{0I}(t')|t_0>_I + \\ &+(-\frac{i}{\hbar})^2 \int_{t_0}^{t} dt' V_{0I}(t') \int_{t_0}^{t'} V_{0I}(t'')|t_0>_I + O(V_0^3) \end{aligned} \tag{11.31}$$

e cosí via.

Continuando indefinitamente il procedimento, si trova la serie:

$$|t>_I = |t_0>_I + \sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{i}{\hbar})^n dt_1 V_{0I}(t_1)\int_{t_0}^{t_1} dt_2 V_{0I}(t_2)\ldots\int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n V_{0I}(t_n)|t_0>_I = \tag{11.32}$$

$$= [1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{i}{\hbar})^n \int_{t_0}^{t} dt_I V_{0I}(t_I)\int_{t_0}^{t_1} dt_2 V_{0I}(t_2)\ldots\int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n V_{0I}(t_n)]|t_0>_I = \tag{11.33}$$

$$= U_I(t,t_0)|t_0>_I \tag{11.34}$$

che dá una soluzione formale dell'equazione del moto con la condizione iniziale $|t>_I = |t_0>_I$, come si verifica facilmente per sostituzione nella eq. (11.21).

11.4 Prodotti tempo-ordinati

Conviene esprimere i termini della serie come risultato di una integrazione indipendente su tutte le variabili $t_1, \ldots t_n$, nell'intervallo fisso tra t_0 e t. Per fare questo, si introduce il prodotto tempo-ordinato (T-prodotto) degli operatori $V_{0I}(t_1), V_{0I}(t_2)\ldots, V_{0I}(t_n)$ definito, per valori fissati delle variabili $t_1, t_2, \ldots t_n$, come il prodotto degli operatori nell'ordine che corrisponde a valori decrescenti del tempo, leggendo da sinistra verso destra:

$$T(V_{0I}(t_1), V_{0I}(t_2)\ldots, V_{0I}(t_n)) = V_{0I}(t_{a1})V_{0I}(t_{a2})\ldots V_{0I}(t_{an}) \tag{11.35}$$

dove $t_{a_1}, t_{a_2}\ldots t_{a_n}$ é la permutazione di $t_1, t_2, \ldots, t_n$ per cui:

$$t_{a_1} > t_{a_2} > \ldots > t_{a_n} \tag{11.36}$$

Nel caso di due operatori, si ha, esplicitamente:

$$T(V_{0I}(I_1), V_{0I}(t_2)) = \theta(t_1 - t_2)V_{0I}(t_1 V_{0I}(t_2 + \tag{11.37}$$

$$+\theta(t_2 - t_1)V_{0I}(t_2)V_{0I}(t_1)$$

con $\theta(x) = 0, 1$ a seconda che sia $x < 0$ o $x > 0$.

Consideriamo adesso l'integrale:

$$\int_{t_0}^{t} T(V_{0I}(t_1), V_{0I}(t_2) \ldots, V_{0I}(t_n))dt_1 dt_2 \ldots dt_n \tag{11.38}$$

con tutte le variabili tra t_0 e t.

Il dominio di integrazione si decompone in $n!$ domini, corrispondenti ai possibili ordinamenti temporali delle variabili. Il contributo del particolare dominio in cui vale l'ordinamento dato dalla (11.35) é dato da:

$$\int_{t_0}^{t} dt_{a1} V_{0I}(t_{a1}) \int_{t_0}^{t_{a1}} dt_{a2} dV_{0I}(t_{a2}) \ldots \int_{t0}^{t_{an-1}} dt_{an} V_{0I}(t_{an}) \tag{11.39}$$

e quindi coincide proprio con l'integrale che compare nella (11.34), a meno di un cambiamento triviale del nome delle variabili. L'istruzione di ordinamento temporale nella (11.38) fá sí che gli integrali estesi agli $n!$ domini siano tutti uguali alla (11.39), per cui, in conclusione, possiamo riscrivere $U_I(t, t_0)$ nella forma simmetrica:

$$U_I(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1} (-\frac{i}{\hbar})^n \frac{1}{n!} \int_{t0}^{t} dt_1 dt_2 \ldots dt_n T(V_{0I}(t_1)V_{0I}(t_2) \ldots V_{0I}(t_n)) \tag{11.40}$$

Capitolo 12

TEORIA RELATIVISTICA DELLE PERTURBAZIONI

Ricaviamo in questa Sezione lo sviluppo perturbativo della matrice di diffusione (matrice S) per una teoria di campo relativistica.

Il punto di partenza é lo sviluppo della matrice di trasferimento, $U_I(t_2, t_1)$, l' operatore che trasforma lo stato al tempo t_1 in quello al tempo t_2, nella Rappresentazione di Interazione (RI), introdotta nel capitolo precedente.

L' ipotesi fondamentale per derivare la matrice di diffusione é quella di assumere che per grandi tempi l' Hamiltoniana di interazione nella RI *tenda a zero*:

$$lim_{t\to\pm\infty}\mathbf{H}_I(t) \to 0 \tag{12.1}$$

Intuitivamente, la condizione deriva dal fatto che quando il tempo tende verso infinito, le particelle si allontanano tra loro indefinitamente e le mutue azioni tendono a zero.

Tuttavia, la condizione (12.1) non é affatto triviale. Ad esempio essa non é soddisfatta in presenza di forze a lungo raggio, come ad esempio l' interazione elettrostatica tra due cariche elettriche. Questo casi richiedono particolare cura per definire le probabilitá dei processi osservabili (cfr. ad esempio la Ref [15]).

Anche nel caso di forze a corto raggio, per soddisfare la condizione (12.1) dobbiamo definire opportunamente l' Hamiltoniana di interazione, in modo da sottrarre le interazioni di ogni particella con *i campo generati dalla particella stessa*. La procedura di sottrazione degli effetti dell' auto-interazione sará considerata in dettaglio nella Seconda Parte, Elettrodinamica Quantistica.

Assumendo la validitá della (12.1), il vettore di stato tende ad un vettore costante nel limite $t \to +\infty$ e lo stesso avviene, con un diverso vettore, se mandiamo t_0 a $-\infty$:

$$lim_{t\to\pm\infty}|t>=|\pm\infty>=cost. \tag{12.2}$$

Per tempi finiti, il vettore di stato é dato dall' applicazione dall' operatore lineare $U(t_0, t)$ allo stato iniziale $|t_0>$. Dalle relazioni (12.2) segue ugualmente che $|+\infty>$ dipende linearmente da $|-\infty>$. Possiamo dunque definire un operatore lineare indipendente dal tempo, la matrice di diffusione o *matrice S*, che trasforma l' uno nell' altro:

$$|+\infty>=S|-\infty> \tag{12.3}$$

Confrontando con la definizione di $U_I(t_2, t_1)$, vediamo che:

$$S = lim_{t_2 \to +\infty, t_1 \to -\infty} U_I(t_2, t_1) \tag{12.4}$$

ovvero, usando lo sviluppo perturbativo discusso in Appendice A

$$S = \sum_n \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n \, T(\mathbf{H}_I(t_1)\mathbf{H}_I(t_2)\ldots\mathbf{H}_I(t_n)) \tag{12.5}$$

In un processo di diffusione, lo stato al tempo $-\infty$ rappresenta lo *stato iniziale*, $|i>$, mentre lo stato al tempo $|+\infty>$ é una sovrapposizione lineare degli stati che corrispondono a *tutti i possibili risultati* dell' interazione. Se indichiamo con $|f>$ uno di questi stati, l' ampiezza di probabilitá per osservare proprio $|f>$ al termine del processo e la corrispondente probabilitá sono date da:

$$Amp(i \to f) =< f| \, S \, |i>;$$
$$Prob(i \to f) = |A(i \to f)|^2$$

Unitarietá. Lo stato $|f\rangle$ é uno dei possibili risultati del processo di diffusione. Sommando su tutti gli stati $|f_n\rangle$ di una base completa, le probabilitá si devono sommare all' unitá:

$$\sum_n P(i \to f_n) = \sum_n \langle i| \, S \, |f_n\rangle\langle f_n| \, S^\dagger \, |i\rangle = \langle i| \, SS^\dagger |i\rangle = 1$$

Dovendo valere per ogni $|i\rangle$, questo risultato implica che la matrice S deve essere *unitaria*:

$$SS^\dagger = S^\dagger S = 1 \tag{12.6}$$

Invarianza Relativistica Il Principio di Relativitá Speciale prende una forma particolarmente semplice per la matrice S.

Poniamo, per semplicitá, il nostro sistema in un volume finito, V. In questo caso, gli stati appartengono tutti allo spettro discreto e sono normalizzati: $|<n|m>|^2 = \delta_{n,m}$. La probabilitá di osservare un certo risultato da date condizioni iniziali e su un intervallo di tempo infinito *deve essere la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali*. Quindi, se indichiamo con $|Ui>, |Uf>$ gli stati iniziali e finali trasformati ad un altro SI, dobbiamo avere:

$$|<f|S|i>|^2 = |<Uf|S|Ui>|^2 = |<f|U^\dagger SU|i>|^2$$

Per trasformazioni connesse con continuitá all' identitá, quindi:

$$<f|U^\dagger SU|i> =< f|S|i>$$

ovvero, dato che gli stati iniziali e finali sono arbitrari,

$$U^\dagger SU = S \tag{12.7}$$

La matrice S é *invariante per trasformazioni di Lorentz*.

12.1 La formula di Dyson

In una teoria di campo, l' Hamiltoniana di interazione é, in generale, l' integrale spaziale di una densitá di Hamiltoniana:

$$\mathbf{H}_I(t) = \int d^3x\, \mathcal{H}_I(x)$$

Ci restringiamo, inoltre, al caso in cui la densitá di lagrangiana é la somma di una lagrangiana libera ed una lagrangiana di interazione *che non contiene le derivate dei campi*, come avviene nella QED spinoriale. In questo caso, possiamo ottenere la densitá di Hamiltoniana di interazione come segue:

$$\mathcal{H}_{tot} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi}\partial_0\phi - \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \partial_0 \phi}\partial_0\phi - (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I) =$$
$$= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I$$

Per confronto, otteniamo:

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I \tag{12.8}$$

In conseguenza, otteniamo la formula della matrice S dovuta a F. Dyson :

$$S = \sum_n \frac{(i)^n}{n!} \int \int \ldots \int d^4x_1 d^4x_2 \ldots d^4x_n\, T\left[\mathcal{L}_I(x_1)\mathcal{L}_I(x_2)\ldots\mathcal{L}_I(x_n)\right] \tag{12.9}$$

La formula di Dyson permette di verificare direttamente l' invarianza relativistica della matrice S.

Misura di integrazione e densitá di Lagrangiana di interazione sono invarianti di Lorentz. Dobbiamo quindi esaminare solo l' invarianza del prodotto tempo-ordinato. Consideriamo per semplicitá il prodotto di due operatori:

$$T\left[\mathcal{L}_I(x_1)\mathcal{L}_I(x_2)\right] = \theta(x_1^0 - x_2^0)\mathcal{L}_I(x_1)\mathcal{L}_I(x_2) + \theta(x_2^0 - x_1^0)\mathcal{L}_I(x_2)\mathcal{L}_I(x_1) \tag{12.10}$$

Se la separazione tra i due eventi é di tipo tempo, l' ordinamento si mantiene in tutti i SI. Al contrario, per separazioni di tipo spazio l'ordine temporale dei due eventi puó essere diverso in diversi SI. Tuttavia, la condizione di microcausalitá, Sez. 7.3, ci viene qui in aiuto. Poiché in queste condizioni le due lagrangiane di interazione devono commutare, l' ordine in cui i due operatori compaiono é inessenziale ed il T-prodotto é di fatto relativisticamente invariante.

Commento. I campi che compaiono nella (12.9) sono operatori nella rappresentazione di interazione, quindi *soddisfano alle equazioni del moto libero* e sono, di fatto, gli operatori dati dagli sviluppi del tipo riportato nelle (4.47) e (6.123), con le regole di quantizzazione canoniche. Se aggiungiamo la convenzione di definire $\mathcal{L}_I$ come prodotto normale di campi, queste regole determinano completamente i prodotti che compaiono come integrandi nella formula di Dyson, *fintanto che manteniamo* $x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_n$. Quando uno o piú punti coincidono, i prodotti delle $\mathcal{L}_I$ sviluppano un comportamento singolare. Il superamento di questa difficoltá richiede una ridefinizione di $\mathcal{L}_I$ e dei parametri che in essa compaiono. La possibilitá di *rinormalizzare* la teoria in interazione verrá studiata nella Seconda Parte (Elettrodinamica Quantistica). Possiamo

anticipare fin da ora che la procedura di rinormalizzazione puó essere portata a termine con successo solo per una classe ristretta di interazioni, *interazioni rinormalizzabili*. In questa categoria rientra la QED generata con la sostituzione minimale. Al contrario, l' interazione elettrodinamica con l' aggiunta di termini di Pauli, ad esempio la lagrangiana (10.16), non é rinormalizzabile e va considerata come una teoria fenomenologica, valida solo in un ristretto intervallo di energia.

12.2 Leggi di conservazione

Consideriamo l' elemento di matrice S tra stati con 4-momento totale definito:

$$< P_{fin}, \beta |\ S\ | P_{in}, \alpha > \tag{12.11}$$

(α e β sono gli ulteriori numeri quantici necessari per specificare gli stati). Consideriamo il termine n-esimo della matrice S ed applichiamo una traslazione di $-x_1$. Se la Lagrangiana di interazione é invariante per traslazioni[1]

$$\mathcal{L}_I(x_1) = e^{i\mathbf{P}_\mu x_1^\mu} \mathcal{L}_I(0) e^{-i\mathbf{P}_\mu x_1^\mu} \tag{12.12}$$

$$\begin{aligned}
&< P_{fin}, \beta | T\left[\mathcal{L}_I(x_1)\mathcal{L}_I(x_2)\dots\mathcal{L}_I(x_n)\right] | P_{in}, \alpha >= \\
&=< P_{fin}, \beta | U^\dagger(-x_1) U(-x_1) T\left[\mathcal{L}_I(x_1)\mathcal{L}_I(x_2)\dots\mathcal{L}_I(x_n)\right] U^\dagger(-x_1) U(-x_1) | P_{in}, \alpha >= \\
&= e^{-i[(P_{in}-P_{fin})x_1]} < P_{fin}, \beta | T\left[\mathcal{L}_I(0)\mathcal{L}_I(x_2-x_1)\dots\mathcal{L}_I(x_n-x_1)\right] | P_{in}, \alpha >
\end{aligned} \tag{12.13}$$

Nell' eseguire l' integrale in (12.9) possiamo traslare le variabili di integrazione ($x_2 \to x_2 - x_1 = \zeta_2, x_3 \to x_3 - x_1 = \zeta_3, \dots$) ed otteniamo:

$$\begin{aligned}
&< P_{fin}, \beta |\ S^{(n)}\ | P_{in}, \alpha >= \int d^4x_1 e^{-i[(P_{fin}-P_{in})x_1]}\ . \\
&\cdot \frac{(i)^n}{n!} < P_{fin}, \beta |\ \int\ \dots \int\ d^4\zeta_2 \dots d^4\zeta_n\ T\left[\mathcal{L}_I(0)\mathcal{L}_I(\zeta_2)\dots\mathcal{L}_I(\zeta_n)\right]\ | P_{in}, \alpha >=
\end{aligned}$$

Quindi, in conclusione:

$$< P_{fin}, \beta |\ S\ | P_{in}, \alpha >= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_{fin} - P_{in}) \cdot F(P_{fin}, \beta, P_{in}, \alpha) \tag{12.14}$$

dove F é una funzione regolare delle sue variabili.

La relazione (12.14) esprime la conservazione del 4-momento in una teoria invariante per traslazioni, secondo la (12.12).

Possiamo trattare in maniera analoga tutte le leggi di conservazione che derivano dall' invarianza della Lagrangiana di interazione (quindi della matrice S) sotto trasformazioni continue.

[1] cioé dipende dalle coordinate solo tramite i campi. Questo esclude, ad esempio, che sia presente un campo classico, un numero-c funzione delle coordinate, che resterebbe inalterato per le trasformazione unitaria nella (12.12)

Questo é il caso, ad esempio, della legge di conservazione del momento angolare, quando $\mathcal{L}_I$ é invariante per rotazioni. Se:

$$e^{-i\alpha\mathbf{Q}} S e^{-i\alpha\mathbf{Q}} = S; \text{ ovvero}$$
$$[\mathbf{Q}, S] = 0$$

abbiamo anche, sugli autostati di $\mathbf{Q}$:

$$0 = < q' | \, [\mathbf{Q}, S] \, | q > = (q' - q) < q' | \, S \, | q >$$

ovvero, l'elemento di matrice S si deve annullare, a meno che non sia soddisfatta la legge di conservazione:

$$q' = q \tag{12.15}$$

12.3 Sezione d' urto e vita media

In processo di diffusione si parte da uno stato iniziale, $|i\rangle$, in cui un fascio di particelle viene inviato su un bersaglio fisso o, come nei cosiddetti *collisori*, su un altro fascio di particelle. A grande distanza dalla zona di interazione, un sistema di rivelatori produce un segnale quando viene rivelato uno dei possibili stati finali, $|f\rangle$.

Tipicamente, non si seleziona un singolo stato quantistico. In genere, i rivelatori non sono capaci di discriminare fra gli stati di un certo insieme (ad esempio, particelle con impulso compreso in dato volume $\Delta\mathbf{p}$ intorno ad un valore medio $\bar{\mathbf{p}}$). In questo caso, dobbiamo *sommare le probabilitá sugli stati finali* che non sono discriminati dall' apparato sperimentale. Similmente, lo stato iniziale puó essere una miscela incoerente di un certo insieme di stati, ad esempio un fascio non polarizzato contiene in egual proporzione i diversi stati di spin della particella proiettile. In questo caso, dobbiamo *mediare la probabilitá sugli stati iniziale.*

Per semplicitá consideriamo un esperimento a bersaglio fisso. Immaginiamo di mettere tutto il sistema in un volume, V, di sezione S e di inviare una sola particella-proiettile alla volta su un bersaglio costituito anch' esso da una sola particella. In condizioni stazionarie (rimpiazzando il bersaglio ed il proiettile dopo ogni collisione) abbiamo un flusso costante di eventi nei rivelatori, caratterizzato dalla *probabilitá per unitá di tempo*, W. É semplice convincersi che W deve essere pari al flusso di particelle-proiettile che arriva sul bersaglio moltiplicato per la probabilitá di interazione di un particella proiettile con la particella-bersaglio, P:

$$W = \Phi \cdot P;$$
$$\Phi = \rho \cdot S \cdot v; \; \rho = \frac{1}{V} \tag{12.16}$$

dove ρ é la densitá della particelle proiettile e v la sua velocitá. A sua volta, la probabilitá P deve essere inversamente proporzionale alla superficie S, se il fascio é uniformemente distribuito nella sezione trasversa:

$$P = \frac{\Delta\sigma}{S} \tag{12.17}$$

La quantitá $\Delta\sigma$ caratterizza la probabilitá di interazione ed ha le dimensioni di una superficie. $\Delta\sigma$ prende il nome di *sezione d'urto*: tutto va come se il bersaglio offrisse una superficie trasversa $\Delta\sigma$ ad un fascio di proiettili distribuiti casualmente sulla superficie S.

La sezione d' urto, naturalmente, dipende dalle condizioni iniziali (ad esempio dall' energia e dal tipo di particella- proiettile che scegliamo) e dalle particolari condizioni finali fissate dai nostri rivelatori. $\Delta\sigma$ é tutto quello che ci é dato di misurare su un dato processo di diffusione.

Rassumendo, troviamo:

$$\Delta\sigma = \frac{W}{\rho \cdot v} \tag{12.18}$$

Se indichiamo con T il tempo in cui si passa dallo stato iniziale ai prodotti finali (come nel caso di V, alla fine prenderemo il limite $T \to \infty$), abbiamo:

$$W = \frac{|\langle f|\ S\ |i\rangle|^2}{T} \tag{12.19}$$

e quindi:

$$\Delta\sigma = \frac{V|\langle f|\ S\ |i\rangle|^2}{T \cdot v} \tag{12.20}$$

Consideriamo il processo:

$$a\ +\ b\ \to\ 1 + 2 + \ldots + n_f \tag{12.21}$$

con stati iniziali e finali:

$$\begin{aligned} |i\rangle &= a_a^\dagger(\mathbf{p}_a) a_b^\dagger(\mathbf{p}_b)|0\rangle \\ |f\rangle &= a_1^\dagger(\mathbf{p}_1) a_2^\dagger(\mathbf{p}_2) \ldots a_{n_f}^\dagger(\mathbf{p}_{n_f})|0\rangle \end{aligned} \tag{12.22}$$

In una situazione invariante per traslazioni spazio-temporali, l' elemento di matrice S ha la forma (12.14) e nel calcolare la probabilitá W dobbiamo *fare il quadrato* della funzione delta di Dirac, un' operazione normalmente illegale. In questo caso, per V e T finiti, la funzione delta va sostituita da:

$$\int_\Gamma d^4x\ e^{-i[(P_f - P_i)x]} \tag{12.23}$$

dove Γ é la regione finita dello spazio tempo di 4-volume $V \cdot T$. É facile convincersi [2] che, nel limite di grandi V e T:

$$|\int_\Gamma d^4x\ e^{-i[(P_f - P_i)x]}|^2 \to V \cdot T \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \tag{12.25}$$

[2] Consideriamo per semplicitá il caso unidimensionale:

$$\int_{-T/2}^{+T/2} dt\ e^{i\omega t} = \frac{2}{\omega} sin(\frac{\omega T}{2}) \tag{12.24}$$

Se integriamo con una funzione di prova regolare, $f(\omega)$ e passiamo al limite $T \to \infty$, troviamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{2}{\omega} sin(\frac{\omega T}{2}) f(\omega) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{sin(x)}{x} f(\frac{2x}{T}) \to 2f(0)\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{sin(x)}{x} = 2\pi f(0)$$

ovvero, come atteso:

$$\frac{2}{\omega} sin(\frac{\omega T}{2}) \to (2\pi)\delta(t)$$

Troviamo, di qui:

$$\Delta\sigma = V^2(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f - P_i)\frac{1}{v}F(P_f, \ldots, P_i \ldots) \tag{12.26}$$

dove F é la funzione regolare definita nella (12.14) e i punti di sospensione indicano le altre variabili necessarie a descrivere il processo.

Ad ogni ordine finito nella teoria delle perturbazioni, la matrice S, (12.9), é un polinomio nei campi. Tra i vari termini, danno un elemento di matrice non nullo solo quelli che contengono i campi capaci di annichilare le particelle dello stato iniziale e creare quelle dello stato finale. Utilizzando le regole di commutazione o anticommutazione appropriate[3], possiamo portare questi campi ad operare sullo stato iniziale e finale, rispettivamente:

$$\begin{aligned}\langle 1,2,\ldots \mid S \mid a,b\rangle &= \int d^4x \int d^4x' \ldots \langle 1,2,\ldots \mid \chi_1^\dagger(x_1)\chi_2^\dagger(x_2)\ldots[\ldots]\,\chi_a(x_a)\chi_b(x_b) \mid a,b\rangle = \\ &= \langle 1,2,\ldots \mid (\chi_1^\dagger)^{(-)}(x_1)(\chi_2^\dagger)^{(-)}(x_2)\ldots[\ldots]\,\chi_a^{(+)}(x_a)\chi_b^{(+)}(x_b) \mid a,b\rangle \end{aligned} \tag{12.27}$$

i punti $x_1, x_2, \ldots$ sono una permutazione di $x, x', \ldots$, non necessariamente tutti diversi tra loro. Nella parentesi rimane un polinomio negli altri campi, fermo restando che il prodotto dei campi mostrati esplicitamente con quelli sottointesi deve formare una combinazione Lorentz- invariante.

Nello sviluppo dei campi χ in onde piane, contano solo i termini con gli operatori di distruzione o creazione appropriati agli stati iniziali e finali, quindi l' elemento di matrice contiene come fattori i corrispondenti coefficienti di normalizzazione:

$$N_i = \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{E_i V}} & \text{fermioni} \\ \\ \sqrt{\frac{1}{2\omega_i V}} & \text{bosoni} \end{cases} \tag{12.28}$$

ciascuno moltiplicato per un esponenziale Lorentz-invariante, $e^{i(px)}$, e per una soluzione dell' equazione d' onda (ad esempio uno spinore di Dirac) che ha le proprietá di trasformazione del campo originale. Questi ultimi fattori, moltiplicati con i campi all' interno delle parentesi nella (12.27), formano una combinazione Lorentz-invariante.

Introducendo la somma sugli stati finali corrispondente alla risoluzione dei rivelatori, troviamo, in conclusione:

$$\Delta\sigma = V^2\left[\sum_f (2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f - P_i)\left(\Pi_{i=1,2,\ldots}N_i^2\right)|M_{i\to f}|^2\right]\frac{(N_aN_b)^2}{v} \tag{12.29}$$

Consideriamo adesso il quadrato e integriamolo su una funzione di prova:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{4}{\omega^2} sin^2(\frac{\omega T}{2})\; f(\omega) = 2T\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{sin^2 x}{x^2} f(\frac{x}{T}) \to 2Tf(0))\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{sin^2 x}{x} = T(2\pi)f(0)$$

ovvero:

$$|\int_{-T/2}^{+T/2} dt\; e^{i\omega t}|^2 \to T\cdot(2\pi)\delta(t)$$

[3]come ricordato nella Sez. 12.1, gli operatori di campo che compaiono nella formula di Dyson sono campi liberi, i cui commutatori o anticommutatori sono numeri-c calcolabili

$M_{i\to f}$ prende il nome di *ampiezza di Feynman* del processo ed é, per come l' abbiamo derivata, *relativisticamente invariante*. Il fattore V^2 che deriva dalla (13.165) é cancellato dai fattori $1/V$ nella normalizzazione degli stati iniziali. I fattori $1/V$ nella normalizzazione degli stati finali, invece, sono compensati dai corrispondenti fattori nello spazio delle fasi di ciascuna particella finale:

$$\sum_f \Pi_{i=1,2,\ldots} N_i^2 \ (\ldots) = \frac{1}{(2\pi)^{3n_f}} \int \frac{d^3p_1}{2E_1}\frac{d^3p_2}{2E_2} \ldots \left(\Pi_{i=1,2,\ldots} n_i^2\right)(\ldots) \tag{12.30}$$

dove abbiamo posto $2E_iN_i^2 = n_i^2 = 2m_i,\ 1$ per fermioni o bosoni, rispettivamente. Da notare che la misura di integrazione sul momento di ciascuna particella é anch' essa invariante per trasformazioni[4] di $L_+^\uparrow$, come si vede dall' eguaglianza:

$$\frac{d^3p}{2E(p)} = d^4p\ \delta(p^2 - m^2)\theta(p^0) \tag{12.31}$$

Raccogliendo le osservazioni fatte, arriviamo all' espressione ($E_b = m_b$ nella situazione di bersaglio fisso):

$$d\sigma = \frac{(n_a n_b)^2}{v\cdot(4E_a m_b)}(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f - P_i)\left[\Pi_i \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3\ 2E_i} n_i^2\right]\ |M_{i\to f}|^2 \tag{12.32}$$

Possiamo vedere che anche il fattore del flusso é Lorentz invariante, riscrivendo:

$$v\cdot(E_a m_b) = |\mathbf{p}_a| m_b = \sqrt{(E_a m_b)^2 - m_a^2 m_b^2} = \sqrt{(p_a\cdot p_b)^2 - p_a^2 p_b^2} \tag{12.33}$$

quindi, per ispezione diretta della (12.32), arriviamo all' importante conclusione:

- la sezione d' urto é un invariante relativistico.

La relazione (12.33) ci permette di calcolare la sezione d' urto in sistemi di riferimento in cui entrambe le particelle iniziali sono in moto, come avviene nei moderni collisori. In questo caso, un sistema particolarmente utile é il sistema del centro di massa ($\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b = 0$) che, per collisioni tra fasci simmetrici, coincide con il sistema del laboratorio. Assumendo anche, per semplicitá, particelle a e b con massa uguale, troviamo, in questo caso:

$$\sqrt{(p_a\cdot p_b)^2 - p_a^2 p_b^2} = 2|\mathbf{p}|E = 2vE^2 = |v_a - v_b|\ E^2 \tag{12.34}$$

il flusso é determinato dalla velocitá relativa tra le due particelle (che puó essere anche maggiore di c). La sezione d' urto, nel caso generale di particelle con velocitá v_a e v_b, é data da:

$$d\sigma = \frac{(n_a n_b)^2}{|v_a - v_b|\cdot(4E_a E_b)}(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f - P_i)\left[\Pi_i \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3\ 2E_i} n_i^2\right]\ |M_{i\to f}|^2 \tag{12.35}$$

[4]che lasciano invariato il segno di p^0, essendo p^μ di tipo tempo o di tipo luce.

Vita media L' interazione puó causare il decadimento di particelle, che sarebbero stabili nella teoria libera. La probabilitá di decadimento per unitá di tempo in uno stato $|f\rangle$ é data da:

$$\Gamma(f) = \frac{|\langle f|\ S\ |a\rangle|^2}{T} \tag{12.36}$$

Sommando su tutti gli stati finali si trova la *probabilitá di decadimento* totale:

$$\Gamma = \sum_f \Gamma(f) \tag{12.37}$$

Per un dato stato finale f, il rapporto:

$$B(f) = \frac{\Gamma(f)}{\Gamma} \tag{12.38}$$

rappresenta la probabilitá di trovare lo stato f nei prodotti del decadimento e prende il nome di *rapporto di decadimento* del canale f (in inglese *branching ratio* o *branching fraction*). Evidentemente:

$$\sum_f B(f) = 1 \tag{12.39}$$

Per un sistema di N particelle, la variazione del numero presente al tempo t é data da:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\Gamma \cdot N(t)$$

da cui:

$$N(t) = N(0)e^{-\Gamma t}$$

La *vita media* della particella instabile é quindi:

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}. \tag{12.40}$$

Γ prende anche il nome di Larghezza totale della particella[5]. Consideriamo il caso di una interazione invariante per traslazioni spazio-temporale. Procedendo come prima troviamo, nel sistema di quiete della particella instabile:

$$d\Gamma(a \to 1 + 2 + \cdots + n_f) = \frac{1}{(2\pi)^{3n_f}} \frac{n_a^2}{2m_a} \Pi_i \frac{d^3p_i}{2E_i} n_i^2 |M(a \to 1 + 2 + \cdots + n_f)|^2 \tag{12.41}$$

Problema. Dimostrare la relazione (12.31).

[5]il nome trae origine dal fatto che uno stato instabile ha necessariamente una indefinizione nell' energia data dalla relazione di Heisenberg: $\Delta E \Delta t \simeq \hbar$. Se prendiamo $\Delta t = \tau$ troviamo $\Delta E = \hbar/\tau = \Gamma$, quindi Γ rappresenta la Larghezza nella distribuzione dell' energia dello stato instabile.

Capitolo 13

APPLICAZIONI: QED

Il calcolo degli elementi della matrice S ad un dato ordine della teoria delle perturbazioni, eq. (12.9), si effettua con il metodo generale dei *grafici di Feynman*, che verrá illustrato nel seguito (Vol. II, Elettrodinamica Quantistica).

Per i processi fino al secondo ordine, che consideriamo in questo e nel prossimo Capitolo, gli elementi di matrice si calcolano per semplice ispezione e non avremo bisogno del formalismo generale, essenziale per il calcolo delle correzioni di ordine superiore e per la rinormalizzazione. L' attenzione é rivolta piuttosto a mostrare come le idee della seconda quantizzazione si possoino mettere a confrionto con gli esperimenti per i processi piú semplici, che hanno avuto un ruolo essenziale nello sviluppo della teoria delle particelle elementari.

La formula di Dyson, (12.9), fa intervenire i prodotti tempo-ordinati dei campi, le funzioni di propagazione, i propagatori in breve.

Abbiamo calcolato nelle Sezioni precedenti i propagatori del campo scalare e del campo di Dirac. Il calcolo della funzione di propagazione nella (13.39) richiede la quantizzazionedel campo elettromagnetico che rinviamo al prossimo volume (Elettrodinamica Quantistica). Tuttavia possiamo ricorrere ad una scorciatoia.

Il propagatore del fotone. Abbiamo visto che la funzione di propagazione quantistica del campo scalare coincide con la funzione di Green dell' equazione di Klein-Gordon classica, con le condizioni al contorno di Feynman. Estendendo per analogia al campo elettromagnetico, possiamo utilizzare i risultati del Capitolo 5. Come si vede dalla (5.22), la funzione di Green cercata é:

$$iD_F^{\mu\nu}(q) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \tag{13.1}$$

13.1 Diffusione in un campo coulombiano classico

Consideriamo la diffusione di un elettrone in un campo esterno statico. Il quadripotenziale corrispondente si può scrivere

$$A^\mu(x) = A^\mu(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, A^\mu(\mathbf{q})\, \mathrm{e}^{i\mathbf{qx}}\ . \tag{13.2}$$

e lo sviluppo perturbativo per la matrice S ha la forma

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int d^4x_1 ... d^4x_n \; T\{[: \bar{\psi}(x_1) \not{A}(x_1) \psi(x_1) :] ... [: \bar{\psi}(x_n) \not{A}(x_n) \psi(x_n) :]\} \; , \tag{13.3}$$

dove ψ è il campo che descrive l' elettrone, T è l'operatore di ordinamento temporale.

Al primo ordine nella lagrangiana d'interazione la (13.3) si riduce alla

$$S = ie \int d^4x : \bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x) : \; . \tag{13.4}$$

Il processo fisico descritto dalla matrice S definita dalla (13.4) è rappresentato schematicamente dal diagramma di Feynman della Fig. 13.1. L'interazione col campo esterno provoca la transizione dell'elettrone dallo stato iniziale $|i\rangle = |pr\rangle$ allo stato finale $|f\rangle = |p'r'\rangle$, dove $p \equiv (E, \mathbf{p})$ e $p' \equiv (E', \mathbf{p'})$ sono i quadri-impulsi ed r e r' le proiezioni dello spin.

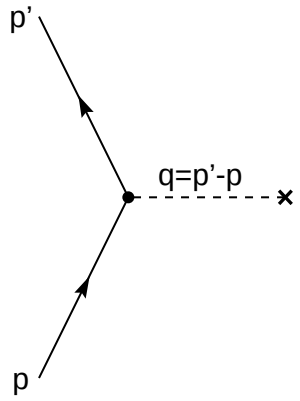

Figura 13.1:

L'elemento di matrice S corrispondente ha la forma

$$\begin{aligned} S_{if} &= \langle f|S|i\rangle = ie \left(\frac{m}{VE}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE'}\right)^{1/2} \int d^4x \; \mathrm{e}^{i(p'-p)x} \; \bar{u}_{r'}(\mathbf{p'}) \not{A}(x) u_r(\mathbf{p}) \\ &= ie \left(\frac{m}{VE}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE'}\right)^{1/2} \int d^3x \; \mathrm{e}^{i(\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{p'})\mathbf{x}} \int dt \; \mathrm{e}^{i(E'-E)t} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \bar{u}_{r'}(\mathbf{p'}) \not{A}(\mathbf{q}) u_r(\mathbf{p}) \\ &= (2\pi) \; \delta(E - E') \; \left(\frac{m}{VE}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE'}\right)^{1/2} \; \mathcal{M}_{if} \; , \end{aligned} \tag{13.5}$$

dove V è il volume di normalizzazione e

$$\mathcal{M}_{if} = ie \; \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}) \not{A}(\mathbf{p'} - \mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) \; . \tag{13.6}$$

Si noti che nella (13.5) compare solo la funzione δ associata alla conservazione dell'energia. L'impulso non è conservato, perchè la presenza della sorgente statica che genera il campo esterno

rompe l'invarianza per traslazioni. La relazione che esprime la conservazione dell'energia, che implica

$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| \ , \tag{13.7}$$

mostra chiaramente che l'impulso assorbito dalla sorgente viene trascurato.

La sezione d'urto differenziale del processo si ottiene dalle formule date nel Cap. 12:

$$d\sigma = \frac{V}{v} \ W_{if} \ \frac{V d^3 p'}{(2\pi)^3} \ \ , \tag{13.8}$$

dove W_{if} è la probabilità di transizione per unità di tempo

$$W_{if} = \frac{|S_{if}|^2}{\mathrm{T}} = (2\pi) \ \delta(E - E') \left(\frac{m}{VE}\right)^2 |\mathcal{M}_{if}|^2 \ , \tag{13.9}$$

T è il tempo di interazione. Usando le equazioni (13.8) e (13.9) e la relazione

$$|\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}| E' dE' \tag{13.10}$$

dalla (13.8) otteniamo

$$d\sigma = \frac{VE}{|\mathbf{p}|} \ (2\pi) \ \delta(E - E') \ \left(\frac{m}{VE}\right)^2 |\mathcal{M}_{if}|^2 \frac{V}{(2\pi)^3} \ |\mathbf{p}| E' dE' d\Omega_{p'} \ . \tag{13.11}$$

Per arrivare all'espressione della sezione d'urto differenziale, la probabilità che l' elettrone venga diffuso nell'elemento di angolo solido $d\Omega_{p'}$, dobbiamo integrare sull'energia usando la funzione δ, col risultato

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2 |\mathcal{M}_{if}|^2 = \left(\frac{me}{2\pi}\right)^2 |\bar{u}_{r'}(\mathbf{p}') \not{A}(\mathbf{q}) u_r(\mathbf{p})|^2 \ , \tag{13.12}$$

dove $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$.

Consideriamo ora il caso in cui il campo esterno sia il campo Coulombiano generato da un nucleo atomico, che supponiamo puntiforme. Abbiamo quindi:

$$A^\mu(\mathbf{x}) \equiv \left(\frac{Z}{4\pi} \frac{e}{|\mathbf{x}|}, 0, 0, 0\right) \ \ , \tag{13.13}$$

con trasformata di Fourier, FT, data da (cfr. Problema 1):

$$A^\mu(\mathbf{q}) \equiv \left(Z \frac{e}{|\mathbf{q}|^2}, 0, 0, 0\right) \ \ . \tag{13.14}$$

Sostituendo la (13.14) nella (13.12), sommando sulle proiezioni dello spin dell'elettrone nello stato finale e mediando su quelle dell'elettrone nello stato iniziale otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} &= \left(\frac{me}{2\pi}\right)^2 Z^2 \ \frac{e^2}{|\mathbf{q}|^4} \frac{1}{2} \sum_{rr'} |\bar{u}_{r'}(\mathbf{p}') \gamma^0 u_r(\mathbf{p})|^2 \\ &= \frac{(2m\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4} \ \frac{1}{(2m)^2} \ \frac{1}{2} Tr\left[(\not{p}' + m)\gamma^0 (\not{p} + m)\gamma^0\right] \ \ , \end{aligned} \tag{13.15}$$

dove $\alpha = e^2/4\pi$ e le somme su r e r' sono state effettuate usando le relazioni di completezza soddisfatte dagli spinori di Dirac. Il calcolo delle tracce nella (13.15) si esegue facilmente utilizzando il risultato

$$\begin{aligned} Tr\left[(\not{p}' + m)\gamma^0(\not{p} + m)\gamma^0\right] &= Tr(\not{p}'\gamma^0\not{p}\gamma^0) + m^2 Tr(\gamma^0\gamma^0) \\ &= 4p'_\mu p_\nu(2g^{\mu 0}g^{\nu 0} - g^{\mu\nu}g^{00}) + 4m^2 \\ &= 4[2EE' - (pp') + m^2] = 4[EE' + (\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}) + m^2]\ . \end{aligned} \tag{13.16}$$

Si ottiene così

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} &= 2\,\frac{(\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4}\,[E^2 + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}') + m^2] \\ &= 2\,\frac{(\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4}\,2E^2\left(1 - \frac{|\mathbf{p}|^2}{E^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2\,\frac{(\alpha Z^2)}{|\mathbf{q}|^4}\,2E^2\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\ , \end{aligned} \tag{13.17}$$

dove v e θ sono, rispettivamente, la velocità e l'angolo di diffusione dell'elettrone, cioè l'angolo compreso tra i vettori $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$. Usando la relazione

$$|\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 = 2|\mathbf{p}|^2(1 - \cos\theta) = 4E^2v^2\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{13.18}$$

possiamo riscrivere la (13.18) nella forma ottenuta originariamente da Mott

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} = \frac{(\alpha Z)^2}{4E^2v^4\sin^4(\theta/2)}\,\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\ . \tag{13.19}$$

La sezione d'urto di Mott descrive la diffusione elastica di elettroni da nuclei all'ordine più basso nella costante di struttura fine α. Ovviamente, questa approssimazione non è applicabile nel caso di nuclei molto pesanti, per i quali la costante di accoppiamento $Z\alpha$ diventa troppo grande.

Nel limite non relativistico, cioè per $v \ll 1$ e $E \sim m$, dalla (13.21) riotteniamo la famosa sezione d'urto di Rutherford

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} = \frac{(\alpha Z)^2}{4m^2v^4\sin^4(\theta/2)}\ , \tag{13.20}$$

la cui misura sperimentale ha condotto allo sviluppo del modello planetario dell'atomo.

Nel limite ultrarelativistico, $v \simeq 1$ la sezione d' urto di Mott diventa:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}}|_{v=1} = \frac{(\alpha Z)^2\cos^2(\theta/2)}{4E^2v^4\sin^4(\theta/2)}. \tag{13.21}$$

la sezione d' urto di Mott ultra-relativistica si annulla per diffusione all' indietro dell' elettrone, $\theta = \pi$.

Nota. Siamo riusciti a ricavare la sezione d'urto di Rutherford da un calcolo al primo ordine in α. Questo è sorprendente, poichè la stessa espressione si ottiene dalla Meccanica Classica come risultato esatto. La spiegazione di questa apparente contraddizione si deve a Dalitz, il quale dimostrò che, nel limite non relativistico, l'inclusione delle correzioni di ordine superiore ha come uninco risultato la comparsa di un fattore di fase nell'ampiezza, e lascia quindi invariata la sezione d'urto.

Divergenza coulombiana. L' integrale sull' angolo solido della sezione d' urto differenziale di Mott, (13.21) diverge per $\theta = 0$, impedendoci di definire la sezione d' urto totale. Infatti, per piccoli valori di θ:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}}\, d\cos\theta \simeq 4\frac{\alpha Z^2}{4E^2v^4\theta^4}\, \theta d\theta \tag{13.22}$$

L' origine di questa divergenza si puó far risalire all' andamento singolare, per $|\mathbf{q}| \to \mathbf{0}$ della FT del campo coulombiano, eq (13.14), ovvero all' andamento troppo lentamente decrescente del campo coulombiano stesso, per $|\mathbf{x}| \to \infty$, eq. (13.13). Dovuto a questa lenta decrescita, anche le particelle che passano lontanissime dalla carica nell' origine ne sentono l' effetto: gli stati asintotici, nella rappresentazione di interazione, non tendono veramente ad una costante e questo ci impedisce di definire rigorosamente la matrice S.

Fortunatamente, in Natura, non esistono cariche elettriche isolate. La carica positiva di ciascun nucleo, nella materia ordinaria, é schermata dalla caricha negativa degli elettroni atomici. Anche in un plasma ionizzato, dovuto alla lunga portata delle forze elettrostatiche, le cariche positive coordinano intorno a loro le cariche negative e, in media, il plasma é elettricamente neutro. Il risultato é che l' integrando nella (13.22) é smorzato per piccoli valori di θ.

Ricordiamo che la FT in $|\mathbf{q}|$ é sensibile ai valori della funzione per $|\mathbf{x}| \simeq |\mathbf{q}|^{-\mathbf{1}}$. Quindi, se consideriamo la diffusione su un atomo, la presenza degli elettroni esterni si fará sentire ai valori di $|\mathbf{q}|$ tali che:

$$|\mathbf{q}|\mathbf{R} \leq \mathbf{1} \tag{13.23}$$

dove R vé il raggio atomico, ovvero per:

$$\theta \leq \frac{1}{REv} \tag{13.24}$$

In questa regione di θ la sezione d' urto differenziale é smorzata dal fatto che l' elettrone vede una carica totale via via decrescente e la sezione d' urto totale é finita.

Fattore di forma non-relativistico. Possiamo migliorare l' approssimazione di carica puntiforme del nucleo introducendo un *fattore di forma.*

Supponiamo che la densitá di carica all' interno del nucleo sia descritta da una funzione $Ze\rho(\mathbf{x})$. La densitá di carica deve decrescere rapidamente all' esterno del nucleo, per $|\mathbf{x}| > \mathbf{R_N}$ e soddisfare la condizione di normalizzazione:

$$\int \rho(\mathbf{x})\mathbf{d^3x} = \mathbf{1} \tag{13.25}$$

in modo che la carica totale sia ancora data da Ze. Il potenziale elettrostatico del nucleo é ora dato da:

$$A^0(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{Ze}}{\mathbf{4}\pi} \int \mathbf{d^3y} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \tag{13.26}$$

La sua FT é data da (cfr. Problema 1):

$$\begin{aligned} A^0(\mathbf{q}) &= \frac{\mathbf{Ze}}{|\mathbf{q}|}\, \mathbf{F}(\mathbf{q}); \\ F(\mathbf{q}) &= \int \mathbf{d^3x}\ \mathbf{e^{iq\cdot x}} \rho(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{13.27}$$

Corrispondentemente, la sezione d' urto di Mott diventa:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}} = \frac{\alpha Z^2}{4E^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}\, |F(\mathbf{q})|^{\mathbf{2}} \left(\mathbf{1} - \mathbf{v^2} \sin^{\mathbf{2}} \frac{\theta}{\mathbf{2}} \right) \tag{13.28}$$

Problema 1. Calcolare la FT del potenziale elettrostatico dovuto alla distribuzione di carica $Ze\rho(\mathbf{x})$.

Dalle relazioni

$$\mathbf{E} = -\nabla \mathbf{A^0} = -\nabla \mathbf{\Phi}; \ \ \nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{Ze}\rho$$

si trova:

$$-\nabla^2 \Phi = \rho \tag{13.29}$$

Moltiplichiamo per $|\mathbf{q}|^{\mathbf{2}}$ la FT del potenziale elettrostatico. Usando la (13.29) troviamo:

$$|\mathbf{q}|^{\mathbf{2}}\ \mathbf{A^0}(\mathbf{q}) = |\mathbf{q}|^{\mathbf{2}} \int \mathbf{d^3x}\ \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\ \mathbf{e^{iq\cdot x}} = -\int \mathbf{d^3x}\ \nabla^{\mathbf{2}} \mathbf{\Phi}\ \mathbf{e^{iq\cdot x}} = \mathbf{Ze} \int \mathbf{d^3x}\ \rho(\mathbf{x})\ \mathbf{e^{iq\cdot x}}$$

da cui:

$$A^0(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{Ze}}{|\mathbf{q}|^{\mathbf{2}}}\, \mathbf{F}(\mathbf{q}); \ \ \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \int \mathbf{d^3x}\ \rho(\mathbf{x})\ \mathbf{e^{iq\cdot x}} \tag{13.30}$$

13.2 La formula di Rosenbluth

Nella diffusione di elettroni su protoni, quando l' energia dell' elettrone diventa dell' ordine del GeV, non é piú possibile trattare il protone come una sorgente statica, ma dobbiamo includere una descrizione pienamente quantistica del protone stesso. Per fare questo, estendiamo la lagrangiana di interazione del campo elettromagnetico secondo le linee illustrate nel Cap. 10, introducendo la corrente elettromagnetica del protone:

$$\mathcal{L}_{e.m.} = eA_\mu(x) J^\mu_{tot}(x); \ \ J^\mu_{tot}(x) = J^\mu_e(x) + J^\mu_p(x) \tag{13.31}$$

Per la corrente dell' elettrone si prende, come prima:

$$J^\mu_e(x) = - : \bar{\psi}_e(x) \gamma^\mu \psi_e(x) : \tag{13.32}$$

Per quanto riguarda la corrente del protone, il suo elemento di matrice tra stati di protone viene parametrizzata in termini dei fattori di forma introdotti nel Cap. 10:

$$< p'|J^\mu_p(0)|p >= \sqrt{\frac{M^2}{V^2 E_{p'} E_p}}\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p',p)u(p);$$
$$\Gamma^\mu(p',p) = F_1(q^2)\gamma_\mu + F_2(q^2)\frac{i}{2M}\sigma_{\mu\nu}q^\nu \tag{13.33}$$

con le condizioni di normalizzazione:

$$F_1(0) = +1; \;\; F_2(0) = \kappa_p \tag{13.34}$$

dove κ_p é il momento magnetico anomalo.

All' ordine piú basso della teoria delle perturbazioni, la diffusione elettrone-protone, é descritta dal termine di secondo ordine :

$$S^{(2)} = \frac{(ie)^2}{2}\int d^4x \; d^4y \; T\left[A_\mu(x)J^\mu_{tot}(x)A_\nu(y)J^\nu_{tot}(y)\right] =$$
$$= (ie)^2 \int d^4x \; d^4y \; T\left[A_\mu(x)J^\mu_e(x)A_\nu(y)J^\nu_p(y)\right] \; + \; \ldots \tag{13.35}$$

Abbiamo scritto esplicitamenti solo i termini del T-prodotto che hanno i giusti operatori di annichilazione e creazione per distruggere le particelle iniziali e creare le particelle finali, riassumendo gli altri, che sono inessenziali, nei punti di sospensione.

Elementi di matrice. Come detto in precedenza, gli operatori che compaiono nella (13.35) soddisfano alle equazioni del moto libere. Quindi campi che corrispondono a particelle diverse commutano o anticommutano tra loro, a seconda della statistica cui obbediscono. Inoltre, gli stati esterni sono il prodotto tensoriale degli stati delle diverse particelle, ad esempio:

$$|e,p,0_\gamma >= a^\dagger(e)a^\dagger(p)|0 >= |e> |p> |0_\gamma >= a^\dagger(e)|0_e > a^\dagger(p)|0_p > |0_\gamma >$$

dove abbiamo indicato col nome delle diverse particelle i loro momenti e con, ad esempio, $|0_e >$ lo stato con zero elettroni, essendo naturalmente:

$$|0 >= |0_e, 0_p, 0_\gamma >= |0_e > |0_p > |0_\gamma >$$

La corrente di ciascuna particella opera solo sugli stati corrispondenti.

In conclusione, possiamo portare le correnti fuori del T-prodotto e scrivere:

$$< f|S|i >=$$
$$= (ie)^2 \int d^4x \; d^4y \;\; < e'|J^\mu_e(x)|e > < 0_\gamma|T\left[A_\mu(x)A_\nu(y)\right]|0_\gamma > < p'|J^\nu_p(y)|p > \tag{13.36}$$

La Fig. 13.2 (a) dá un' immagine nello spazio-tempo del processo di diffusione. L' elettrone iniziale si propaga fino ad un punto x dove viene distrutto dalla corrente, che crea nello stesso punto l' elettrone finale. Sempre in x viene emesso, ovvero assorbito, un fotone che si propaga

dal punto x al punto y, ovvero da y ad x, mentre nel punto y la corrente del protone cambia il protone iniziale in quello finale. L' ampiezza di propagazione del fotone tra x ed y é data dal T-prodotto sul vuoto dei campi elettromagnetici e il prodotto dei tre fattori nell' integrale della (13.36) rappresenta l' ampiezza complessiva della *storia* che orrisponde ai valori di x ed y.

L' osservazione delle particelle finali non determina i punti x ed y dove avviene l' interazione quindi, secondo i principi della Meccanica Quantistica, dobbiamo sommare sulle ampiezze di ciascuna *storia* per avere l' ampiezza totale del processo, integrando sui valori di x ed y.

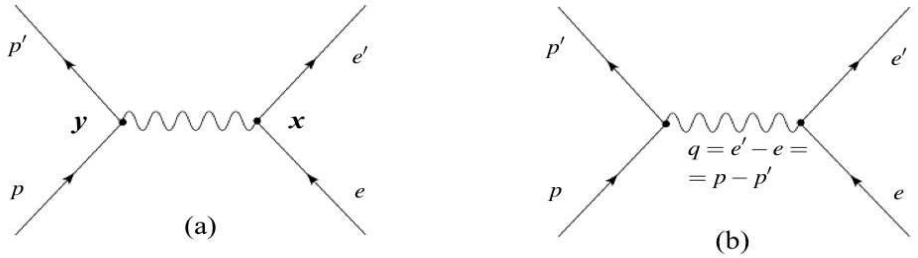

Figura 13.2: Rappresentazione grafica dell' ampiezza di diffusione elettrone-protone nello spazio tempo, (a), e nello spazio dei momenti, (b).

Procedendo come nella Sez. precedente troviamo:

$$< e'|J_e^\mu(x)|e >= e^{i(e'-e)x}\sqrt{\frac{m_e^2}{V^2E_eE_{e'}}}(-1)u(e')\gamma^\mu u(e) \tag{13.37}$$

e similmente:

$$< p'|J_p^\nu(y)|p >= e^{i(p'-p)y}\sqrt{\frac{M^2}{V^2E_pE_{p'}}}\bar{u}(p')\Gamma^\nu(p',p)u(p) \tag{13.38}$$

Usando l' invarianza per traslazioni del vuoto nella funzione di propagazione del campo elettromagnetico, troviamo infine:

$$\begin{aligned} < f|S|i >= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p'+e'-p-e)\sqrt{\frac{m_e^2}{V^2E_eE_{e'}}}\sqrt{\frac{M^2}{V^2E_pE_{p'}}}\times \\ \times\ e^2\ \bar{u}(e')\gamma^\mu u(e)\ i(D_F)_{\mu\nu}(p-p')\ \bar{u}(p')\Gamma^\nu(p',p)u(p) \end{aligned} \tag{13.39}$$

dove abbiamo posto, secondo la (13.1):

$$i(D_F)_{\mu\nu}(q) = \int d^4x\ e^{-iqx} < 0|T\left[A_\mu(x)A_\nu(0)\right]|0 >= \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2+i\epsilon} \tag{13.40}$$

Il risultato (13.39) si puó rappresentare graficamente come nella Fig. 13.2 (b). Dai vertici emergono le particelle iniziali e finali, rappresentate ciascuna da uno spinore di Dirac (u per fermione entrante, $\bar{u}$ per fermione uscente) e dal corrispondente fattore di normalizzazione. L' interazione é rappresentata da un fattore $-ie\gamma$ ovvero $ie\Gamma$ per elettrone e protone. Al propagatore del fotone é associato il momento $q = p - p' = e' - e$ in modo tale che il 4-momento si conserva ad ogni vertice.

Sezione d' urto differenziale. Seguendo le formule del Capitolo precedente, la sezione d' urto differenziale si scrive:

$$d\sigma = \frac{1}{4}\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(p' + e' - p - e) \times$$
$$\times\ \frac{m_e^2 M^2}{E_e E_{e'} E_p E_{p'}} \frac{d^3p' d^3e'}{(2\pi)^6} \frac{e^4}{(q^2)^2}\ H_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \tag{13.41}$$

Il fattore 1/4 viene dalla media sugli spin iniziali ed abbiamo posto:

$$H_{\mu\nu} = \sum_{r,s} \bar{u}_r(p')\Gamma^\mu u_s(p)\bar{u}_s(p)\Gamma^\nu u_r(p') =$$
$$= Tr\left[\frac{(\not{p} + M)}{2M}\Gamma^\nu \frac{(\not{p}' + M)}{2M}\Gamma^\mu\right] = \frac{h_{\mu\nu}}{4M^2} \tag{13.42}$$

$$L_{\mu\nu} = \sum_{p,q} \bar{u}_p(e')\gamma^\mu u_q(e)\bar{u}_q(e)\gamma^\nu u_p(e') =$$
$$= Tr\left[\frac{\not{e}}{2m_e}\gamma^\nu \frac{\not{e}'}{2m_e}\gamma^\mu\right] = \frac{l_{\mu\nu}}{4m_e^2} \tag{13.43}$$

Qui e nel seguito trascuriamo, nei numeratori, la massa dell' elettrone.

Per ottenere la sezione d' urto differenziale nelle variabili dell' elettrone finale, che sono quello che usualmente si osserva, dobbiamo integrare sul momento del protone finale utilizzando la funzione delta tridimensionale della conservazione della quantitá di moto, che fissa:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{e} - \mathbf{e}' \tag{13.44}$$

La conservazione dell' energia fissa inoltre il valore dell' energia dell' elettrone finale. L' argomento della funzione delta dell' energia nella (13.49) é:

$$f(E_{e'}) = E_{e'} + E_{p'} - E_e - M =$$
$$= E_{e'} + \sqrt{M^2 + E_{p'}^2 - 2E_{e'}E_e\cos\theta + E_e^2} - E_e - M \tag{13.45}$$

con derivata rispetto ad $E_{e'}$ pari a:

$$\frac{\partial f}{\partial E_{e'}} = \frac{ME_e}{E_{e'}E_{p'}} \tag{13.46}$$

Usando la relazione:

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|(\partial f/\partial x)_{x_0}|}\ \delta(x - x_0);\ f(x_0) = 0 \tag{13.47}$$

e introducendo la costante di struttura fine:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \tag{13.48}$$

troviamo:

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{16q^4}\left(\frac{E_{e'}}{E_e}\right)^2 \frac{X}{M^2}\, d\Omega \tag{13.49}$$

dove

$$X = l_{\mu\nu}h^{\mu\nu} \tag{13.50}$$

e dΩ l' angolo solido dell' elettrone finale.

Variabili cinematiche. Nel sistema di quiete del protone, il processo é descritto dall' energia dell' elettrone iniziale e dall' angolo di diffusione dell' elettrone finale, θ. In alternativa possiamo usare il momento trasferito,

$$q^2 = (p - p')^2 = (e' - e)^2 \tag{13.51}$$

ovvero l' energia dell' elettrone finale, $E_{e'}$. Dalla sua definizone, troviamo:

$$q^2 = 2E_eE_{e'}(1 - \cos\theta) = 4E_eE_{e'}\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{13.52}$$

In genere, si indica con W^2 il quadrato della massa del sistema che rincula sull' elettrone finale. Nel processo diffusione elastica che stiamo cosnsiderando deve essere:

$$W^2 = M^2 = (p + e - e')^2 = M^2 + q^2 + 2M(E_e - E_{e'})$$

ovvero:

$$E_{e'} = E_e + \frac{q^2}{2M}$$

e quindi, usando la (13.52):

$$E_{e'} = \frac{E_e}{1 + \frac{2E_e}{M}\cos\theta} \tag{13.53}$$

Tracce. Dobbiamo calcolare:

$$h_{\mu\nu} = Tr\left[(\not{p} + M)\Gamma^\nu(\not{p}' + M)\Gamma^\mu\right] \tag{13.54}$$

Se usiamo l' espressione (13.33), risultano, nella traccia, fino a sei matrici gamma. In alternativa, possiamo usare di nuovo la Gordon decomposition, (10.25), ed esprimere la corrente del protone come combinazione di γ^μ e di:

$$Q^\mu = (p + p')^\mu. \tag{13.55}$$

Troviamo:

$$\begin{aligned} &\Gamma(p', p) = A(q^2)\ \gamma^\mu + B(q^2)\ \frac{Q^\mu}{2M}; \\ &A = F_1 + F_2;\ \ B = -F_2. \end{aligned} \tag{13.56}$$

Con questa posizione, la traccia (13.54) si calcola facilmente, con il risultato:

$$h_{\mu\nu} = 2\left\{Q^\mu Q^\nu \left[(A+B)^2 - \frac{q^2}{4M^2}B^2\right] - \Pi^{\mu\nu}(q)A^2 \right\}$$
$$\Pi^{\mu\nu}(q) = q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu} \tag{13.57}$$

La traccia dell' elettrone si ottiene dalla (13.57) con le ovvie sostituzioni:

$$Q^\mu \ \rightarrow \ E^\mu = (e+e')^\mu; \ \ M \ \rightarrow m_e \simeq 0;$$
$$A \ \rightarrow \ 1, \ \ B \ \rightarrow \ 0 \tag{13.58}$$

$$l_{\mu\nu} = 2\left[Q^\mu Q^\nu - \Pi^{\mu\nu}(q)\right]$$

In conclusione, troviamo:

$$X = 4\left\{\left[(Q_\mu E^\mu)^2 + q^2 Q^2\right] \ \left[(A+B)^2 - \frac{q^2}{4M^2}B^2\right] + 2(q^2)^2 \ A^2\right\}$$

Dalle equazioni precedenti possiamo calcolare esplicitamente[1]:

$$\left[(Q_\mu E^\mu)^2 + q^2 Q^2\right] = 4M^2(E_e + E_{e'})^2 + q^2(4M^2 - q^2) =$$
$$= 16M^2 E_e(E_e + \frac{q^2}{2M}) + 4M^2 q^2 = 16M^2 E_e E_{e'} \cos^2\frac{\theta}{2};$$

Ponendo infine:

$$2(q^2)^2 = 8(-q^2)E_e E_{e'} \sin^2\frac{\theta}{2}$$

troviamo:

$$\frac{X}{M^2} = 64 E_e E_{e'} \cos^2\frac{\theta}{2}\left\{\left(F_1^2 - \frac{q^2}{4M^2} \ F_2^2\right) + \frac{-q^2}{2M^2} \ (F_1+F_2)^2 \ \tan^2\frac{\theta}{2}\right\} \tag{13.59}$$

Sostituendo nella (13.49), otteniamo la *formula di Rosenbluth*:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2\cos^2\frac{\theta}{2}}{4E_e^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\left(\frac{E_{e'}}{E_e}\right) \times$$
$$\times\left\{\left(F_1^2 - \frac{q^2}{4M^2} \ F_2^2\right) + \frac{-q^2}{2M^2} \ (F_1+F_2)^2 \ \tan^2\frac{\theta}{2}\right\} \tag{13.60}$$

La misura della sezione d' urto su protone non polarizzato determina la combinazione di F_1 ed F_2 che compare nella formula di Rosenbluth. Per ottenere separatamente F_1 ed F_2 occorre effettuare la misura su protoni polarizzati. I fattori di forma del neutrone si ottengono dalla diffusione su deuterio, per sottrazione.

La determinazione da parte di R. Hofstadter e collaboratori, alla fine degli anni '50, del fattore di forma del protone ha fornito una prova importante della natura non puntiforme, e presumibilmente non elementare, del protone stesso e, piú in generale, delle particelle adroniche.

[1] usando la relazione: $(p'e) = (pe')$

13.3 Diffusione Compton

Consideriamo il processo

$$e + \gamma \to e' + \gamma' \ , \tag{13.61}$$

che all'ordine più basso della teoria della perturbazioni è descritto dai diagrammi di Feynman (1) e (2) rappresentati nella figura.

(1) (2)

Per scrivere le ampiezze corrispondenti è conveniente introdurre le variabili di Mandelstam[2]

$$s = (p+k)^2 = (p'+k')^2 = E_{cm}^2 \ , \tag{13.62}$$

$$t = (p'-p)^2 = (k-k')^2 \ , \tag{13.63}$$

$$u = (p-k')^2 = (k-p')^2 \ , \tag{13.64}$$

dove E_{cm}^2 è l'energia totale nel sistema di riferimento del centro di massa, definito dalla relazione $\mathbf{p} + \mathbf{k} = 0$, e $\mathbf{p}$ e $\mathbf{k}$ sono gli impulsi, rispettivamente, dell'elettrone e del fotone presenti nello stato iniziale.

La sezione d'urto del processo è proporzionale al modulo quadrato della somma delle ampiezze associate ai diagrammi (1) e (2), mediato sugli stati di spin delle particelle nello stato iniziale e sommato sugli stati di spin delle particelle nello stato finale

$$\sigma \propto \overline{|M_1 + M_2|^2} = \overline{|M_1|^2} + \overline{|M_2|^2} + \overline{M_1 M_2^*} + \overline{M_1^* M_2} \ . \tag{13.65}$$

Il contributo del diagramma (1) vale

$$M_1 = \bar{u}' \epsilon_\mu'^{\,*} (ie\gamma^\mu) i \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2} (ie\gamma^\nu) \epsilon_\nu u \ , \tag{13.66}$$

dove $u = u_s(\mathbf{p})$ e $u' = u_{s'}(\mathbf{p}')$ sono i quadrispinori associati agli elettroni e ed e', e $\epsilon^\mu = \epsilon_r^\mu(\mathbf{k}')$ e $\epsilon' = \epsilon_{r'}^\mu(\mathbf{k}')$ i vettori di polarizzazione dei fotoni γ e γ'.

Dalla (13.66), usando la (13.62), si ottiene

$$\overline{|M_1|^2} = \frac{e^4}{(s-m^2)^2} \frac{1}{4} \sum_{r,r'} \sum_{s,s'} \bar{u}' \epsilon_\mu'^{\,*} \gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu \epsilon_\nu u \bar{u} \epsilon_\sigma^{\,*} \gamma^\sigma (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\rho \epsilon_\rho' u' \ . \tag{13.67}$$

[2]Per completezza diamo anche la definizione della variabile t, che non verrà utilizzata nei calcoli discussi in questa Sezione

Le somme sugli stati di polarizzazione dei fotoni si effettuano facilmente ricordando che il risultato finale del nostro calcolo deve essere invariante per trasformazioni di gauge e notando che l'ampiezza di qualsiasi processo che coinvolge un fotone con polarizzazione r nello stato iniziale o finale si può mettere nella forma

$$M = \epsilon_{r,\mu}\mathcal{M}^{\mu} \ . \tag{13.68}$$

Il vettore di polarizzazione ϵ_r dipende dalla gauge, come si vede facilmente considerando la trasformazione

$$A_\mu(x) \to A_\mu{}'(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x), \tag{13.69}$$

dove

$$A_\mu(x) = \epsilon_{r,\mu}\mathrm{e}^{ikx} \ . \tag{13.70}$$

Scegliendo $\Lambda(x) = C\mathrm{e}^{ikx}$ troviamo quindi

$$A_\mu{}'(x) = (\epsilon_{r,\mu} + iCk_\mu)\mathrm{e}^{ikx} = \epsilon_{r,\mu}{}'\mathrm{e}^{ikx} \ , \tag{13.71}$$

cioè che la trasformazione di gauge cambia il vettore di polarizzazione ϵ_r in $\epsilon_r{}'$.

La condizione che l'ampiezza (13.68) resti invariante sotto la trasformazione del vettore di polarizzazione implica che deve essere

$$\epsilon_{r,\mu}\mathcal{M}^{\mu} = \epsilon_{r,\mu}{}'\mathcal{M}^{\mu} = (\epsilon_{r,\mu} + iCk_\mu)\mathcal{M}^{\mu} \ , \tag{13.72}$$

cioè

$$k_\mu\mathcal{M}^{\mu} = 0 \ . \tag{13.73}$$

Questo risultato ci permette di effettuare la somma

$$\sum_r |\mathcal{M}|^2 = (\mathcal{M}^{\mu})^*\mathcal{M}^{\nu}\sum_{r=1}^{2}\epsilon^*_{r,\mu}\epsilon_{r,\nu} \ . \tag{13.74}$$

dove (si vedano gli appunti del corso di Meccanica Quantistica Relativistica)

$$\sum_{r=1}^{2}\epsilon^*_{r,\mu}\epsilon_{r,\nu} = -g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu - (kn)(k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu)}{(kn)^2} \ , \tag{13.75}$$

con $n^\mu \equiv (1,0,0,0)$. Dalla (13.73) segue infatti che

$$\sum_{r=1}^{2}|\mathcal{M}|^2 = (\mathcal{M}^{\mu})^*\mathcal{M}^{\nu}\sum_{r=1}^{2}\epsilon^*_{r,\mu}\epsilon_{r,\nu} = -(\mathcal{M}^{\mu})^*\mathcal{M}^{\nu}\ g_{\mu\nu} = -|\mathcal{M}|^2 \ . \tag{13.76}$$

In conclusione, le somme sugli stati di polarizzazione dei fotoni si effettuano facilmente con le sostituzioni

$$\sum_r \epsilon_r^{\sigma *}\epsilon_r^{\nu} = -g^{\sigma\nu} + \dots \quad , \quad \sum_{r'}\epsilon_r^{\mu *}\epsilon_r^{\rho} = -g^{\mu\rho} + \dots , \tag{13.77}$$

dove i puntini di sospensione indicano la presenza di termini il cui contributo alle ampiezze si annulla, e può quindi essere omesso.

Per sommare sugli spin degli elettroni si utilizzano le relazioni

$$\sum_s u_s(\mathbf{p})\overline{u}_s(\mathbf{p}) = \frac{\not{p}+m}{2m} \ , \ \sum_{s'} u_{s'}(\mathbf{p}')\overline{u}_{s'}(\mathbf{p}') = \frac{\not{p}'+m}{2m} \ , \tag{13.78}$$

dove m è la massa dell'elettrone. Si ottiene così,

$$\begin{aligned} \overline{|M_1|^2} &= \frac{e^4}{(s-m^2)^2}\frac{1}{4}\sum_{s,s'} \bar{u}'\gamma^\mu(\not{p}+\not{k}+m)\gamma^\nu u\bar{u}\gamma_\nu(\not{p}+\not{k}+m)\gamma_\mu u' \qquad (13.79)\\ &= \frac{e^4}{(s-m^2)^2}\frac{1}{16m^2}\mathrm{Tr}\ (\not{p}'+m)\gamma^\mu(\not{p}+\not{k}+m)\gamma^\nu(\not{p}+m)\gamma_\nu(\not{p}+\not{k}+m)\gamma_\mu \ . \end{aligned}$$

Dobbiamo ora calcolare la traccia a secondo membro della (13.79) applicando le regole riassunte negli appunti del corso di Meccanica Quantistica Relativistica. Per prima cosa, usando la proprietà di invarianza della traccia sotto permutazioni cicliche degli argomenti, possiamo spostare la matrice γ_μ a sinistra del fattore $(\not{p}'+m)$. Sfruttando poi la relazione, valida per ogni quadrivettore a,

$$\gamma_\mu \not{a}\gamma^\mu = a_\rho\gamma_\mu\gamma^\rho\gamma^\mu = a_\rho\gamma_\mu(2g^{\rho\mu}-\gamma^\mu\gamma^\rho) = -2\not{a} \tag{13.80}$$

possiamo porre la traccia da calcolare nella forma

$$\mathrm{Tr}\ (4m-2\not{p}')(\not{p}+\not{k}+m)(4m-2\not{p})(\not{p}+\not{k}+m) = A+B+C+D \ , \tag{13.81}$$

con

$$\begin{aligned} A &= 16m^2\mathrm{Tr}\ (\not{p}+\not{k}+m)(\not{p}+\not{k}+m) && (13.82)\\ B &= 4\mathrm{Tr}\ \not{p}'(\not{p}+\not{k}+m)\not{p}(\not{p}+\not{k}+m) && (13.83)\\ C &= -8m\mathrm{Tr}\ \not{p}'(\not{p}+\not{k}+m)(\not{p}+\not{k}+m) && (13.84)\\ D &= -8m\mathrm{Tr}\ (\not{p}+\not{k}+m)\not{p}(\not{p}+\not{k}+m) && (13.85)\\ & && (13.86) \end{aligned}$$

Definendo $\tilde{s} = p+k = p'+k'$, da cui segue che $\tilde{s}^2 = s$, e ricordando che la traccia del prodotto di un numero dispari di matrici γ si annulla, possiamo calcolare subito il termine A, col risultato

$$A = 16m^2\mathrm{Tr}\ (\not{\tilde{s}}\not{\tilde{s}}+m^2) = 64m^2(s+m^2) \ , \tag{13.87}$$

che si ottiene facilmente notando che, dati due quadrivettori a e b

$$\mathrm{Tr}\ \not{a}\not{b} = a_\rho b_\sigma \mathrm{Tr}\ (\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4a_\rho b_\sigma g^{\rho\sigma} = 4(ab) \ . \tag{13.88}$$

Il contributo dei termini C e D si ottiene procedendo in modo analogo. Per esempio, troviamo per C l'espressione

$$C = -8m\mathrm{Tr}\ \not{p}'(\not{\tilde{s}}+m)(\not{\tilde{s}}+m) = -16m^2\mathrm{Tr}\ \not{p}'\not{\tilde{s}} = -64m^2(p'\tilde{s}) \tag{13.89}$$

che, sostituendo

$$(p'\tilde{s}) = p'(p'+k') = m^2+(p'k') \ , \tag{13.90}$$

con $(p'k') = (s - m^2)/2$ diventa

$$C = -32m^2(s + m^2) \ . \tag{13.91}$$

Il calcolo del termine D è analogo, e il risultato che si ottiene è lo stesso

$$D = -64m^2(p\tilde{s}) = -32m^2(s + m^2) \ . \tag{13.92}$$

Sommando insieme le (13.87), (13.91) e (13.92) troviamo

$$A + C + D = 0 \ , \tag{13.93}$$

da cui segue che l'unico termine che contribuisce alla traccia (13.81) è B, che possiamo riscrivere

$$B = \mathrm{Tr}\ (\not{p}'(\not{\tilde{s}}\not{p}\not{\tilde{s}} + m^2\not{p}'\not{p}) \ . \tag{13.94}$$

Il calcolo si effettua utilizzando la relazione

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\ (\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) &= a_\lambda b_\mu c_\nu d_\rho \mathrm{Tr}\ (\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) \\ &= 4a_\lambda b_\mu c_\nu d_\rho (g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho} + g^{\lambda\rho}g^{\mu\nu} - g^{\lambda\nu}g^{\mu\rho}) \\ &= 4[(ab)(cd) + (ad)(bc) - (ac)(bd)] \ . \end{aligned} \tag{13.95}$$

Il risultato che si ottiene

$$B = 16[2(p'\tilde{s})(p\tilde{s}) - (pp')s + m^2(pp')] = 32\{(pk)(pk') + m^2[(pp') + (p'k)]\} \ , \tag{13.96}$$

si può scrivere in ternmini delle variabili s e u notando che

$$(pk') = \frac{m^2 - u}{2} \quad , \quad [(pp') + (p'k)] = \frac{s - m^2}{2} \ . \tag{13.97}$$

In conclusione troviamo la

$$B = 8\left[4m^4 + (s - m^2)(m^2 - u) + 2m^2(s - m^2)\right] \ . \tag{13.98}$$

Dalle equazioni (13.79) e (13.81) segue quindi che

$$\overline{|M_1|^2} = \frac{1}{4m^2}\ \frac{2e^4}{(s - m^2)^2}\left[4m^4 - (s - m^2)(u - m^2) + 2m^2(s - m^2)\right] \ . \tag{13.99}$$

Il modulo quadrato dell'ampiezza associata al grafico (2), la cui espressione è

$$M_2 = \bar{u}'{\epsilon_\mu}^*(ie\gamma^\mu)i\frac{\not{p} - \not{k}' + m}{(p - k')^2 - m^2}(ie\gamma^\nu)\epsilon'_\nu u \ , \tag{13.100}$$

si ottiene facilmente da $\overline{|M_1|^2}$ con la sostituzione $s \rightleftharpoons u$, col risultato

$$\overline{|M_2|^2} = \frac{1}{4m^2}\ \frac{2e^4}{(u - m^2)^2}\left[4m^4 - (u - m^2)(s - m^2) + 2m^2(u - m^2)\right] \ . \tag{13.101}$$

Dal calcolo del termine di interferenza, che si effettua in modo analogo, si ottiene

$$\overline{M_1 M_2^*} + \overline{M_1^* M_2} = \frac{1}{4m^2} \, \frac{4e^4}{(s-m^2)(u-m^2)} \left[4m^4 - m^2(s-m^2) + m^2(u-m^2)\right] \ . \tag{13.102}$$

Finalmente, mettendo insieme i risultati (13.99), (13.101) e (13.102) troviamo

$$\begin{aligned} \overline{|M_1+M_2|^2} &= \frac{1}{4m^2} 8e^4 \left[\left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right)^2 \right. \\ &+ \left. \left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{u-m^2}{s-m^2} + \frac{s-m^2}{u-m^2} \right) \right] \ . \end{aligned} \tag{13.103}$$

Invarianza sotto trasformazioni di gauge. Come abiamo visto nella Sezione precedente, la trasformazione di gauge (13.69) non lascia invariati i vettori di polarizzazione del campo elettromagnetico. Dalla (13.72) segue che, perchè l'ampiezza di diffusione M_1+M_2, che possiamo scrivere nella forma[3]

$$M_1 + M_2 = \epsilon_\mu \epsilon_\nu (\mathcal{M}_1^{\mu\nu} + \mathcal{M}_2^{\mu\nu}) \ , \tag{13.104}$$

deve essere soddisfatta la condizione

$$k_\mu k'_\nu (\mathcal{M}_1^{\mu\nu} + \mathcal{M}_2^{\mu\nu}) = 0 \ . \tag{13.105}$$

Consideriamo il primo termine del membro di sinistra della (13.105), che possiamo riscrivere usando le definizioni (13.66) e (13.100), con $k^2 = 0$ e $p^2 = m^2$,

$$k_\mu k'_\nu \mathcal{M}_1^{\mu\nu} = \frac{\bar{u}' \not{k}' (\not{p} + \not{k} + m) \not{k} u}{2(pk)} \ . \tag{13.106}$$

Il numeratore di questa espressione si può porre in una forma molto semplice notando che

$$(\not{p} + \not{k} + m)\not{k} u = (\not{p} + m)\not{k} u = [2(pk) - \not{k}(\not{p} - m)]u = 2(pk)u \ . \tag{13.107}$$

da cui segue che

$$k_\mu k'_\nu \mathcal{M}_1^{\mu\nu} = \bar{u}' \not{k}' u \ . \tag{13.108}$$

Manipolando in modo analogo il secondo termine, che grazie alla relazione $p-k' = p'-k$ possiamo porre nella forma

$$k_\mu k'_\nu \mathcal{M}_2^{\mu\nu} = -\frac{\bar{u}' \not{k} (\not{p}' - \not{k} + m) \not{k}' u}{2(p'k)} \ , \tag{13.109}$$

otteniamo

$$-\bar{u}' \not{k} (\not{p}' - \not{k} + m) = -\bar{u}' \not{k} (\not{p}' + m) = -\bar{u}' [2(p'k) - (\not{p}' - m)\not{k}] = -2(p'k)\bar{u}' \tag{13.110}$$

che implica

$$k_\mu k'_\nu \mathcal{M}_2^{\mu\nu} = -\bar{u}' \not{k}' u = -k_\mu k'_\nu \mathcal{M}_1^{\mu\nu} \ , \tag{13.111}$$

[3]Supponiamo, per semplicità, che i vettori di polarizzazione siano reali.

cioè che l'ampiezza di diffusione $e + \gamma \to e' + \gamma'$ è invariante per trasformazioni di gauge. Si noti che solo la somma $M_1 + M_2$ è invariante, mentre le ampiezze corrispondenti ai due processi illustrati dai diagrammi di Feynman della figura, considerate separatamente, non lo sono.

Vogliamo ora utilizzare il risultato (13.103) per ottenere la sezione d'urto nel sistema del laboratorio, definito dalle relazioni

$$p \equiv (m, \mathbf{0}) \quad , \quad p' \equiv (E', \mathbf{p}') \ ,$$
$$k \equiv (\omega, \mathbf{k}) \quad , \quad k' \equiv (\omega', \mathbf{k}') \ ,$$

con $|\mathbf{k}| = \omega$ e $|\mathbf{k}|' = \omega'$, dalle quali segue che

$$s = (p+k)^2 = m^2 + 2m\omega \quad , \quad u = (p-k')^2 = m^2 - 2m\omega' \ . \tag{13.112}$$

Inoltre, la $p - p' = k' - k$ implica

$$1 - \cos\theta = m\left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega}\right) \ , \tag{13.113}$$

dove θ è l'angolo compreso tra i vettori $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$.

Sostituendo le (13.112) e (13.113) nella (13.103) otteniamo

$$\overline{|M_1 + M_2|^2} = \frac{1}{4m^2} 2e^4 \ \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right) \ . \tag{13.114}$$

La sezione d'urto è definita come

$$d\sigma = \frac{1}{F}\frac{W}{T}\frac{V}{(2\pi^3)}d^3p'\frac{V}{(2\pi^3)}d^3k' \ , \tag{13.115}$$

dove il flusso dei fotoni incidenti, F, vale

$$F = \frac{1}{V}\frac{|\mathbf{k}|}{\omega} = \frac{1}{V} \ , \tag{13.116}$$

mentre la probabilità di transizione per unità di tempo è

$$\begin{aligned} \frac{W}{T} &= \frac{1}{T}\, VT(2\pi)^4\delta^{(4)}(p + k - p' - k') \\ &\quad \times \frac{1}{2V\omega}\frac{1}{2V\omega'}\frac{m}{Vm}\frac{m}{VE'}\ \overline{|M_1 + M_2|^2} \ . \end{aligned} \tag{13.117}$$

Sostituendo le (13.114) (13.116) e (13.117) nella (13.115) e effettuando l'integrazione su $\mathbf{p}'$ sfruttando la funzione δ associata alla conservazione dell'impulso otteniamo

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2}\frac{1}{\omega\omega' mE'}\ 2e^4\left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right)\delta(m + \omega - E' - \omega')d^3k' \ , \tag{13.118}$$

ovvero, ricordando che $d^3k' = d\Omega'\omega'^2 d\omega'$, dove Ω' è l'angolo solido che individua la direzione del vettore $\mathbf{k}'$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{e^4}{32\pi^2}\frac{\omega'}{\omega}\frac{1}{mE'}\left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right)\ \delta(m + \omega - E' - \omega')d\omega' \ . \tag{13.119}$$

L'integrazione su ω' con la funzione δ si effettua usando la regola

$$\delta[F(\omega')] = \left|\frac{dF}{d\omega'}\right|^{-1} \delta(\omega' - \omega'_0) \ , \tag{13.120}$$

con $F(\omega'_0) = 0$. Ricordando che $E' = \sqrt{m^2 + |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}$ troviamo

$$\left|\frac{d}{d\omega'}(m + \omega - E' - \omega')\right| = \frac{1}{E'}(\omega' - \omega\cos\theta) + 1 = \frac{(p'k')}{E'\omega'} = \frac{(pk)}{E'\omega'} = \frac{m\omega}{E'\omega'} \tag{13.121}$$

e quindi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{e^4}{32\pi^2}\frac{\omega'}{\omega}\frac{1}{mE'}\frac{m\omega}{E'\omega'}\left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right) \tag{13.122}$$

ovvero

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{\alpha}{2m^2}\ \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right) \ . \tag{13.123}$$

La sezione d'urto (13.123), ottenuta nel Klein e Nishina nel 1929, fornisce una descrizione accurata dell'effetto Compton, osservato sperimentalmente per la prima volta nel 1923.

Consideriamo ora la (13.123) nel limite non relativistico, in cui $\omega/m \ll 1$. Risolvendo la (13.113) per ω' si ottiene la relazione

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)} \ , \tag{13.124}$$

che mostra come, nel limite che ci interessa, $\omega/\omega' \to 1$ e la (13.123) diventa

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{\alpha}{2m^2}\ (1 + \cos^2\theta) \ . \tag{13.125}$$

Per ottenere la sezione d'urto totale effettuiamo l'integrale angolare

$$\sigma = 2\pi\ \frac{\alpha}{2m^2}\int d\cos\theta\ (1 + \cos^2\theta) = \frac{8\pi}{3}\ \frac{\alpha}{m^2} \ . \tag{13.126}$$

La (13.126) è la sezione d'urto di Thomson, che descrive l'interazione del campo elettromagnetico classico con un elettrone.

13.4 Diffusione Compton su elettroni relativistici

Nelle Sezioni precedenti abbiamo considerato la sezione d'urto di diffusione fotone-elettrone nel sistema di riferimento del laboratorio, nel quale l'elettrone è in quiete. L'espressione che abbiamo ottenuto per il modulo quadrato dell'ampiezza di di transizione non dipende però dalla scelta particolare del sistema di riferimento e può essere utilizzata anche nel caso in cui gli elettroni siano relativistici, cioè abbiano energia molto maggiore della massa a riposo. Come vedremo, in queste condizioni è possibile ottenere nello stato finale fotoni con energia $\omega' \gg \omega$.

Definendo le variabili cinematiche come

$$p \equiv (E, \mathbf{p}) \quad , \quad p' \equiv (E', \mathbf{p}') \ ,$$

$$k \equiv (\omega, \mathbf{k}) \quad , \quad k' \equiv (\omega', \mathbf{k}') \ ,$$

dalla conservazione del quadrimpulso totale, che implica

$$(pk) = (p'k') = (p + k - k')k' = (pk') + (kk') \ , \tag{13.127}$$

otteniamo la relazione

$$E\omega - \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = E\omega' - \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}' \ , + \omega\omega'(1 - \cos\theta) \tag{13.128}$$

che e possiamo riscrivere

$$\omega(1 - \beta\cos\phi) = \omega'(1 - \beta\cos\phi') + \frac{\omega\omega'}{E}(1 - \cos\theta) \ , \tag{13.129}$$

dove ϕ e ϕ' sono gli angoli compresi tra la direzione di $\mathbf{p}$ e quelle, rispettivamente, di $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$, e $\beta = |\mathbf{p}|/E$ è la velocità dell'elettrone (nel sistema di in unità di misura nel quale la velocità della luce è $c = 1$).

Risolvendo la (13.129) rispetto ad ω' otteniamo la

$$\omega' = \omega \ \frac{1 - \beta\cos\phi}{1 - \beta\cos\phi' + \frac{\omega}{E}(1 - \cos\theta)} \ , \tag{13.130}$$

che siriduce ovviamente alla (13.124) nel limite $\beta \to 0$. Per elettroni relativistici $\beta \approx 1$ e possiamo usare l'espansione, valida per $1/\gamma^2 \ll 1$,

$$\beta = \frac{|\mathbf{p}|}{E} = \sqrt{\frac{E^2 - m^2}{E^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \ , \tag{13.131}$$

dove $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ è il fattore di Lorentz.

Consideriamo ora il caso in cui $\mathbf{p}$ e $\mathbf{k}$ hanno direzione circa uguale e verso opposto, cioè $\phi \approx \pi$, e gli impulsi delle particelle nello stato finale sono tali che $\theta \approx \pi$ e $\phi' \approx 0$. In queste condizioni la (13.130) si può riscrivere nella forma

$$\omega' \approx E\frac{z}{1 + x + z} \ , \tag{13.132}$$

dove

$$z = \frac{4\gamma^2\omega}{E} \quad , \quad x = \gamma^2\phi'^2 \ . \tag{13.133}$$

Per ω fissato, il valore massimo di ω', ω'_{max}, corrisponde a $\phi' = 0$ e vale

$$\omega'_{max} = E^2\frac{4}{m^2} \ \frac{\omega}{1 + z} \ . \tag{13.134}$$

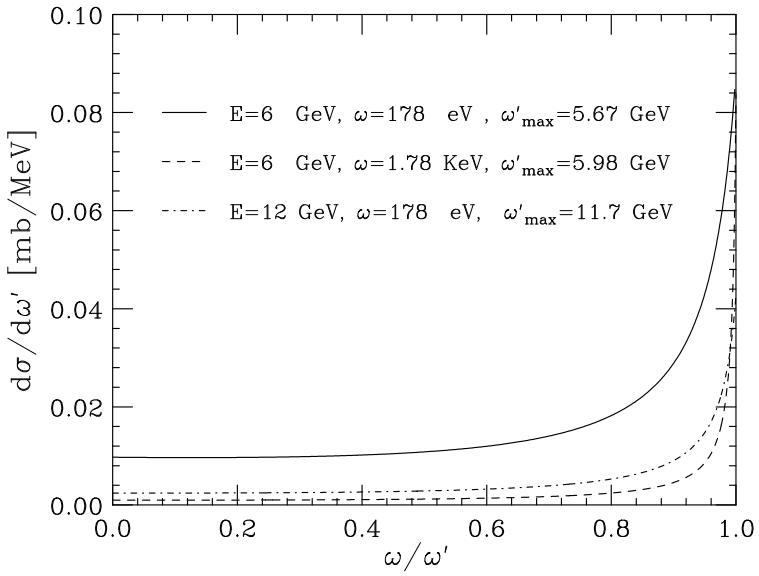

Figura 13.3: Distribuzione in energia di fotoni prodotti con diffusione Compton di eletroni relativistici.

Nella diffusione Compton di elettroni ottenuti da una macchina acceleratrice su fotoni con energie dell'ordine di un eV, ottenuti da un laser, si possono produrre fotoni di energia massima dell'ordine del GeV la cui distribuzione, illustrata dalla Figura 13.3, presenta un picco per $\omega \approx \omega'_{max}$ la cui larghezza decresce all'aumentare di E e ω.

Questa tecnica viene utilizzata per la produzione di fasci di fotoni utilizzabili per esperimenti di fisica dei nuclei. Il primo fascio di questo tipo, di energia ~ 80 MeV, è stato ottenuto alla fine degli anni settanta ai Laboratori di Frascati, utilizzando gli elettroni dell'anello di accumulazione Adone, di energia $E = 1.5$ GeV e fotoni di energia $\omega = 2.45$ eV. Il fascio di fotoni che si ottiene possiede anche l'importante proprietà di avere la stessa polarizzazione dei fotoni prodotti dal laser, in quanto gli elettroni, essendo ultrarelativistici, conservano la loro elicità nel processo di diffusione.

13.5 Annichilazione $e^+ e^- \to \mu^+ \mu^-$

Consideriamo il processo di annichilazione di una coppia elettrone positrone e creazione di una coppia muone antimuone

$$e^+ e^- \to \mu^+ \mu^- \quad , \tag{13.135}$$

rappresentato schematicamente dal diagramma di Feynman della Fig. 13.4.

Per ottenere la sezione d'urto al secondo ordine nella lagrangiana di interazione, si deve calcolare l'elemento di matrice

$$\langle f|S^{(2)}|i\rangle \ , \tag{13.136}$$

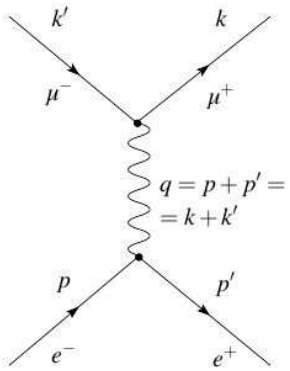

Figura 13.4: Rappresentazione grafica dell' ampiezza di annichilazione elettrone-positrone in coppie $\mu^+ \mu^-$. Le frecce indicano il flusso della carica elettrica negativa, quindi sono in direzione opposta ai momenti per e^+ e μ^+, q^μ é il momento associato alla linea che rappresenta la propagazione del fotone. La quantitá di moto si conserva nei vertici.

dove gli stati iniziale e finale sono $|i\rangle = |pr, p'r'\rangle = a^\dagger_{pr} b^\dagger_{p'r'}|0\rangle$ e $|f\rangle = |ks, k's'\rangle = a^\dagger_{ks} b^\dagger_{k's'}|0\rangle$ e la matrice S ha la forma

$$S^{(2)} = -\frac{e^2}{2}\ 2\ \int d^4x \int d^4y\ T\{: \bar\psi_e(x) \not{A}(x) \psi_e(x) : : \bar\psi_\mu(y) \not{A}(y) \psi_\mu(y) :\}\ , \tag{13.137}$$

con il fattore 2 davanti agli integrali per tenere conto del fatto che con lo scambio $x \rightleftharpoons y$ si ottengono due contributi identici. Ovviamente gli operatori di campo ψ_e e ψ_μ, che descrivono l'elettrone e il muone (e le relative antiparticelle), commutano sia tra loro che col campo elettromagnetico. Possiamo quindi riscrivere il prodotto cronologico nella forma

$$T\{j^\lambda_e(x) A_\lambda(x) j^\nu_\mu(y) A_\nu(y)\} = j^\lambda_e(x) j^\nu_\mu(y) T\{A_\lambda(x) A_\nu(y)\}\ , \tag{13.138}$$

dove $j^\lambda_e =: \bar\psi_e \gamma^\lambda \psi_e :$ e $j^\nu_\mu =: \bar\psi_\mu \gamma^\nu \psi_\mu :$ sono le correnti elettromagnetiche dell'elettrone e del muone. Poichè nè lo stato iniziale nè quello finale contengono fotoni, il contributo del campo elettromagnetico all'elemento di matrice di transizione è dato dalla

$$\langle 0|T\{A^\lambda(x) A^\nu(y)\}|0\rangle = i D^{\lambda\nu}_F(x - y)\ , \tag{13.139}$$

dove $D^{\lambda\nu}_F$ è il propagatore del fotone che, come abbiamo indicato all' inizio del Capitolo, é dato da:

$$i D^{\lambda\nu}_F(x - y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-i g^{\lambda\nu} \mathrm{e}^{iq(x-y)}}{q^2 + i\epsilon}\ . \tag{13.140}$$

Gli altri elementi di matrice da calcolare sono

$$\langle 0|j^\lambda_e(x)|pr, p'r'\rangle \quad , \quad \langle ks, k's'|j^\nu_\mu(y)|0\rangle\ . \tag{13.141}$$

Consideriamo la corrente elettronica (gli indici di spin sono omessi per semplificare la notazione)

$$j^\lambda_e(x) = \sum_{q,q'} N_q N_{q'} : \left[a^\dagger_q \bar u_e(q) \mathrm{e}^{iqx} + b_q \bar v_e(q) \mathrm{e}^{-iqx}\right] \gamma^\lambda \left[a_{q'} u_e(q') \mathrm{e}^{-iq'x} + b^\dagger_{q'} v_e(q') \mathrm{e}^{iq'x}\right] :\ , \tag{13.142}$$

con $N_q = \sqrt{m/VE_q}$. L'unico termine che da contributo non nullo all'elemento di matrice (13.141) è quello contenente gli operatori di distruzione a_p e $b_{p'}$ cioè

$$N_p N_{p'}\ b_{p'} a_p\ \bar{v}_e(p')\gamma^\lambda u_e(p)\ \mathrm{e}^{-i(p+p')}\ . \tag{13.143}$$

Analogamente, l'unico termine che contribuisce all'elemento di matrice della corrente muonica è

$$N_k N_{k'}\ a_k^\dagger b_{k'}^\dagger\ \bar{u}_\mu(k)\gamma^\nu v_\mu(k')\ \mathrm{e}^{+i(k+k')}\ . \tag{13.144}$$

Otteniamo quindi ($u_e = u_e(p),\ \bar{u}'_e = \bar{u}_e(p'),\ \ldots$)

$$\begin{aligned}\langle f|S^{(2)}|i\rangle &= -e^2\ N_p N_{p'} N_k N_{k'} (\bar{v}'_e\gamma^\lambda u_e)(\bar{u}_\mu\gamma^\nu v'_\mu) \\ &\times \int d^4x \int d^4y\ \mathrm{e}^{-i[(p+p')x-(k+k')y]}(-ig_{\lambda\nu}) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{e}^{iq(x-y))}}{q^2}\ .\end{aligned} \tag{13.145}$$

Si noti che la presenza del termine $i\epsilon$ nel denominatore del propagatore fotonico è irrilevante, poichè $q^2 \neq 0$. Effettuando le integrazioni e sostituendo le espressioni delle costanti di normalizzazione degli spinori si ottiene il risultato

$$\langle f|S^{(2)}|i\rangle = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p+p'-k-k')\frac{m}{V\sqrt{E_pE_{p'}}}\ \frac{M}{V\sqrt{E_kE_{k'}}}\mathcal{M}_{if}\ , \tag{13.146}$$

dove m e M sono le masse, rispettivamente, dell'elettrone e del muone. L'ampiezza invariante $\mathcal{M}_{if}$ è definita dalla

$$\mathcal{M}_{if} = ie^2\ (\bar{v}'_e\gamma^\lambda u_e)\frac{1}{(p+p')^2}(\bar{u}_\mu\gamma_\lambda v'_\mu)\ , \tag{13.147}$$

da cui segue che

$$|\mathcal{M}_{if}|^2 = \frac{e^4}{(p+p')^2}(\bar{v}'_e\gamma^\lambda u_e\bar{u}_e\gamma^\nu v'_e)(\bar{u}_\mu\gamma_\lambda v'_\mu\bar{v}'_\mu\gamma_\nu u_\mu)\ . \tag{13.148}$$

La media sugli spin delle particelle nello stato iniziale e la somma sugli spin delle particelle nello stato finale si effettua usando le relazioni di completezza degli spinori di Dirac

$$\sum_s u_e\bar{u}_e = \frac{\not{p}+m}{2m}\quad ,\quad -\sum_{s'} v'_e\bar{v}'_e = \frac{\not{p}'-m}{2m} \tag{13.149}$$

e

$$\sum_k u_\mu\bar{u}_\mu = \frac{\not{k}+M}{2M}\quad ,\quad -\sum_{k'} v'_\mu\bar{v}'_\mu = \frac{\not{k}'-M}{2M}\ . \tag{13.150}$$

Per esempio, dal termine corrispondnte alla corrente elettronica si ottiene la

$$\sum_{s,s'}\bar{v}'_e\gamma^\lambda u_e\bar{u}_e\gamma^\nu v'_e = -\frac{1}{4m^2}Tr\left[(\not{p}'-m)\gamma^\lambda(\not{p}+m)\gamma^\nu\right]\ , \tag{13.151}$$

che, sostituita insieme all'espressione analoga per la corrente muonica nella (13.148) da il risultato

$$\begin{aligned}|\overline{\mathcal{M}}_{if}|^2 &= \frac{1}{4}\sum_{s,s'}\sum_{k,k'}|\mathcal{M}_{if}|^2 = \frac{e^4}{4}\ \frac{1}{(p+p')^4} \\ &\times \frac{1}{4m^2}Tr\left[(\not{p}'-m)\gamma^\lambda(\not{p}+m)\gamma^\nu\right]\frac{1}{4M^2}Tr\left[(\not{k}+m)\gamma_\lambda(\not{k}'-m)\gamma_\nu\right]\ .\end{aligned} \tag{13.152}$$

Usando le regole per il calcolo delle tracce di prodotti della matrici γ troviamo

$$\begin{aligned} Tr\left[(\not p' - m)\gamma^\lambda(\not p + m)\gamma^\nu\right] &= Tr(\not p'\gamma^\lambda \not p\gamma^\nu) - m^2 Tr(\gamma^\lambda\gamma^\nu) \\ &= p'^\rho p^\sigma Tr(\gamma^\rho\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^\nu) - 4m^2 g^{\lambda\nu} \\ &= 4\left\{p'^\lambda p^\nu + p'^\nu p^\lambda - g^{\lambda\nu}\left[(pp') + m^2\right]\right\} \end{aligned} \tag{13.153}$$

e, analogamente

$$Tr\left[(\not k + M)\gamma_\lambda(\not k' - M)\gamma_\nu\right] = 4\left\{k_\lambda k'_\nu + k_\nu k'_\lambda - g_{\lambda\nu}\left[(kk') + M^2\right]\right\}\ . \tag{13.154}$$

D' ora in avanti porremo a zero la massa dell'elettone ($m \sim 0.5$ MeV) che é trascurabile rispetto alla massa del muone ($M \sim 105$ MeV) ed ai 4-impulsi delle particelle che partecipano al processo. In questa approssimazione, si ottiene

$$\begin{aligned} &Tr\left[(\not p' - m)\gamma^\lambda(\not p + m)\gamma^\nu\right] Tr\left[(\not k + M)\gamma_\lambda(\not k' - M)\gamma_\nu\right] \\ &\qquad = 32\left[(pk')(p'k) + (pk)(p'k') + (pp')M^2\right]\ , \end{aligned} \tag{13.155}$$

da cui segue

$$|\overline{\mathcal{M}}_{if}|^2 = \frac{e^4}{(p+p')^4}\frac{1}{4m^2}\ \frac{1}{4M^2}\ 8\left[(pk')(p'k) + (pk)(p'k') + (pp')M^2\right]\ . \tag{13.156}$$

Il calcolo esplicito di $|\overline{\mathcal{M}}_{if}|^2$ si effettua facilmente nel sistema di riferimento del centro di massa, definito dalla condizione $\mathbf{p}+\mathbf{p}' = 0$. Scegliendo l'asse z nella direzione di $\mathbf{p}$ e trascurando sempre la massa dell'elettrone possiamo scrivere

$$p \equiv (E, 0, 0, E)\ \ ,\ \ p' \equiv (E, 0, 0, -E) \tag{13.157}$$

$$k \equiv (E, 0, |\mathbf{k}|\sin\theta, |\mathbf{k}|\cos\theta)\ \ ,\ \ k' = (E, 0, -|\mathbf{k}|\sin\theta, -|\mathbf{k}|\cos\theta)\ , \tag{13.158}$$

dove θ è l'angolo compreso tra gli impulsi dell'elettrone e del muone e $|\mathbf{k}| = \sqrt{E^2 - M^2}$. Dalle definizioni segue che

$$(pk') = (p'k) = E^2\left(1 + \frac{|\mathbf{k}|}{E}\cos\theta\right) \tag{13.159}$$

$$(pk) = (p'k') = E^2\left(1 - \frac{|\mathbf{k}|}{E}\cos\theta\right) \tag{13.160}$$

$$(p+p')^2 = 2(pp') = 4E^2\ . \tag{13.161}$$

Sostituendo nella (13.156) si ottiene l'espressione

$$|\overline{\mathcal{M}}_{if}|^2 = \frac{1}{4m^2}\ \frac{1}{4M^2}e^4\left[\left(1 + \frac{M^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{M^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right]\ , \tag{13.162}$$

che implica (si confronti con la (13.146)

$$|\langle f|S^{(2)}|i\rangle|^2 = \frac{TV}{V^4}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+p'-k-k') \times\frac{e^4}{16E^4}\left[\left(1+\frac{M^2}{E^2}\right)+\left(1-\frac{M^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right] . \quad (13.163)$$

Per calcolare la sezione d'urto, la probabilità di transizione per unità di tempo, $w_{if} = |\langle f|S^{(2)}|i\rangle|^2/T$, deve essere moltiplicata per la densità degli stati accessibili alle particelle prodotte nello stato finale e divisa per il flusso, che nel nostro sistema di riferimento vale (trascuriamo ancora la massa dell'elettrone)

$$\frac{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|}{V} = 2\,\frac{|\mathbf{v}|}{V} = \frac{2}{V}\frac{|\mathbf{p}|}{E} = \frac{2}{V} . \quad (13.164)$$

Il risultato è

$$d\sigma = \frac{V}{2}\,\frac{V}{V^4}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+p'-k-k')\frac{e^4}{16E^4}\Big[\,\ldots\ldots\,\Big]\frac{V}{(2\pi)^3}d^3k\frac{V}{(2\pi)^3}d^3k' . \quad (13.165)$$

L'integrazione su $\mathbf{k}$ si può effettuare grazie alla funzione $\delta^{(3)}(\mathbf{p}+\mathbf{p}'-\mathbf{k}-\mathbf{k}')$, mentre per integrare su $\mathbf{k}'$ si usa la relazione

$$d^3k' = d\Omega_{k'}|\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'| = d\Omega_{k'}|\mathbf{k}'|E'dE' \quad (13.166)$$

che, sostituita nella (13.165) da il risultato

$$d\sigma = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\pi)^2}\,\delta(2E-2E')\,\frac{e^4}{16E^4}\Big[\,\ldots\ldots\,\Big]\,d\Omega_{k'}|\mathbf{k}'|E'dE' \quad (13.167)$$

cioè ($\alpha = e^2/4\pi^2$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}} = \frac{\alpha^2}{16E^2}\,\frac{|\mathbf{k}|}{E}\,\Big[\,\ldots\ldots\,\Big] , \quad (13.168)$$

ovvero

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}} = \frac{\alpha^2}{4E_{\rm cm}^2}\,\left(1-\frac{M^2}{E^2}\right)^{1/2}\left[\left(1+\frac{M^2}{E^2}\right)+\left(1-\frac{M^2}{E^2}\right)\cos^2\theta\right] , \quad (13.169)$$

dove l'energia totale nel sistema del centro di massa è $E_{\rm cm} = 2E$. Finalmente, effettuando l'integrazione angolare si ottiene la sezione d'urto totale

$$\sigma = 2\pi\int_{-1}^{1}\frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}}\,d\cos\theta = 2\pi\frac{\alpha^2}{4E_{\rm cm}^2}\,\left(1-\frac{M^2}{E^2}\right)^{1/2}\,\frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{M^2}{E^2}\right) . \quad (13.170)$$

Ovviamente, la (13.170) ha senso solo per

$$1-\frac{M^2}{E^2} > 0 , \quad (13.171)$$

cioè se è soddisfatta la condizione di soglia per la produzione di una coppia $\mu^+\mu^-$: $E^2 > M^2$, ovvero $E_{\rm cm}^2 > 4M^2$. Nel limite $E\to\infty$

$$\sigma \to \frac{4}{3}\pi\frac{\alpha^2}{E_{\rm cm}^2} . \quad (13.172)$$

L' andamento con l' energia della (13.172) era facilmente prevedibile, poichè la sezione d'urto ha le dimensioni di un'area, cioè, nel sistema di unità naturali $\hbar = c = 1$, dell'inverso del quadrato di un' energia. Nel limite $E \to \infty$ l'unica scala di energia disponibile è E, essendo tutte le masse trascurabili. Al second'ordine nella lagrangiana di interazione, deve quindi essere

$$\sigma \propto \frac{\alpha^2}{E_{\rm cm}^2} \ , \tag{13.173}$$

in accordo con la (13.172)

Capitolo 14

APPLICAZIONI: INTERAZIONI DEBOLI

14.1 Il decadimento del neutrone

Il calcolo della vita media del neutrone nella teoria di Fermi costituisce la piú semplice applicazione del formalismo fin qui esposto. Come abbiamo visto, nella teoria di Fermi il processo di decadimento β del neutrone si scrive:

$$n \to p + e^- + \bar{\nu} \tag{14.1}$$

La lagrangiana di interazione che descrive il processo (14.1) é la (10.40) che riportiamo per comoditá:

$$L_F = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{\psi}_p \gamma^\mu (1 + \frac{g_A}{g_V} \gamma_5) \psi_n \right] \left[\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu \right] = \frac{G_F}{\sqrt{2}} H^\mu L_\mu$$

Tutte le particelle sono rappresentate da campi di Dirac, G_F é la costante di Fermi.

La lagrangiana é il prodotto di due operatori: la corrente nucleare H^μ, che induce la transizione tra particelle pesanti: $n \to p$, e la corrente leptonica L^μ, che crea la coppia di leptoni dal vuoto. Assumendo la validitá della (14.2) calcoliamo la vita media del neutrone e l' asimmetria dell' elettrone rispetto allo spin del neutrone. Confrontando con i valori sperimentali possiamo determinare le due costanti che compaiono nella (14.2).

Al primo ordine della teoria delle perturbazioni:

$$\langle p, e, \bar{\nu} | S | n \rangle = \frac{iG_F}{\sqrt{2}} \langle p, e, \bar{\nu} | \int d^4x H^\mu(x) L_\mu(x) | n \rangle =$$

$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{iG_F}{\sqrt{2}} \langle p | H^\mu(0) | n \rangle \langle e, \bar{\nu} | L_\mu(0) | 0 \rangle$$

L' elemento di matrice nucleare si puó calcolare nel limite in cui il protone é non-relativistico, data la piccola differenza di massa n-p, confrontata con la massa del protone. In questo limite, sopravvivono solo le correnti che corrispondono a matrici di Dirac diagonali, e cioé:

$$\gamma^0, \ \gamma^i \gamma_5$$

I corrispondenti elementi di matrice si indicano col nome di *transizione di Fermi* e *di Gamow-Teller*, rispettivamente. Troviamo:

$$\langle p|\bar{\psi}_p\gamma^0\psi_n|n\rangle = \langle p|\bar{\psi}_p^{(-)}\gamma^0\psi_n^{(+)}|n\rangle = \chi_p^\dagger\chi_n = h^0 \text{ (Fermi)}$$
$$\langle p|\bar{\psi}_p\gamma^i\gamma_5\psi_n|n\rangle = \langle p|\bar{\psi}_p^{(-)}\gamma^i\gamma_5\psi_n^{(+)}|n\rangle = \chi_p^\dagger\sigma^i\chi_n = h^i \text{ (Gamow} - \text{Teller)}$$

dove χ_p e χ_n sono spinori bidimensionali. Per i leptoni, non si puó usare alcuna approssimazione:

$$\langle e,\bar{\nu}|\bar{\psi}_e\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_\nu|0\rangle = \langle e,\bar{\nu}|\bar{\psi}_e^{(-)}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_\nu^{(-)}|0\rangle =$$
$$= \sqrt{\frac{m_e m_\nu}{E_e E_\nu}}\bar{u}_e(p_e)\gamma^\mu(1-\gamma_5)v_\nu(p_\nu) = \sqrt{\frac{m_e m_\nu}{E_e E_\nu}}\, l^\mu$$

Il modulo quadro dell' elemento di matrice di Feynman é:

$$|M|^2 = \frac{G_F^2}{2}[h^\mu(h^\nu)^*][l_\mu l_\nu^*] \tag{14.2}$$

La parte nucleare. Nella somma sullo spin del protone nella parte nucleare di $|M|^2$ si utilizza il proiettore sui due stati di spin:

$$\sum_{spin\ p}(\chi_p)_a(\chi_p^\dagger)_b = \delta_{ab};\ (a,b=1,2) \tag{14.3}$$

Quindi, assumendo il neutrone in un dato stato di spin:

$$\sum_{spin\ p} h^\mu(h^\nu)^* = Tr\left[a^\mu(\chi_n\chi_n^\dagger)a^\nu\right];$$
$$a^\mu = (1, \frac{g_A}{g_V}\cdot\sigma) \tag{14.4}$$

Polarizzazione del neutrone. Lo stato di un neutrone con polarizzazione P si descrive usando una *matrice densitá* in luogo del proiettore sugli stati di spin nella (14.3). Se A e B sono, rispettivamente, le probabilitá di trovare il neutrone in spin *su* o *giú* lungo l' asse 3 la matrice densitá é data da:

$$\rho_{ab} = (\chi_n)_a A(\chi_n^\dagger)_b + (\chi_n)_a B(\chi_n^\dagger)_b = \left(\frac{1+\sigma_3}{2}\right)A + \left(\frac{1-\sigma_3}{2}\right)B = \frac{1+P\sigma_3}{2} \tag{14.5}$$

dove abbiamo usato $A+B=1$ e la polarizzazione del neutrone lungo l' asse 3 é:

$$P = \langle\sigma_3\rangle = Tr(\rho\sigma_3) = A - B$$

Per un neutrone non polarizzato, $P=0$ e l' inserzione di ρ nella (14.4) dá semplicemente la media sugli spati di spin iniziali. In ogni caso, troviamo:

$$\sum_{spin\ p} h^\mu(h^\nu)^* = Tr\left[a^\mu\rho a^\nu\right] = H^{\mu\nu}$$
$$(H^{\mu\nu})^* = H^{\nu\mu}$$

Esplicitamente:

$$H^{00} = 1;\ H^{i0} = H^{0i} = \frac{g_A}{g_V} P\delta^{i3};$$
$$H^{ij} = \left(\frac{g_A}{g_V}\right)^2 \left(\delta^{ij} - iP\epsilon^{ij3}\right)$$

Parte leptonica. Nella parte leptonica, sommiamo su tutti gli spin, usualmente non osservati, usando le formule (6.82) e (6.83) per i proiettori sulle soluzioni ad energia positiva (elettrone) e negativa (antineutrino). Otteniamo:

$$\sum_{spin\ e,\nu} (l_\mu l_\nu^*) = \sum_{spin\ e,\nu} [\bar{u}_e(p_e)\gamma_\mu(1-\gamma_5)v_\nu(p_\nu)] \left[v_\nu(p_\nu)^\dagger(1-\gamma_5)\gamma_\nu{}^\dagger\gamma^0 u_e(p_e)\right] =$$
$$= \sum_{spin\ e,\nu} [\bar{u}_e(p_e)\gamma_\mu(1-\gamma_5)v_\nu(p_\nu)]\,[\bar{v}_\nu(p_\nu)\gamma_\nu(1-\gamma_5)u_e(p_e)]$$

poiché dalle (6.17) segue:

$$\gamma^0(1-\gamma_5)\gamma_\nu{}^\dagger\gamma^0 = \gamma_\nu(1-\gamma_5)$$

e quindi:

$$\sum_{spin\ e,\nu} (l_\mu l_\nu^*) = \frac{1}{4m_e m_\nu} Tr\left[(\not{p}_e + m_e)\gamma_\mu(1-\gamma_5)(\not{p}_\nu - m_\nu)\gamma_\nu(1-\gamma_5)\right] =$$
$$\simeq 2\frac{1}{4m_e m_\nu} Tr\left[\not{p}_e\gamma_\mu\not{p}_\nu\gamma_\nu(1-\gamma_5)\right]$$
$$= 8\frac{1}{4m_e m_\nu}\left[(p_e)_\mu(p_\nu)_\nu + (p_e)_\nu(p_\nu)_\mu - g_{\mu\nu}(p_e\cdot p_\nu) + i\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}(p_e)^\alpha(p_\nu)^\beta\right] =$$
$$= 8\frac{1}{4m_e m_\nu} L_{\mu\nu} \tag{14.6}$$

Abbiamo utilizzato i risultati nella Sez. 6.4 e le relazioni:

$$(1-\gamma_5)(1+\gamma_5) = 0;\ (1-\gamma_5)(1-\gamma_5) = 2(1-\gamma_5)$$

che implicano, tra l' altro, che i termini proporzionali alle masse nel numeratore danno un contributo nullo. In componenti:

$$L_{00} = E_e E_\nu + (\mathbf{p}_e\cdot\mathbf{p}_\nu);\ L_{0i} = -\left[E_e(p_\nu)^i + (p_e)^i E_\nu\right] + i\epsilon^{ijk}(p_e)^j(p_\nu)^k;$$
$$L_{ij} = \left[(p_e)^i(p_\nu)^j + (p_e)^j(p_\nu)^i + \delta^{ij}(p_e p_\nu)\right] + i\epsilon^{ijk}\left[E_e(p_\nu)^k - (p_e)^k E_\nu\right]$$

Spazio delle fasi. Confrontando con la (12.41), otteniamo:

$$d\Gamma = \frac{G_F^2}{(2\pi)^5}\delta^{(4)}(P_f - P_i)\frac{d^3p_e d^3p_\nu}{4E_e E_\nu} d^3p_p\cdot[4H^{\mu\nu}L_{\mu\nu}]$$

Possiamo integrare il momento del protone usando la funzione delta tridimensionale. Inoltre, la conservazione dell' energia, nel limite non-relatistico per il protone si scrive:

$$m_n - m_p - \left[\frac{(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_\nu)^2}{2m_p} + E_e + E_\nu\right] = 0$$

L' energia cinetica del protone é trascurabile per cui troviamo:

$$E_e + E_\nu = \Delta m = m_n - m_p \tag{14.7}$$

Il risultato (14.7) spiega lo spettro continuo dei raggi β: l' energia liberata nella transizione é fissata, come nelle transizioni atomiche o nucleari con emissione di un fotone, ma questa energia é divisa in modo probabilistico tra l' elettrone e il neutrino, che non si osserva.

La (14.7) ha come conseguenza pratica che possiamo integrare liberamente sulla direzione del momento del neutrino, con la sua energia fissata $E_\nu = \Delta m - E_e$. Complessivamente, possiamo sostituire:

$$\delta^{(4)}(P_f - P_i)\frac{d^3p_e d^3p_\nu}{4E_e E_\nu} d^3p_p(\dots) \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{\pi}{2} p_\nu p_e dE_e dcos\theta_{en} \int d\Omega_\nu(\dots)$$

Dalle (14.2) e (14.6) si vede che $|M|^2$ dipende linearmente da $(p_\nu)^\mu$. Possiamo quindi omettere da $L_{\mu\nu}$ i termini proporzionali a $\mathbf{p}_\nu$ che si integrano a zero sull' angolo solido.

Vita media e asimmetrie di spin. Ponendo tutto insieme, troviamo:

$$d\Gamma = \frac{G_F^2}{4\pi^3}(1+3\lambda^2)\left[1 + A_{en}(Pv_e cos\theta_{en})\right] p_\nu E_\nu p_e E_e dE_e dcos\theta_{en} \tag{14.8}$$

$$A_{en} = -2\frac{\lambda(1+\lambda)}{(1+3\lambda^2)} \tag{14.9}$$

dove θ_{en} é l' angolo tra il momento dell' elettrone e la polarizzazione del neutrone. Abbiamo posto:

$$\lambda = \frac{g_A}{g_V}$$

ed inoltre:

$$p_e = \sqrt{E_e^2 - m_e^2};\ v_e = \frac{p_e}{E_e}$$
$$E_\nu = \Delta m - E_e;\ p_\nu = \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2};$$

Posiamo anche esprimere $d\Gamma$ in funzione dell' energia dell' elettrone e dell' angolo tra il neutrino e la polarizzazione del neutrone, il momento del neutrino si ricostruisce misurando, oltre a quello dell' elettrone, il momento del protone: $\mathbf{p}_\nu = -\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_p$. Si vede facilmente che i

termini in $P\lambda$ sono simmetrici per lo scambio $e \to \nu$ mentre i termini in $P\lambda^2$ cambiano segno. Quindi, con $v_\nu = 1$, otteniamo:

$$d\Gamma = \frac{G_F^2}{4\pi^3}(1+3\lambda^2)\left[1 + A_{\nu n}(Pcos\theta_{\nu n})\right] p_\nu E_\nu p_e E_e dE_e dcos\theta_{\nu n} \tag{14.10}$$

$$A_{\nu n} = -2\frac{\lambda(1-\lambda)}{(1+3\lambda^2)} \tag{14.11}$$

Dalla misura di A_{en} e $A_{\nu n}$ possiamo determinare λ e quindi ottenere G_F dal confronte del valore sperimentale della vita media con l' espressione derivata dalla (14.8) o dalla (14.10):

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{G_F^2 \Delta m^5}{60\pi^3}\left[1 + 3\left(\frac{g_A}{g_V}\right)^2\right] \cdot I(\frac{m_e}{\Delta m});$$

$$I(x) = 30\int_x^1 dt\; t(1-t)^2\sqrt{t^2 - x^2} \simeq 0.473. \tag{14.12}$$

L' integrale, I, é normalizzato in modo da dare 1 nel limite $m_e = 0$ ed abbiamo nuovamente trascurato la massa del neutrino. Il valore numerico é ottenuto con i valori delle masse nelle Tab. 14.2 e 14.1.

Tabella 14.1: Osservabili nel decadimento del neutrone

Δm (MeV)	vita media (s)	A_{en}	$A_{\nu n}$	g_A/g_V
1.293	885.7 ±0.8	-0.1173 ±0.0013	0.983 ±0.004	-1.2695 ±0.0029

Analisi numerica Considerando λ e λ^2 come grandezze indipendenti, dalle (14.9) e (14.11) e dai valori nella Tab. 14.1, troviamo il valore di g_A/g_V:

$$\Delta = A_{en} - A_{\nu n} \simeq -1.10;\; \Sigma = A_{en} + A_{\nu n} \simeq 0.866;$$

$$\lambda^2 = \frac{-\Delta}{4+3\Delta} \simeq 1.57$$

$$\lambda = \frac{-\Sigma}{4+3\Delta} \simeq -1.24 = \frac{g_A}{g_V} \tag{14.13}$$

con la relazione di consistenza che sia effettivamente:

$$\left[\frac{-\Sigma}{4+3\Delta}\right]^2 = \frac{-\Delta}{4+3\Delta}$$

ovvero:

$$1.53 \simeq 1.57 \tag{14.14}$$

Un altro modo di esprimere la relazione di consistenza é di dire che il punto sperimentale nel

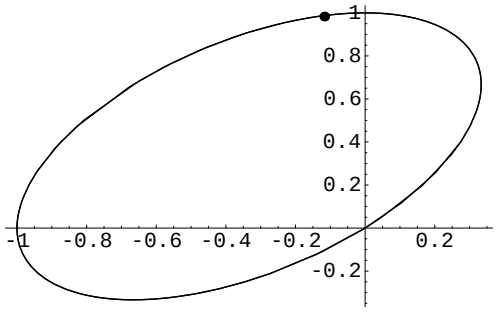

Figura 14.1: ellisse

piano $(A_{en}, A_{\nu n})$ deve stare sull' ellisse di equazione :

$$\Sigma^2 + 3(\Delta + \frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$$

La Fig. 14.1 mostra che questo é vero con ottima approssimazione.

In conclusione, da questa semplice analisi troviamo per g_A/g_V il valore in (14.13), molto prossimo al valore adottato nel Particle Data Group [17] e riportato nella Tab. 14.1. Sostituendo quest' ultimo valore nella (14.12), troviamo il valore della costante di Fermi:

$$G_F = 1.18 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \tag{14.15}$$

Commento. L' esistenza di una correlazione tra lo spin del neutrone e la direzione di volo dell' elettrone mostra che le Interazioni Deboli violano la simmetria sotto riflessioni spaziali. Infatti, sotto questa operazione il momento dell' elettrone (vettore polare) cambia segno mentre lo spin del neutrone (vettore assiale) non cambia. Se lo stato finale fosse un autostato della paritá, come avviene se P commuta con l' Hamiltoniana, dovrebbe essere: $\langle \mathbf{v}_e \cdot \sigma_n \rangle = 0$, e quindi in valor medio di $cos\theta_{en}$ uguale a zero.

L' esistenza di una violazione di paritá nelle Interazioni Deboli, e quindi nei decadimenti β é stata ipotizzata da T. D. Lee e C. N. Yang [18] nel 1956 (per risolvere il cosiddetto $\theta - \tau$ puzzle, il decadimento simultaneo dei mesoni K in 2 e 3 mesoni π). La prima osservazione sperimentale dell' asimmetria di spin é nei decadimenti β dei nuclei é dovuta a C. S. Wu e collaboratori, nel 1957 [19].

Limiti sulla massa del neutrino. La distribuzione in energia dell' elettrone é potenzialmente sensibile alla massa del neutrino nella zona delle energie piú elevate, lo *end point* dello spettro. Per questo, nella Eq. (14.8) abbiamo mantenuto la massa del neutrino diversa da zero. Dopo integrazione sull' angolo, scriviamo lo spettro come:

$$\frac{d\Gamma_e}{dE_e} = f(E_e) = C \cdot p_\nu E_\nu E_e p_e \simeq C' p_\nu E_\nu$$

con C e C' costanti. Nella zona in cui $E_e \simeq \Delta m$, possiamo ritenere solo i termini del neutrino, che variano rapidamente, e approssimare gli altri con il loro valore all' end-point $E_e \simeq p_e \simeq \Delta m$.

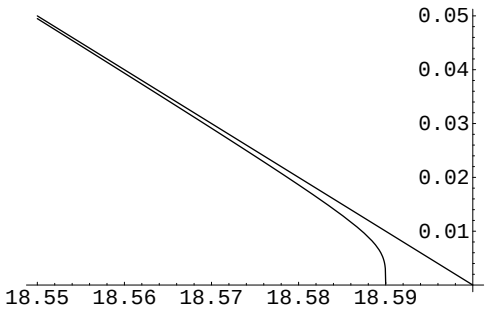

Figura 14.2: Andamento calcolato di $g(E_e)$ nel decadimento del Tritio, vicino all' endpoint; la curva superiore corrisponde ad una massa del neutrino uguale a zero, la curva inferiore a $m = 10$ eV.

É conveniente considerare *la radice quadrata* dello spettro:

$$g(E_e) = \sqrt{f(E_e)} = \sqrt{\left[(E_e - \Delta m)\sqrt{(E_e - \Delta m)^2 - m_\nu^2}\right]} \tag{14.16}$$

Per massa del neutrino esattamente uguale a zero, $g(E_e)$ si annulla *linearmente* all' end point, mentre se $m_\nu \neq 0$ la curva si annulla con *derivata infinita*. L' effetto permette una stima della massa del neutrino, o quanto meno un limite superiore, tanto piú sensibile quanto minore é valore dell' end point, che nel caso del neutrone é pari a $\Delta m \simeq 1.29$ MeV. Un nuclide particolarmente favolrevole é il Tritio, che decade secondo lo schema:

$$^3H \rightarrow {}^3He + e^- + \bar{\nu}$$

con un Δm pari a 18.6 keV.

Le curve che rappresentano lo spettro dell' elettrone, corrispondenti a $m_\nu = 0$ e $m_\nu = 10$ eV sono riportate in Fig. 14.1. Al momento, non é stato osservato alcun effetto nell' endpoint del Tritio che indichi positivamente l' esistenza di una massa del neutrino nel decadimento β, ma solo un limite superiore [17]:

$$m_{\nu_e} \leq 3\text{eV}.$$

14.2 Il decadimento del muone

La particella μ decade con un processo analogo al decadimento beta del neutrone:

$$\mu^-(p) \rightarrow \nu_\mu(p') + e^-(q) + \bar{\nu}_e(q') \tag{14.17}$$

Abbiamo introdotto due tipi neutrini differenti, associati ai due leptoni carichi, in linea con l' evidenza sperimentale e teorica accumulata dagli anni 1960 in poi.

Il decadimento del muone si puó descrivere con una lagrangiana del tipo di Fermi. In vista della forte analogia tra eletttrone e muone indicata dalle interazione elettromagnetiche, assumiamo

una lagrangiana in cui la struttura $V-A$ della coppia $\nu_e - e$ é estesa alla coppia $\nu_\mu - \mu$:

$$L_{\mu-dec.} = \frac{G^{(\mu)}}{\sqrt{2}} \left[\bar{\psi}_{\nu_\mu}\gamma^\lambda(1-\gamma_5)\psi_\mu\right] \left[\bar{\psi}_e\gamma_\lambda(1-\gamma_5)\psi_{\nu_e}\right] + hermitiano\ coniugato \tag{14.18}$$

dove $G^{(\mu)}$ é una nuova costante di accoppiamento analoga alla costante di Fermi introdotta per il neutrone. Nel sistema di quiete del muone, l' elemento di matrice S per il decadimento é:

$$\begin{aligned}&\langle \nu_\mu, e, \bar{\nu}_e|S|\mu\rangle = \\ &= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p-p'-q-q')\sqrt{\frac{m_e m_{\nu_\mu} m_{\nu_e}}{E(p')E(q)E(q')V^4}}M(i\to f)\end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto l' ampiezza invariante di Feynman, $M(i \to f)$. La probabilitá di decadimento si calcola a partire da:

$$< \sum_{spin\ fin} |M(i\to f)|^2 >= \frac{(G^{(\mu)})^2[8M^{\mu\nu}L_{\mu\nu}]}{8m_e m_{\nu_\mu} m_{\nu_e}}$$

$< .. >$ indica la media sullo spin del muone. Il tensore $L_{\mu\nu}$ é lo stesso introdotto nella (14.6), mentre, per uno stato con spin definito:

$$M^{\mu\nu} = Tr\left[(\chi\chi^\dagger)\gamma^\nu \not{p}'\gamma^\mu(1-\gamma_5)\right]$$

In genere, dobbiamo rimpiazzare il prodotto di spinori con una matrice densitá, analogmente a quanto fatto per il neutrone:

$$< (\chi)_\alpha(\chi^\dagger)_\beta > \to \begin{pmatrix} \rho(P) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{14.19}$$

$$\rho(P) = \frac{1+P\sigma_3}{2}$$

dove P é la polarizzazione del muone lungo l' asse 3. Per calcolare $M^{\mu\nu}$ possiamo usare l' identitá (6.137):

$$\begin{aligned}&M^{\mu\nu} = p'^\mu S^\nu + p'^\nu S^\mu - g^{\mu\nu}p'_\alpha S^\alpha - i\epsilon^{\nu\alpha\mu\rho}p'_\alpha S^\rho; \\ &S^\mu = Tr\left[\rho\gamma^\mu(1-\gamma_5)\right]\end{aligned}$$

Moltiplicando per $L_{\mu\nu}$ troviamo:

$$M^{\mu\nu}L_{\mu\nu} = 4(qp')S^\alpha q'_\alpha \tag{14.20}$$

dove gli impulsi sono attribuiti come nella (14.17). Di qui:

$$d\Gamma = \frac{(G^{(\mu)})^2}{(2\pi)^5}\cdot 32\cdot q_\rho S_\sigma \frac{d^3q}{2E_e}\left[\delta^{(4)}(p-q-p'-q')\frac{d^3p'd^3q}{4E_{\nu_e}E_{\nu_\mu}}\left(p'^\rho q'^\sigma\right)\right]$$

Se non osserviamo i neutrini, dobbiamo integrare la quantitá tra parentesi. La misura di integrazione essendo invariante, il risultato é un tensore negli indici ρ, σ costruito con $g^{\rho\sigma}$ e con il vettore $Q = p - q$, l' unica variabile che rimane dopo l' integrazione. Poniamo quindi:

$$\langle p'^{\rho} q'^{\sigma} \rangle = \int \delta^{(4)}(p - q - p' - q') \frac{d^3p' d^3q}{4E_{\nu_e} E_{\nu_\mu}} p'^{\rho} q'^{\sigma} =$$
$$= A(Q^2) g^{\rho\sigma} + B(Q^2) Q^{\rho} Q^{\sigma}$$

per determinare A e B, notiamo le relazioni ($p'^2 = q'^2 = 0$):

$$g_{\rho\sigma} \cdot \langle p'^{\rho} q'^{\sigma} \rangle = \langle \frac{1}{2}(p' + q')^2 \rangle = \frac{Q^2}{2} \cdot I;$$
$$Q_{\rho} Q_{\sigma} \cdot \langle p'^{\rho} q'^{\sigma} \rangle = \frac{1}{4}(Q^2)^2 \cdot I$$
$$I = \langle 1 \rangle = \int \delta^{(4)}(p - q - p' - q') \frac{d^3p' d^3q}{4E_{\nu_e} E_{\nu_\mu}}$$

Troviamo cosí due equazioni per A e B, che ci danno:

$$\langle p'^{\rho} q'^{\sigma} \rangle = \frac{1}{6} I \left(\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} Q^2 + Q^{\rho} Q^{\sigma} \right)$$

Un facile calcolo, inoltre, fornisce[1]:

$$I = \frac{\pi}{2}$$

e quindi, in conclusione, trascurando come sempre termini di ordine m_e^2, troviamo:

$$\frac{d\Gamma}{dE_e dcos\theta_e} = \frac{{G^{(\mu)}}^2}{24\pi^3} m_\mu^2 E_e^2 \left\{ (3 - \frac{4E_e}{m_\mu}) + (1 - \frac{4E_e}{m_\mu}) \frac{Tr\left[\rho \not{q}(1 - \gamma_5)\right]}{E_e} \right\}$$

La traccia si calcola facilmente, in quanto:

$$\not{q}(1 - \gamma_5) = \begin{pmatrix} E_e + \mathbf{p_e} \cdot \sigma & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

da cui:

$$Tr\left[\rho \not{q}(1 - \gamma_5)\right] = E_e(1 + v_e P cos\theta_e)$$

Normalizziamo l' energia dell' elettrone all' energia massima che puó evere nel decadimento, $E_{max.} = m_\mu/2$, ponendo:

$$x = \frac{E_e}{E_{max.}} = \frac{2x}{m_\mu}$$

e troviamo, infine:

$$\frac{d\Gamma}{dx dcos\theta_e} = \frac{{G^{(\mu)}}^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \left[3 - 2x + (1 - 2x)\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{P}\right] \tag{14.21}$$

[1]nel sistema di quiete di Q^μ la funzione delta tridimensionale elimina l' integrazione su $\mathbf{p}'$, quindi: $I = \int d^3q'/(4E'^2)\delta(2E' - Q^0) = (4\pi)/(2 \cdot 4) = \pi/2$.

Integrando sulle variabili residue, troviamo dalla (14.21) la velocitá di decadimento totale:

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{{G^{(\mu)}}^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \tag{14.22}$$

Sia lo spettro dell' elettrone che l'asimmetria di spin sono in perfetto accordo con i dati sperimentali. Confrontando la (14.22) con il valore osservato della vita media, Tab. 14.2, troviamo, inoltre:

$$G^{(\mu)} = 1.16 \cdot 10^{-5}\ GeV^2 \tag{14.23}$$

Limiti cinematici. Tenendo conto della conservazione della quantitá di moto, la conservazione dell' energia nel decadimento si scrive:

$$m_\mu = E_e + E_{\nu_\mu} + |\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_{\nu_\mu}| = E_e + E_{\nu_\mu} + \sqrt{p_e^2 + p_{\nu_\mu}^2 + 2p_e p_{\nu_\mu} cos\theta_{e\nu_\mu}}$$

I limiti cinematici del decadimento nel piano $E_e - E_{\nu_\mu}$ sono dati dalla condizione $cos\theta_{e\nu_\mu} = \pm 1$. Semplificando al caso particelle di massa nulla, troviamo:

$$m_\mu = E_e + E_{\nu_\mu} + |E_e \pm E_{\nu_\mu}|$$

Con il segno positivo abbiamo:

$$\begin{aligned} &E_e + E_{\nu_\mu} = \frac{m_\mu}{2},\ \text{quindi}: \\ &E_e = x\,\frac{m_\mu}{2}\ (0 \le x \le 1);\ E_{\nu_\mu} = (1-x)\,\frac{m_\mu}{2};\ E_{\bar{\nu}_e} = \frac{m_\mu}{2} \end{aligned} \tag{14.24}$$

Con il segno negativo, abbiamo due soluzioni:

$$\begin{aligned} &E_e = \frac{m_\mu}{2},\ \text{quindi}: \\ &E_{\nu_\mu} = y\,\frac{m_\mu}{2}\ (0 \le y \le 1);\ E_{\bar{\nu}_e} = (1-y)\,\frac{m_\mu}{2} \end{aligned} \tag{14.25}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} &E_{\nu_\mu} = \frac{m_\mu}{2},\ \text{quindi}: \\ &E_e = x\,\frac{m_\mu}{2}\ (0 \le x \le 1);\ E_{\bar{\nu}_e} = (1-x)\,\frac{m_\mu}{2} \end{aligned} \tag{14.26}$$

In conclusione, le configurazioni limite sono le tre configurazione collineari, in cui una particella assume l' energia massima, $m_\mu/2$, e le altre si dividono l' altra metá (vedi ad es. la Fig. 14.2).

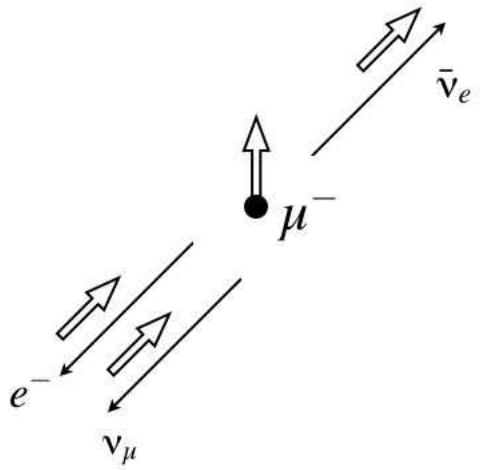

Figura 14.3:

Configurazioni proibite nel decadimento. I risultati nelle (14.20) e (14.21) mostrano che, se poniamo $m_e = 0$, la probabilitá di decadimento si annulla per certe configurazioni delle particelle finali. Questo deriva dalla struttura $V - A$ della lagrangiana, per cui e^- e ν_μ sono prodotti con elicitá negativa e l' antinuetrino, $\bar{\nu}_e$, con elicitá positiva.

Secondo la (14.20), la velocitá di decadimento é proporzionale alla massa invariante $e\nu_\mu$:

$$(p_e p_{\nu_\mu}) \simeq \frac{1}{2}(p_e + p_{\nu_\mu})^2 = \frac{1}{2}M^2_{e\nu_\mu}$$

che si annulla nella configurazione collineare, Fig. 14.2. In questa configurazione, gli spin di e^-, ν_μ e $\bar{\nu}_e$ sono tutti paralleli e concordi, quindi questo stato ha proiezione $-3/2$ lungo la direzione di volo dell' elettrone. Poiché lo stato iniziale puó solo avere proiezione $\pm 1/2$, la probabilitá della configurazione si annulla per la conservazione del momento angolare.

Secondo la (14.21), la probabilitá si annulla per, $x = 1$, $P = 1$, $cos\theta_e = 1$, cioé quando l' elettrone va nella direzione dello spin del muone con l' energia massima, Fig. 14.1. In questa situazione, ν_μ e $\bar{\nu}_e$ sono anche collineari, nella direzione opposta, hanno elicitá opposte e quindi componente dello spin totale nulla. Lo stato finale ha $S_3 = (s_e)_3 = -1/2$ mentre lo stato iniziale ha $S_3 = (s_\mu)_3 = +1/2$.

14.3 Universalitá, teoria corrente x corrente

Le costanti di Fermi(14.15) e (14.23) sono sorprendentemente simili. Questo fatto suggerisce che nella Lagrangiana dei decadimenti beta compaia una corrente debole complessiva,

analogamente a quanto avviene per le interazioni elettromagnetiche:

$$L_W = \frac{G}{\sqrt{2}} \left(J_N^\lambda + J_\mu^\lambda \right) (J_e^\dagger)_\lambda;$$
$$J_N^\lambda = g_V \bar{\psi}_p \gamma_\lambda (1 - \frac{g_A}{g_V}\gamma_5)\psi_n + \bar{\psi}_{\nu_\mu}\gamma_\lambda(1-\gamma_5)\psi_\mu;$$
$$(J_e^\dagger)^\lambda = \bar{\psi}_e \gamma_\lambda (1-\gamma_5)\psi_{\nu_e}$$

dove abbiamo posto $G^{(\mu)} = G$ e $g_V \simeq 1$ rappresenta un' eventuale fattore di scala tra la costante di Fermi dei decadimenti beta nucleari rispetto a quella del muone.

Se vogliamo mantenere anche l' universalitá tra elettrone e muone dobbiamo fare un altro passo e includere i contributi delle due particelle nella stessa corrente. Arriviamo cosí all' espressione *corrente* x *corrente*:

$$L_W = \frac{G}{\sqrt{2}} J_W^\lambda (J_W^\dagger)_\lambda;$$
$$J_W^\lambda = J_N^\lambda + J_e^\lambda + J_\mu^\lambda. \tag{14.27}$$

L' analogia con le interazioni elettromagnetiche é adesso molto piú profonda (vedi ad es. l' espressione della corrente elettromagnetica totale che compare nella (10.17)). Ci aspettiamo inoltre che, aggiungendo appropriati termini alla corrente nucleare si possano descrivere le interazioni deboli di *tutte* le particelle adroniche.

La lagrangiana corrente x corrente descrive nuovi processi, rispetto a quelli considerati finora, in particolare:

- un' interazione debole tra nucleoni, che introduce nelle forze nucleari una componente che *viola la paritá*. Visto il valore di G ci aspettiamo un effetto piccolo. Gli autostati dell' Hamiltoniana nucleare completa possono essere una sovrapposizioni di stati con paritá opposta. La conseguenza é un' asimmetria di polarizzazione nel decadimento gamma di questi stati. Questo tipo di effetto *é stato realmente osservato con il giusto ordine di grandezza* (asimmetrie $\simeq 10^{-5}$);

- le interazioni dei neutrini muonici con la materia nucleare, identiche a quelle dei neutrini elettronici a meno di effetti cinematici collegati alla differenza tra la massa dell' elettrone e del muone, che dá peraltro effetti trascurabili ad alta energia;

Le reazioni prodotte da ciascun tipo di neutrino producono il corrispondente leptone:

$$\nu_e + Nucleo \to e + \ldots; \not\to \mu + \ldots; \tag{14.28}$$
$$\nu_\mu + Nucleo \to \mu + \ldots; \not\to e + \ldots. \tag{14.29}$$

Le regole di selezione seguono dall' invarianza della lagrangiana (14.27) per trasformazioni di fase globali effettuate *separatamente* sui campi ν_e, e e su ν_μ, μ. La simmetria implica la conservazione di due tipi di *cariche leptoniche*: il numero elettronico e il numero muonico:

$$N_e = N(e^-) + N(\nu_e) - N(e^+) - N(\bar{\nu}_e) \tag{14.30}$$
$$N_\mu = N(\mu^-) + N(\nu_\mu) - N(\mu^+) - N(\bar{\nu}_\mu) \tag{14.31}$$

Tabella 14.2: Proprietá dei leptoni carichi determinate dalle Interazioni Deboli, dal Particle Data Group [17]. I numeri tra parentesi indicano l' errore sulle ultime cifre di ciascuna grandezza. Nelle ultime due colonne B(l) indica la frazione dei decadimenti leptonici, con emissione di una coppia $l^-\bar{\nu}_l$, l=e, μ.

	m (MeV)	vita media	B(e)(%)	B(μ)(%)
e	0.510998902(21)	$> 4.6{\cdot}10^{26}$anni	0	0
μ	105.658357(5)	$2.19703(4){\cdot}10^{-6}$ s	100	0
τ	1776.99(28)	$2.906(11){\cdot}10^{-13}$ s	17.84(6)	17.37(6)

L' osservazione della regola di selezione (14.29) all' inizio degli anni '60 ha permesso di stabilire l' esistenza di un neutrino muonico: $\nu_\mu \neq \nu_e$.

La teoria corrente x corrente trova una conferma spettacolare nei decadimenti del leptone τ. Se aggiungiamo alla corrente debole (14.27) il termine che corrisponde alla transizione $\tau \to \nu_\tau$, con la stessa struttura $V - A$ degli altri, concludiamo che questa particella deve mostrare tre tipi di decadimenti[2]:

$$\tau^- \to \begin{cases} \nu_\tau + e + \nu_e \\ \nu_\tau + \mu + \nu_\mu \\ \nu_\tau + adroni \end{cases}$$

La previsione teorica della probabilitá del modo di decadimento semiadronico richiede elementi della Teoria Standard che saranno sviluppati nella III Parte. Per quanto riguarda i primi due decadimenti, invece, possiamo usare la formula (14.22) con la sostituzione $m_\mu \to m_\tau$, nel limite in cui trascuriamo del tutto la massa del muone o dell' elettrone. Otteniamo quindi la predizione:

$$\begin{aligned} &\Gamma(\tau \to \nu_\tau + l^- + \nu_l) = \frac{G \cdot m_\tau^5}{192\pi^3} = \\ &= (\frac{m_\tau}{m_\mu})^5 \Gamma_\mu, \quad (\mathrm{l} = \mathrm{e}, \mu) \end{aligned} \tag{14.32}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} &B(e) = B(\mu); \\ &\tau(\tau) = \frac{1}{\Gamma_\tau} = \frac{B(l)}{\Gamma(\tau \to \nu_\tau + l^- + \nu_l)} = B(l)(\frac{m_\mu}{m_\tau})^5 \tau(\mu) = 2.86 \cdot 10^{-13} \end{aligned}$$

in ottimo accordo con i valori dei rapporti di decadimento leptonici, $B(e), B(\mu)$ e della vita media dati in Tab. 14.2.

Alternativamente, dai valori sperimentali della vita media del τ e della frazione di decadimento leptonico possiamo derivare un nuovo valore della costante di Fermi. Troviamo cosí:

$$G^{(\tau)} = 1.15 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^2 \tag{14.33}$$

in ottimo accordo con il valore determinato dalla vita media del muone, (14.23).

[2]per il decadimento del τ^+ dobbiamo scambiare particelle con antiparticelle e viceversa.

Universalitá: ulteriori sviluppi. La situazione che abbiamo mostrato, per quanto riguarda i decadimenti del neutrone e del muone, é quella prefigurata nel classico lavoro di R. Feynman e M. Gell-Mann [20] in cui si proponevano la forma $V-A$ dell' interazione di Fermi e l' universalitá della corrente vettoriale. Per una misura di precisione della costante di Fermi, tuttavia, occorre tenere conto delle correzioni elettromagnetiche alle vite medie. Un calcolo preciso di queste correzioni mostra che, in realtá, G_F é leggermente inferiore a $G^{(\mu)}$ (di circa il 3%). Il valore piú preciso di G_F si ottiene dalle transizioni beta tra nuclei di spin isotopico 1 e spin-paritá $J^P = 0^+$, le cosiddette transizioni di Fermi super-permesse (*superallowed*). I risultati piú recenti [21] danno:

$$\frac{G_F}{G^{(\mu)}} = 0.9739 \pm 0.0005 \tag{14.34}$$

Ancora piú critica é la situazione nei decadimenti beta delle particelle strane in cui la costante di Fermi corrispondente risulta pari a 1/5 della costante di Fermi G_F.

La riconcilizione di questi fatti con l' universalitá delle Interazioni Deboli é dovuta ad N. Cabibbo [22].

Lo studio della struttura della corrente debole adronica é stato di importanza cruciale per comprendere la natura e le proprietá dei costituenti degli adroni. L' estensione della teoria di Feynman-Gell-Mann-Cabibbo alle particelle con *charm* é dovuta a S. Glashow, J. Iliopoulos e L. Maiani [23], la successiva estensione alle particelle formate da quark b e t a M. Kobayashi e T. Maskawa [24].

14.4 Verso una teoria fondamentale

Sin dall' articolo di Fermi si è sospettato che l' interazione a quattro fermioni rappresentata dalla (10.39) e dalle sue successive modificazioni fosse solo l' approssimazione di bassa energia di una interazione piú fondamentale, in cui l' interazione fosse trasmessa da una particella intermedia, come avviene per le interazioni elettromagnetiche con il fotone. Questa particelle deve essere un bosone, ed ha preso il nome di *Bosone Intermedio*. Se questo avviene, si puó ipotizzare un legame ancora piú stretto tra interazioni elettromagnetiche e deboli, con una simmetria che collega la corrente elettromagnetica alla corrente debole e, allo stesso tempo, il bosone intermedio al fotone.

Il successo della teoria $V-A$ implica che l' eventuale bosone intermedio deve essere descritto da un *campo vettoriale*. Si parla in questo caso di *Bosone Vettore Intermedio* (Intermediate Vector Boson). Le prime teorie unificate delle interazioni deboli ed elettromagnetiche sono dovute a S. Schwinger [25] e, successivamente alla teoria $V-A$, a S. L. Glashow [26].

Per vedere come funziona l' idea, supponiamo di aggiungere alla lagrangiana della materia ordinaria (leptoni, nucleoni etc.) la lagrangiana del bosone intermedio:

$$\begin{aligned}
&L_{IVB} = L^{(0)}_{IVB} + L_{int};\\
&L^{(0)}_{IVB} = -\frac{1}{2} W^{\mu\nu} W^{\dagger}_{\mu\nu} - M^2 W_\mu (W^\mu)^\dagger;\ W^{\mu\nu} = \partial^\nu W^\mu - \partial^\mu W^\nu;\\
&L_{int} = g\left(W_\mu J^\mu_W + W^\dagger_\mu J^{\dagger\ \mu}_W\right)
\end{aligned} \tag{14.35}$$

dove abbiamo descritto il bosone intermedio con un campo vettoriale complesso, $L^{(0)}_{IVB}$ é la lagranagiana libera e g una nuova costante di interazione che supponiamo piccola.

Trattando L_{int} come una perturbazione, abbiamo:

$$S = 1 + i \int d^4x L_{int} + \frac{(i)^2}{2} \int d^4x d^4y T \left[L_{int}(x) L_{int}(y) \right] + \dots \tag{14.36}$$

Il termine del primo ordine contribuisce a processi in cui viene emesso o assorbito un bosone intermedio. Se la massa M é abbastanza grande, questi processi sono proibiti dalla conservazione dell' energia, ad esempio nel decadimento del neutrone. Il termine del secondo ordine si puó esplicitare al modo seguente:

$$\begin{aligned} &\frac{(i)^2}{2} \int d^4x d^4y T \left(L_{int}(x) L_{int}(y) \right) = \frac{(ig)^2}{2} \int d^4x d^4y \cdot \\ &\cdot T \left(W_\mu(x) J^\mu_W(x) W^\dagger_\mu(y) J^{\dagger\ \mu}_W(y) + (x \to y, y \to x) \right) + \dots = \\ &(ig)^2 \int d^4x d^4y \ J^{\dagger\ \mu}_W(y) \left[T \left(W^\dagger_\mu(y) W_\mu(x) \right) \right] J^\mu_W(x) + \dots \end{aligned} \tag{14.37}$$

dove i punti di sospensione rappresentano termini con l' emissione o l'assorbimento di due bosoni intermedi (ancora piú proibiti) ed abbiamo usato il fatto che, nella formula di Dyson usiamo campi liberi, e quindi le correnti ed i campi commutano tra loro.

Nell' espressione (14.37) compare il propagatore del bosone intermedio che, per grande massa, possiamo approssimare con una funzione delta, cfr. la (8.12). Otteniamo, in questo limite, il prodotto delle correnti:

$$S = 1 + i \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^4x \left(J^{\dagger\ \mu}_W(x) J^\mu_W(x) \right) + \dots \tag{14.38}$$

dove di nuovo i punti di sospensione rappresentano termi irrilevanti a bassa energia ed abbiamo posto:

$$\frac{g^2}{M^2} = \frac{G}{\sqrt{2}} \tag{14.39}$$

Nel limite di grande massa del bosone intermedio, il termine di ordine g^2 nella matrice S coincide con il termine del primo ordine nella costante di Fermi della lagrangiana corrente x corrente (14.27) !

La relazione (14.39), oltre a dare ragione della dimensione fisica di G (ricordiamo che g é adimensionale, come la carica elettrica in unitá naturali) dá una indicazione preziosa per costruire una teoria unificata: la *vera costante di accoppiamento*, g puó avere l' ordine di grandezza della carica elettrica se M é sufficientemente grande. Chiediamo:

$$g^2 \simeq e^2 = 4\pi\alpha \simeq \frac{4\pi}{137} \simeq 0.091 \tag{14.40}$$

ed usiamo il valore della costante di Fermi (14.23). Troviamo:

$$M^2 = \frac{\sqrt{2} g^2}{G} \simeq (100 \text{ GeV})^2 \tag{14.41}$$

Questo é l' ordine di grandezza della massa del bosone intermedio in una teoria in cui le interazioni deboli fondamentali, descritte dalla (14.35) sono unificate con le interazioni elettromagnetiche. In questa teoria, la lagrangiana di interazione complessiva si scrive:

$$L_{int} = -eA_\mu J^\mu_{e.m.} + gW_\mu J^\mu_W + gW^\dagger{}_\mu J^{\dagger\ \mu}_W \tag{14.42}$$

con $g \simeq e$.

Problema 1. Dimostrare che la lagrangiana $L^{(0)}_{IVB}$ conduce alle equazioni del moto:

$$-\left(\Box + M^2\right) W^\mu + \partial^\mu \left(\partial_\rho W^\rho\right) = 0 \tag{14.43}$$

e quindi che il propagatore di Feynman del bosone intermedio é:

$$< 0|T\left[W^\mu(x) W^{\dagger\nu}(0)\right]|0 >= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon}\left[-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M^2}\right] e^{-i(kx)} \tag{14.44}$$

Appendice A

Richiami di Meccanica Quantistica

In questa Appendice sono presentati gli elementi di base della Meccanica Quantistica. Lo scopo é piú che altro quello di fissare le nozioni piú importanti e di stabilire notazioni che verranno usate in seguito. Per una discussione approfondita delle basi fisiche della teoria, si rinvia il lettore al libro di Dirac [27]. Una concisa e moderna discussione sui fondamenti e le difficoltá filosofiche della Meccanica Quantistica si trova nel libro di J.Bell [28].

A.1 Il Principio di Sovrapposizione

Ad un dato istante di tempo, gli stati di un sistema quantistico sono rappresentati dagli elementi di uno spazio astratto, H. Questi elementi saranno indicati con la notazione di Dirac:

$|A>,\ |B>,\ |C>\ldots$ in corrispondenza agli stati fisici del sistema A, B, C, etc.

e denominati col termine *ket*.

La struttura matematica di H é fissata dal *Principio di Sovrapposizione*, secondo cui se $|A>$ e $|B>$ rappresentano due possibili stati del sistema, sono sempre realizzabili degli stati corrispondenti ad una loro arbitraria combinazione lineare, con coefficienti complessi α e β:

$$|C>=\alpha|A>+\beta|B> \tag{A.1}$$

Lo spazio H é uno spazio vettoriale (o lineare) complesso, in genere infinito-dimensionale.

La caratterizzazione degli stati fisici implica necessariamente la determinazione sperimentale dei valori di una o piú grandezze osservabili sugli stati stessi. Supponiamo che i ket $|A>$ e $|B>$ che compaiono nella relazione (A.1) corrispondano, rispettivamente, a due valori distinti,diciamo a e b, di una stessa grandezza osservabile X (ad es. l'energia). L'interpretazione fisica dello stato $|C>$, sovrapposizione di $|A>$ e $|B>$ é la seguente:

- La sovrapposizione di $|A>$ con se stesso (il caso $\beta = 0$) dá luogo allo stesso stato fisico: $|A>$ e $\alpha|A>$ rappresentano lo stesso stato qualunque sia $\alpha \neq 0$;

- nel caso in cui α e β sono entrambi $\neq 0$, il risultato di una misura di X sullo stato $|C>$ puó essere a oppure b: *solo uno di questi due valori puó risultare dalla misura.*
- Non é possibile prevedere quale, tra questi due valori, sará il risultato di una data misura. Tuttavia, se gli stati $|A>$ e $|B>$ sono *egualmente normalizzati* (nel senso precisato qui di seguito), le frequenze con cui si presentano i risultati a e b sono nel rapporto $|\alpha|^2/|\beta|^2$.

Per collegare i coefficienti della sovrapposizione alla probabilitá dei diversi risultati della misura, occorre poter normalizzare i vettori che caratterizzano gli stati. Questo richiede che si possa definire in H il prodotto scalare complesso di $|A>$ su $|B>$, che indicheremo con:

$$< B|A >=< A|B >^* \tag{A.2}$$

(l'asterisco indica l'operazione di coniugazione sui numeri complessi).

Il prodotto scalare $< B|A >$ deve essere **lineare** in A e quindi **antilineare** in B

$$< C|\alpha A + \beta B >= \alpha < C|A > +\beta < C|B > \tag{A.3}$$

$$< \alpha A + \beta B|C >= \alpha^* < A|C > +\beta^* < B|C > \tag{A.4}$$

nonché definito positivo:

$$< A|A > 0,$$
$$< A|A >= 0 \text{ se e solo se : } \quad |A >= 0$$

Con questa ulteriore specificazione, lo spazio H é uno *spazio di Hilbert*, e la grandezza $< A|A >$ é la norma del vettore $|A>$.

Accanto ad H, possiamo considerare un nuovo spazio vettoriale, lo *spazio duale* H, definito come lo spazio dei funzionali lineari (a valori complessi) definiti su H. Non é difficile convincersi che gli elementi di H^* sono in corrispondenza biunivoca con quelli di H. In effetti, secondo un noto teorema (dovuto a F.Riesz), ogni funzionale lineare $f(|A>)$ puó essere scritto come:

$$f(|A >) =< f|A > \tag{A.5}$$

con $|f>$ un ket fissato. Quindi possiamo far corrispondere il funzionale $f(|A>)$ in H^* con $|f>$ in H. La (A.5) giustifica la notazione di Dirac per gli elementi di H^*, secondo la quale indicheremo con:

$$< f| \tag{A.6}$$

l'elemento di H^* che corrisponde al ket $|f>$. I vettori $< f|$ sono indicati col termine *bra*. Sulla base della (A.4), il bra $< f|$ dipende antilinearmente dal ket $|f>$ ed il prodotto scalare (A.2) puó essere interpretato come il prodotto del bra $< B|$ con il ket $|A>$ (bra* ket = bracket = prodotto, di qui la scelta dei termini bra e ket).

Tornando all'interpretazione probabilistica dei risultati della misura di X sullo stato $|C>$ nell' eq.(A.1), assumeremo che:

- Se i vettori $|A>$ e $|B>$ hanno norma uno, la probabilitá di ottenere a (oppure b) nella misura di X su $|C>$ é uguale ad $|\alpha|^2$(oppure$|\beta|^2$).

A.2 Operatori Lineari

Sullo spazio vettoriale H possiamo definire degli operatori lineari, delle leggi cioé che ad ogni vettore di H (contenuto in un appropriato dominio di H stesso) associano un altro vettore, che dipende in modo lineare dal primo [1]:

$$|B>= X|A> \tag{A.7}$$
$$X(\alpha|A> +\beta|B>) = \alpha X|A> +\beta X|B> \tag{A.8}$$

Dato X, possiamo considerare il numero complesso:

$$< A|X|B >^*$$

per ogni $< A|$ e $|B >$. Questo numero complesso dipende antilinearmente da $|B >$. Possiamo quindi scrivere:

$$< A|X|B >^*=< B|V >$$

Inoltre, poiché $|V >$ dipende linearmente dal ket $|A >$ che corrisponde al bra $< A|$, possiamo anche scrivere:

$$< A|X|B >^*=< B|V >=< B|X^\dagger|A > \tag{A.9}$$

dove $X^\dagger$ é un nuovo operatore lineare, associato univocamente ad X dalla (A.9), ed indicato col nome di operatore aggiunto (o hermitiano coniugato) di X. Evidentemente valgono le relazioni:

$$(X^\dagger)^\dagger = X \tag{A.10}$$

$$(\alpha X)^\dagger = \alpha^* X^\dagger \tag{A.11}$$

per ogni numero complesso α.

Un operatore H é hermitiano, o autoaggiunto, se $X^\dagger = X$. Gli operatori hermitiani godono di alcune proprietá, cruciali per lo sviluppo della Meccanica Quantistica, per quanto riguarda i loro *autovalori* e *autovettori*. Ricordiamo che un autovalore di un operatore lineare X é un numero (reale o complesso) λ per cui l' equazione:

$$X|v >= \lambda\, |v > \tag{A.12}$$

ammette soluzioni $|v >\neq 0$. Diremo in questo caso che l' autovettore $|v >$ *appartiene* all' autovalore λ e scriveremo $|v >= |\lambda, a, b, \ldots >$ ($a, b, \ldots$ sono parametri che distinguono eventualmente tra gli autovettori che appartengono allo stesso autovalore).

Valgono le proprietá seguenti.

- Gli *autovalori* di un operatore hermitiano sono sempre *numeri reali*;

[1]. Nel seguito assumeremo per semplicitá che gli operatori siano definiti in tutto H.

- autovettori, $|h' >$ ed $|h'' >$ che appartengano a due autovalori distinti, h' e h'', sono ortogonali fra loro:

$$< h'|h' >= 0, \text{ se } h' \neq h'' \tag{A.13}$$

- Gli autovettori di un operatore hermitiano formano una *base completa* in H.

Assumendo, per semplicitá, che H abbia uno spettro discreto di autovalori, l'ultima proprietá implica che ogni vettore puó essere sviluppato nella base degli autovettori normalizzati di H:

$$|A >= \sum_n c_n |h_n > \tag{A.14}$$

con:

$$\begin{aligned} H|h_n >&= h_n|h_n > \\ < h_n|h_m >&= \delta_{n,m} \end{aligned}$$

da cui seguono le proprietá:

$$\begin{aligned} c_n &=< h_n|A > \\ < A|A >&= \sum_n |c_n|^2 \end{aligned} \tag{A.15}$$

Un concetto utile, in connessione alla base degli autovettori di H, é quello di proiettore su uno o piú stati. Il proiettore su un vettore dato, ad esempio su $|h_1 >$ é un operatore che gode delle proprietá:

$$P^2 = P \tag{A.16}$$

$$P|h_1 >= |h_1 > \tag{A.17}$$

$$P|V >= 0, \text{ se } < h_1|V >= 0 \tag{A.18}$$

cioé se $|V >$ é ortogonale ad $|h_1 >$. E' facile vedere che P puó essere scritto formalmente come:

$$P = |h_1 >< h_1| \tag{A.19}$$

(assumendo: $< h_1|h_1 >= 1$). Infatti:

$$\begin{aligned} P^2 &= |h_1 >< h_1|h_1 >< h_1| = |h_1 >< h_1| = P \\ P|h_1 >&= |h_1 >< h_1|h_1 >= |h_1 > \\ P|V >&= |h_1 >< h_1|V >= 0, \text{ se } < h_1|V >= 0 \end{aligned}$$

Il proiettore su uno spazio a piú dimensioni, sotteso da un certo numero di vettori ortogonali tra loro, è dato semplicemente dalla somma dei proiettori sui singoli vettori:

$$P = \sum_n |h_n >< h_n| \tag{A.20}$$

e la *condizione di completezza* della base degli autovettori di H si esprime come:

$$\sum_n |h_n >< h_n| = 1 \tag{A.21}$$

(1 indica l'operatore identitá). Le relazioni eq.(A.15) si ottengono formalmente dalla (A.21) al modo seguente:

$$|A >= 1|A >= \sum_n |h_n >< h_n|A >= \sum_n c_n|h_n >$$

Analogamente,

$$< A|A >=< A|1|A >= \sum_n < A|h_n >< h_n|A >= \sum_n |c_n|^2$$

A.3 Grandezze Osservabili ed Operatori Hermitiani

La rilevanza dei concetti appena illustrati sta nel fatto che nella Meccanica Quantistica ogni grandezza osservabile, **O**, é rappresentata da un operatore hermitiano, O.

Gli autovettori di O rappresentano gli stati fisici su cui **O** assume un valore definito, pari all'autovalore che corrisponde all'autovettore in questione. L'insieme degli autovalori di O (lo spettro) fornisce quindi il complesso dei possibili risultati di una misura di **O**. Le considerazioni della Sez. A.2 permettono di descrivere il risultato di una misura di **O** su uno stato generico $|A >$ al modo seguente.

- La misura di **O** su $|A >$ dá come risultato uno degli autovalori di O, ad esempio h_n, con probabilitá proporzionale al modulo quadro del corrispondente coefficiente dello sviluppo, c_n.

- La somma delle probabilitá su tutti i casi possibili deve essere pari ad uno. Se $|A >$ é normalizzato all'unitá, l' eq.(A.15) mostra che:

$$P(h_n \,\mathrm{su}\, |A >) = |c_n|^2 = | < h_n|A > |^2 \tag{A.22}$$

  Questo risultato dá un significato fisico al prodotto scalare di due vettori. Supponiamo che $|A >$ e $|B >$ corrispondano a stati in cui due grandezze diverse assumono valori definiti, x_a per la grandezza X in $|A >$ e y_b per la grandezza Y in $|B >$. Se $|A >$ e $|B >$ sono normalizzati all'unitá, la probabilitá che una misura di Y in $|A >$ dia il risultato y_b é data dal modulo quadro del prodotto scalare corrispondente:

$$P(y_b \mathrm{in}|A >) = | < B|A > |^2 \tag{A.23}$$

  Per questo motivo, il prodotto scalare viene anche indicato con il termine di ampiezza di probabilitá.

- Il valore medio dei risultati di molte misure di 0 su $|A >$[2] é dato dalla formula:

$$< 0 >_A = \sum_n h_n P(h_n \mathrm{su}|A >) = \tag{A.24}$$

[2]Si intende che ognuna di queste misure va effettuata su una nuova replica del sistema, preparato nello stato $|A >$ dagli opportuni apparati sperimentali.

$$= \sum_n h_n |c_n|^2 = \sum_n h_n < A|h_n >< h_n|A >=$$
$$=< A|O(\sum_n |h_n >< h_n|)|A >=< A|O|A >$$

in virtú della eq.(A.21). Per questo motivo, l'elemento di matrice di O tra $< A|$ ed $|A >$ (elemento di matrice diagonale) si chiama anche il *valore medio* di O su A.

A.4 La Particella Non-Relativistica con Spin 0

Il caso della particella non relativistica senza spin fornisce l'esempio concreto piú semplice delle considerazioni appena esposte. Le osservabili base per questo sistema sono la coordinata, x, (per semplicitá consideriamo una sola dimenzione spaziale e poniamo $\hbar = 1$) ed il momento coniugato, p, con le regole di commutazione:

$$[x, p] = i \tag{A.25}$$

Possiamo introdurre gli autostati di x e di p:

$$x|x >= x|x >$$

$$p|p >= p|p >$$

con le condizioni di normalizzazione e di completezza:

$$< x|x' >= \delta(x - x') \tag{A.26}$$

$$\int dx|x >< x| = 1 \tag{A.27}$$

$$< p|p' >= \delta(p - p') \tag{A.28}$$

$$\int dp|p >< p| = 1 \tag{A.29}$$

La *funzione d' onda* di un dato ket, $|A >$, é la componente di $|A >$ nella base degli autovettori $|x >$:

$$\psi_A(x) =< x|A > \tag{A.30}$$

con:

$$< B|A >= \int dx < B|x >< x|A >= \int dx \psi_B(x)^* \psi_A(x) \tag{A.31}$$

da cui:

$$1 =< A|A >= \int dx < A|x >< x|A >= \int dx |\psi_A(x)|^2 \tag{A.32}$$

in accordo con l'interpretazione di $|\psi_A(x)|^2$ come densitá di probabilitá per trovare la particella tra x e $x + dx$.

Dalla eq.(A.30) e dalla relazione di commutazione, (A.25), si trova [27]:

$$(x\psi_A)(x) = x\psi_A(x)$$
$$(p\psi_A)(x) = -i\frac{d}{dx}\psi_A(x)$$

La funzione d'onda del ket $|p>$ si ottiene direttamente da questa equazione:

$$< x|p >= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ipx} \tag{A.33}$$

con il fattore di normalizzazione determinato dalla (A.28).

A.4.1 Traslazioni e Rotazioni

I risultati appena illustrati permettono di caratterizzare le operazioni di *traslazione spaziale*.

Definiamo gli operatori di traslazione, $U(a)$, come quelli che, applicati ad un ket $|A>$, lo trasformano nel ket che corrisponde allo stato traslato, quello stato cioé che si ottiene traslando di una lunghezza a tutti gli apparati necessari per produrre lo stato $|A>$. L'omogeneitá dello spazio richiede che $U(a)$ sia un operatore unitario (cfr. piú avanti, Sez. A.8)

$$U(a)^\dagger = U(a)^{-1} = U(-a) \tag{A.34}$$

Dalla definizione di U, trascurando fattori di fase irrilevanti, segue che:

$$U(a)|x >= |x + a > \tag{A.35}$$

ovvero:

$$< x|U(a)^\dagger =< x + a| \tag{A.36}$$

Da qui si ottiene:

$$< x|U(a)^\dagger|p >=< x + a|p >= (2\pi)^{-1/2}e^{ip(x+a)} = \tag{A.37}$$
$$= e^{ipa} < x|p >=< x|e^{ipa}|p >$$

Poiché questa relazione deve valere per ogni $|p>$ e per ogni $|x>$, troviamo:

$$U(a) = e^{-ipa} \tag{A.38}$$

Per trasformazioni infinitesime:

$$U(a) \equiv 1 - ipa \tag{A.39}$$

La quantitá di moto é il generatore infinitesimo delle traslazioni spaziali. Per uno stato generico, $|A>$:

$$(U(a)\psi_A)(x) =< x|U(a)|A >=< x - a|A >= \psi_A(x - a) \tag{A.40}$$

Il passaggio al caso tridimensionale permette di discutere la simmetria per rotazioni spaziali. In analogia al caso delle traslazioni, definiamo degli operatori unitari, $U(R)$, secondo la relazione:

$$U(R)|\vec{x}>=|R\vec{x}> \tag{A.41}$$

dove R é la matrice (ortogonale, 3×3) della rotazione ed inoltre:

$$U(R)^\dagger = U(R)^{-1} = U(R^{-1}) \tag{A.42}$$

Per rotazioni di un angolo θ intorno all'asse z:

$$\begin{aligned}(R\vec{x})_x &= \cos\theta x - \sin\theta y\\ (R\vec{x})_x &= \sin\theta x + \cos\theta y\\ (R\vec{x})_z &= z\end{aligned}$$

Procedendo come in (A.40) si trova, per un ket generico:

$$\begin{aligned}&(U(R)\psi_A)(\vec{x}) =< \vec{x}|U(R)|A >=< R^{-1}\vec{x}|A >=\\ &= \psi_A(R^{-1}\vec{x})\end{aligned} \tag{A.43}$$

Per rotazioni infinitesime intorno all'asse z, si trova quindi:

$$\begin{aligned}&< \vec{x}|U(R)|A >= \psi_A(\vec{x}) - \theta(x\frac{d}{dy} - y\frac{d}{dx})\psi_A(\vec{x}) =\\ &=< \vec{x}|[1 - i\theta(\vec{x}\times\vec{p})_z]|A >\end{aligned}$$

da cui

$$U(R) = 1 - i\theta L_z \tag{A.44}$$

dove L_z é la componente del momento angolare lungo l'asse z:

$$\vec{L} = \vec{x}\times\vec{p} \tag{A.45}$$

Piú in generale, per una rotazione generica,

$$U(R) = e^{-i\vec{n}\cdot\vec{L}}$$

dove $\vec{n}$ é un vettore tridimensionale la cui direzione individua l'asse della rotazione mentre $|\vec{n}| = \theta$ é l'angolo di rotazione.

Le componenti del momento angolare sono quindi i generatori delle rotazioni infinitesime. Sulla base delle relazioni canoniche, (A.25), si verifica che gli operatori $\vec{L}$ obbediscono alle relazioni di commutazione:

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \tag{A.46}$$

E' importante convincersi che le regole di commutazione (A.46) sono una diretta conseguenza dalla struttura del gruppo delle rotazioni e della richiesta che:

$$U(R_1)U(R_2) = U(R_1R_2) \tag{A.47}$$

per rotazioni infinitesime arbitrarie, $R_{1,2}$.

Per ottenere questo risultato, usiamo il fatto che ogni matrice ortogonale 3×3, R, puó essere scritta come:

$$R = e^{-i\vec{n}\cdot\vec{T}} \tag{A.48}$$

dove $\vec{n}$ é lo stesso vettore che compare nella eq.(A.46) e le matrici 3×3, $\vec{T}$, sono date da:[3]

$$(T_k)_{ij} = i\epsilon_{ikj} \tag{A.49}$$

Un calcolo esplicito mostra che le matrici T_k soddisfano proprio delle relazioni di commutazione uguali alle (A.46):

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k \tag{A.50}$$

Per $\vec{n}_1$ ed $\vec{n}_2$ infinitesimi:[4]

$$\begin{aligned} &R_1R_2 = e^{-i\vec{n}_1\cdot\vec{T}}e^{-i\vec{n}_2\cdot\vec{T}} = \\ &= e^{-i[(\vec{n}_1+\vec{n}_2)\cdot\vec{T}+(i/2)[\vec{n}_1\cdot\vec{T},\vec{n}_2\cdot\vec{T}]+...]} \\ &= e^{-i[(\vec{n}_1+\vec{n}_2-(1/2)\vec{n}_1\times\vec{n}_2)\cdot T+...]} \end{aligned} \tag{A.51}$$

dove i puntini rappresentano termini di ordine superiore in $\vec{n}_1$ o $\vec{n}_2$. D'altro canto abbiamo:

$$\begin{aligned} &U(R_1)U(R_2) = e^{-i\vec{n}_1\cdot\vec{L}}e^{-i\vec{n}_2\cdot\vec{L}} = e^{-i[(\vec{n}_1+\vec{n}_2)L+(i/2)[\vec{n}_1\cdot\vec{L},\vec{n}_2\cdot\vec{L}]+...]} = \\ &= U(e^{-i[(\vec{n}_1+\vec{n}_2)T+(1/2)[\vec{n}_1\cdot\vec{T},\vec{n}_2\cdot\vec{T}]+...]}) = U(e^{-i[(\vec{n}_1+\vec{n}_2-(1/2)\vec{n}_1\times\vec{n}_2\cdot T]+...]}) \end{aligned} \tag{A.52}$$

dove le ultime eguaglianze seguono dalla legge di composizione (A.47). Per confronto, vediamo che gli operatori $\vec{L}$ devono obbedire proprio alle relazioni di commutazione (A.46). Il fatto che i commutatori canonici conducano a queste relazioni indica che gli operatori U, eq. (A.44) forniscono una *rappresentazione* del gruppo delle rotazioni, ma potrebbero esserci (e ci sono, come vedremo) altre rappresentazioni indipendenti.

Le considerazioni che abbiamo appena esposto conducono ad una definizione del tutto generale del momento angolare.

Per qualunque sistema fisico, possiamo individuare (operativamente) gli operatori $U(R)$ che descrivono l'azione di una rotazione del sistema stesso e per i quali valgono le relazioni (A.46). Per questo sistema, *definiamo* il momento angolare dalla relazione:

$$U(R) = 1 - i\vec{n}\cdot\vec{J} \tag{A.53}$$

per trasformazioni infinitesime. Per quanto visto prima, le componenti di $\vec{J}$ soddisfano automaticamente a relazioni di commutazione analoghe alle (1.53):

[3] ad esempio, si verifica facilmente che la matrice nell'eq.(A.43) puó essere scritta come $e^{-i\theta T_3}$ con $(T_3)_{12} = -(T_3)_{21} = i\epsilon_{132}$, e tutti gli altri elementi uguali a zero.

[4] questa relazione si dimostra direttamente sviluppando gli esponenziali in potenze di $\vec{n}_1$ e di $\vec{n}_2$

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \tag{A.54}$$

Analoghe considerazioni valogono per le componenti della quantitá di moto. Per un sistema fisico arbitrario, possiamo definire la quantitá di moto dalla relazione:

$$U(\vec{a}) = 1 - i\vec{a} \cdot \vec{P} \tag{A.55}$$

valida per traslazioni infinitesime individuate dal vettore $\vec{a}$.

A.4.2 Spin

L'esempio piú semplice della definizione di momento angolare appena data é quello della particella con spin. In questo caso, i ket che rappresentano una particella localizzata in $\vec{x}$ sono caratterizzati da un ulteriore numero quantico σ tale che l' effetto di una rotazione, oltre a ruotare $\vec{x}$ in $R\vec{x}$, é quello di produrre una combinazione lineare degli stati corrispondenti ai vari valori di σ[5]:

$$U(R)|\vec{x}, \sigma >= |R\vec{x}, \sigma' > S(R)_{\sigma'\sigma} \tag{A.56}$$

L'unitarietá di U implica che $S(R)$ sia una matrice unitaria:

$$S(R)^\dagger S(R) = 1 \tag{A.57}$$

ed inoltre la relazione (A.56) implica che le matrici $S(R)$ debbano fornire esse stesse una rappresentazione del gruppo delle rotazioni (per rotazioni infinitesime):

$$S(R_1)S(R_2) = S(R_1 R_2) \tag{A.58}$$

Quindi, anche S deve avere la forma:

$$S = 1 - i\vec{n} \cdot \vec{S} \tag{A.59}$$

essendo $\vec{S}$ tre opportune matrici, nello spazio σ, che soddisfano le relazioni di commutazione del momento angolare:

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk} S_k \tag{A.60}$$

Le realizzazioni possibili di $\vec{S}$ corrispondono, come é noto, a momenti angolari s interi o semiinteri. Fissato s, σ varia tra $-s$ e $+s$ a passi di uno. Ad esempio, per $s = 1/2$, $\sigma = -1/2, +1/2$ e:

$$S_i = \frac{1}{2}\sigma_i \tag{A.61}$$

dove σ_i sono le tre matrici di Pauli.

[5]Nel seguito si sottointende la somma sugli indici ripetuti.

La funzione d'onda di uno stato generico $|A>$ é adesso uno ''spinore" a $2s+1$ componenti:

$$\psi_\sigma(\vec{x}) =< \sigma, \vec{x}|A > \tag{A.62}$$

ed inoltre:

$$[U(R)\psi]_\sigma(\vec{x}) =< \sigma, \vec{x}|U(R)|A >= S(R^{-1})_{\sigma\sigma'}\psi_{\sigma'}(R^{-1}\vec{x})$$

da cui, per trasformazioni infinitesime, si trova:

$$< \sigma, \vec{x}|U(R)|A >=< \sigma, \vec{x}|1 - i\vec{n}\cdot(\vec{L}+\vec{S})|A > \tag{A.63}$$

L' operatore associato ai generatori delle rotazioni, il momento angolare totale, é la somma di due termini mutuamente commutanti: il momento angolare orbitale, $\vec{L}$, ed il momento angolare di spin, $\vec{S}$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \tag{A.64}$$

Prima di concludere questa Sezione, vogliamo notare una caratteristica della rappresentazione di spin $1/2$. Trascurando le variabili spaziali, l'azione di una rotazione di un angolo θ intorno all'asse z su uno spinore con, ad esempio, $S_z = 1/2$ é data da:

$$U(R)|\sigma = 1/2 >= e^{-i\theta S_2}|\sigma = 1/2 >= \tag{A.65}$$

$$= e^{-i\theta/2}|\sigma = 1/2 >$$

Per $\theta = 2\pi$, il ket viene moltiplicato per -1. Questo é del tutto consistente col fatto che lo stato fisico deve tornare in se stesso dopo una rotazione completa, dal momento che i ket $|A>$ e $-|A>$ rappresentano lo stesso stato fisico. Tuttavia questo fatto mostra che la regola di moltiplicazione (A.58) puó non essere soddisfatta per rotazioni finite, nel caso di rappresentazioni corrispondente allo spin $1/2$ (in generale, per spin semintero). In effetti, come mostra questo esempio, la Meccanica Quantistica richiede solo che le rappresentazioni del gruppo delle rotazioni obbediscano alla legge di moltiplicazione del gruppo *a meno di una fase*:

$$U(R_1)U(R_2) = \omega(R_1, R_2)U(R_1, R_2) \tag{A.66}$$

La fase $\omega(R_1, R_2)$, senza perdita di generalitá, puó essere scelta pari a $+1$ o -1. Gli operatori $U(R)$ danno, in questo caseo, una *rappresentazione a meno di una fase* [29] del gruppo delle rotazioni.

A.5 Evoluzione nel tempo dei sistemi quantistici

I valori medi delle grandezze osservabili dipengono in genere dal tempo. Nella Meccanica Quantistica, questi valori medi sono dati dall'espressione:

$$< X >_t =< A(t)|X(t)|A(t) > \tag{A.67}$$

C'é un'ambiguitá intrinseca nel determinare la dipendenza dal tempo dei vari elementi che compongono il secondo membro dell'eq. (A.67), bra, ket e operatore, poiché possiamo trasferire questa dipendenza da un elemento all'altro, purché il valore medio $< X >_t$, che poi é tutto quello che possiamo misurare sul sistema, resti immutato. L' ambiguitá dá luogo a descrizioni del moto diverse, collegate da trasformazioni unitarie dipendenti dal tempo, quindi equivalenti tra loro. Nelle prossime Sezioni, descriviamo la rappresentazione di Schroedinger e la rappresentazione di Heisenberg. Successivamente considereremo una terza descrizione del moto, la rappresentazione di Dirac, o di interazione, particolarmente conveniente nel caso di sistemi debolmente interagenti.

A.5.1 La Rappresentazione di Schroedinger

In questa rappresentazione, le variabili dinamiche (posizione, quantitá di moto etc.) sono associate ad operatori fissati. La variazione col tempo del valore medio (A.67) é dovuta alla variazione col tempo del ket che rappresenta lo stato fisico al tempo t. Dato il ket $|A>$ al tempo t_0 (lo stato iniziale), il Principio di Sovrapposizione richiede che $|A(t)>$ si ottenga da $|A>$ mediante l'applicazione di un operatore lineare, $U(t,t_0)$, indipendente da $|A>$:

$$|A(t)>= U(t,t_0)|A> \tag{A.68}$$

Inoltre, se $|A>$ é normalizzato, in modo che le sue componenti c_n sulla base di un dato osservabile **O** siano le ampiezze di probabilitá dei possibili risultati di una misura di **O**, é naturale richiedere che anche $|A(t)>$ sia normalizzato, in modo che:

$$\sum_n |c_n|^2 = \sum_n |c_n(t)|^2 = 1 \tag{A.69}$$

L'eq. (A.69) corrisponde alla conservazione della probabilitá di tutti i risultati possibili. Data questa condizione, l'operatore $U(t,t_0)$ risulta unitario:

$$U(t,t_0)^\dagger U(t,t_0) = 1 \tag{A.70}$$

Possiamo trasformare la (A.68) in una equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}|A(t)>= \frac{dU(t,t_0)}{dt}U(t,t_0)^\dagger|A(t)>= -\frac{i}{\hbar}H|A(t)> \tag{A.71}$$

H, a meno del fattore $1/\hbar$ é il generatore delle traslazioni infinitesime nel tempo. Poiché U é unitario, H é hermitiano:

$$H = i\hbar\frac{dU(t,t_0)}{dt}U(t,t_0)^\dagger = \tag{A.72}$$

$$= i\hbar\frac{d}{dt}[U(t,t_0)U(t,t_0)^\dagger] - i\hbar U(t,t_0)\frac{dU(t,t_0)^\dagger}{dt} = H^\dagger$$

L'equazione (A.71) é l'equazione di Schroedinger. E' un'equazione differenziale del primo ordine in t, in accordo con l'ipotesi che, al tempo t_0, il ket $|A>$ dia una descrizione completa dello stato del sistema e che quindi l' evoluzione sia determinata una sola condizione iniziale.

Nel limite classico, H diventa la funzione di Hamilton del sistema, e per questo prende il nome di operatore Hamiltoniano, o Hamiltoniana, del sistema stesso.

Nel caso in cui H sia indipendente dal tempo, possiamo integrare l' eq. (A.71) e scrivere direttamente la soluzione dell'equazione di Schroedinger che si riduce allo stato $|A>$ al tempo t_0:

$$|A(t)>= e^{-\frac{1}{h}H(t-t_0)}|A> \tag{A.73}$$

Se sviluppiamo $|A>$ nella base degli autovettori di H:

$$|A(t)>= \sum_n c_n(t)|h_n> \tag{A.74}$$

otteniamo dalla (A.71):

$$c_n(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)}c_n(t_0) \tag{A.75}$$

L'energia é conservata: l' eq. (A.71) mostra che se $|A>$ é una autostato di H, lo é anche $|A(t)>$, con lo stesso autovalore. Per uno stato generico si conserva il valore medio di H:

$$< A(t)|H|A(t)>=< A|H|A>= cost. \tag{A.76}$$

Un aspetto interessante di questi risultati é l'invarianza per traslazioni temporali, il fatto, cioé, che $|A(t)>$ dipenda solo da $t - t_0$. Se eseguiamo un esperimento preparando il sistema nello stato $|A>$ alle ore 9.30 di oggi e facciamo una misura 10.00, il risultato é lo stesso che se avessimo eseguito le stesse operazioni tra le 17.00 e le 17.30 di ieri. Questo risultato segue direttamente dall'indipendenza dal tempo di H.

Ragionando in senso inverso, se ci aspettiamo *a priori* che un dato sistema sia invariante per traslazioni temporali, la sua hamiltoniana sará indipendente da t e quindi conservata nel tempo: *la conservazione dell' energia é diretta conseguenza dell' invarianza per traslazioni temporali.*

Tutto quanto sappiamo ci fa ritenere che i sistemi sufficientemente isolati dal resto dell'Universo sono indipendenti dal tempo. Un sistema isolato, quindi, deve soddisfare alla conservazione dell' energia.

A.5.2 La Rappresentazione di Heisenberg

In alternativa alla rappresentazione di Schroedinger, possiamo associare lo stato ad un vettore fisso, ed attribuire la dipendenza dal tempo dei valori medi (A.67) alla variazione dell' operatore che rappresenta l'osservabile. Formalmente, la rappresentazione di Heisenberg si ottiene applicando al ket $|A(t)>_S$ della rappresentazione di Schroedinger la trasformazione unitaria che lo riporta al valore che aveva ad un tempo fissato, t_0:

$$|A>_H= e^{+\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|A(t)>_S \tag{A.77}$$

Al tempo t_0, le due rappresentazioni coincidono.

La dipendenza da t delle grandezze osservabili é fissata dalla richiesta che il valore medio (A.67) sia lo stesso nelle due rappresentazioni, ad ogni t e che il ket $|A>_H$ sia costante. Dall' equazione:

$$_S<A(t)|X_S|A(t)>_S=\ _H<A|X_H(t)|A>_H \tag{A.78}$$

si ottiene, usando la (A.77):

$$X_H(t)=e^{+\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}X_S e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \tag{A.79}$$

Differenziando rispetto al tempo, otteniamo:

$$i\hbar\frac{dX_H(t)}{dt}=[X_H(t),H] \tag{A.80}$$

Per visualizzare la rappresentazione di Heisenberg, ricorriamo all'analogia col moto di un sistema classico.

Possiamo caratterizzare lo stato del sistema al tempo t dando la posizione istantanea del sistema nello spazio delle fasi, (p_t, q_t): questo corrisponde alla rappresentazione di Schroedinger. La rappresentazione di Heisenberg corrisponde invece a descrivere lo stato di moto dando la condizione iniziale (p_{t_0}, q_{t_0}), ad un tempo arbitrario ma fissato, t_0. La condizione iniziale determina completamente la traiettoria nello spazio delle fasi e naturalmente, come lo stato di Heisenberg, non cambia col tempo.

C'é un aspetto peculiare della rappresentazione di Heisenberg, che é implicito in quanto detto ma che vale la pena sottolineare.

Lo stato di Heisenberg é indipendente dal tempo t. Tuttavia, il vettore che lo rappresenta dipende implicitamente dal valore del tempo t_0, scelto per fissare la condizione iniziale (in altre parole, il tempo, al quale la rappresentazione di Heisenberg coincide con quella di Schroedinger). La scelta di t_0 é arbitraria, ma dobbiamo fissare t_0 allo stesso modo per tutti gli stati di moto, se vogliamo confrontare tra loro stati diversi.

I vettori che rappresentano lo stato di moto per una data scelta di t_0 differiscono da quelli relativi ad un'altra scelta per una trasformazione unitaria:

$$|A;t_0>_H=e^{+\frac{i}{\hbar}H(t_0-t_0')}|A;t_0'>_H \tag{A.81}$$

La (A.81) lascia invariati i valori medi (A.67). Tuttavia, al variare di t_0, il vettore che rappresenta uno stesso stato di moto puó assumere aspetti considerevolmente diversi tra loro.

A.5.3 La Rappresentazione di Interazione

In molti casi fisicamente interessanti, l'Hamiltoniana é la somma di due termini:

$$H=H_0+V_0 \tag{A.82}$$

di cui H_0 é esattamente risolubile e V_0 puó essere considerato una modifica "piccola" di H_0. In questi casi, possiamo cercare di approssimare le soluzioni di H a partire dalle soluzioni di H_0,

con uno sviluppo in potenze di V_0 limitato ad un numero finito di termini. Questa é la versione quantistica della Teoria delle Perturbazioni, ampiamente usata in Meccanica Classica.

L'esempio piú rilevante é l'Elettrodinamica Quantistica, QED. H_0 é l'Hamiltoniana che descrive elettroni e fotoni liberi mentre V_0 descrive l'interazione dell'elettrone con il campo elettromagnetico. L'intesitá dell'interazione é determinata dalla carica elettrica dell'elettrone stesso, e si esprime in termini di una grandezza adimensionale (la costante di struttura fina):

$$\alpha = (\frac{e^2}{4\pi\hbar c}) = \frac{1}{137} \tag{A.83}$$

molto minore dell'unitá.

Per ottenere lo sviluppo perturbativo in modo sistematico, é conveniente descrivere il moto del sistema nella *rappresentazione di interazione*, o rappresentazione di Dirac.

Lo stato al tempo t nella rappresentazione di interazione si ottiene dallo stato nella rappresentazione di Schroedinger con la trasformazione unitaria:

$$|A(t)>_I = e^{+\frac{i}{\hbar}H_0 t}|A(t)>_S \tag{A.84}$$

I valori medi delle osservabili devono essere gli stessi nelle due rappresentazioni:

$$_I<A(t)|O_I(T)|A(t)>_I = _S<A(t)|O_S|A(t)>_S \tag{A.85}$$

e quindi:

$$O_I(t) = e^{+\frac{i}{\hbar}H_0 t} O_S e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} \tag{A.86}$$

Differenziando rispetto a t, otteniamo le equazioni del moto degli stati e delle osservabili:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|A(t)>_I = V_{0I}(t)|A(t)>_I \tag{A.87}$$

$$i\hbar\frac{dO_I(t)}{dt} = [H_0, O_I(t)] \tag{A.88}$$

dove $V_{0I}(t)$ é l'Hamiltoniana di interazione nella rappresentazione di interazione:

$$V_{0I}(t) = e^{+\frac{i}{\hbar}H_0 t} V_0 e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} \tag{A.89}$$

Le osservabili variano nel tempo con l'Hamiltoniana libera, mentre la variazione col tempo degli stati é dovuta soltanto all'interazione.Da notare che V_{0I} dipende esplicitamente dal tempo, in quanto V_0 ed H_0, in genere, non commutano tra loro.

L' eq. (6.6) definisce un operatore di traslazione nel tempo tra t_0 e t:

$$|t>_I = U_I(t,t_0)|t_0>_I \tag{A.90}$$

dove abbiamo indicato con $|t>_I$ lo stato al tempo t che si riduce a $|t_0>_I$ al tempo t_0.

$U_I(t,t_0)$ é un operatore lineare. Inoltre, verifica la relazione:

$$U_I(t,t_0) = U_I(t,t_1)U_I(t_1,t_0) \ (t>t_1>t_0) \tag{A.91}$$

U_I é unitario, come conseguenza del fatto che l'hamiltoniana di interazione. V_{0I}, é hermitiana:

$$U(t,t_0)^\dagger U(t,t_0) = U(t,t_0)U(t,t_0)^\dagger = I \tag{A.92}$$

Naturalmente, possiamo anche risolvere l'equazione del moto con una condizione finale, cioé assegnando lo stato ad un tempo $t_1 > t$. Il corrispondente operatore, $\bar{U}_I(t,t_1)$, definito da:

$$|t>_I = \bar{U}_I(t,t_1)|t_1>_I \quad (t_1>t) \tag{A.93}$$

é l'hermitiano coniugato di $U_I(t_1,t)$:

$$\bar{U}_I(t,t_1) = U_I(t_1,t)^\dagger \tag{A.94}$$

A.6 Lo sviluppo perturbativo

Possiamo esprimere U_I come una serie di potenze in V_{0I}. Per fare questo, integriamo la (6.6) tra t_0 e t, ottenendo cosí l'equazione integrale:

$$|t>_1 = |t_0>_I - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' V_{0I}(t')|t'>_I \tag{A.95}$$

Ovviamente, $|t>_I$ differisce da $|t_0>_I$ per termini che sono almeno di ordine V_{0I}. La eq. (6.14) ci dá la soluzione al primo ordine sostituendo semplicemente $|t'>_I$ con $|t_0>_I$:

$$|t>_I = |t_0>_I - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' V_{0I}(t')|t_0>_I + O(V_0^2) \tag{A.96}$$

Il procedimento puó essere ripetuto. Ad esempio, sostituendo di nuovo la (6.15) nella (6.14), otteniamo la soluzione al secondo ordine:

$$\begin{aligned} |t>_1 &= |t_0>_I - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' V_{0I}(t')|t_0>_I + \\ &+(-\frac{i}{\hbar})^2 \int_{t_0}^{t} dt' V_{0I}(t') \int_{t_0}^{t'} V_{0I}(t'')|t_0>_I + O(V_0^3) \end{aligned} \tag{A.97}$$

e cosí via.

Continuando indefinitamente il procedimento, si trova la serie:

$$|t>_I = |t_0>_I + \sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{i}{\hbar})^n dt_1 V_{0I}(t_1)\int_{t_0}^{t_1} dt_2 V_{0I}(t_2)\ldots\int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n V_{0I}(t_n)|t_0>_I = \tag{A.98}$$

$$= [1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{i}{\hbar})^n \int_{t_0}^{t} dt_I V_{0I}(t_I)\int_{t_0}^{t_1} dt_2 V_{0I}(t_2)\ldots\int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n V_{0I}(t_n)]|t_0>_I =$$

$$= U_I(t,t_0)|t_0>_I$$

che dá una soluzione formale dell'equazione del moto con la condizione iniziale $|t>_I = |t_0>_I$, come si verifica facilmente per sostituzione nella eq. (6.6).

A.7 Prodotti tempo-ordinati

Conviene esprimere i termini della serie come risultato di una integrazione indipendente su tutte le variabili $t_1,\ldots t_n$, nell'intervallo fisso tra t_0 e t. Per fare questo, si introduce il prodotto tempo-ordinato (T-prodotto) degli operatori $V_{0I}(t_1), V_{0I}(t_2)\ldots, V_{0I}(t_n)$ definito, per valori fissati delle variabili $t_1, t_2, \ldots t_n$, come il prodotto degli operatori nell'ordine che corrisponde a valori decrescenti del tempo, leggendo da sinistra verso destra:

$$T(V_{0I}(t_1), V_{0I}(t_2)\ldots, V_{0I}(t_n)) = V_{0I}(t_{a1})V_{0I}(t_{a2})\ldots V_{0I}(t_{an}) \tag{A.99}$$

dove $t_{a_1}, t_{a_2}\ldots t_{a_n}$ é la permutazione di $t_1, t_2, \ldots, t_n$ per cui:

$$t_{a_1} > t_{a_2} > \ldots > t_{a_n} \tag{A.100}$$

Nel caso di due operatori, si ha, esplicitamente:

$$T(V_{0I}(I_1), V_{0I}(t_2)) = \theta(t_1 - t_2)V_{0I}(t_1 V_{0I}(t_2 + \tag{A.101}$$

$$+\theta(t_2 - t_1)V_{0I}(t_2)V_{0I}(t_1)$$

con $\theta(x) = 0, 1$ a seconda che sia $x < 0$ o $x > 0$.

Consideriamo adesso l'integrale:

$$\int_{t_0}^{t} T(V_{0I}(t_1), V_{0I}(t_2)\ldots, V_{0I}(t_n))dt_1 dt_2\ldots dt_n \tag{A.102}$$

con tutte le variabili tra t_0 e t.

Il dominio di integrazione si decompone in $n!$ domini, corrispondenti ai possibili ordinamenti temporali delle variabili. Il contributo del particolare dominio in cui vale l'ordinamento dato dalla (6.19) é dato da:

$$\int_{t_0}^{t} dt_{a1} V_{0I}(t_{a1}) \int_{t_0}^{t_{a1}} dt_{a2} dV_{0I}(t_{a2}) \dots \int_{t0}^{t_{an-1}} dt_{an} V_{0I}(t_{an}) \tag{A.103}$$

e quindi coincide proprio con l'integrale che compare nella (6.17), a meno di un cambiamento triviale del nome delle variabili. L'istruzione di ordinamento temporale nella (6.21) fá sí che gli integrali estesi agli $n!$ domini siano tutti uguali alla (6.22), per cui, in conclusione, possiamo riscrivere $U_I(t, t_0)$ nella forma simmetrica:

$$U_I(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1} (-\frac{i}{\hbar})^n \frac{1}{n!} \int_{t0}^{t} dt_1 dt_2 \dots dt_n T(V_{0I}(t_1) V_{0I}(t_2) \dots V_{0I}(t_n)) \tag{A.104}$$

A.8 Simmetrie e costanti del moto

Le osservabili che commutano con l'hamiltoniana sono costanti del moto: il loro valore medio é indipendente da t (cfr. l' equazione(A.80)). Come in Meccanica Classica (cfr. il Teorema di Noether), nella Meccanica Quantistica c' é una relazione diretta tra le simmetrie del sistema fisico e le costanti del moto.

Qualitativamente, parliamo di simmetria tutte le volte che possiamo eseguire una trasformazione sugli apparati che preparano il sistema (nei diversi stati $|A>, |B>$, etc) in modo tale da lasciare invarianti le relazioni mutue tra gli stati stessi. In concreto, se indichiamo con $|RA>, |RB>$, etc. gli stati che si ottengono da $|A>, |B>$, etc. con la trasformazione R, questo vuol dire che:

$$| < RB|RA > |^2 = | < B|A > |^2 \tag{A.105}$$

per tutti gli stati $|A>$ e $|B>$.

Come ha mostrato Wigner, l' eq. (A.105) da luogo a due alternative, cioé:

$$< RB|RA > = < B|A > \tag{A.106}$$

ovvero:

$$< RB|RA > = < B|A > * \tag{A.107}$$

Se vale la condizione (A.106) la trasformazione é rappresentata da un operatore $U(R)$ lineare ed unitario:

$$\begin{aligned} &|RA> = U(R)|a> \\ &U(R)U(R)^\dagger = 1 \end{aligned} \tag{A.108}$$

La condizione (A.107) richiede invece che $U(R)$ sia antilineare ed antiunitario [**?**]:

$$\begin{aligned} &U(R)(\alpha|A> +\beta|B>) = \alpha^* U(R)|A> +\beta^* U(R)|B> \\ &U(R)U(R)^\dagger = 1 \end{aligned} \tag{A.109}$$

La seconda alternativa si applica al caso dell'inversione temporale (time-reversal). Tutte le trasformazioni che lasciano inalterato il verso del tempo devono, invece, essere rappresentate da operatori unitari, e questo é il caso che consideremo in questa Sezione. In particolare, devono essere unitari gli operatori che rappresentano quei gruppi di trasformazioni che sono connesse con continuitá alla trasformazione identitá (che puó essere sempre rappresentata dall'operatore 1) come ad esempio le traslazioni o le rotazioni spaziali, considerate nella Sez. A.4.1, o le traslazioni nel tempo, Sez. A.5.1.

Data un'osservabile X, definiamo l' osservabile trasformata come quella che, sullo stato $|RA>$, ha lo stesso valore medio che X ha in $|A>$:

$$< RA|X_R|RA >=< A|X|A > \tag{A.110}$$

Dalla (A.108) troviamo quindi:

$$X_R = U(R)XU(R)^\dagger \tag{A.111}$$

Il caso piú importante é quello dell'Hamiltoniana. Se H é lasciata invariante dalla trasformazione:

$$H_R = U(R)HU(R)^\dagger = H \tag{A.112}$$

allora:

$$[U(R), H] = 0 \tag{A.113}$$

tutti gli operatori $U(R)$ sono delle costanti del moto.

Confrontiamo due esperimenti che partono da due stati che sono l'uno il trasformato dell'altro $|A>$ e $|RA>$ al tempo $t = 0$. Nei due casi, al tempo t abbiamo:

$$\begin{aligned} &|A(t)>= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|A> \\ &|RA(t)>= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|RA>= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}U(R)|A>= \\ &= U(R)e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|A>= U(R)|A(t)> \end{aligned} \tag{A.114}$$

In questo caso si parla di simmetria esatta, o conservata, e le formule precedenti indicano che la relazione per cui uno stato é il trasformato dell'altro si conserva nel tempo.

Dato un gruppo di trasformazioni continue, consideriamo quelle infinitamente prossime all'identitá. Per queste, possiamo porre:

$$U(R) = U(\lambda) \equiv 1 - i\lambda T \tag{A.115}$$

dove λ denota il parametro della trasformazione. Il generatore infinitesimo, T, deve essere hermitiano dato che $U(R)$ é unitario:

$$T^\dagger = T \tag{A.116}$$

Sulla base della (A.114), il generatore di una simmetria esatta commuta con H:

- *un gruppo continuo di simmetrie esatte implica l'esistenza di osservabili conservate*, tante quanti sono i parametri indipendenti che caratterizzano il gruppo stesso.

La conservazione della quantitá di moto e del momento angolare sono gli esempi piú immediati di questo risultato, peraltro assolutamente generale.

Le osservabili delle teorie quantistiche di campo, ad esempio la densitá di energia, sono grandezze locali, operatori che possiamo pensare determinati da misure in una piccola regione dello spazio-tempo.

Indichiamo con $\Pi(\vec{x},t)$ uno di questi operatori. Il vetore $\vec{x}$ é una variabile numerica (e non l' operatore coordinata) in quanto é collegato alla posizione degli apparati macroscopici che misurano $\Pi(\vec{x},t)$.

$\Pi(\vec{x},t)$ si ottiene con una traslazione spazio-temporale, a partire da $\Pi(\vec{0},0) = \Pi(0)$. Per quanto riguarda il tempo, dato che $\Pi(\vec{x},t)$ é un operatore nella rappresentazione di Heisenberg, otteniamo dalla (A.79):

$$\Pi(\vec{x},t) = e^{+\frac{i}{\hbar}Ht}\Pi(\vec{x},0)e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \tag{A.117}$$

Per quanto riguarda le variabili spaziali, usando la (A.111) e la (A.39), troviamo, :

$$\Pi(\vec{x},t) = e^{+\frac{i}{\hbar}Ht}e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\vec{x}}\Pi(\vec{0},0)e^{+\frac{i}{\hbar}\vec{P}\cdot\vec{x}}e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \tag{A.118}$$

Negli esponenti compare la combinazione relativisticamente invariante:

$$Ht - \vec{P}\cdot\vec{x} = P^\mu x^\nu g_{\mu\nu} = P_\mu x^\mu \tag{A.119}$$

L'elemento di matrice tra autostati dell'energia e della quantitá di moto di un operatore locale ha, di conseguenza, una dipendenza spazio-temporale caratteristica:

$$\begin{aligned} &< P', E'|\Pi(\vec{x},t)|P,E >= \\ &=< P', E'|e^{+\frac{i}{\hbar}(Ht-\vec{P}\cdot\vec{x})}\Pi(\vec{0},0)e^{-\frac{i}{\hbar}(Ht-\vec{P}'\cdot\vec{x})}|P,E >= \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}[(E-E')t-(\vec{P}-\vec{P}')\cdot\vec{x}]} < P', E'|\Pi(\vec{0},0)|P,E > \end{aligned} \tag{A.120}$$

Bibliografia

[1] Landau e Lifshitz, Meccanica Quantistica Relativistica.

[2] Landau e Lifshitz, Teoria dei Campi Classici

[3] F. J. Belinfante, Physica **6** (1939) 887; L. Rosenfeld, Memoires de l' Acad. Roy. Belgique, **6** (1940) 30.

[4] F. Mandl, G. Shaw, Quantum Field Theory, J. Wyley and Sons, 1984.

[5] N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, *Introduction to the theory of quantized fields*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1959.

[6] H. A. Lorentz, The Theory of the Electron, Dover

[7] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **112**, 661 (1926).

[8] E. Schrödinger, Ann. Physik, **81**, 109 (1926).

[9] W. Pauli e V. Weisskopf, Helv. Phys. Acta, **7**, 709 (1934)

[10] P. A. M. Dirac, *I Principi della Meccanica Quantistica*, Paolo Boringhieri, 1959, p. 371.

[11] Gli esperimenti sono dovuti a G. Gabrielse e Coll., vedi p.e. G. Gabrielse, Extremely Cold Antiprotons, Scientific American, December, 1992 p. 78-89.

[12] E. Majorana, Il Nuovo Cimento **14** (1937) 171.

[13] S. Eidelman et al, Phys. Lett. *B 592* , 1 (2004)

[14] W. Pauli in N. Bohr and the evolution of Physics, 1949.

[15] Landau, Lifshitz RQM

[16] N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, *Introduction to the theory of quantized fields*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1959.

[17] S. Eidelman et al, Phys. Lett. **B 592**, 1 (2004).

[18] T. D. Lee and C. N. Yang, *Question of Parity Conservation in Weak Interactions*, Phys. Rev., **104**, 1956.

[19] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D.D. Hoppes, R. P. Hudson, *Experimental test of parity conservation in beta decay*, Phys.Rev. **105**(4), 1957.

La violazione della paritá è stata osservata poco dopo nel decadimento del muone: R. L. Garwin, L. M. Lederman, M., Weinrich, *Observations of the failure of conservation of parity and charge conjugation in meson decays : the magnetic moment of the free muon*, Phys. Rev., **105**(4), 1957. Per una breve storia della scoperta della violazione della parita', cfr. K. Myneni, http://ccreweb.org/documents/parity/parity.html.

[20] R. P. Feynman, M. Gell-Mann, Phys. Rev. **109**, 193 (1958); vedi anche S. S. Gershtein, J. B. Zeldovich, Soviet. Phys.-JETP **2**, 576 (1957).

[21] J.C. Hardy, I.S. Towner, Phys.Rev.C7, 055501 (2005); e-Print Archive: nucl-th/0412056.

[22] N. Cabibbo, Phys. Rev. Letters **10** 531 (1963).

[23] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, L. Maiani, Phys.Rev. **D2** 1285 (1970).

[24] M. Kobayashi, T. Maskawa, Progr. Theor. Phys. **49**, 652 (1973).

[25] J. Schwinger, Ann. of Phys. **2**, 407, (1957).

[26] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579, (1961).

[27] P.A.M.Dirac, *Principi della Meccanica Quantistica*, Boringhieri.

[28] J.Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*.

[29] per una rassegna completa, vedi: H.Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics, Dover Publications, 1950.