

UNIVERSITÀ DI ROMA “LA SAPIENZA”

Dipartimento di Fisica

MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA

Anno Accademico 2007-2008

L. Maiani¹

O. Benhar²

¹e-mail: luciano.maiani@roma1.infn.it

²e-mail: omar.benhar@roma1.infn.it

APPUNTI DELLE LEZIONI

Lezioni 1-20

WORK IN PROGRESS

*Commenti, correzioni e suggerimenti, in particolare da parte degli studenti del Corso,
sono apprezzati.*

Indice

	4
1 LE SIMMETRIE DELLO SPAZIO-TEMPO	5
1.1 Il Principio di Relatività	5
1.2 Trasformazioni di Lorentz proprie e ortocrone	8
1.3 Struttura causale dello Spazio-Tempo	9
1.4 Vettori covarianti	10
2 LA PARTICELLA LIBERA CLASSICA	13
2.1 Equazione oraria	13
2.2 Particelle di massa nulla	15
2.3 Principio di Azione per la particella libera	16
2.4 La relazione massa-energia	17
3 TEORIA LAGRANGIANA DEI CAMPI	21
3.1 Il Principio di Azione	21
3.2 Hamiltoniana e formalismo canonico	23
3.3 Trasformazioni dei campi	24
3.4 Simmetrie continue	28
3.5 Il Teorema di Noether	29
3.6 Tensore impulso-energia e tensore dei momenti	31

4	QUANTIZZAZIONE DELL' EQUAZIONE DI KLEIN GORDON	37
4.1	Il campo scalare reale	37
4.1.1	Soluzione generale dell' Equazione di Klein-Gordon	38
4.1.2	Le funzioni di Green del campo scalare	40
4.2	Quantizzazione del campo scalare	44
4.3	Propagatore del campo scalare	47
5	QUANTIZZAZIONE DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO	51
5.1	Equazioni di Maxwell in forma covariante	51
5.1.1	Funzioni di Green del campo elettromagnetico	53
5.2	Le equazioni di Maxwell Lorentz	55
5.2.1	Conservazione dell' energia e del momento	58
5.2.2	Formalismo Hamiltoniano e sostituzione minimale	61
5.3	Quantizzazione del campo elettromagnetico nel vuoto	65
5.3.1	Energia e impulso del campo elettromagnetico	66
5.3.2	Spin del fotone	71
	BIBLIOGRAFIA	71

Capitolo 1

LE SIMMETRIE DELLO SPAZIO-TEMPO

1.1 Il Principio di Relatività

Il punto di partenza della Teoria della Relatività Speciale è la possibilità di identificare dei *sistemi di riferimento inerziali* (SI), definiti come quei sistemi in cui vale il Primo Principio della Dinamica:

(1). *Un corpo non soggetto a forze in un SI si muove di moto rettilineo uniforme.*

A ben vedere, siamo in presenza di un ragionamento circolare: l'assenza di forze si può accertare solo osservando il moto rettilineo uniforme, che però richiede la definizione a priori di un sistema di riferimento. I fisici risolvono il problema in modo pragmatico, partendo da quelli che sicuramente non sono sistemi inerziali (un sistema solidale con la mia auto su una strada dissestata non è di sicuro inerziale, il moto degli oggetti nell'auto è fortemente influenzato dalle *forze apparenti*) e individuando dei sistemi di riferimento in Natura che sono delle approssimazioni via via migliori di un SI ideale.

- la nostra casa (su tempi corti rispetto al periodo di rotazione della Terra);
- la Terra (su tempi corti rispetto all'anno solare)
- il Sole (se ignoriamo il moto orbitale intorno al centro della Galassia)
- la Galassia...

Identificato un SI se ne possono costruire infiniti, di fatto ∞^6 , che differiscono per la posizione dell'origine (3 coordinate) e per una velocità relativa costante (3 componenti). Il Principio di Relatività Speciale (formulato da Galileo) afferma che:

(2). *Le leggi della Fisica sono invarianti per cambiamento di SI*

In un SI dato, i fenomeni fisici sono analizzabili in termini di *eventi*: accadimenti che si verificano in un punto \vec{x} e ad un dato tempo t . Un evento è quindi caratterizzato da un 4-vettore che fornisce le coordinate dell'evento in un dato SI:

$$\text{coordinate} = (t, \vec{x}) = x^\mu \quad (\mu = 0, \dots, 3)$$

Per dare contenuto al Principio di Relatività dobbiamo stabilire quale sia la legge di trasformazione delle coordinate di un dato evento da un SI, O , ad un altro SI, O' .

Assumiamo, per semplicità che le origini di O e di O' coincidano al tempo $t = 0$. La richiesta che un moto rettilineo uniforme in O sia visto come tale in O' richiede che la trasformazione sia lineare:

$$(x')^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (1.1)$$

dove si intende che gli indici ripetuti sono sommati (da 0 a 3) e Λ è indipendente da x^μ .

Ai principi (1) e (2), A. Einstein aggiunge:

(3). *La velocità della luce nel vuoto è una costante universale, indipendente dal sistema di riferimento.*

Consideriamo due eventi che differiscono per $\Delta\vec{x}$ e Δt , che supponiamo infinitesimi. Definiamo *lunghezza invariante* dell'intervallo $(\Delta t, \Delta\vec{x})$ la quantità:

$$\Delta s = (c\Delta t)^2 - (\Delta\vec{x})^2$$

Se $|\Delta\vec{x}| = c|\Delta t|$, i due eventi sono connessi dalla propagazione di un raggio di luce che parte dal primo evento ed arriva esattamente in coincidenza del secondo. Questa coincidenza si verifica, ovviamente, in tutti i sistemi di riferimento e, data l'invarianza della velocità della luce, questo implica che anche le coordinate trasformate debbono corrispondere ad una lunghezza invariante nulla. In formule:

$$\Delta s = (c\Delta t)^2 - (\Delta\vec{x})^2 = 0 \rightarrow \Delta s' = (c\Delta t')^2 - (\Delta\vec{x}')^2 = 0$$

Questa condizione si può verificare solo se la legge di trasformazione è tale che:

$$\Delta s' = \lambda \Delta s$$

con λ indipendente dalle coordinate ed eventualmente dipendente dal modulo della velocità. Teniamo conto, adesso, che la relazione tra O ed O' è perfettamente simmetrica: visto da O , O' si allontana con la stessa velocità con cui O' vede viaggiare O . Quindi scambiando i ruoli dei due sistemi si deve anche avere:

$$\Delta s = \lambda \Delta s' \quad (1.2)$$

ovvero $\lambda = \pm 1$. Il caso -1 è escluso dal fatto che le trasformazioni di coordinate sono connesse con continuità alla trasformazione identica, che evidentemente ha $\lambda = +1$, quindi concludiamo che le trasformazioni (1.1) devono *conservare la lunghezza invariante* dell'intervallo tra due eventi (d'onde il nome attribuito a Δs). Data la linearità delle trasformazioni, la condizione si estende immediatamente ad intervalli finiti.

Per formalizzare la condizione (1.2), introduciamo il tensore metrico $g_{\mu\nu}$, che ci permette di riscrivere Δs come:

$$\Delta s = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \quad (1.3)$$

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) \quad (1.4)$$

La condizione (1.2) si riscrive come segue:

$$\begin{aligned} s' &= g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma x^\rho x^\sigma = \\ &= (\Lambda^\mu_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma) x^\rho x^\sigma = s \end{aligned}$$

che implica evidentemente:

$$(\Lambda^\mu_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma) = g_{\rho\sigma} \quad (1.5)$$

Considerando il prodotto righe per colonne tra le matrici Λ e g , l'equazione si riscrive:

$$\Lambda g \Lambda^T = g \quad (1.6)$$

Questa equazione definisce un insieme di matrici che formano, in termini matematici, un *gruppo*, il *Gruppo di Lorentz*. Le trasformazioni di coordinate sono solo una parte di queste trasformazioni, come vedremo tra poco. Prima, vediamo come funzionano le considerazioni di cui sopra sul caso concreto delle *trasformazioni di Lorentz speciali*.

Il sistema) O' scorre lungo l'asse positivo delle x di O con velocità v . La forma esplicita di (1.1) è:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \alpha \Delta x - \beta c \Delta t \\ c \Delta t' &= -\epsilon \Delta x + \delta c \Delta t \\ \Delta y' &= \Delta y; \quad \Delta z' = \Delta z \end{aligned}$$

con $\alpha, \beta, \epsilon, \delta$ da determinare. Inoltre:

$$s' = (\delta^2 - \beta^2)(c\Delta t)^2 - (\alpha^2 - \epsilon^2)(\Delta x)^2 - 2(\epsilon\delta - \alpha\beta)(\Delta x)(c\Delta t)$$

Dobbiamo richiedere che s' si annulli quando $\Delta x = \pm c\Delta t$, cioè:

$$\begin{aligned} \delta^2 - \beta^2 &= \alpha^2 - \epsilon^2 = (\lambda) \\ \epsilon\delta - \alpha\beta &= 0 \end{aligned}$$

Tornando ad un intervallo generico e sostituendo troviamo la (1.2), come atteso.

Se poniamo $\lambda = 1$, la (1.7) si risolve con:

$$\begin{aligned} \alpha &= \delta = \cosh(\theta) \\ \beta &= \epsilon = \sinh(\theta) \end{aligned}$$

dove θ è un parametro reale (la *rapidità*) collegato alla velocità relativa tra O e O' . Infatti, se poniamo $\Delta x' = 0$ nella (1.7) il secondo membro deve dare l'equazione oraria di un oggetto fermo in O' visto da O , cioè $\Delta x = v \cdot \Delta t$. Confrontando troviamo:

$$\tanh(\theta) = \frac{v}{c} \quad (1.7)$$

e quindi, dalla (1.7), troviamo la forma ben nota delle trasformazioni di Lorentz speciali:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) \\ c \Delta t' &= \gamma(-\beta \Delta x + c \Delta t) \\ \beta &= \frac{v}{c}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Commenti.

- Dalla (1.7) vediamo che la velocità di un sistema fisico non può superare c ;
- Newton faceva l'ipotesi di un tempo universale, che scorre uguale in tutti i sistemi di riferimento. Invece di usare il *Principio (3)* dobbiamo porre: $t' = t$ e otteniamo le *trasformazioni di Galileo*:

$$\begin{aligned}x' &= x - v \cdot t \\t' &= t\end{aligned}$$

Le trasformazioni di Galileo si ottengono dalle (1.8) nel limite $c \rightarrow \infty$ (*limite non-relativistico*).

- Le rotazioni in uno spazio euclideo lasciano invariante la lunghezza pitagorica: $s_E = x^2 + y^2 + \dots$. In corrispondenza, esse soddisfano alla relazione di ortogonalità $R \cdot R^T = 1$, analoga alla (1.6) salvo la sostituzione della matrice g con 1.

Problema. Mostrare se Λ_1 e Λ_2 soddisfano la (1.6) anche il loro prodotto righe per colonne, $\Lambda_1 \cdot \Lambda_2$ la soddisfa.

- *Problema* Mostrare che eseguendo due trasformazioni di Lorentz speciali con rapidità θ_1 e θ_2 si ottiene una trasformazione di Lorentz con rapidità $\theta_1 + \theta_2$. Derivare da qui la legge di composizione delle velocità:

$$v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}}.$$

1.2 Trasformazioni di Lorentz proprie e ortocrone

Dalla (1.6), prendendo il determinante di ambo i membri, troviamo la condizione:

$$\det(\Lambda) \cdot \det(g) \cdot \det(\Lambda^T) = \det(\Lambda)^2 \det(g) = \det(g) \quad (1.8)$$

quindi deve essere $\det(\Lambda) = \pm 1$: il gruppo di Lorentz è costituito da (almeno) due componenti sconnesse tra loro. Solo la componente con determinante uguale a +1 (trasformazioni di Lorentz *proprie*) è connessa con continuità alla trasformazione identità. Le trasformazioni con determinante -1 sono dette *improprie*. Un esempio importante di trasformazione impropria è la *trasformazione di Parità*, indicata con P:

$$P : \vec{x}' = -\vec{x}; \quad t' = t \quad (1.9)$$

La componente delle trasformazioni proprie è a sua volta costituita da due componenti sconnesse, che sono distinte dal fatto di cambiare o no il verso del tempo. Gli eventi di coordinate $(t, \vec{0})$ in O descrivono, al variare di t , la storia di un orologio fermo nell'origine di O . Se applichiamo la relazione (1.1) troviamo:

$$t' = \Lambda_0^0 \cdot t$$

quindi, il segno di Λ_0^0 determina se gli orologi di O' vanno o no nello stesso verso degli orologi di O . Le trasformazioni caratterizzate da:

$$\Lambda_0^0 > 0 \quad (1.10)$$

si chiamano *ortocrone*. Evidentemente, se da O' passo ad un altro sistema di riferimento O'' con una trasformazione ortocrona, la trasformazione complessiva: $O \rightarrow O' \rightarrow O''$ e' anch' essa ortocrona. Le trasformazioni caratterizzate dalla (1.10) formano dunque un sottogruppo delle trasformazioni di Lorentz. Un esempio importante di trasformazione non ortocrona e' l' *inversione del tempo*, indicata con T:

$$T : \vec{x}' = \vec{x}; \quad t' = -t \quad (1.11)$$

Combinando le trasformazioni P e T si ottiene la *inversione totale*, I:

$$I : x'^{\mu} = -x^{\mu} \quad (1.12)$$

I cambiamenti tra SI fisicamente realizzabili sono connessi con continuita' alla trasformazione identica e sono ortocroni. Il Principio di Relativita' deve valere strettamente solo per queste trasformazioni:

Le leggi della fisica sono invarianti per trasformazioni di Lorentz proprie e ortocrone
il gruppo corrispondente si indica usualmente con L_+^{\uparrow} .

Nella fisica classica si e' esteso tacitamente questo principio alle trasformazioni P e T. Tuttavia alcuni processi nucleari e subnucleari *non* sono invarianti sotto P (decadimenti β) o sotto T (decadimenti dei mesoni K neutri): la Natura non fa sconti.

Per l' inversione totale, I, vale un discorso diverso. In Meccanica Quantistica Relativistica si puo' *dimostrare* l' invarianza delle leggi fisiche sotto l' azione combinata dell' inversione, I, e dell' operazione di scambio particella-antiparticella (teorema TPC).

1.3 Struttura causale dello Spazio-Tempo

L' invarianza per trasformazioni di Lorentz della lunghezza dell' intervallo tra due eventi, s , induce una decomposizione dello spazio-tempo in regioni con una diversa connessione causale ad un dato evento. Poniamo, per convenienza, un evento A all' origine delle coordinate spaziali e al tempo $t=0$, in un dato SI. Lo spazio-tempo degli eventi (t, \vec{x}) si decompone in quattro regioni *in modo indipendente dal sistema di riferimento scelto*.

- Eventi con $s = 0$. Si trovano sulle falde di due coni (*coni di luce*), che rappresentano le traiettorie dei raggi di luce uscenti da A (*cono futuro*) o convergenti in A (*cono passato*). Si indicano col nome di eventi di *tipo luce* (light-like).
- Eventi con $s > 0, t > 0$. Riempiono l' interno del cono di luce futuro: sono gli eventi che possono essere influenzati dall' evento A, in quanto raggiungibili da A con segnali fisicamente realizzabili che viaggiano con velocita' inferiore a c .
- Eventi con $s > 0, t < 0$. Riempiono l' interno del cono di luce passato: sono gli eventi che possono influenzare l' evento A, con segnali fisicamente realizzabili che viaggiano con

velocita' inferiore a c . Questi e quelli del caso precedente si indicano col nome di eventi di *tipo tempo* (time-like, cfr. Problema 1)

- Eventi con $s < 0$. Sono all' esterno dei coni di luce: sono gli eventi che non possono avere alcuna relazione causale con A , che richiederebbe segnali con velocita' superiore a c . Gli eventi in questa regione formano il *presente assoluto* di A . Si indicano col nome di eventi di *tipo spazio* (space-like, cfr. Problema 2)

In Meccanica Quantistica la non osservabilita' simultanea di due grandezze fisiche e' collegata all' influenza causale che la misura di una di esse puo' esercitare sulla misura dell' altra (ad esempio la misura di p e di x). Consideriamo due grandezze osservabili i cui apparati di misura sono localizzati in regioni finite dello spazio-tempo (osservabili locali). Quando la regione relativa ad una delle due osservabili sta interamente nel presente dell' altra, il principio di causalita' richiede che le due osservabili *debbano essere simultaneamente misurabili* e gli operatori corrispondenti devono commutare tra loro. Questo principio prende il nome di *Microcausalita'*.

Problema 1. Usando le trasformazioni (1.8) mostrare che se un evento ha $s > 0$ e' possibile trovare un SI in cui $x^\mu = (t, \vec{0})$ (in conseguenza, questi si chiamano eventi di *tipo tempo*, o time-like).

Problema 2. Mostrare che se un evento ha $s < 0$ e' possibile trovare un SI in cui $x^\mu = (0, \vec{x})$ (in conseguenza, questi si chiamano eventi di *tipo spazio*, o space-like).

1.4 Vettori covarianti

Siano x^μ ed y^μ sono due 4-vettori che si trasformano secondo la (1.1). Nella letteratura, questi oggetti si indicano col nome di *vettori contravarianti* (indici in alto). Il prodotto scalare formato con il tensore metrico e' invariante:

$$\begin{aligned} (x \cdot y) &= g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^\mu y_\nu = y^\mu x_\nu \\ (x' \cdot y') &= (x \cdot y) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Nell' eq.(1.13) abbiamo introdotto dei vettori con gli *indici in basso*, comunemente indicati come 4-vettori *covarianti*. La legge di trasformazione di questi vettori, evidentemente, deve essere tale da fornire un invariante quando un vettore covariante viene moltiplicato per un vettore contravariante. In effetti e' immediato ricavare questa legge partendo dalla (1.13):

$$y'_\mu = g_{\mu\nu} y'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho y^\rho$$

moltiplicando la (1.5) per $(\Lambda^{-1})^\rho_\tau$ troviamo:

$$\begin{aligned} g_{\tau\nu} \Lambda^\nu_\sigma &= (\Lambda^{-1})^\rho_\tau g_{\rho\sigma}; \text{ cioe' } \\ y'_\mu &= g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho y^\rho = (\Lambda^{-1})^\rho_\mu g_{\rho\sigma} y^\sigma = (\Lambda^{-1})^\rho_\mu y_\rho \end{aligned} \quad (1.14)$$

quindi: *i vettori covarianti si trasformano secondo la matrice Λ^{-1} .*

In termini piu' formali, i vettori covarianti sono gli elementi dell *spazio duale* allo spazio vettoriale dei vettori contravarianti. In generale, il duale \tilde{V} di uno spazio vettoriale V e' definito come lo spazio dei *funzionali lineari sui vettori* y^μ , di funzioni, cioe', definite per ogni y e z , tali che:

$$\begin{aligned} f &= f(y); \\ f(\alpha y + \beta z) &= \alpha f(y) + \beta f(z) \end{aligned}$$

con α e β dei numeri (nel nostro caso, numeri reali). E' facile convincersi che ogni elemento f di \tilde{V} puo' essere scritto come:

$$f(y) = \sum_{\mu} f_{\mu} y^{\mu} = f_{\mu} y^{\mu} = (f \cdot y) \quad (1.15)$$

quindi \tilde{V} ha le stesse dimensioni di V ed *esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di V e quelli di \tilde{V}* (F. Riesz).

Nel nostro caso, questa corrispondenza si realizza con la matrice metrica $g_{\mu\nu}$ che ci da' l' elemento di \tilde{V} , $y_{\mu} = g_{\mu\nu} y^{\nu}$, che corrisponde a y^{μ} . Con questa relazione, gli elementi di \tilde{V} sono funzioni invarianti sotto trasformazioni di Lorentz:

$$f'(y') = f(y), \text{ se } y' = \Lambda y$$

Usando la relazione (1.15) e' immediato vedere che l' equazione precedente richiede le due leggi di trasformazione:

$$y'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} y^{\nu}; \quad f'_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\rho}_{\mu} f_{\rho}$$

in modo tale che:

$$f'(y') = f'_{\mu} y'^{\mu} = f_{\rho} (\Lambda^{-1})^{\rho}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\nu} y^{\nu} = f_{\rho} (\Lambda^{-1} \cdot \Lambda)^{\nu}_{\rho} y^{\nu} = f_{\rho} \delta^{\rho}_{\nu} y^{\nu} = f_{\rho} y^{\rho} = f(y)$$

dove δ^{ρ}_{ν} e' la delta di Kronecker.

Capitolo 2

LA PARTICELLA LIBERA CLASSICA

2.1 Equazione oraria

Il moto nello spazio-tempo di una particella classica (cioe' non quantistica) e' descritto da un' equazione oraria: $x^\mu = x^\mu(t)$. Consideriamo l' intervallo che separa due posizioni molto vicine nel tempo e la sua lunghezza invariante:

$$\Delta x^\mu = (c\Delta t, \vec{v} \cdot \Delta t) \quad (2.1)$$

$$\Delta s = (\Delta x \cdot \Delta x) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(c\Delta t)^2$$

Evidentemente, Δx^μ e' un intervallo di tipo tempo, perche' la particella viaggia a velocita' inferiore a quella della luce, quindi esiste un SI in cui Δx^μ ha solo la componente temporale. In questo SI la particella e' ferma (nell' intervallo di tempo considerato) e $\sqrt{\Delta s}/c$ da' l' intervallo di tempo segnato da un orologio momentaneamente in quiete rispetto ad essa. La nuova variabile si chiama *tempo proprio* (proper-time) della particella e lo indicheremo con τ . Per la sua definizione, un intervallo di tempo proprio e' un invariante relativistico e la relazione tra τ ed il tempo t nel SI da noi scelto, e' data dalla relazione:

$$d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} dt = \frac{dt}{\gamma(t)} \quad (2.2)$$

Se usiamo il tempo proprio per caratterizzare l' equazione oraria della particella, possiamo definire un quadrivettore velocita', u^μ :

$$u^\mu = \frac{d x^\mu(\tau)}{d\tau} = \gamma \frac{d x^\mu(t)}{dt} \quad (2.3)$$

u^μ e' evidentemente un 4-vettore covariante, cioe' si trasforma come x^μ . Notiamo il valore delle sue componenti e dell' invariante relativo:

$$u^\mu = \gamma(c, \vec{v}); \quad (2.4)$$

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = u^\mu u_\mu = c^2 \quad (2.5)$$

In Meccanica non-relativistica, la quantita' di moto si definisce come $\vec{p} = m\vec{v}$, dove m e' la massa inerziale. Analogamente definiamo il 4-vettore quantita' di moto come:

$$p^\mu = mu^\mu \quad (2.6)$$

dove m e' una costante che caratterizza la particella e che evidentemente coincide con la massa inerziale per piccole velocita'. Per questo, m si chiama la *massa di riposo* della particella. La massa di riposo e' un invariante relativistico, come si vede dalla relazione:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = (mc)^2 \quad (2.7)$$

La componente temporale di p^μ e' legata all' energia della particella. Calcoliamola esplicitamente a partire dalla relazione:

$$p^2 = (mc)^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2 \quad (2.8)$$

da cui :

$$p^0 = \sqrt{(mc)^2 + (\vec{p})^2} \simeq \frac{1}{c}(mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m}) \quad (2.9)$$

dove il passaggio finale e' valido per piccole velocita'. La componente temporale di p^μ , in questo limite, e' eguale all' energia cinetica divisa per c piu' una costante legata alla massa di riposo. In meccanica classica, l' energia e' sempre definita a meno di una costante, quindi possiamo identificare p^0 con l' energia della particella divisa per c :

$$p^\mu = (\frac{\epsilon}{c}, \vec{p}) \quad (2.10)$$

Arriviamo dunque alla conclusione importante che in una formulazione relativistica *la quantita' di moto e l' energia fanno parte di un unico oggetto fisico*, il 4-vettore impulso-energia (o 4-momento) p^μ .

Le leggi di trasformazione delle componenti di p^μ per trasformazioni di coordinate seguono immediatamente dalla natura di 4-vettore di p^μ . Nel caso particolare delle trasformazioni di Lorentz speciali lungo l' asse x , abbiamo (le quantita' con accento si riferiscono al SI O' , quelle senza accento ad O):

$$\begin{aligned} p'^1 &= \gamma(p^1 - \beta \frac{\epsilon}{c}) \\ \frac{\epsilon'}{c} &= \gamma(-\beta p^1 + \frac{\epsilon}{c}) \\ p'^2 &= p^2; \quad p'^3 = p^3 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Se la particella e' in quiete in O , troviamo, in particolare:

$$\epsilon' = \gamma mc^2; \quad p' = \gamma \beta mc \quad (2.12)$$

La velocita' della particella, in qualsiasi SI, e' data da:

$$\beta = \frac{cp'}{\epsilon'} \quad (2.13)$$

Commento: Nel derivare il valore di p^0 nella (2.9) a partire dalla (2.8) abbiamo scelto la radice positiva. Sembra un passaggio innocuo, ma vediamolo meglio. La radice negativa e' separata da quella positiva da un intervallo di almeno di $2mc^2$. In Meccanica Classica l' energia varia con continuita', quindi se se assumiamo che la particella abbia $E > mc^2$ all' inizio, essa non potra' mai finire in uno stato con $E < mc^2$. In Meccanica Quantistica, tuttavia, l' energia puo' variare con discontinuita' e non possiamo escludere transizioni da stati con $E > mc^2$ a stati con $E < mc^2$. L' aggiramento di questa difficolta' porta direttamente al concetto di *antiparticella*.

2.2 Particelle di massa nulla

La condizione (2.7) permette di considerare il limite $m \rightarrow 0$. In questo caso, in qualunque SI:

$$\begin{aligned} |\vec{p}| &= p^0; \\ \beta &= 1 \end{aligned} \tag{2.14}$$

la particella viaggia alla velocita' della luce in qualsiasi stato di moto ed in qualsiasi SI. Evidentemente, i quanti di luce, fotoni, godono di questa proprieta': *il fotone e' una particella con massa di riposo nulla*.

Nonostante la (2.7) ammetta un limite continuo per $m \rightarrow 0$, le particelle con massa $m > 0$ sono intrinsecamente diverse da quelle con massa nulla, comunque piccolo sia il valore di m: *il limite $m \rightarrow 0$ e' intrinsecamente discontinuo*.

Il modo piu' semplice di ottenere questo risultato sta nel constatare che il gruppo di simmetria della quantita' di moto (il *Gruppo Piccolo* (little group) introdotto da E. Wigner) e' diverso nei due casi.

- Se p^μ e' il momento di una particella di massa non nulla, possiamo trovare un SI in cui p^μ ha solo la componente temporale (il suo *sistema di quiete*). Nel sistema di quiete, $p^\mu = (mc^2, \vec{0})$ e il gruppo di trasformazioni che lasciano invariato il momento e' l' intero gruppo delle rotazioni dello spazio tridimensionale, O3, il gruppo delle matrici ortogonali a tre dimensioni.
- Se p^μ e' il momento di una particella di massa nulla, possiamo porlo nella forma: $p^\mu = (|\vec{p}|, \vec{p})$. Il gruppo di invarianza e' adesso quello delle rotazioni nel piano ortogonale al versore di \vec{p} , le matrici ortogonali in due dimensioni, O2, un gruppo commutativo molto piu' piccolo di O3.

Si vede dunque che se facciamo tendere $m \rightarrow 0$ il gruppo piccolo cambia con discontinuita' da O3 and O2. In Meccanica Quantistica, il gruppo piccolo determina le proprieta' dello *spin* della particella. Per una particella con massa, lo spin coincide con il momento angolare a riposo e gli stati formano quindi una rappresentazione del gruppo delle rotazioni in 3 dimensioni: una particella di spin S possiede $2S + 1$ stati di spin.

Al contrario, una particella di massa nulla non puo' essere messa a riposo, il suo momento angolare intrinseco e' definito dalle rotazioni intorno a \vec{p} , gli elementi di O2, che ammettono rappresentazioni unidimensionali corrispondenti a $S_z = n/2$ con un dato n intero. Se ammettiamo

la parità, P , come una buona simmetria, devono esistere due stati con $S_z = \pm n/2$. Ad esempio, il fotone ha due stati di spin, corrispondenti a $S_z = \pm 1$ e non tre, come competerebbe ad una particella di spin 1.

2.3 Principio di Azione per la particella libera

I risultati della precedente Sezione sono talmente importanti da meritare una derivazione indipendente. Allo stesso tempo, questo ci permette di introdurre la formulazione della dinamica relativistica basata sul Principio di Azione, che ha un'importanza fondamentale nella Meccanica Quantistica.

Consideriamo una traiettoria nello spazio-tempo, $x^\mu(t)$, che parte ed arriva in due eventi fissati:

$$\begin{aligned} x^\mu(t_1) &= x_1^\mu = (ct_1, \vec{x}_1) \\ x^\mu(t_2) &= x_2^\mu = (ct_2, \vec{x}_2) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Data $x^\mu(t)$, possiamo definire l' *Azione*, $S(x_1^\mu, x_2^\mu)$:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{x}(t), \vec{v}(t)) dt \quad (2.16)$$

La traiettoria effettivamente percorsa è determinata dal Principio di Azione:

- La traiettoria della particella corrisponde al minimo dell' Azione.

Nota la funzione Lagrangiana, il principio di Minima Azione dà luogo alle equazioni di Lagrange, che in Meccanica Classica rimpiazzano a tutti gli effetti le equazioni di Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} \quad (2.17)$$

La richiesta che le leggi del moto siano invarianti per cambiamento di SI si traduce nel semplice enunciato:

- L' Azione deve essere invariante per trasformazioni di Lorentz.

Applicato al nostro caso, questo vuol dire:

$$L(\vec{x}(t), \vec{v}(t)) dt = \textit{invariante}$$

Per una particella libera, l' unico invariante non trivialmente costante è il tempo proprio, $d\tau$ e quindi deve essere:

$$L(\vec{x}(t), \vec{v}(t)) dt = -\alpha d\tau = -\alpha \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt \quad (2.18)$$

con α una costante. Il valore di α e' determinato dal limite non relativistico, in cui L deve tendere all' energia cinetica della particella, $1/2mv^2$, a meno di una costante additiva irrilevante. Per piccoli valori di $v(t)$ troviamo:

$$\begin{aligned} L &\rightarrow -\alpha + \frac{\alpha v^2}{2c^2}; \\ &\rightarrow \alpha = mc^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

quindi la Lagrangiana della particella libera e':

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} \quad (2.20)$$

La quantita' di moto e' data dal momento coniugato alla \vec{x} mentre l' energia e' l' Hamiltoniana. Troviamo quindi:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\gamma \vec{v} \\ H &= \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \gamma mc^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

I risultati in (2.21) confermano la definizione del 4-momento data nella (2.6).

Le equazioni di Lagrange che discendono dalla (2.20) e dalla (2.17) sono:

$$\frac{d}{dt} p^i = 0; \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.22)$$

Inoltre, dalla condizione (2.7) troviamo:

$$p^0 dp^0 - \vec{p} \cdot d\vec{p} = 0 \quad (2.23)$$

e quindi:

$$\frac{d}{dt} p^0 = 0 \quad (2.24)$$

In totale, abbiamo ottenuto le equazioni del moto covarianti:

$$\frac{d}{dt} p^\mu = 0 = \frac{d}{d\tau} p^\mu \quad (2.25)$$

che esprimono la conservazione della quantita' di moto e dell' energia.

2.4 La relazione massa-energia

Per illustrare il significato dell' energia di riposo, consideriamo un sistema costituito da diverse particelle (in breve, un gas). Il 4-momento totale e' dato, naturalmente, da:

$$\begin{aligned} P^\mu &= \sum_i p_i^\mu; \quad i.e. \\ \vec{P} &= \sum_i \vec{p}_i; \quad cP^0 = E = \sum_i \epsilon_i \end{aligned} \quad (2.26)$$

Per un sistema di questo tipo esiste un SI in cui $\vec{P}' = 0$ (sistema del *centro di massa*). Questo si vede dalla (2.11): orientiamo \vec{P} lungo l'asse x e richiediamo che sia $P'^1 = 0$. Troviamo:

$$\beta = \frac{cP}{E} \quad (2.27)$$

che e' sempre in modulo minore di uno, visto che:

$$c|\vec{P}| < c \sum_i |\vec{p}_i| < \sum \epsilon_i = E \quad (2.28)$$

L'energia totale, E_0 , in questo sistema di riferimento definisce la massa di riposo del sistema

$$E_0 = M_0 c^2 \quad (2.29)$$

mentre l'energia in un altro SI, E' , e' data da una formula analoga alla (2.12):

$$E' = \gamma M_0 c^2 \quad (2.30)$$

Vediamo adesso piu' da vicino M_0 . Nel limite in cui le particelle del gas sono non-relativistiche, abbiamo:

$$M_0 = \frac{1}{c^2} \sum_i \epsilon_i \simeq \sum m_i + \frac{T}{c^2} \quad (2.31)$$

dove T e' l'energia cinetica contenuta nel gas. Se aumentiamo o diminuiamo questa energia, scaldando o raffreddando il gas stesso, la massa di riposo varia secondo la legge:

$$\Delta M_0 = \frac{\Delta E}{c^2} \quad (2.32)$$

Se introduciamo un'interazione tra le particelle del gas, questo aggiunge al seconde termine della (2.31) una quantita' V che puo' essere positiva o negativa.

La conclusione e' che la massa di riposo di un sistema composto differisce dalla somma delle masse di riposo dei suoi costituenti e la differenza puo' essere liberata (o deve essere fornita) sotto forma di una quantita' di energia data ancora dalla relazione (2.32):

$$\Delta E = Q = (M_0 - \sum_i m_i) c^2 \quad (2.33)$$

Le (2.32) e (2.33) forniscono la relazione massa-energia di Einstein, dalle innumerevoli applicazioni in fisica e nella pratica.

D'ora in avanti, le masse delle particelle atomiche e subatomiche saranno date sempre in unita' di energia, secondo la (2.32), usando le unita': $1 \text{ MeV} = 1000 \text{ KeV} = 10^6 \text{ eV}$.

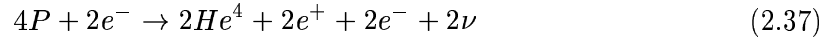
Da ricordare:

- elettrone: $M_e = 0.511 \text{ MeV}$;
- protone: $M_P = 938.27 \text{ MeV}$; neutrone: $M_N = 939.57 \text{ MeV}$;
- deutone: $M_D = 1875.61 \text{ MeV}$.

Un esempio importante. L' energia emessa dal Sole e' prodotta dalla fusione di quattro protoni in due nuclei di Elio. La fusione avviene attraverso una sequenza di reazioni, la cosiddetta sequenza P-P (questa e' la sequenza principale; ci sono diverse sequenze secondarie studiate da H. Bethe negli anni '30; ricordare che *Protone* = H^1 , *Deutone* = H^2):



La reazione complessiva puo' essere scritta come:



I positroni si annichilano con gli elettroni del mezzo liberando energia. Quindi in totale, l' energia termica liberata ogni 4 protoni e':

$$E_{term} = Q - 2 \langle E_\nu \rangle \quad (2.38)$$

$$Q = 4M_P + 2M_e - 2M_{He} = 26.7 MeV$$

$\langle E_\nu \rangle$ e' l' energia media portata via dai neutrini, che lasciano il Sole indisturbati. L'energia dei neutrini e' distribuita con continuita' tra zero (assumendo la massa del neutrino trascurabile) e il valore del Q nella formazione del deuterio:

$$Q(H^1 + H^1 \rightarrow H^2) = 2M_P - M_D - M_e = 0.42 MeV \quad (2.39)$$

Commento. Secondo la Meccanica Quantistica Relativistica, esistono reazioni in cui alcune particelle possono essere create o distrutte, ad esempio l' annichilazione protone-antiprotone. In questi casi la variazione di energia nella relazione (2.32) include l' intera massa di riposo delle particelle coinvolte.

Problema. Sapendo che: (i) il Sole conteneva all' origine circa 10^{57} protoni, (ii) la costante solare (flusso di energia solare sulla Terra) e': $K_0 = 3.3 \cdot 10^{-2} cal cm^{-2} sec^{-1}$; (iii) la Terra dista dal Sole 8 *minuti - luce*, (iv) l' energia portata dai neutrini e' trascurabile, sapreste stimare la durata di vita del Sole dalle (2.37) e (2.38)?

Capitolo 3

TEORIA LAGRANGIANA DEI CAMPI

In Meccanica Classica si considerano due tipi di sistemi fisici. I punti materiali (particelle) che hanno per variabili dinamiche le coordinate $\vec{x}(t)$ e i campi (onde): sistemi dinamici descritti da una o piu' funzioni continue delle coordinate e del tempo:

$$\phi = \phi(\vec{x}, t) = \phi(x) \quad (3.1)$$

L' esempio piu' importante di questo tipo di sistema è il *campo elettromagnetico* descritto da due vettori in ogni punto, corrispondenti ai valori del campo elettrico, $\vec{E}(\vec{x}, t)$ e del campo magnetico $\vec{B}(\vec{x}, t)$.

3.1 Il Principio di Azione

In analogia con la meccanica dei sistemi ad un numero finito di gradi di libert ,   conveniente derivare le equazioni del campo da un Principio di Azione. Si introduce l' Azione come integrale sul tempo della Lagrangiana, tra due istanti fissati, $t_1 < t_2$:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{L} dt \quad (3.2)$$

La Lagrangiana di un sistema di punti   la somma sui diversi gradi di libert . Nel caso del campo, i gradi di libert  sono localizzate in ogni punto dello spazio, quindi:

$$\mathbf{L} = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \phi_\mu, x) \quad (3.3)$$

dove abbiamo indicato con ϕ_μ le derivate dei campi rispetto alle coordinate:

$$\phi_\mu(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$$

La funzione L prende il nome di *densità di Lagrangiana*, o anche semplicemente Lagrangiana, per brevità, e dipende dai campi (le variabili dinamiche) e dalle loro derivate. Le derivate temporali sono la generalizzazione delle velocità, mentre la dipendenza della Lagrangiana dalle derivate spaziali permette di accoppiare tra loro i gradi di libertà in punti vicini nello spazio.

Abbiamo considerato una possibile dipendenza esplicita della Lagrangiana dalle coordinate spazio-temporali, per descrivere l'azioni di possibili agenti esterni al sistema dei campi. Per un sistema isolato, questa dipendenza non può esserci e la Lagrangiana dipende dalle coordinate solo attraverso i campi e le loro derivate.

In termini di L :

$$S = \int_{V_4} d^4x \mathcal{L}(\phi, \phi_\mu, x) \quad (3.4)$$

dove V_4 è la regione dello spazio-tempo limitata dalle ipersuperfici $\Gamma_1 : t = t_1$ e $\Gamma_2 : t = t_2$.

Immaginiamo di fissare i valori dei campi su $\Gamma_{1,2}$. Il Principio di Minima Azione stabilisce che:

- l'effettiva evoluzione del campo tra questi valori è data dalle funzioni $\phi(x) = \bar{\phi}(\vec{x}, t)$ che rendono S minima, con condizioni su $\Gamma_{1,2}$ fissate.

Notiamo che la densità di Lagrangiana non è fissata univocamente. Poiché nel Principio di Azione si stipula di tenere fissi i campi sui bordi di V_4 , possiamo aggiungere alla densità di Lagrangiana la divergenza di un qualsiasi 4-vettore senza cambiare il minimo dell'Azione e quindi le equazioni del moto.

Per ricavare le equazioni differenziali che determinano l'evoluzione del campo, poniamo:

$$\phi(x) = \bar{\phi}(x) + \delta\phi(x); \quad \delta\phi(\vec{x}, t_1) = \delta\phi(\vec{x}, t_2) = 0 \quad (3.5)$$

la condizione di Minima Azione si traduce nell'equazione:

$$\begin{aligned} \delta S = 0 &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta(\partial_\mu \phi) \right] = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \delta\phi \right] = \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \right] \delta\phi + \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta\phi \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

poiché $\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \delta\phi$. Dato che le variazioni dei campi si annullano al bordo della regione di integrazione, l'ultimo termine nella (3.6) è nullo. Inoltre, la (3.6) deve valere per variazioni $\delta\phi$ arbitrarie, quindi la funzione tra parentesi quadre si deve annullare identicamente in x . Troviamo così le *equazioni di Eulero-Lagrange*:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad (3.7)$$

un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali. Naturalmente, se abbiamo diversi campi ϕ^i , $i = 1, \dots, N$, abbiamo un'equazione per ciascuna componente.

Nella meccanica Newtoniana, il moto di un punto è determinato se diamo posizione e velocità ad un istante fissato. L'estensione di questo principio sta nel richiedere che L sia al più quadratica nelle derivate dei campi e noi seguiremo questo principio. In questo caso, $\partial \mathcal{L} / \partial \partial_\mu \phi$ è lineare in $\partial_\mu \phi$, l'equazione di Eulero-Lagrange è alle derivate seconde e la soluzione è determinata *una volta assegnati il campo e la sua derivata temporale* sull'ipersuperficie $t = t_1$.

Invarianza Relativistica L' invarianza relativistica della teoria si traduce nella semplice richiesta che l' Azione sia relativisticamente invariante. La misura nello spazio-tempo è essa stessa invariante, visto che, per una trasformazione di Lorentz, Λ :

$$d^4 x' = \det(\Lambda) d^4 x = d^4 x \quad (3.8)$$

quindi

- l' invarianza relativistica dell' Azione richiede che la densità di lagrangiana L sia essa stessa invariante.

3.2 Hamiltoniana e formalismo canonico

Il passaggio al formalismo canonico inizia con la definizione del momento coniugato a ciascuna variabile dinamica. Nel caso di una teoria di campo, definiamo la *densità di momento coniugato*:

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_t \phi} \quad (3.9)$$

e si intende che l' equazione (3.9) deve servire ad esprimere $\partial_t \phi$ in funzione di $\phi, \vec{\nabla} \phi, \pi$. Successivamente si definisce la *densità di Hamiltoniana*:

$$\mathcal{H}(\pi, \phi) = \pi \partial_t \phi - \mathcal{L}; \quad \mathbf{H} = \int d^3 x \mathcal{H}. \quad (3.10)$$

Da notare che la densità di Hamiltoniana è una grandezza ausiliaria: solo l' Hamiltoniana è fisicamente rilevante mentre la densità di Hamiltoniana è definita a meno della 3-divergenza di un vettore, che si integra a zero quando i campi si annullano all' infinito.

Le equazioni del moto dei campi si ottengono semplicemente differenziando la (3.10) ed usando le equazioni di Eulero-Lagrange.

Poniamo:

$$\phi(x) = \bar{\phi}(x) + \delta\phi(x); \quad \pi(x) = \bar{\pi}(x) + \delta\pi(x); \quad t = \bar{t} + \delta t \quad (3.11)$$

Troviamo allora:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{H} &= \int d^3 x \left(\partial_t \phi \delta \pi + \pi \delta(\partial_t \phi) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \phi} \cdot \delta(\vec{\nabla} \phi) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \phi} \delta(\partial_t \phi) \right) - \\ &- \int d^3 x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t = \\ &= \int d^3 x \left(\partial_t \phi \delta \pi - \partial_t \pi \delta \phi - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \phi} \delta \phi \right) \right) - \int d^3 x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t. \end{aligned} \quad (3.12)$$

dove abbiamo usato le equazioni di Eulero-Lagrange nella forma:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \phi} = \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \phi} = \partial_t \pi \quad (3.13)$$

Possiamo scartare la 3-divergenza dal differenziale dell' Hamiltoniana. Eguagliando i coefficienti dei differenziali alle corrispondenti derivate parziali, troviamo le equazioni di Hamilton:

$$\begin{aligned}\partial_t \phi &= \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta \pi(x)} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}; \\ \partial_t \pi &= -\frac{\delta \mathbf{H}}{\delta \phi(x)} = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\nabla} \phi}\right); \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\end{aligned}\tag{3.14}$$

Nella seconda equazione appare la derivata rispetto a $\vec{\nabla} \phi$, dovuta al fatto che in \mathcal{L} , e quindi in \mathcal{H} , abbiamo trattato separatamente la dipendenza da ϕ e da $\vec{\nabla} \phi$. Di fatto tutto il termine tra parentesi corrisponde alla quantità $(\partial H / \partial q)$ nel caso di un grado di libertà. Dalla terza equazione troviamo:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = - \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\tag{3.15}$$

Per un sistema isolato, come abbiamo visto, la densità di Lagrangiana può dipendere dal punto dello spazio-tempo solo attraverso i campi. Di conseguenza, per un sistema isolato ritroviamo la legge di conservazione dell' energia: L' Hamiltoniana di un sistema isolato è una costante del moto. Lo stesso vale sotto la condizione più debole che il sistema sia indipendente dal tempo.

3.3 Trasformazioni dei campi

Per costruire lagrangiane relativisticamente invarianti, dobbiamo partire dalle leggi di trasformazione dei campi, le relazioni che legano il campo osservato nel SI O , $\phi(x)$, al valore osservato in O' , $\phi'(x')$, in corrispondenza ad uno stesso evento nello spazio-tempo, descritto dalle coordinate x^μ e x'^μ in O e in O' :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu\tag{3.16}$$

Il caso più semplice è quello di un *campo scalare* in cui i due valori sono gli stessi:

$$\phi'(x') = \phi(x)\tag{3.17}$$

Le derivate di ϕ si trasformano come vettori *covarianti*, Sez 1.4:

$$\frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\lambda} = (\Lambda^{-1})^\lambda_\mu \frac{\partial \phi}{\partial x^\lambda}\tag{3.18}$$

è immediato controllare che, invece, le derivate rispetto alle x_μ trasformano come vettori *contravarianti*:

$$\frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'_\mu} = \Lambda^\mu_\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_\lambda}\tag{3.19}$$

In conseguenza, indicheremo le derivate come:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \phi_\mu = \partial_\mu \phi; \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} = \phi^\mu = \partial^\mu \phi.\tag{3.20}$$

Con le derivate successive, si possono costruire tensori a molti indici, con le corrispondenti proprietà di trasformazione:

$$\phi_{\mu_1, \mu_2, \dots}^{\nu_1, \nu_2, \dots}(x) = \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu_2}} \dots \phi(x); \quad (3.21)$$

$$(\phi')_{\mu_1, \mu_2, \dots}^{\nu_1, \nu_2, \dots}(x') = (\Lambda^{-1})_{\mu_1}^{\lambda_1} (\Lambda^{-1})_{\mu_2}^{\lambda_2} \dots \Lambda_{\rho_1}^{\nu_1} \Lambda_{\rho_2}^{\nu_2} \dots \phi_{\lambda_1, \lambda_2, \dots}^{\rho_1, \rho_2, \dots}(x)$$

Estendendo il caso del campo scalare, possiamo definire dei campi *tensoriali*, funzioni di x^μ dotate di un certo numero di indici in alto (covarianti), n_s , e in basso (contravarianti), n_g , $F_{\mu_1, \mu_2, \dots}^{\nu_1, \nu_2, \dots}(x)$ le cui leggi di trasformazione sono le stesse della (3.21):

$$(F')_{\mu_1, \mu_2, \dots}^{\nu_1, \nu_2, \dots}(x') = (\Lambda^{-1})_{\mu_1}^{\lambda_1} (\Lambda^{-1})_{\mu_2}^{\lambda_2} \dots \Lambda_{\rho_1}^{\nu_1} \Lambda_{\rho_2}^{\nu_2} \dots F_{\lambda_1, \lambda_2, \dots}^{\rho_1, \rho_2, \dots}(x) \quad (3.22)$$

Esempi importanti sono il tensore antisimmetrico di Maxwell, $F^{\mu\nu}(x) = -F^{\nu\mu}(x)$, che descrive il campo elettromagnetico, ed il campo vettoriale, $A^\mu(x)$, che descrive il potenziale vettore.

Il rango di un tensore (il numero di indici covarianti e contravarianti) si può ridurre contraendo gli indici con tensori invarianti (cioè tali che $T' = T$). Per le trasformazioni di Lorentz ci sono tre tipi di operazioni invarianti:

- contrazione di un indice covariante e uno contravariante con la delta di Kronecker: δ_ν^μ ;
- contrazione di due indici covarianti con il tensore: $g_{\mu\nu}$ (ovvero due indici contravarianti con $g^{\mu\nu}$);
- contrazione con il tensore di Levi-Civita: $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, completamente antisimmetrico e definito come:

$$\epsilon_{0123} = +1 \quad (3.23)$$

$$\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = 0 \text{ (due indici uguali)}$$

$$\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = \pm 1 : \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 = \text{permutazione pari/dispari di } 0123$$

Per mostrare che il tensore di Levi-Civita è invariante, consideriamo:

$$X_{0123} = \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \Lambda_0^{\mu_1} \Lambda_1^{\mu_2} \Lambda_2^{\mu_3} \Lambda_3^{\mu_4} \quad (3.24)$$

X è la somma di tutti i prodotti formati con elementi presi da righe e da colonne tutte diverse tra loro, con il segno della permutazione che trasforma $(0, 1, 2, 3,)$ in $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$. Quindi $X = \det \Lambda = 1$. Inoltre $X_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ se due indici sono uguali, $X_{\mu\nu\rho\sigma} = \pm 1$ a seconda che la permutazione sia pari o dispari. Ne segue:

$$\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \Lambda_{\rho_1}^{\mu_1} \Lambda_{\rho_2}^{\mu_2} \Lambda_{\rho_3}^{\mu_3} \Lambda_{\rho_4}^{\mu_4} = \epsilon_{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4} \quad (3.25)$$

e quindi l' invarianza richiesta.

I tensori di un dato rango n_s, n_g descrivono una varietà lineare. Un tensore si dice *riducibile* se questa varietà lineare contiene sottospazi invarianti sotto le trasformazioni (3.22) che siano non-triviali (cioè diversi da 0 e dalla varietà stessa). Altrimenti il tensore è *irriducibile*.

Eventuali sottospazi invarianti si possono ottenere proiettando il tensore generico con le operazioni invarianti descritte prima. Per un tensore irriducibile le operazioni invarianti danno zero o proiettano su tutto lo spazio di partenza.

Contraendo completamente gli indici di prodotti di campi tensoriali e delle loro derivate si ottengono tensori di rango nullo (privi di indici liberi) che sono invarianti (si trasformano come il campo scalare nella (3.17)). Queste combinazioni invarianti sono i blocchi con cui costruire la *densità di lagrangiana*, che descrive la dinamica del campo.

Esempio 1. Un caso importante è quello dei tensori a due indici covarianti antisimmetrici. Evidentemente, questi tensori hanno $4 \cdot 3/2 = 6$ componenti indipendenti, che possono essere organizzate in 3-vettori al modo seguente:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & E^1 \\ -B^3 & 0 & B^1 & E^2 \\ B^2 & -B^1 & 0 & E^3 \\ -E^1 & -E^2 & -E^3 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

L' applicazione del tensore di Levi-Civita porta alla definizione del *tensore duale*, $\bar{F}^{\mu\nu}$:

$$\bar{F}^{\mu\nu} = g^{\mu\mu_1} g^{\nu\nu_1} \frac{1}{2} \epsilon_{\mu_1\nu_1\lambda\rho} F^{\lambda\rho} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu}_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} \quad (3.27)$$

Non è difficile vedere che \bar{F} si ottiene da F con le sostituzioni: $\vec{E} \rightarrow -\vec{B}$; $\vec{B} \rightarrow \vec{E}$:

$$\bar{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^3 & -E^2 & -B^1 \\ -E^3 & 0 & E^1 & -B^2 \\ E^2 & -E^1 & 0 & -B^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

L' applicazione del tensore di Levi-Civita trasforma lo spazio di questi tensori in se stesso:

$$\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu}_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} = \bar{F}^{\mu\nu}; \quad \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu}_{\lambda\rho} \bar{F}^{\lambda\rho} = -F^{\mu\nu} \quad (3.29)$$

(abbiamo usato la relazione $\epsilon^{0123} = -1$). A partire da queste relazioni, possiamo definire due componenti irriducibili, che corrispondono agli autovalori $\pm i$ delle trasformazioni di dualità (3.29):

$$\begin{aligned} (X^\pm)^{\mu\nu} &= F^{\mu\nu} \pm i\bar{F}^{\mu\nu} \\ \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu}_{\lambda\rho} (X^\pm)^{\lambda\rho} &= \mp i(X^\pm)^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Poichè abbiamo usato solo operazioni invarianti, la decomposizione (3.30) è invariante per trasformazioni di Lorentz e lo spazio dei tensori antisimmetrici a due indici si decompone in due sottospazi invarianti di dimensione 3 ciascuno.

Questi due sottospazi formano un complesso unico se aggiungiamo l'operazione Parità (cfr. Cap. 1). Sotto Parità, i vettori \vec{E} e \vec{B} si comportano, rispettivamente, come un vettore *polare* ed un vettore *assiale*:

$$P : \vec{E}(\vec{x}, t) \rightarrow -\vec{E}(\vec{-x}, t); \quad \vec{B}(\vec{x}, t) \rightarrow +\vec{B}(\vec{-x}, t) \quad (3.31)$$

e quindi:

$$P : X^\pm(\vec{x}, t) = f(\vec{E} \mp i\vec{B}) \rightarrow f(-\vec{E} \mp i\vec{B}) = -f(\vec{E} \pm i\vec{B}) = -X^\mp(-\vec{x}, t) \quad (3.32)$$

Alle stesse conclusioni si arriva considerando i *due invarianti quadratici* che possiamo costruire a partire da F e \bar{F} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = (\vec{E})^2 - (\vec{B})^2 \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2} \bar{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = (\vec{E} \cdot \vec{B}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

La forma delle (3.33) suggerisce di considerare i vettori complessi:

$$\begin{aligned} (\vec{Z})^\pm &= \vec{E} \mp i\vec{B}; \\ (\vec{Z})^\pm \cdot (\vec{Z})^\pm &= L_1 \mp 2\mathcal{L}_2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

I quadrati dei due 3-vettori sono separatamente conservati nelle trasformazioni di Lorentz, che quindi trasformano tra di loro le componenti di ciascuno di essi. La trasformazione di Parità scambia evidentemente Z^+ con $-Z^-$.

Esempio 2. Tensori a due indici simmetrici, entrambi covarianti (o contravarianti): $T^{\mu\nu}$ (ovvero $T_{\mu\nu}$). In questo caso, la proiezione con $g_{\mu\nu}$ dá un invariante e lo spazio si decompone nello spazio dei tensori *simmetrici e senza traccia*, $g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = 0$, di dimensione 9, e in uno spazio unidimensionale dei tensori della forma $g^{\mu\nu} T$.

Commento. La classificazione dei tensori irriducibili è discussa in [1]. Da un punto di vista algebrico, si trova che il gruppo di Lorentz è equivalente al prodotto di due gruppi di rotazioni: $L_+^\dagger = SU(2) \otimes SU(2)$. Quindi i tensori irriducibili sono caratterizzati da *due momenti angolari*: j_1 e j_2 . I tensori che appartengono alla rappresentazione irriducibile (j_1, j_2) hanno dimensione $d = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$.

I quadrivettori (contravarianti o covarianti) corrispondono alla rappresentazione $(1/2, 1/2)$ di $SU(2) \otimes SU(2)$. I tensori a molti indici descritti prima si ottengono dai prodotti tensoriali di questa rappresentazione. Ad esempio, i tensori a due indici contravarianti: $T_{\mu,\nu}$ sono generati dal prodotto

$$(1/2, 1/2) \otimes (1/2, 1/2) = (1 + 0, 1 + 0) = [(1, 1) \oplus (0, 0)] \oplus [(1, 0) \oplus (0, 1)] \quad (3.35)$$

Abbiamo posto le parentesi per separare i tensori simmetrici (quelli senza traccia piu' la traccia) da quelli antisimmetrici. Notiamo la semplicità con cui la legge di composizione dei momenti angolari riproduce la decomposizione in componenti irriducibili, in particolare la loro dimensionalità.

Problema. Scrivere esplicitamente le trasformazioni delle componenti di $F^{\mu\nu}$ per trasformazioni di Lorentz Speciali (velocità lungo l' asse 1) e mostrare che queste trasformano separatamente tra loro le componenti di $\vec{E} + i\vec{B}$ e $\vec{E} - i\vec{B}$. Questo risultato dimostra ancora una volta la decomposizione di $F^{\mu\nu}$ in componenti invarianti (infatti, la stessa proprietà è evidentemente vera anche per le rotazioni spaziali, quindi per tutte le trasformazioni di L_{\pm}^{\uparrow} che si ottengono combinando i due tipi di trasformazioni).

3.4 Simmetrie continue

Nelle Sezioni precedenti abbiamo fatto riferimento a due osservatori che studiano lo stesso sistema di eventi (ad esempio una certa configurazione fisica di campi) a partire da due differenti Sistemi Inerziali.

Il Principio di Relatività richiede che i due SI siano assolutamente equivalenti, quindi ciascun osservatore arriverà, per suo conto, a descrivere la dinamica dei campi con un' Azione e una densità di Lagrangiana che hanno la stessa dipendenza funzionale dai campi. L' invarianza relativistica richiede allora:

$$S(\phi') = \int d^4x' \mathcal{L}[\phi'(x'), \phi'_{\mu}(x'), x'] = S(\phi) = \int d^4x \mathcal{L}[\phi(x), \phi_{\mu}(x), x] \quad (3.36)$$

se $\phi(x)$, x e $\phi'(x')$, x' sono le componenti del campo e le coordinate associate ad un dato evento nei due SI, eqq. (3.16) e (3.22).

Possiamo considerare l' eq. (3.36) da un altro punto di vista, come l' invarianza (o simmetria) dell' Azione per la trasformazione che sostituisce $\phi(x)$, x con $\phi'(x')$, x' in uno stesso sistema di riferimento:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x'; \\ \phi(x) &\rightarrow \phi'(x') \end{aligned} \quad (3.37)$$

Visto così, il Principio di Relatività esprime semplicemente la simmetria dell' Azione sotto il gruppo di simmetria delle trasformazioni di Lorentz (proprie ed ortocrone) e possiamo studiare le conseguenze di questa simmetria allo stesso tempo di altre possibili simmetrie dell' Azione che pure prendono la forma generale (3.37), con diverse realizzazioni della legge di trasformazione.

Per quanto riguarda le coordinate, ci limiteremo ad aggiungere le *traslazioni dell' origine dello spazio tempo*. Queste trasformazioni, unite alle trasformazioni di Lorentz proprie e ortocrone, formano il *Gruppo di Poincaré*, che è il gruppo di simmetria naturale dello spazio-tempo della Relatività Speciale.

Rientrano anche nella forma (3.37) le trasformazioni che cambiano i campi ma non le coordinate, $x' = x$, che prendono il nome di *simmetrie interne*, ad esempio le trasformazioni della fase dei campi complessi che considereremo estesamente nel seguito.

In questa Sezione ci restringiamo a trasformazioni che appartengono a *gruppi continui*. In questo caso, esistono trasformazioni infinitesimalmente vicine alla trasformazione identica. Con i prodotti di trasformazioni infinitesime possiamo raggiungere tutte le trasformazioni del gruppo (almeno per quanto riguarda la componente connessa all' identità). Possiamo quindi esplorare le conseguenze della simmetria sotto un gruppo continuo restringendoci alle trasformazioni infinitesime.

Consideriamo quindi la trasformazione individuata dalle variazioni infinitesime:

$$\begin{aligned}x'^{\mu} &= x^{\mu} + \delta x^{\mu}; \\ \phi'(x') &= \phi(x) + \delta_T \phi\end{aligned}\quad (3.38)$$

Per semplicitá, abbiamo ommesso nella (3.38) eventuali indici del campo ϕ , che sono sottointesi. Indichiamo $\delta_T \phi$ come la *variazione totale del campo*. Possiamo decomporre $\delta_T \phi$ al modo seguente:

$$\delta_T \phi = \phi'(x') - \phi(x) = \phi'(x') - \phi(x') + \phi(x') - \phi(x) = \delta \phi(x) + \partial_{\mu} \phi(x) \delta x^{\mu} \quad (3.39)$$

La variazione totale è la somma della *variazione funzionale*, $\delta \phi$, e di una traslazione di δx^{μ} .

Le trasformazioni del Gruppo di Poincaré e, a maggior ragione, le trasformazioni associate alle simmetrie interne lasciano invariante la misura $d^4 x$. Questo richiede che:

$$d^4 x' = \left\| \frac{\partial x'}{\partial x} \right\| d^4 x = \det(\delta_{\mu}^{\lambda} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}) d^4 x = d^4 x \quad (3.40)$$

Se usiamo l' identità:

$$\det(1 + \epsilon) = 1 + \text{Traccia}(\epsilon) \quad (3.41)$$

valida a meno di termini di ordine superiore nella matrice infinitesima ϵ , la condizione di invarianza della misura di integrazione prende la forma:

$$\begin{aligned}1 &= 1 + \partial_{\mu} \delta x^{\mu}; \text{ cio} \\ \partial_{\mu} \delta x^{\mu} &= 0\end{aligned}\quad (3.42)$$

In queste condizioni, l' invarianza dell' Azione, eq. (3.36) richiede piú semplicemente l' invarianza della densità di Lagrangiana:

$$\delta_T \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi', \partial \phi', x') - \mathcal{L}(\phi, \partial \phi, x) = 0 \quad (3.43)$$

Nel caso delle trasformazioni di Lorentz, la richiesta è soddisfatta se costruiamo la densità di Lagrangiana come polinomio nei campi e nelle loro derivate, saturando gli indici in modo invariante, come indicato nella Sezione precedente.

3.5 Il Teorema di Noether

Esplicitiamo la relazione (3.43) usando la (3.39). Troviamo:

$$\begin{aligned}0 &= \delta \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} \delta x^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi} \delta(\partial_{\mu} \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} \delta x^{\mu} = \\ &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi} \right) \right] \delta \phi + \partial_{\mu} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi} \right) \delta \phi \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} \delta x^{\mu}\end{aligned}\quad (3.44)$$

dove:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \mathcal{L}[\phi(x), \phi_{\mu}(x), x] \quad (3.45)$$

Usando le equazioni del moto e la relazione (3.42), otteniamo l'equazione di conservazione:

$$\partial_\mu \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right] = 0 \quad (3.46)$$

Possiamo esprimere le variazioni infinitesime dei campi e delle coordinate come combinazioni lineari dei parametri infinitesimi che caratterizzano la trasformazione:

$$\delta x^\mu = \sum_A \epsilon_A (\Delta^A)^\mu(x); \quad \delta \phi = \sum_A \epsilon_A (\Sigma^A) \phi \quad (3.47)$$

dove Δ^A e Σ^A sono le matrici che rappresentano i generatori delle trasformazioni infinitesime sulle coordinate e sui campi. Poichè la (3.46) deve essere soddisfatta per valori arbitrari dei parametri infinitesimi, otteniamo le equazioni di conservazione:

$$\partial_\mu (J^A)^\mu = \partial_\mu \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \Sigma^A \phi + (\Delta^A)^\mu \mathcal{L} \right] \quad (3.48)$$

per le correnti associate a ciascun generatore infinitesimo. Il risultato (3.48) rappresenta il Teorema di Noether:

- Ad ogni generatore infinitesimo di una simmetria continua è associata una corrente conservata.

La corrente conservata è determinata dalla densità di Lagrangiana, secondo la formula canonica:

$$(J^A)^\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \Sigma^A \phi + (\Delta^A)^\mu \mathcal{L} \quad (3.49)$$

La corrente conservata determina una costante del moto additiva, rappresentata dall'integrale su tutto lo spazio della sua componente temporale. Scriviamo:

$$(J^A)^\mu = ((J^A)^0, \frac{1}{c} \vec{J}^A) \quad (3.50)$$

e integriamo l'equazione di conservazione su un volume fisso ($x^0 = ct$):

$$\int_V d^3x \left[\frac{\partial}{\partial t} (J^A)^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}^A \right] = \frac{d}{dt} Q^A + \int_\Sigma d\sigma \vec{n} \cdot \vec{J}^A = 0 \quad (3.51)$$

dove $Q^A = \int_V d^3x (J^A)^0$. L'equazione (3.51) esprime il fatto che una variazione della carica contenuta all'interno del volume V è bilanciata da un corrispondente flusso della densità di corrente attraverso la superficie Σ di V . Se estendiamo l'integrazione a tutto lo spazio, l'integrale di superficie si annulla, visto l'annullarsi dei campi all'infinito, ed otteniamo la legge di conservazione della *carica totale*:

$$\frac{d}{dt} Q^A = 0 \quad (3.52)$$

Se le trasformazioni di simmetria coinvolgono lo spazio tempo, l'indice A include uno o più indici vettoriali e la (3.49) si trasforma in realtà come un tensore di rango superiore.

Pr simmetrie interne, in cui le trasformazioni del gruppo di simmetria non coinvolgono lo spazio tempo, la carica totale è un *invariante di Lorentz*. Per verificare questa proprietà, consideriamo due ipersuperfici: Γ_0 , corrispondente a $t = 0$ nel nostro sistema di riferimento, e Γ_1 , corrispondente a $t' = cost$ in un sistema trasformato di Lorentz. Integriamo l' equazione di conservazione nel volume 4-dimensionale limitato da queste due ipersuperfici. Otteniamo:

$$0 = \int \partial_\mu J^\mu d^4x = - \int_{\Gamma_0} n_\mu J^\mu d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_1} n'_\mu J^\mu d\Gamma_1 + I \quad (3.53)$$

dove n^μ ed n'^μ sono le normali alle due ipersuperfici, che puntano nella direzione tempo dei due sistemi di riferimento e I rappresenta il contributo delle superfici laterali del nostro 4-volume. Se facciamo tendere verso l' infinito queste superfici, $I \rightarrow 0$ ed abbiamo dunque:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} n_\mu J^\mu d\Gamma_0 &= \int_{\Gamma_1} n'_\mu J^\mu d\Gamma_1; \quad i.e. \\ \int d^3x J^0(\vec{x}, t) &= \int d^3x' J^0(\vec{x}', t'). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Il teorema di Noether stabilisce l' esistenza di un dato numero di correnti conservate, ma non ne determina univocamente la forma. Possiamo aggiungere alla corrente nella (3.49) un altro 4-vettore purchè conservato, in virtù delle equazioni del moto o per motivi algebrici. Un esempio del secondo caso è dato dalla 4-divergenza di un tensore antisimmetrico:

$$s^\mu = \partial_\lambda T^{\lambda\mu} \quad (3.55)$$

Se $T^{\lambda\mu} = -T^{\mu\lambda}$ la corrente s^μ è trivialmente conservata: $\partial_\mu \partial_\lambda T^{\mu\lambda} = 0$ in virtù dell' antisimmetria di T . In questo caso, l' aggiunta di s^μ modifica la corrente ma non la carica conservata, in quanto:

$$\int d^3x s^0 = \int d^3x \partial_i \cdot T^{i0} = 0 \quad (3.56)$$

se i campi si annullano all' infinito.

3.6 Tensore impulso-energia e tensore dei momenti

Consideriamo esplicitamente la trasformazioni del gruppo di Poincarè, ottenute componendo le traslazioni nello spazio-tempo e le trasformazioni di Lorentz speciali.

1. *Traslazioni nello spazio-tempo*. Sono le trasformazioni di coordinate:

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu \quad (3.57)$$

con $a^\mu = \text{costante}$. Per i campi, poniamo:

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (3.58)$$

(eventuali indici tensoriali di ϕ non sono toccati dalla trasformazione).

L' invarianza per traslazioni richiede:

$$\mathcal{L}(\phi', (\partial\phi)', x') = \mathcal{L}(\phi, (\partial\phi), x) \quad (3.59)$$

Ovvero, usando le (3.57) e (3.58):

$$\mathcal{L}(\phi, (\partial\phi), x + a) = \mathcal{L}(\phi, (\partial\phi), x) \quad (3.60)$$

L' invarianza per traslazioni richiede dunque che \mathcal{L} non dipenda esplicitamente da x .

Dalla (3.58) ricaviamo la forma della variazione funzionale dei campi:

$$\begin{aligned} \delta_T \phi &= 0 = \delta\phi + (\partial_\mu \phi) a^\mu; \\ \delta\phi &= -(\partial_\mu \phi) a^\mu \end{aligned} \quad (3.61)$$

La corrente conservata ricavata dalla (3.49) e dalla (3.61) è un tensore di rango due che prende il nome di *tensore energia-impulso canonico*:

$$\begin{aligned} T^{\mu,\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}; \\ \partial_\mu T^{\mu,\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

In effetti, la componente 00 è proprio la densità di Hamiltoniana, definita nella Sez. 3.2.

$$T^{0,0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \phi} \partial_t \phi - \mathcal{L} = \pi \partial_t \phi - \mathcal{L} \quad (3.63)$$

in corrispondenza, l' integrale spaziale di $T^{0,0}$ è l' Hamiltoniana del sistema, l' integrale primo associata all' indipendenza dal tempo del sistema (cioè all' invarianza rispetto a traslazioni del tempo: $ct \rightarrow ct + a^0$):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \int d^3x T^{0,0} = E \\ \frac{d}{dt} E &= 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

L' energia è la componente temporale di un 4-vettore, le cui componenti spaziali sono la quantità di moto. Possiamo dunque identificare:

$$\int d^3x T^{0,\mu} = \mathbf{P}^\mu \quad (3.65)$$

con il 4-momento complessivo del campo.

Il teorema di Noether ci assicura che le componenti di P^μ sono conservate per sistemi indipendenti dalla posizione nello spazio-tempo. Troviamo così l' importante risultato secondo cui *conservazione di energia e momento sono conseguenza dell' invarianza per traslazioni spazio-temporali*. Per un sistema isolato, l' invarianza per traslazioni è associata all' omogeneità dello spazio-tempo: la conservazione del 4-momento per questi sistemi fornisce una prova concreta di questo importante fatto fisico.

2. *Trasformazioni di Lorentz.* Sono associate alle trasformazioni di coordinate:

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (3.66)$$

Per trasformazioni infinitesime, poniamo:

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \epsilon_{\nu}^{\mu} \quad (3.67)$$

I parametri infinitesimi ϵ_{ν}^{μ} non sono indipendenti, perchè le matrici Λ devono essere tali da lasciare invariante il tensore metrico:

$$\begin{aligned} \Lambda^T g \Lambda &= g; \text{ i.e.} \\ \epsilon_{\mu}^{\lambda} g_{\lambda\nu} + g_{\mu\lambda} \epsilon_{\nu}^{\lambda} &= \epsilon_{\mu\nu} + \epsilon_{\nu\mu} = 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

dove abbiamo tenuto i termini fino al primo ordine in ϵ ed abbiamo definito un nuovo tensore infinitesimo con due indici contravarianti, $\epsilon_{\mu\nu}$. La condizione (3.68) ci dice che questo tensore deve essere antisimmetrico nei due indici. Le (3.66) si riscrivono come:

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= x^{\mu} + g^{\mu\alpha} x^{\beta} \epsilon_{\alpha\beta}; \\ \delta x^{\mu} &= \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} (g^{\mu\alpha} x^{\beta} - g^{\mu\beta} x^{\alpha}) \end{aligned} \quad (3.69)$$

Le trasformazioni di Lorentz infinitesime dipendono dunque da sei parametri: tre per le rotazioni spaziali ($\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$; $i \neq j = 1, 2, 3$) e tre per le trasformazioni di Lorentz speciali ($\epsilon_{0i} = -\epsilon_{i0}$; $i = 1, 2, 3$).

Per campi tensoriali generici, le trasformazioni sono quelle date nella (3.22). Useremo qui una notazione piu' compatta che si applica anche al caso piu' generale di campi spinoriali. Definiamo un indice che percorre tutte le componenti indipendenti del campo, che indichiamo con M, N , etc. La trasformazione infinitesima associata ai parametri $\epsilon_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) sono trasformazioni sui campi ϕ_M date dalla combinazione lineare di $\epsilon_{\mu\nu}$ con sei matrici $\Sigma_{MN}^{\mu\nu}$, antisimmetriche in $\mu\nu$, associate ai generatori delle trasformazioni di Lorentz sui campi stessi:

$$\phi'_M(x') = (\delta_{MN} + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} \Sigma_{MN}^{\mu\nu}) \phi_N(x) \quad (3.70)$$

(Il fattore $1/2$ è convenzionale, la somma sugli indici ripetuti è sottintesa in tutti i casi).

La variazione funzionale dei campi si ottiene da $\delta_T \phi$:

$$\begin{aligned} \delta_T \phi_M &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} \Sigma_{MN}^{\mu\nu} \phi_N(x) = \delta \phi_M + \partial_{\mu} \phi_M \delta x^{\mu}; \text{ i.e.} \\ \delta \phi_M &= \frac{1}{2} [\Sigma_{MN}^{\alpha\beta} \phi_N(x) - \partial_{\mu} \phi_M (g^{\mu\alpha} x^{\beta} - g^{\mu\beta} x^{\alpha})] \epsilon_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Con queste posizioni, possiamo scrivere la corrente conservata infinitesima come:

$$\begin{aligned} \delta M^{\mu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi_M} \delta \phi_M + \delta x^{\mu} \mathcal{L} = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} \left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi_M} \partial_{\lambda} \phi_M (g^{\lambda\alpha} x^{\beta} - g^{\lambda\beta} x^{\alpha}) + (g^{\mu\alpha} x^{\beta} - g^{\mu\beta} x^{\alpha}) \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi_M} \Sigma_{MN}^{\alpha\beta} \phi_N \right] = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} \left[(x^{\alpha} T^{\mu,\beta} - x^{\beta} T^{\mu,\alpha}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi_M} \Sigma_{MN}^{\alpha\beta} \phi_N \right] \end{aligned} \quad (3.72)$$

Questo risultato ci porta a definire il *tensore canonico del momento angolare*:

$$\begin{aligned} M^{\mu[\alpha\beta]} &= (x^\alpha T^{\mu,\beta} - x^\beta T^{\mu,\alpha}) + \Sigma^{\mu[\alpha\beta]}; \\ \Sigma^{\mu[\alpha\beta]} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_M} \Sigma_{MN}^{\alpha\beta} \phi_N; \\ \partial_\mu M^{\mu[\alpha\beta]} &= 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Le componenti associate alle rotazioni spaziali ($\alpha\beta = ij$) danno come carica conservata il momento angolare totale del campo, ad es.:

$$\mathbf{J}^1 = \int d^3x M^{0[23]} = \int d^3x [(x^2 T^{0,3} - x^1 T^{0,2}) + \Sigma^{0[23]}] \quad (3.74)$$

Commento. Sarebbe suggestivo identificare il primo termine nella (3.74) come dovuto al momento angolare orbitale ed il secondo al momento angolare intrinseco del campo (che in Meccanica Quantistica corrisponderà allo spin dei quanti del campo). In effetti, nel caso del campo scalare, il secondo termine è assente. Tuttavia, i due termini separatamente sono ambigui, come vedremo nella Sezione prossima. Ad esempio, possiamo ridefinire il tensore energia-impulso in modo da eliminare completamente il secondo termine. Le uniche quantità definite univocamente sono le costanti del moto, $\vec{\mathbf{J}}$.

Il tensore energia-impulso simmetrico Nella Teoria della Relatività Generale, le equazioni di Einstein, che collegano il tensore energia-impulso alla geometria dello spazio-tempo, richiedono che il tensore energia-impulso sia simmetrico nei due indici. In generale, il tensore energia-impulso canonico definito dalla (3.62) non è simmetrico. Tuttavia, facendo uso delle ambiguità inerenti la sua definizione, è possibile costruire un nuovo tensore energia-impulso, $\theta^{\mu\nu}$, simmetrico e conservato allo stesso tempo. La costruzione generale è dovuta a Belinfante e Rosenfeld [3].

Il punto di partenza per la costruzione di $\theta^{\mu\nu}$ è l'equazione di conservazione di $M^{\mu[\alpha\beta]}$. Usando la (3.73), troviamo:

$$0 = \partial_\mu M^{\mu[\alpha\beta]} = T^{\alpha,\beta} - T^{\beta,\alpha} + \partial_\mu \Sigma^{\mu[\alpha\beta]} \quad (3.75)$$

La parte antisimmetrica di $T^{\mu,\nu}$ può essere quindi eliminata in favore della 4-divergenza di Σ , e possiamo definire la *parte simmetrica di $T^{\mu,\nu}$* secondo la :

$$S^{\mu\nu} = T^{\mu,\nu} + \frac{1}{2} \partial_\lambda \Sigma^{\lambda[\mu\nu]} = S^{\nu\mu} \quad (3.76)$$

Questo tensore non è ancora la soluzione del problema, in quanto $S^{\mu\nu}$ non è conservato:

$$\partial_\mu S^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\lambda \partial_\mu \Sigma^{\lambda[\mu\nu]} \quad (3.77)$$

Tuttavia, questo risultato coincide con la 4-divergenza del tensore simmetrico:

$$\begin{aligned} R^{(\mu\nu)} &= \frac{1}{2} [\partial_\lambda \Sigma^{\mu[\lambda\nu]} + \partial_\lambda \Sigma^{\nu[\lambda\mu]}]; \\ \partial_\mu R^{(\mu\nu)} &= \frac{1}{2} \partial_\lambda \partial_\mu \Sigma^{\mu[\lambda\nu]} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Definiamo quindi:

$$\theta^{\mu\nu} = T^{\mu,\nu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda[\Sigma^{\lambda[\mu\nu]} + \Sigma^{\mu[\nu\lambda]} - \Sigma^{\nu[\lambda\mu]}] \quad (3.79)$$

il nuovo tensore è simmetrico e conservato. Calcoliamo la carica corrispondente:

$$\int d^3x \theta^{0\nu} = \int d^3x [T^{0,\nu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda(\Sigma^{\lambda[0\nu]} + \Sigma^{0[\nu\lambda]} - \Sigma^{\nu[\lambda 0]})] \quad (3.80)$$

Nei termini con le derivate dobbiamo tenere solo quelli con $\lambda = 0$, i termini con le derivate spaziali corrispondono a termini di superficie che si annullano all'infinito. Otteniamo:

$$\int d^3x \theta^{0\nu} = \int d^3x [T^{0,\nu} + \frac{1}{2}(\partial_0(\Sigma^{0[0\nu]} + \Sigma^{0[\nu 0]} - \Sigma^{\nu[00]}))] = \int d^3x T^{0,\nu} \quad (3.81)$$

data l'antisimmetria di $\Sigma^{\mu[\nu\lambda]}$ in $\nu\lambda$. Quindi il tensore $\theta^{\mu\nu}$ è un sostituto perfettamente legittimo del tensore energia-impulso canonico.

Una conseguenza importante di quanto visto dianzi è che possiamo costruire un nuovo tensore dei momenti basato su $\theta^{\mu\nu}$:

$$\widetilde{M}^{\mu[\alpha\beta]} = x^\alpha \theta^{\mu\beta} - x^\beta \theta^{\mu\alpha} \quad (3.82)$$

Questo nuovo tensore è conservato, poichè θ è simmetrico e conservato, e rappresenta un legittimo sostituto del tensore canonico. Notiamo che, apparentemente, il momento angolare è ora esclusivamente orbitale, la prova che la separazione tra momento orbitale e momento di spin non è fisicamente significativa in una teoria relativistica.

Con il nuovo tensore dei momenti possiamo analizzare le costanti del moto associate alle trasformazioni di Lorentz speciali. Troviamo:

$$K^i = \int d^3x \widetilde{M}^{0[0i]} = \int d^3x (ct\theta^{0i} - x^i\theta^{00}) = cost. \quad (3.83)$$

La costanza di K^i esprime semplicemente il fatto che il baricentro dell'energia, per un sistema isolato, si muove di moto rettilineo uniforme:

$$\begin{aligned} \langle x^i \rangle &= \frac{\int d^3x x^i \theta^{00}}{\int d^3x \theta^{00}} \\ \langle x^i \rangle &= ct \cdot \frac{\int d^3x \theta^{0i}}{\int d^3x \theta^{00}} + cost. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Problema. Mostrare che le cariche corrispondenti al tensore dei momenti nella (3.82) coincidono con quelle del tensore canonico (3.73).

Capitolo 4

QUANTIZZAZIONE DELL'EQUAZIONE DI KLEIN GORDON

4.1 Il campo scalare reale

Il campo scalare reale fornisce l'esempio più semplice di quanto detto finora. Possiamo scegliere, in generale:

$$L = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi) \quad (4.1)$$

m è una costante di dimensione [lunghezza]⁻¹, $V(\phi)$ è una funzione di grado superiore al secondo in ϕ .

Dalla (4.1) troviamo le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\square\phi + m^2\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \quad (4.2)$$

nel caso $V = 0$, troviamo l'equazione di Klein-Gordon:

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (4.3)$$

che costituisce la più semplice equazione di campo relativistica.

Per costruire l'Hamiltoniana, calcoliamo la densità di momento coniugato (ricordiamo che $x^0 = ct$):

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = \frac{1}{c^2}\partial_t\phi \quad (4.4)$$

cosicché:

$$H = \pi\partial_t\phi - L = \frac{1}{2}[c^2\pi^2 + (\tilde{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2 + V(\phi)] \quad (4.5)$$

La stabilità del campo richiede che l'Hamiltoniana sia inferiormente limitata, al variare di ϕ su tutte le configurazioni possibili. Restringendoci alle configurazioni spazialmente costanti, vediamo dalla (4.5) che $V(\phi)$ deve essere limitata inferiormente.

Le equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{aligned} \partial_t \phi &= c^2 \pi; \\ \partial_t \pi &= -(m^2 \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi) \end{aligned} \quad (4.6)$$

sostituendo la prima nella seconda ritroviamo, naturalmente, l' equazione relativisticamente invariante (4.2).

Commento . La (4.1) rappresenta la forma piu' generale di lagrangiana invariante e quadratica nelle derivate. Si potrebbe aggiungere un termine lineare in ϕ . Anche in presenza di un termine di questo tipo, il potenziale $V(\phi)$ nell' Hamiltoniana deve avere un minimo assoluto. Possiamo quindi eliminare il termine lineare con un cambiamento di variabile: $\phi' = \phi - \phi_0$, $\partial^\mu \phi' = \partial^\mu \phi$ dove ϕ_0 e' il punto di minimo. Lo sviluppo di L in ϕ' non contiene piu' il termine lineare.

4.1.1 Soluzione generale dell' Equazione di Klein-Gordon

Riprendiamo l' equazione di Klein-Gordon (K-G):

$$(\square + m^2)\phi = 0$$

che vogliamo risolvere con *condizioni periodiche* ai bordi di un grande volume cubico spaziale di spigolo L :

$$\phi(x, y, z, t) = \phi(x + L, y, z, t), \text{ etc.}$$

La soluzione generica ha la forma di un'onda piana:

$$\phi = N e^{-i k_\mu x^\mu}; \quad k^\mu = (k^0, \vec{k})$$

dove \vec{k} e' il vettore numero d'onda. La condizione di periodicit  implica:

$$k^1 L = 2\pi n^1, \text{ etc.} \rightarrow \vec{k} = \frac{2\pi}{L} (n^1, n^2, n^3) \quad (4.7)$$

dove n^i sono interi relativi arbitrari. L'equazione di Klein-Gordon, a sua volta, richiede:

$$k_\mu k^\mu - m^2 = 0$$

da cui deduciamo le due soluzioni:

$$k^0 = \pm \frac{\omega}{c}; \quad \frac{\omega}{c} = \sqrt{(m)^2 + (\vec{k})^2} \quad (4.8)$$

La soluzione generale dell' equazione di K-G e' una sovrapposizione delle onde piane appena trovate. Per ogni \vec{k} abbiamo due onde piane, a frequenza positiva, $e^{-i\omega t}$, e frequenza negativa, $e^{+i\omega t}$. Scriviamo:

$$\phi(x) = \sum_{\vec{n}} N(\omega) [a(\vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + c(\vec{k}) e^{+i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x})}] \quad (4.9)$$

dove N e' un fattore di normalizzazione che definiremo tra poco e la somma va su tutti i vettori a componenti intere. Nel secondo termine possiamo sommare su $-\vec{n}$ e definire $c(-\vec{k}) = b^*(\vec{k})$:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \Sigma_{\vec{n}} N(\omega) [a(\vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + b^*(\vec{k}) e^{+i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}] = \\ &= \Sigma_{\vec{n}} N(\omega) [a(\vec{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} + b^*(\vec{k}) e^{+ik_\mu x^\mu}]\end{aligned}\quad (4.10)$$

dove, da ora in poi, porremo $k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$.

La soluzione generale (4.10) produce un campo in generale complesso. Per un campo reale, dobbiamo avere $b(\vec{k}) = a(\vec{k})$ e troviamo:

$$\phi(x) = \Sigma_{\vec{n}} N(\omega) [a(\vec{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} + a^*(\vec{k}) e^{+ik_\mu x^\mu}] \quad (4.11)$$

La ϕ data dalla (4.11) e' reale e dipende da due funzioni reali di \vec{k} , la parte reale e la parte immaginaria di $a(\vec{k})$. Questo corrisponde al fatto che per determinare completamente ϕ occorre dare due complessi di dati iniziali: i valori di $\phi(\vec{x}, 0)$ e di $\partial_t \phi(\vec{x}, 0)$.

Per concludere questa Sezione, possiamo dare esplicitamente la relazione tra $a(\vec{k})$ e i dati iniziali. Consideriamo il sistema di funzioni $f_{\vec{k}}(x)$, soluzioni delle' quazione di K-G a frequenza positiva:

$$f_{\vec{k}}(x) = N e^{-ik_\mu x^\mu} \quad (4.12)$$

Usando le condizioni di ortonormalita' delle funzioni esponenziali, possiamo calcolare le due proiezioni (ricordiamo che $\omega(\vec{k}) = \omega(-\vec{k})$):

$$\begin{aligned}X &= \int d^3x [(\partial_t f_{\vec{k}}(\vec{x}, t))^* \phi(\vec{x}, t)]_{t=0} = i\omega(\vec{k}) N^2 V [a(\vec{k}) + a^*(-\vec{k})]; \\ Y &= \int d^3x [(f_{\vec{k}}(\vec{x}, t))^* \partial_t \phi(\vec{x}, t)]_{t=0} = -i\omega(\vec{k}) N^2 V [a(\vec{k}) - a^*(-\vec{k})];\end{aligned}$$

da cui possiamo ricavare $a(\vec{k})$. Se scegliamo $N = (2\omega(\vec{k})V)^{-1/2}$, si trova:

$$\begin{aligned}a(\vec{k}) &= i(Y - X) = i \int d^3x [f_{\vec{k}}^* \cdot (\partial_t \phi) - (\partial_t f_{\vec{k}}^*) \cdot \phi]_{t=0} \\ \phi(x) &= \Sigma_{\vec{n}} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} [a(\vec{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} + a^*(\vec{k}) e^{+ik_\mu x^\mu}]\end{aligned}\quad (4.13)$$

Il campo di Klein-Gordon complesso. L' estensione al caso di un campo complesso e' immediata. La lagrangiana si scrive:

$$L = (\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi^*) - m^2 \phi^2 - V(\phi^*) \quad (4.14)$$

che conduce di nuovo all' equazione di Klein-Gordon (4.3) per ϕ e ϕ^* .

La lagrangiana (4.14) esibisce una simmetria per cambiamenti di fase costante, questa volta una simmetria interna:

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \phi(x); \quad \phi(x)^* \rightarrow e^{-i\alpha} \phi(x)^* \quad (4.15)$$

In termini della parte reale ed immaginaria di ϕ :

$$\phi = \frac{\phi^1 + i\phi^2}{\sqrt{2}}$$

la lagrangiana (4.14) si riduce alla somma di due lagrangiane identiche per i campi reali ϕ^1 e ϕ^2 . La simmetria (4.15), in questa nuova rappresentazione, corrisponde ad una rotazione ortogonale dei campi $\phi^{1,2}$ tra di loro:

$$\phi^i = \mathcal{O}^{ij} \phi^j \quad \mathcal{O}^T \mathcal{O} = 1 \quad (4.16)$$

Il campo complesso ϕ si puo' di nuovo sviluppare nelle soluzioni dell' equazione di Klein-Gordon secondo la (4.10) ma ora $a(\vec{k})$ e $b(\vec{k})$ sono indipendenti:

$$\phi(x) = \sum_{\vec{n}} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} [a(\vec{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} + b^*(\vec{k}) e^{+ik_\mu x^\mu}] \quad (4.17)$$

Problema Usando l' equazione di K-G, dimostrate che:

$$\int d^3x [f_{\vec{k}}^* \cdot (\partial_t \phi) - (\partial_t f_{\vec{k}}^*) \cdot \phi]$$

e' indipendente dal tempo: le ampiezze di oscillazione di ciascun modo normale del campo costituiscono un insieme di infinite costanti del moto.

Limite del continuo L' inclusione del sistema in un cubo di spigolo L e' un artificio matematico che serve ad avere uno spettro discreto di soluzione per l' equazione di K-G. Alla fine, occorre in genere passare al limite $L \rightarrow \infty$. La somma sui vettori interi, in questo limite, tende ad un integrale sulla densita' degli oscillatori, di cui diamo la forma esplicita. Dalla (4.7) si vede che l' intervallo Δn^1 corrisponde a $\frac{L}{2\pi} \Delta k^1$, etc.. Quindi:

$$\sum_{\vec{n}} \dots \rightarrow V \int \frac{\Delta k^1 \Delta k^2 \Delta k^3}{(2\pi)^3} \dots = V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \dots$$

4.1.2 Le funzioni di Green del campo scalare

Consideriamo, adesso, le soluzioni dell' equazione del moto del campo reale in presenza di una sorgente assegnata, $J(x)$:

$$(-\square - \mu^2)\phi(x) = J(x) \quad (4.18)$$

L' equazione omogenea associata e' l' equazione di Klein-Gordon, (4.3).

Le soluzioni della (4.18) si ottengono a partire dalla *funzione di Green* del problema, la soluzione dell' equazione relativa ad una sorgente puntiforme descritta da una funzione delta di Dirac localizzata nell' origine dello spazio-tempo:

$$(-\square - \mu^2)G(x) = \delta^{(4)}(x) \quad (4.19)$$

Data la funzione di Green, la soluzione della (4.18) e' semplicemente:

$$\phi(x) = \int d^4x' G(x - x') J(x') \quad (4.20)$$

come si verifica facilmente.

Di funzioni di Green ce ne sono, naturalmente, un numero infinito, ciascuna determinata dalle particolari condizioni al contorno che assegnamo alla (4.19). Queste soluzioni differiscono tra loro per una soluzione dell'equazione omogenea, per cui la *soluzione generale* della (4.18) si scrive:

$$\phi(x) = \int d^4x' G(x-x')J(x') + \phi_0(x) \quad (4.21)$$

dove G e' una funzione di Green fissata e ϕ_0 la soluzione generale dell'equazione di K-G omogenea (4.3), che abbiamo caratterizzato in precedenza, (4.13).

Per risolvere la (4.19) si usano le trasformate di Fourier. Data una $f(x)$, definiamo la sua trasformata di Fourier (ci poniamo direttamente nel limite $V \rightarrow \infty$):

$$\tilde{f}(k) = \int d^4x f(x)e^{i(k \cdot x)}; \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{f}(k)e^{-i(k \cdot x)} \quad (4.22)$$

L'eq.(4.19) e la (4.20) diventano quindi:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(k) &= \frac{1}{k^2 - \mu^2}; \\ \tilde{\phi}(k) &= \tilde{G}(k) \cdot \tilde{J}(k) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Una soluzione particolare della (4.18) si trova formalmente dalla (4.23):

$$\phi(x) = \int d^4k e^{-i(k \cdot x)} \frac{1}{k^2 - \mu^2} \cdot \tilde{J}(k) \quad (4.24)$$

Per dare un significato preciso alla (4.24) dobbiamo tenere conto del fatto che il denominatore nell'integrale e' singolare nei punti che corrispondono alla propagazione delle onde libere, (4.8). Per fare questo, e' conveniente porsi nel *piano complesso della variabile k^0* . Le singolarita' di $\tilde{G}(k)$ si trovano sull'asse reale, per $k^0 = \pm\omega$, ed ogni particolare soluzione si trova assegnando un cammino nel piano complesso per l'esecuzione dell'integrale in k^0 .

Per essere definiti consideriamo l'integrale:

$$F(x) = \int_C d^4k \frac{-1}{k^2 - \mu^2} \tilde{g}(k) e^{-i(kx)} \quad (4.25)$$

con $\tilde{g}(k)$ una funzione data, analitica in k^0 e C un cammino assegnato nel piano complesso di k^0 . Dobbiamo distinguere separatamente l'integrazione sui cammini chiusi e sui cammini aperti.

1. Cammini chiusi. Questi integrali danno soluzioni dell'equazione omogenea. Infatti, applicando l'operatore di Klein-Gordon, si ottiene un fattore $k^2 - \mu^2$ al numeratore dell'integrando, che elimina il polo; a questo punto possiamo ridurre a zero il cammino di integrazione, ottenendo quindi:

$$(\square + \mu^2)F(x) = 0$$

Usando il teorema dei residui, si vede facilmente che l'integrale e' uguale a zero, se il cammino non include alcuna delle due singolarita', ovvero e' una combinazione delle due soluzioni dell'omogenea, rappresentate dai residui degli integrali intorno a ciascuna singolarita'.

Indichiamo con C^+ un cammino che gira (una sola volta!) in senso *orario* intorno al punto $k^0 = +\omega(k)$ e definiamo:

$$\begin{aligned} i\Delta^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^+} d^4k e^{-i(k \cdot x)} \frac{i}{k^2 - \mu^2} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{C^+} dk^0 \frac{i}{(k^0 - \omega)(k^0 + \omega)} e^{-i(k \cdot x)}; \\ i\Delta^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-i(k \cdot x)} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Analogamente, indichiamo con C^- il cammino che gira in verso *orario* intorno alla singolarità in $k^0 = -\omega(k)$ e definiamo:

$$\begin{aligned} i\Delta^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^-} d^4k e^{-i(k \cdot x)} \frac{i}{k^2 - \mu^2}; \\ i\Delta^{(-)}(x) &= \frac{-1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-i(-\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} = \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{+i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{+i(k \cdot x)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Nella (4.26) e nella (4.27), $k^\mu = [+ \omega(k), \vec{k}]$. Evidentemente,

$$\Delta^{(-)}(x) = -\Delta^{(+)}(-x) = -[\Delta^{(+)}(x)]^*. \quad (4.28)$$

In conclusione, l'integrale (4.25) su un cammino chiuso, C_0 , da' una soluzione dell' equazione omogenea, combinazione lineare dei residui nei due poli:

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega(k)} \tilde{g}(\vec{k}) e^{-i(k \cdot x)} + \frac{-1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega(k)} \tilde{g}(-\vec{k}) e^{+i(k \cdot x)} = \\ &= \int \Delta^{(+)}(x - x') g(x') + \int \Delta^{(-)}(x - x') h(x') \end{aligned} \quad (4.29)$$

dove abbiamo posto $\tilde{g}(\vec{k}) = \tilde{g}(\omega(k), \vec{k})$ e g ed h sono due funzioni indipendenti. La (4.29) ci da' una rappresentazione della soluzione generale della equazione omogenea che riproduce quella data in precedenza, nella (4.13), nel caso complesso (in cui $\tilde{g}(\vec{k})$ e $\tilde{g}(-\vec{k})$ sono indipendenti) e nel limite continuo, in cui:

$$\tilde{g}(\vec{k}) = \sqrt{2\omega(k)V} a(\vec{k}) \quad (4.30)$$

(da notare che nel limite continuo, $V \rightarrow \infty$, le $a(\vec{k})$ devono tendere a zero come $1/\sqrt{V}$ se vogliamo configurazioni del campo in cui l' energia totale del campo, piuttosto che la densità di energia, sia finita).

2. Cammini aperti. Questi cammini danno, in genere, una soluzione dell' equazione inomogenea. Due cammini diversi danno lo stesso risultato se possiamo deformarli l' uno nell' altro senza incontrare i punti di singolarità di \tilde{G} , altrimenti differiscono per combinazioni degli integrali intorno ai punti singolari, cioè per soluzioni dell' equazione omogenea.

Tra le soluzioni particolari dell' equazioni omogenea, sono utili da notare quelle che corrispondono alla funzione di Green *ritardata* o alla funzione di Green *avanzata* o alla funzione di Feynman.

- La *funzione di Green ritardata*, G_{ret} corrisponde alla condizione che sia $G(x) = 0$ per $t < 0$, cioè che la risposta sia diversa da zero solo *dopo* l' accensione della sorgente nell' origine delle coordinate (condizione di causalità). In questo caso, il cammino di integrazione deve essere tutto *al di sopra delle singolarità*. Poniamo $k^0 = Re k^0 + i\eta$ e scriviamo esplicitamente l' esponenziale nella (4.25):

$$e^{-i(k \cdot x)} = e^{(-iRek^0 t + \eta t + \dots)}$$

Per $t < 0$ devo chiudere il cammino di integrazione nella parte superiore del piano complesso ($\eta > 0$). Per ottenere un risultato nullo, il cammino chiuso in questo modo non deve contenere le singolarità, che devono quindi essere al disotto del cammino di integrazione. Al contrario, quando pongo $t > 0$ e chiudo il cammino di integrazione nel semipiano inferiore, il cammino include le due singolarità, girando intorno in senso orario. Il risultato è dunque:

$$i\Delta_{ret}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{Imk^0 > 0} d^4k \frac{i}{k^2 - \mu^2} = \theta(t)[i\Delta^{(+)}(x) + i\Delta^{(-)}(x)] \quad (4.31)$$

- La condizione simmetrica, che G sia nulla per $t > 0$ porta alla *funzione di Green avanzata*:

$$i\Delta_{adv}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{Imk^0 < 0} d^4k \frac{-1}{k^2 - \mu^2} = -\theta(-t)[i\Delta^{(+)}(x) + i\Delta^{(-)}(x)] \quad (4.32)$$

- La *funzione di propagazione di Feynman* si ottiene dalla condizione che essa coincida con $i\Delta^{(+)}(x)$ per $t > 0$ e con $-i\Delta^{(-)}(x)$ per $t < 0$. Questa condizione identifica un cammino di integrazione, C_F , che provenendo dall' asse reale negativo di k^0 passa *al di sotto* della singolarità in $k^0 < 0$, e *al di sopra* di quella in $k^0 > 0$. In questo modo, per $t > 0$, quando devo chiudere nel semipiano inferiore, il cammino gira intorno al punto $k^0 = \omega$ in senso orario ed ottengo $i\Delta^{(+)}(x)$, mentre per $t < 0$ chiudo il cammino nel semipiano superiore, girando in senso antiorario intorno alla singolarità in $k^0 < 0$. Lo stesso risultato si ottiene, evidentemente, integrando sull' asse reale, dopo aver spostato i poli nel piano complesso, di una grandezza infinitesima $\epsilon > 0$, al modo seguente:

$$\begin{aligned} k^0 = -\omega(k) &\rightarrow k^0 = -\omega + i\epsilon; \\ k^0 = +\omega(k) &\rightarrow k^0 = +\omega - i\epsilon \end{aligned}$$

In formule, otteniamo la definizione seguente:

$$\begin{aligned} i D_F(x) &= \int_{C_F} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \mu^2} e^{-i(k \cdot x)} = \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k^0 - \omega + i\epsilon)(k^0 + \omega - i\epsilon)} e^{-i(k \cdot x)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} e^{-i(k \cdot x)} = \\ &= \theta(t)i\Delta^{(+)}(x) - \theta(-t)i\Delta^{(-)}(x). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Le funzioni di propagazione $\Delta^{(\pm)}(x)$ si possono esprimere in termini di funzioni note, vedi [5].

4.2 Quantizzazione del campo scalare

Riprendiamo la Lagrangiana classica del campo scalare complesso:

$$L = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \quad (4.34)$$

che riproduce l' equazione di Klein -Gordon (KG):

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0$$

La Lagrangiana (4.34) é invariante per traslazioni nello spazio-tempo e per trasformazioni di Lorentz, sotto cui ϕ si trasforma come uno scalare:

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (4.35)$$

La Lagrangiana é, inoltre, invariante sotto le trasformazioni di fase:

$$\phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x); \quad \phi'^\dagger(x) = e^{-i\alpha} \phi^\dagger \quad (4.36)$$

con α costante.

Dal Teorema di Noether seguono:

- il tensore energia-impulso (simmetrico, poiché non c'è parte di spin):

$$\theta^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi^\dagger \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} L \quad (4.37)$$

- il tensore dei momenti:

$$M^{\mu,\alpha\beta} = x^\alpha \theta^{\mu\beta} - x^\beta \theta^{\mu\alpha} \quad (4.38)$$

- la corrente conservata corrispondente alle (4.36) (il fattore $1/\hbar$ é inserito per una normalizzazione conveniente della carica):

$$J^\mu(x) = \frac{i}{\hbar} [\phi^\dagger (\partial^\mu \phi) - (\partial^\mu \phi^\dagger) \phi] \quad (4.39)$$

Dalla (4.34) si trovano immediatamente i momenti coniugati e l' Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{\partial L}{\partial \partial_t \phi} = \partial_t \phi^\dagger; \quad \pi^\dagger = \partial_t \phi \\ H &= \pi^\dagger \pi + \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^\dagger \phi; \quad \mathbf{H} = \int d^3 x H \\ \mathbf{Q} &= \int d^3 x J^0(\mathbf{x}, t) = \frac{i}{\hbar} \int d^3 x \left[\phi^\dagger (\partial^0 \phi) - (\partial^0 \phi^\dagger) \phi \right] \end{aligned} \quad (4.40)$$

La quantizzazione canonica prevede che le variabili coniugate soddisfino regole di commutazione analoghe a quelle della Meccanica Quantistica non-relativistica:

$$\begin{aligned} [q_1, q_j] &= [p_i, p_j] = 0 \\ [q_i, p_j] &= i\hbar\delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Le (4.41) si traducono in *regole di commutazione a tempi uguali*:

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] &= [\phi(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = 0 \\ [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] &= [\pi(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = 0 \\ [\phi(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] &= 0 \\ [\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] &= [\phi^\dagger(\mathbf{x}, t), \pi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = i\hbar\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Possiamo anche riassumere i commutatori non nulli come:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \partial_t \phi^\dagger(\mathbf{y}, t)] = i\hbar\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.43)$$

insieme alla equazione hermitiana coniugata. Le equazioni (4.43) determinano la struttura operatoriale della teoria, in particolare i commutatori delle variabili dinamiche con l'Hamiltoniana e quindi le equazioni del moto. È immediato infatti ottenere le equazioni di Hamilton:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi &= [\phi, \mathbf{H}] = i\hbar\phi^\dagger; \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \pi &= [\pi, \mathbf{H}] = i\hbar(\nabla \cdot \nabla - m^2)\phi^\dagger \end{aligned} \quad (4.44)$$

da cui segue la (4.34). Notiamo la regola di commutazione carica-campo:

$$[\phi, \mathbf{Q}] = +\phi \quad (4.45)$$

Le soluzioni dell'equazione di KG sono della forma trovata nella Sez. 4.1.1. Infatti, l'equazione KG essendo lineare in ϕ , le soluzioni sono le stesse, che ϕ sia un c -numero o un operatore. Quelle che erano le ampiezze dei modi normali di oscillazione, $a(\vec{k})$ e $b(\vec{k})$, diventano ora degli operatori lineari, con regole di commutazione determinate dalle (4.43). (normalizziamo $a(\vec{k})$ e $b(\vec{k})$ in modo da eliminare \hbar dalle loro regole di commutazione):

$$\phi(x) = \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega V}} [a(\vec{k})e^{-i(kx)} + b^\dagger(\vec{k})e^{i(kx)}] \quad (4.46)$$

Invertendo la relazione (4.46) troviamo:

$$\begin{aligned} a(\vec{k}) &= i \int d^3x [f_{\vec{k}}^* \cdot (\partial_t \phi) - (\partial_t f_{\vec{k}}^*) \cdot \phi]_{t=0} =; \\ b(\vec{k}) &= i \int d^3x [f_{\vec{k}}^* \cdot (\partial_t \phi^\dagger) - (\partial_t f_{\vec{k}}^*) \cdot \phi^\dagger]_{t=0} \\ f_{\vec{k}} &= \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega(\vec{k})V}} e^{-ikx} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Dalle (4.43) troviamo quindi:

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad (4.48)$$

con tutti gli altri commutatori uguali a zero.

- Le regole di commutazione canonica danno agli operatori a , a^\dagger e b , b^\dagger la struttura di *operatori di creazione e distruzione* di oscillatori armonici quantistici, due tipi di oscillatore per ogni modo di vibrazione del campo classico.

Lo spazio di Hilbert su cui agiscono gli operatori di campo é costituito dal prodotto tensoriale degli stati dei diversi oscillatori. Più precisamente, lo spazio degli stati comprende:

- lo *stato di vuoto*, lo stato in cui tutti gli oscillatori sono nel livello fondamentale. Matematicamente, $|0\rangle$ é determinato dalla condizione di essere annullato dall' applicazione di ciascun operatore di distruzione:

$$a_s(\vec{p})|0\rangle = b_r(\vec{q})|0\rangle = 0, \text{ per ogni } s, r, \vec{p}, \vec{q}; \quad (4.49)$$

- gli stati con dati numeri di eccitazione dei diversi oscillatori, ottenuti applicando al vuoto gli operatori di creazione a^\dagger e b^\dagger :

$$|n_1, n_2, \dots; m_1, m_2, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots m_1! m_2! \dots}} \cdot [a_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1)]^{n_1} [a_{s_2}^\dagger(\vec{p}_2)]^{n_2} \dots [b_{r_1}^\dagger(\vec{q}_1)]^{m_1} [b_{r_2}^\dagger(\vec{q}_2)]^{m_2} \dots |0\rangle \quad (4.50)$$

La natura fisica di questi oscillatori é chiarita dalla considerazione delle grandezze conservate, energia e momento del campo, \mathbf{H} e \mathbf{P} , e carica conservata, \mathbf{Q} . Sostituendo lo sviluppo (4.46) nelle (4.37) e (4.39) ed usando l' ortogonalità delle onde piane, troviamo (senza mai cambiare l' ordine in cui compaiono gli operatori nelle diverse espressioni):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \int d^3x \theta^{00} = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega(k) [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + b(\vec{k})b^\dagger(\vec{k})] \\ \mathbf{P}^i &= \int d^3x \theta^{0i} = \sum_{\vec{k}} \hbar k^i [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + b(\vec{k})b^\dagger(\vec{k})] \\ \mathbf{Q} &= \int d^3x J^0 = \sum_{\vec{k}} [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b(\vec{k})b^\dagger(\vec{k})] \end{aligned} \quad (4.51)$$

Possiamo adesso riordinare gli operatori in modo da avere sempre gli operatori di distruzione a destra, trovando:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \sum_{\vec{k}} \hbar\omega(k) [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})] + \text{cost.} \\ \mathbf{P}^i &= \sum_{\vec{k}} \hbar k^i [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})] \\ \mathbf{Q} &= \sum_{\vec{k}} [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})] \end{aligned} \quad (4.52)$$

Gli operatori ordinati danno tutti zero sullo stato di vuoto e danno il numero di occupazione dell' oscillatore corrispondente, quando applicati agli stati (4.50).

La costante (infinita) nell' espressione dell' energia rappresenta l' energia dello stato di vuoto che (finché restiamo nell' ambito della Teoria della Relatività Speciale) é inosservabile. Misurando le energie a partire dall' energia del vuoto, la prima delle (4.52) mostra che tutti gli stati hanno *energia positiva*.

I valori dell' energia e del momento corrispondenti agli stati $a^\dagger(\vec{k})|0\rangle$ sono quelli di una particella relativistica con 4-momento $p^\mu = (\hbar\omega(k), \hbar\vec{k})$ e $p_\mu p^\mu = (\hbar m)^2$. Il complesso degli stati che abbiamo trovato é quello di un gas perfetto quantistico formato da particelle identiche di due tipi (le particelle create dagli operatori a^\dagger e b^\dagger), con eguale massa e con carica ± 1 , rispettivamente.

Dalle regole di quantizzazione canoniche (4.43) vediamo che le particelle obbediscono alla statistica di Bose-Einstein: $n_1, n_2, \dots, m_1, m_2, \dots = 0, 1, 2, \dots$

Prodotti Normali La traduzione della Lagrangiana classica e delle altre osservabili del campo (energia, momento, etc.) soffre di una ambiguitá intrinseca, perché dobbiamo tradurre dei prodotti di grandezze classiche (commutanti) in prodotti di operatori lineari (in genere, non commutanti tra loro). Possiamo rimuovere questa ambiguitá definendo, come abbiamo appena fatto, i prodotti di operatori quantistici in modo che essi abbiano valore sul vuoto uguale a zero. Quando imponiamo questa condizione, diciamo di avere a che fare con *prodotti normali*, o *bene ordinati*

Per formalizzare questa condizione, osserviamo che gli operatori di campo sono la somma due componenti, caratterizzate dal segno dell' esponenziale in t nello sviluppo in onde piane:

$$\begin{aligned}\phi^{(+)}(x) &\sim e^{-i(px)} \text{ (convenzionalmente, frequenza positiva)} \\ \phi^{(-)}(x) &\sim e^{+i(px)} \text{ (convenzionalmente, frequenza negativa)}\end{aligned}\quad (4.53)$$

Il prodotto normale di due operatori di campo é definito come quello ottenuto portando gli operatori a frequenza positiva *alla destra* dell' espressione ed ignorando il risultato di eventuali commutatori. Il prodotto normale si indica comunemente col simbolo N o, piú semplicemente incapsulando il prodotto tra i simboli dei due punti (\dots). Ad esempio:

$$\begin{aligned}N(\phi(x)\phi^\dagger(y)) &=: \phi(x)\phi^\dagger(y) := (\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x))((\phi^\dagger)^{(+)}(y) + (\phi^\dagger)^{(-)}(y)) := \\ &= \phi^{(+)}(x)(\phi^\dagger)^{(+)}(y) + (\phi^\dagger)^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x)(\phi^\dagger)^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(x)(\phi^\dagger)^{(-)}(y)\end{aligned}\quad (4.54)$$

Nel seguito, intenderemo che Lagrangiana, Hamiltoniana ed altre osservabili siano costruite con i prodotti normali dei campi. In corrispondenza, l' espressione dell' energia é data dalla (4.52) senza la costante infinita.

4.3 Propagatore del campo scalare

In questa Sezione poniamo $\hbar = c = 1$. Il valore medio sul vuoto:

$$\langle 0 | T\{\phi(x)\phi^\dagger(y)\} | 0 \rangle \quad (4.55)$$

fornisce l' ampiezza quantistica per il piú semplice processo osservabile con un campo quantizzato:

(i) creazione di una particella da parte di una sorgente localizzata in y e corrispondente assorbimento in x , se $x^0 > y^0$, ovvero

(ii) creazione di un' antiparticella da una sorgente localizzata in x e corrispondente assorbimento in y , se $y^0 > x^0$.

La funzione (4.55) prende il nome di *propagatore* del campo corrispondente e la sua forma esplicita dipende dallo spin dei quanti associati al campo. Studiamo in questa sezione la forma del propagatore per campi di spin 0.

In una teoria di campo invariante per traslazioni il propagatore è funzione della sola differenza $x - y$.

Questo si può vedere inserendo nella (4.55) i prodotti $U^\dagger U = 1$, dove U è l' operatore che trasla di $-y$. Essendo il vuoto invariante per l' applicazione di U , otteniamo:

$$\langle 0 | T\{\phi(x)\phi^\dagger(y)\} | 0 \rangle = \langle 0 | T\{\phi(x-y)\phi^\dagger(0)\} | 0 \rangle = P(x-y) \quad (4.56)$$

Quando la particella associata al campo possiede una carica, come avviene se il campo è complesso, la carica fluisce in entrambi i casi da y verso x . Il propagatore può essere rappresentato da una linea orientata che va da y verso x .

Il propagatore del campo scalare. Per il campo scalare, il prodotto tempo-ordinato è definito come:

$$T\{\phi(x)\phi^\dagger(0)\} = \begin{cases} \phi(x)\phi^\dagger(0) & x^0 > 0 \\ \phi^\dagger(0)\phi(x) & 0 > x^0 \end{cases}, \quad (4.57)$$

Possiamo semplificare l' espressione di $P(x)$ nei due casi, come segue. Separiamo le componenti a frequenza positiva o negativa che danno luogo a valori sul vuoto diversi da zero. Otteniamo:

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T\{\phi(x)\phi^\dagger(0)\} | 0 \rangle = \\ & = \begin{cases} \langle 0 | \phi^{(+)}(x)(\phi^\dagger)^{(-)}(0) | 0 \rangle = \langle 0 | [\phi^{(+)}(x), (\phi^\dagger)^{(-)}(0)] | 0 \rangle; & x^0 > 0 \\ \langle 0 | (\phi^\dagger)^{(+)}(0)\phi^{(-)}(x) | 0 \rangle = - \langle 0 | [\phi^{(-)}(x), \phi^\dagger)^{(+)}(0)] | 0 \rangle; & 0 > x^0 \end{cases}, \quad (4.58) \end{aligned}$$

Definiamo le due funzioni:

$$i\Delta^{(+)}(x) = \langle 0 | [\phi^{(+)}(x), (\phi^\dagger)^{(-)}(0)] | 0 \rangle; \quad (4.59)$$

$$i\Delta^{(-)}(x) = \langle 0 | [\phi^{(-)}(x), (\phi^\dagger)^{(+)}(0)] | 0 \rangle \quad (4.60)$$

è immediato convincersi che queste due funzioni sono proprio le soluzioni dell' equazione omogenea di Klein-Gordon che abbiamo introdotto, con lo stesso nome, nella Sez. 4.1.2, Eq. (4.26) e (4.27). Ad esempio, a partire dallo sviluppo (4.46) e tenendo conto dei commutatori canonici, troviamo:

$$\begin{aligned} i\Delta^{(+)}(x) &= \langle 0 | [\phi^{(+)}(x), (\phi^\dagger)^{(-)}(0)] | 0 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\omega(\mathbf{k})V} e^{-i(kx)} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega(k)} e^{-i(kx)} \end{aligned}$$

che coincide con la (4.26).

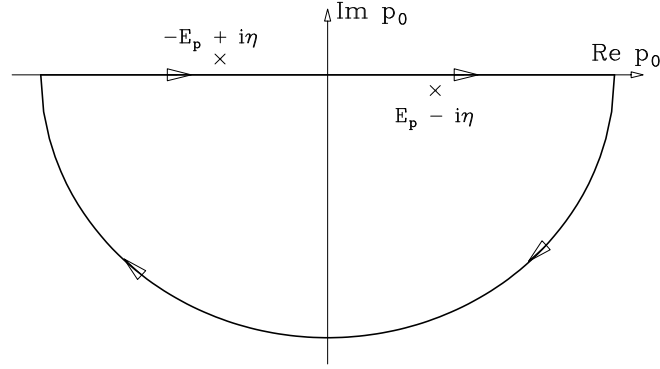


Figura 4.1: Seguendo la prescrizione $i\epsilon$ di Feynman, i poli della funzione di Green si spostano nel piano complesso come indicato in figura. Il cammino di integrazione per ottenere iD_F , Eq. (4.64), è adesso l'asse reale. In figura è indicato il modo in cui dobbiamo chiudere il cammino per ottenere: $iD_F = i\Delta^{(+)}$ per $x^0 > 0$. Per $x^0 < 0$ il cammino si deve chiudere nel semipiano superiore.

A sua volta, il propagatore, che indichiamo come:

$$\langle 0 | T\{\phi(x)\phi^\dagger(0)\} | 0 \rangle = iD_F(x) \quad (4.61)$$

si può scrivere come:

$$iD_F(x) = \theta(x^0)i\Delta^{(+)}(x) - \theta(-x^0)i\Delta^{(-)}(x) \quad (4.62)$$

e quindi coincide con la soluzione dell'equazione inhomogenea con le condizioni al contorno di Feynman riportata nell'Eq. (4.33) con lo stesso nome. *Le condizioni al contorno di Feynman sono le condizioni appropriate per riprodurre il propagatore quantistico.*

Riassumendo, se il campo scalare soddisfa l'equazione:

$$(-\square - \mu^2)\phi = 0 \quad (4.63)$$

il propagatore di Feynman in termini della sua trasformata di Fourier è dato da:

$$iD_F(x) = \langle 0 | T\{\phi(x)\phi^\dagger(0)\} | 0 \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} e^{-i(kx)}. \quad (4.64)$$

Come discusso nella Sez. 4.1.2 l'integrazione nel piano complesso di k^0 è fatta lungo l'asse reale e la prescrizione dell' $i\epsilon$ nella (4.64) sposta i poli dell'integrando secondo quanto indicato nella Fig.4.1.

Nel limite di massa infinita, il propagatore completo diventa completamente localizzato nello spazio-tempo. In questo limite, le singolarità nell'integrazione su k^0 nella (4.64) vanno all'infinito, ed otteniamo:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} D_F(x) = \frac{-i}{\mu^2} \delta^{(4)}(x). \quad (4.65)$$

Commento. È utile mostrare con un calcolo diretto che il prodotto tempo-ordinato dei campi scalari soddisfa l' equazione di Klein-Gordon con sorgente puntiforme. Consideriamo l' espressione in (4.57) che scriviamo esplicitamente come:

$$T\{\phi(x)\phi^\dagger(0)\} = \theta(t)\phi(x)\phi^\dagger(0) + \theta(-t)\phi^\dagger(0)\phi(x) \quad (4.66)$$

Dalle relazioni:

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(t) = -\frac{\partial}{\partial t}\theta(-t) = \delta(t) \quad (4.67)$$

e dalle regole di commutazione (4.42), si calcola:

$$\begin{aligned} \partial_t T\{\phi(x)\phi^\dagger(0)\} &= T\{\partial_t\phi(x)\phi^\dagger(0)\} + \delta(t)[\phi(\mathbf{x}, 0), \phi^\dagger(0)] = T\{\partial_t\phi(x)\phi^\dagger(0)\} \\ \partial_t^2 T\{\phi(x)\phi^\dagger(0)\} &= T\{\partial_t^2\phi(x)\phi^\dagger(0)\} + \delta(t)[\partial_t\phi(\mathbf{x}, 0), \phi^\dagger(0)] = \\ &= T\{\partial_t^2\phi(x)\phi^\dagger(0)\} - i\delta^4(x) \end{aligned} \quad (4.68)$$

ovvero, dato che ϕ soddisfa la (4.63), otteniamo:

$$(-\square - \mu^2)T\{\phi(x)\phi^\dagger(0)\} = i\delta^{(4)}(x) \quad (4.69)$$

coerentemente con la (4.64).

Capitolo 5

QUANTIZZAZIONE DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

5.1 Equazioni di Maxwell in forma covariante

Le equazioni che descrivono il comportamento del campo elettrico e del campo magnetico in presenza di densità di carica, $\rho(\vec{x}, t)$ e di corrente, $\vec{J}(\vec{x}, t)$, assegnate si scrivono al modo seguente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (5.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.2)$$

$$\text{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} \quad (5.3)$$

$$\text{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (5.4)$$

Queste equazioni si possono trascrivere immediatamente in forma covariante per trasformazioni di Lorentz [4].

Introduciamo il tensore antisimmetrico $F^{\mu\nu}$, collegato al campo elettrico e magnetico dalle relazioni:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= -F^{\nu\mu} \\ F^{0i} &= E^i; \quad F^{12} = B^3, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (5.5)$$

e la 4-densità di corrente:

$$j^\mu = \left(\rho, \frac{1}{c} \vec{j} \right) \quad (5.6)$$

Le equazioni di Maxwell non omogenee equivalgono alle equazioni:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \quad (5.7)$$

mentre le equazioni omogenee si riducono alle equazioni:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} &= 0; \\ (\mu \neq \lambda \neq \nu) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Le equazioni omogenee prendono una forma piú simmetrica se esprimiamo i tre indici antisimmetrici in termini del tensore di Levi-Civita e $F^{\mu\nu}$ in termini del tensore duale introdotto nella Parte 1. Le equazioni diventano allora:

$$\begin{aligned}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} &= 0 = \\ &= \partial_\nu(\tilde{F}^{\mu\nu})\end{aligned}\quad (5.9)$$

L' eq. (5.9) esprime il fatto che *il tensore duale non possiede sorgenti*, a differenza di $F^{\mu\nu}$. Poiché il passaggio tra F ed \tilde{F} comporta lo scambio tra campi elettrici e magnetici, le (5.9) indicano l' assenza di *monopoli magnetici*, cioè dell' analogo magnetico della carica elettrica.

Potenziale vettore Le equazioni (5.8) sono un vincolo sulle componenti di $F^{\mu\nu}$. In conseguenza, non tutte le sei componenti di \vec{E} e di \vec{B} sono variabili indipendenti.

I modi di scegliere tre indici diversi, ciascuno con quattro possibili valori, sono evidentemente quattro e tante sono le equazioni omogenee indipendenti. In totale, quindi, il campo elettromagnetico contiene solo *due variabili dinamiche*. Un primo passo, per isolare le componenti indipendenti, consiste nell' osservare che le equazioni (5.8) sono identicamente soddisfatte dalla posizione:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \quad (5.10)$$

come si verifica immediatamente usando la forma data in (5.9). L' equazione (5.10) definisce un nuovo campo, indicato col nome di *potenziale vettore*. Notiamo le espressioni esplicite ($\Phi = A^0 =$ potenziale scalare):

$$F^{0i} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -\partial_i \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}; \quad (5.11)$$

$$\vec{B} = \mathbf{rot} \vec{A} \quad (5.12)$$

Se usiamo come variabili dinamiche le componenti del potenziale vettore, le equazioni di Maxwell nel vuoto si possono ricavare da un Principio di Azione, a partire dalla lagrangiana di Maxwell:

$$L_{e.m.} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad (5.13)$$

Invarianza di gauge Le componenti di A^μ sono quattro variabili, quindi ancora ridondanti. Se eseguiamo una *trasformazione di gauge*:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f \quad (5.14)$$

il nuovo potenziale vettore da' luogo alle stesse osservabili \vec{E} e \vec{B} , *qualunque sia la funzione f* .

E' possibile e conveniente usare l' arbitrarietà nella definizione di A^μ per imporre una condizione covariante su A^μ . Una condizione spesso usata e' la *condizione di Lorentz*:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (5.15)$$

E' facile vedere che questa condizione puo' *sempre* essere imposta. Se partiamo da un A^μ dato che non soddisfa la (5.15), possiamo ottenere un A'^μ equivalente che la soddisfa risolvendo l' equazione:

$$0 = \partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu(x) + \square f(x) \quad (5.16)$$

che ha per incognita la $f(x)$. Possiamo dare esplicitamente una soluzione particolare di questa equazione in termini dell' inverso dell' operatore \square . Tuttavia la soluzione non e' unica, in quanto l' equazione omogenea corrispondente

$$\square f = 0 \quad (5.17)$$

ammette soluzioni non triviali (come abbiamo visto nel caso dell' equazione di Klein-Gordon). Questo e' in linea con il conteggio dei gradi di liberta'. Tenendo conto della (5.15) scendiamo a tre gradi di liberta' per A^μ , ma il conteggio precedente ci dice che i gradi di liberta' devono essere due.

Purtroppo, la ulteriore condizione non puo' essere data, in generale, in forma covariante. Questa e' la fonte di numerosi problemi, che verranno affrontati e risolti nel seguito.

5.1.1 Funzioni di Green del campo elettromagnetico

In termini del potenziale vettore, le equazioni di Maxwell inomogenee, (5.7) si scrivono:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \square A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = J^\mu$$

che, se A^μ soddisfa la condizione di Lorentz (5.15), si riduce all' equazione delle onde:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = J^\mu \quad (5.18)$$

con la condizione supplementare che la corrente sia conservata:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \rightarrow k_\mu \tilde{J}^\mu(k) = 0 \quad (5.19)$$

Nel caratterizzare le soluzioni della (5.18) possiamo usare i risultati della Sezione precedente, nel limite di massa nulla, $\mu^2 \rightarrow 0$. Come abbiamo visto, le funzioni di Green dell' equazione di Klein-Gordon presentano singolarita' nella trasformata di Fourier, localizzate nei punti $k^0 = \pm \sqrt{\mu^2 + (\vec{k})^2}$. Nel discutere il campo elettromagnetico, conviene tenere in un primo tempo una massa fittizia, λ , piccola ma non nulla, per evitare che le singolarita' collidano tra loro quando $\vec{k} \rightarrow 0$. Il limite $\lambda \rightarrow 0$ si puo' effettuare alla fine dei calcoli.

Dalla (5.18), vediamo che la funzione di Green del potenziale vettore soddisfa l' equazione:

$$-\square G^{\mu\nu}(x) = -g^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x) \quad (5.20)$$

ovvero, per la trasformata di Fourier:

$$k^2 \tilde{G}^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu} \quad (5.21)$$

La soluzione della (5.18) si scrive quindi (nella gauge di Lorentz, con le condizioni al contorno di Feynman):

$$A^\mu(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \tilde{J}_\nu(k) e^{-i(k \cdot x)} \right) + A_0^\mu(x) \quad (5.22)$$

dove A_0^μ soddisfa l' equazione delle onde libere.

Come indicato nel paragrafo precedente, la condizione di Lorentz non determina completamente la gauge e possiamo imporre un' ulteriore condizione. Per procedere, dobbiamo individuare una base appropriata su cui proiettare le quattro componenti di A^μ .

Fissiamo il quadrivettore $k^\mu = (\omega(k), \vec{k})$ e, in corrispondenza, un sistema di coordinate nello spazio-tempo individuato dai seguente quadrivettori:

$$\begin{aligned}\epsilon_{1,2}^\mu &= (0, \vec{\epsilon}_{1,2}); \quad \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_{(1,2)} = 0; \\ \epsilon_3^\mu &= (0, \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}); \\ \epsilon_0^\mu &= \eta^\mu = (1, \vec{0})\end{aligned}\tag{5.23}$$

Notiamo le condizioni di normalizzazione:

$$\epsilon_\alpha^\mu \epsilon_\beta^\nu g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}\tag{5.24}$$

e le relazioni di completezza:

$$\begin{aligned}\Sigma_{i=1,2} \epsilon_i^m \epsilon_i^n &= (\delta^{mn} - \frac{k^m k^n}{|\vec{k}|}); \\ \Sigma_\alpha g_{\alpha\alpha} \epsilon_\alpha^\mu \epsilon_\alpha^\nu &= g^{\mu\nu}\end{aligned}\tag{5.25}$$

Questi quadrivettori formano una base in cui si puo' sviluppare qualsiasi vettore.

Usando la seconda relazione di completezza nelle (5.25), riscriviamo la funzione di Green di Feynman nella (5.22) al modo seguente (il limite di massa nulla e' sottointeso):

$$\begin{aligned}\frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} &= \frac{-(\Sigma_\alpha g_{\alpha\alpha} \epsilon_\alpha^\mu \epsilon_\alpha^\nu)}{k^2 + i\epsilon} = \frac{(\Sigma_{1,2} \epsilon_i^\mu \epsilon_i^\nu)}{k^2 + i\epsilon} + \\ &+ \frac{(\epsilon_3^\mu \epsilon_3^\nu - \eta^\mu \eta^\nu)}{k^2 + i\epsilon}\end{aligned}\tag{5.26}$$

Avendo in mente la condizione (5.19), eliminiamo ϵ_3 in favore di k^μ e di η^μ :

$$\epsilon_3^\mu = \frac{k^\mu}{|\vec{k}|} - \frac{\omega}{|\vec{k}|} \eta^\mu\tag{5.27}$$

e di conseguenza:

$$\epsilon_3^\mu \epsilon_3^\nu - \eta^\mu \eta^\nu = \frac{k^\mu k^\nu}{(\vec{k})^2} - \frac{\omega}{(\vec{k})^2} (k^\mu \eta^\nu + \eta^\mu k^\nu) - (1 - \frac{\omega^2}{(\vec{k})^2}) \eta^\mu \eta^\nu\tag{5.28}$$

In conclusione, possiamo riscrivere l' integrando nella (5.22):

$$\begin{aligned}\frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \tilde{J}_\nu(k) e^{-i(k \cdot x)} &= \\ &= \frac{(\Sigma_{1,2} \epsilon_i^\mu \epsilon_i^\nu)}{k^2 + i\epsilon} \tilde{J}_\nu(k) e^{-i(k \cdot x)} + \\ &+ \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[\frac{k^\mu k^\nu}{(\vec{k})^2} - \frac{\omega}{(\vec{k})^2} (k^\mu \eta^\nu + \eta^\mu k^\nu) \right] \tilde{J}_\nu(k) e^{-i(k \cdot x)} +\end{aligned}\tag{5.29}$$

$$+ \frac{1}{(\vec{k})^2} \eta^\mu \eta^\nu \tilde{J}_\nu(k) e^{-i(k \cdot x)}\tag{5.30}$$

Analizziamo i diversi termini.

- I termini nella prima linea corrispondono alle onde generate dalla corrente, sono onde *trasverse* rispetto alla direzione di propagazione, e rappresentano i due gradi di libertà effettivamente presenti nel campo;
- Nella seconda linea, i termini proporzionali a k^μ contribuiscono, dopo integrazione, con termini del tipo $\partial^\mu f$, che possono essere eliminati con una ulteriore (l'ultima) trasformazione di gauge; i termini proporzionali a $k_\nu \tilde{J}^\nu$ si annullano per la conservazione della corrente; in totale possiamo ignorare la seconda linea;
- nella terza linea il propagatore di Feynman e' stato sostituito dalla trasformata di Fourier del campo coulombiano: questo termine rappresenta il potenziale elettrostatico generato dalla densita' di carica elettrica in J^μ .

Esplicitamente:

$$\begin{aligned} A^i(x) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\vec{k}|^2} \right) \tilde{J}^j(k) e^{-i(k \cdot x)}; \\ A^0(x) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{|\vec{k}|^2} \tilde{\rho}(k) e^{-i(k \cdot x)} \end{aligned} \quad (5.31)$$

notiamo:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x) &= 0; \\ -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} A^0(x) &= \rho(x) \end{aligned}$$

In generale, possiamo fissare la gauge in modo tale che il campo elettrico si divida in una parte longitudinale e una parte trasversa:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_L + \vec{E}_T; \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_T &= 0; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_L = \rho \end{aligned} \quad (5.32)$$

Dai risultati precedenti, otteniamo esplicitamente:

$$\begin{aligned} \vec{E}_L(\vec{x}, t) &= -\vec{\nabla} A^0 = -\vec{\nabla} \int d^3 y \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \rho(\vec{y}, t); \\ \vec{E}_T &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} e^{-ikx} \left[\vec{J} - \frac{\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{J})}{|\vec{k}|^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.33)$$

5.2 Le equazioni di Maxwell Lorentz

Specializziamo al caso in cui il campo elettromagnetico è accoppiato ad una particella puntiforme di carica q . Per l'elettrone, $q = -e$, dove e è la carica elettrica elementare:

$$e = +1.60217653(14)10^{-19} C \quad (5.34)$$

Per una particella puntiforme:

$$\begin{aligned} j^\mu &= (\rho, \frac{1}{c} \vec{j}); \\ \rho &= q \delta^{(3)}[x - x(t)]; \vec{j} = q \vec{v} \delta^{(3)}[x - x(t)] \end{aligned} \quad (5.35)$$

Notiamo le equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho &= -q \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \cdot \vec{\nabla} \delta^{(3)}[x - x(t)] \\ \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= q \vec{v}(t) \cdot \vec{\nabla} \delta^{(3)}[x - x(t)] \end{aligned} \quad (5.36)$$

Come conseguenza, j^μ verifica l' equazione di continuità:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (5.37)$$

L' estensione al caso di molte cariche è immediata.

L' Azione complessiva del sistema campo+carica si ottiene dalle equazioni della Sez. 5.1, specificando la corrente secondo la (5.35) ed aggiungendo l' Azione della carica. Nel complesso, abbiamo la densità di Lagrangiana:

$$L(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \delta^{(3)}[x - x(t)] (-mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}) - j_\mu A^\mu(x) \quad (5.38)$$

Da qui si ottengono, come prima, le equazioni del campo, nella forma:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu = q \frac{1}{\gamma} u_\mu A^\mu[x(t)] \delta^{(3)}[x - x(t)] \quad (5.39)$$

dove u^μ è la 4-velocità e, come al solito, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Per ricavare le equazioni del moto della carica, calcoliamo il momento coniugato ($\mathbf{L} = \int d^3x L$):

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \vec{v}} = m\gamma \vec{v} + q \vec{A}[\vec{x}(t), t] \quad (5.40)$$

da cui:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \vec{v}} = \frac{d}{dt} (m\gamma \vec{v}) + q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \quad (5.41)$$

e la forza generalizzata:

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \vec{x}} = -q [\vec{\nabla} A^0 - \Sigma_i v^i \vec{\nabla} A^i] \quad (5.42)$$

Le equazioni del moto sono quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \vec{v}} &= \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \vec{x}}; \\ \frac{d}{dt} (m\gamma \vec{v}) &= \frac{d}{dt} (\vec{p}) = -q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - q \vec{\nabla} A^0 + q \frac{1}{c} [-(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \Sigma_i v^i (\vec{\nabla} A^i)] = \\ &= q \vec{E} + q \frac{1}{c} \vec{v} \times \text{rot}(\vec{A}) = q \vec{E} + q \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Queste sono le equazioni per le componenti spaziali del 4-momento della carica, \vec{p} . L' equazione per la componente temporale si ottiene moltiplicando la precedente equazione per \vec{p} ed usando le relazioni:

$$\begin{aligned} p^0 dp^0 &= \vec{p} \cdot d\vec{p}; \\ \vec{v}/c &= \vec{\beta} = \vec{p}/p^0 \end{aligned}$$

Troviamo quindi:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = c \frac{dp^0}{dt} = q \vec{v} \cdot \vec{E} \quad (5.44)$$

L' equazione (5.44) esprime la conservazione dell' energia: *l' energia acquisita dalla particella nell' unita di tempo è pari alla potenza fornita dal campo elettrico* (la forza di Lorentz, il secondo termine a secondo membro della (5.43), non compie lavoro).

Le precedenti equazioni si possono porre in forma covariante, notando che:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\gamma} F^{0\mu} u_\mu \\ \frac{dp^1}{dt} &= q F^{01} + \frac{q}{c} (v^2 F^{12} - v^3 F^{31}) = \frac{1}{c\gamma} F^{1\mu} u_\mu \end{aligned}$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} \frac{dp^\mu}{dt} &= \frac{q}{c} \frac{1}{\gamma} F^{\mu\nu} u_\nu; \text{ ovvero} \\ \frac{dp^\mu}{d\tau} &= \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \end{aligned} \quad (5.45)$$

in termini del tempo proprio. Nel caso di piú particelle, otteniamo un' equazione del tipo (5.45) per ciascuna particella, mentre nelle equazioni (5.39) dobbiamo includere nella corrente il contributo di ciascuna particella.

Con la condizione al contorno che non ci siano campi esterni e campi all' infinito, le equazioni di Maxwell-Lorentz (5.39, 5.45) descrivono l' evoluzione temporale di un sistema di particelle cariche, ciascuna sotto l' azione del campo generato da essa stessa e dalle altre particelle.

Assumendo che le altre forze siano trascurabili, questo sistema di equazioni descrive il comportamento della materia in termini dei loro costituenti elementari. Le equazioni di Maxwell-Lorentz sono il primo esempio di una *Teoria del Tutto*, una teoria atta a descrivere tutti i fenomeni presenti in Natura.

La descrizione sistematica delle proprietà della materia sulla base delle equazioni (5.39, 5.45) e' stata affrontata da H. A. Lorentz [6] nei primi del Novecento con notevole successo, ed ha costituito un passo fondamentale nella comprensione della costituzione della materia.

Per quanto riguarda il comportamento della materia alla scala di laboratorio, l'ipotesi che le forze elettromagnetiche siano dominanti e' assolutamente adeguata. Su scale astronomiche, occorre tenere conto delle forze gravitazionali, che possono essere inserite nello schema estendendo il Principio di Relatività Speciale alla Relatività Generale di Einstein. Le equazioni di Maxwell-Lorentz-Einstein danno una descrizione accurata dei fenomeni su scala macroscopica, non ancora superata.

Su scala microscopica, alle dimensioni atomiche (10^{-8} cm) e subatomiche, lo schema di Maxwell-Lorentz deve essere sostituito dalla Elettrodinamica Quantistica (Quantum Electrodynamics, QED in breve). E' un fatto assolutamente notevole che le equazioni di Maxwell-Lorentz, una volta tradotte nello schema della Teoria Quantistica dei Campi, mantengono essenzialmente inalterata la loro forma e sono capaci di descrivere in modo straordinariamente accurato le proprietà della materia condensata e degli atomi.

A livello nucleare e subnucleare (al disotto di 10^{-13} cm) entrano in gioco altre forze: le *Forze Nucleari* descritte per la prima volta in modo covariante e quantistico da H. Yukawa, all'inizio degli anni '30, e le *Interazioni Deboli*, identificate da E. Fermi, sempre all'inizio degli anni '30, come responsabili del decadimento del neutrone e della radioattività β dei nuclei.

5.2.1 Conservazione dell' energia e del momento

A partire dalla Lagrangiana di Maxwell-Lorentz, possiamo costruire le grandezze conservate corrispondenti all'energia ed alla quantità di moto totali (campo piú cariche).

E' conveniente partire dal caso del campo elettromagnetico in assenza di cariche (cfr Sez. 5.1):

$$L_{e.m.} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (5.46)$$

Il tensore impulso-energia canonico é dato da (cfr. Parte 1):

$$\begin{aligned} T_{e.m.}^{\mu,\nu} &= \frac{\partial L}{\partial_\mu A_\beta} \partial^\nu A_\beta - g^{\mu\nu} L_{e.m.} = \\ &= F^{\mu\beta} \partial^\nu A_\beta + \frac{g^{\mu\nu}}{4} F^{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Accanto a $T_{e.m.}^{\mu,\nu}$ consideriamo il tensore simmetrico, $\Theta_{e.m.}^{\mu\nu}$, ottenuto con la procedura di Belinfante e Rosenfeld. $\Theta_{e.m.}^{\mu\nu}$ si ottiene, piú semplicemente, sommando alla (5.47) il tensore conservato:

$$S^{\mu,\nu} = -\partial_\beta (F^{\mu\beta} A^\nu) = -F^{\mu\beta} (\partial_\beta A^\nu)$$

in quanto, in assenza di cariche, $\partial_\beta F^{\mu\beta} = 0$. Notiamo che:

$$\partial_\mu S^{\mu,\nu} = 0; \quad \int d^3x S^{0\nu} = 0$$

In conclusione:

$$\Theta_{e.m.}^{\mu\nu} = -g_{\rho\sigma} F^{\rho\mu} F^{\sigma\nu} + \frac{g^{\mu\nu}}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (5.48)$$

Esplicitamente, le densità di energia e momento ottenute dalla (5.48) sono:

$$\begin{aligned} E_{e.m.} &= \Theta_{e.m.}^{00} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}); \\ P_{e.m.}^i &= \Theta_{e.m.}^{0i} = (\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{B}})^i \end{aligned} \quad (5.49)$$

Consideriamo adesso la *densità di lagrangiana* completa, (5.38), che riscriviamo per comodità:

$$\begin{aligned} L &= L_{e.m.} + L_q + L_{int}; \\ L_q &= -mc^2 \frac{1}{\gamma} \delta^{(3)}[\tilde{x} - \tilde{x}(t)]; \quad L_{int} = -j_\mu A^\mu = q \frac{1}{\gamma} \delta^{(3)}[\tilde{x} - \tilde{x}(t)] u_\mu A^\mu \end{aligned}$$

Il tensore impulso-energia canonico complessivo si ottiene differenziando rispetto ai gradi di libertà del campo e della particella. Ci limitiamo a considerare l' integrale spaziale delle componenti temporali ($\mathbf{L}_q + \mathbf{L}_{int} = \int d^3x (L_q + L_{int})$):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{tot} &= \int d^3x T_{tot}^{0,0} = \int d^3x \left[\frac{\partial L}{\partial_0 A_\beta} \partial^0 A_\beta - g^{00} L_{e.m.} \right] + \frac{\partial(\mathbf{L}_q + \mathbf{L}_{int})}{\partial \tilde{v}} \cdot \tilde{v} - (\mathbf{L}_q + \mathbf{L}_{int}) = \\ &= \int d^3x T_{e.m.}^{0,0} + mc^2 \gamma + q A^0[\tilde{x}(t), t] \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\mathbf{P}_{tot}^i = \int d^3x T_{e.m.}^{0i} + \frac{\partial(\mathbf{L}_q + \mathbf{L}_{int})}{\partial v^i} = \int d^3x T_{e.m.}^{0i} + m\gamma v^i + q A^i[\tilde{x}(t), t] \quad (5.51)$$

Il tensore $T_{e.m.}^{\mu,\nu}$ non è più conservato. Usando l' equazione del moto di $F^{\mu\nu}$, eq. (5.39) si trova:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_{e.m.}^\nu}{dt} &= \int d^3x \partial_0 T_{e.m.}^{0,\nu} = \int d^3x \partial_\mu T_{e.m.}^{\mu,\nu} = \\ &= - \int d^3x j_\beta \partial^\nu A^\beta + \int d^3x \frac{1}{2} F_{\mu\sigma} (\partial^\mu F^{\sigma\nu} + \partial^\sigma F^{\nu\mu} + \partial^\nu F^{\mu\sigma}) \end{aligned}$$

Nella parentesi del secondo termine $\sigma \neq \mu$. Se abbiamo anche: $\nu \neq \sigma \neq \mu$, la parentesi è nulla per le equazioni di Maxwell omogenee, (5.8), se invece: $\nu = \sigma \neq \mu$, si annulla per l' antisimmetria di $F^{\mu\nu}$. In ogni caso, quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{E}_{e.m.}}{dt} &= - \int d^3x j_\beta \partial^0 A^\beta = -q \partial_0 A^0 + q \vec{v} \cdot (\partial_0 \vec{A}); \\ \frac{d\mathbf{P}_{e.m.}^i}{dt} &= q \vec{v} \cdot (\partial_i \vec{A}) \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{E}_{tot}}{dt} &= \frac{d\mathbf{E}_{e.m.}}{dt} + \frac{d\mathbf{E}_q}{dt} = -q\partial_0 A^0 + q\vec{v} \cdot (\partial_0 \vec{A}) + \frac{d(mc^2\gamma)}{dt} + q\partial_0 A^0 + q\vec{v} \cdot \partial A^0 = \\ &= -q\vec{v} \cdot \vec{E} + \frac{d(mc^2\gamma)}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (5.52)$$

come conseguenza della equazione del moto della particella, (5.44). In modo analogo, sulla base dell' equazione del moto (5.43), troviamo;

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_{tot}^i}{dt} &= \frac{d\mathbf{P}_{e.m.}^i}{dt} + \frac{d\mathbf{P}_q^i}{dt} = q\vec{v} \cdot (\partial_i \vec{A}) + \frac{dm\gamma v^i}{dt} + q\partial_0 A^i + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} A^i = \\ &= \frac{dm\gamma v^i}{dt} - qE^i - q(\vec{v} \times \vec{B})^i = 0 \end{aligned} \quad (5.53)$$

L' evoluzione nel tempo del sistema consiste in uno scambio continuo di energia e quantità di moto tra campo e particella, conservando costanti i valori dell' energia e del momento complessivi.

Tuttavia, la definizione dell' energia e della quantità di moto associate alla particella o al campo ad un dato istante non é univoca, in quanto queste grandezze non sono, individualmente, costanti del moto. Una descrizione particolarmente semplice si ottiene eliminando $T_{e.m.}^{\mu,\nu}$ in favore di $\Theta_{e.m.}^{\mu,\nu}$. Confrontando la (5.47) e la (5.48) si ottiene:

$$T^{\mu,\nu} = \Theta^{\mu\nu} + F^{\mu\beta} \partial_\beta A^\nu = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\beta (F^{\mu\beta} A^\nu) - j^\mu A^\nu$$

La derivata totale si può omettere e possiamo combinare l' ultimo termine con l' espressione del momento-energia della particella. In questo modo otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{tot} &= \frac{1}{2} \int d^3x (E^2 + B^2) + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \mathbf{P}_{tot}^i &= \int d^3x (\vec{E} \times \vec{B})^i + \frac{mv^i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Nelle espressioni in (5.54) compare apparentemente solo l' energia della particella libera. Nel caso di piú particelle, ci si può chiedere dove sia finita l' energia di interazione elettrostatica tra le particelle stesse. La risposta é che questa energia é inglobata nel primo termine, come si vede al modo seguente. Separiamo il campo elettrico nelle componenti longitudinale e trasversa, secondo la (5.32). Troviamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3x E^2 &= \frac{1}{2} \int d^3x (E_L^2 + E_T^2) = \frac{1}{2} \int d^3x E_T^2 + \frac{1}{2} \int d^3x (\vec{\nabla} \Phi) \cdot (\vec{\nabla} \Phi) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x E_T^2 - \frac{1}{2} \int d^3x \Phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Phi) = \frac{1}{2} \int d^3x E_T^2 + \int d^3x \Phi \rho \end{aligned} \quad (5.55)$$

dove Φ é il potenziale elettrostatico. Il secondo termine nell' espressione finale é l' energia elettrostatica che, per un sistema di particelle puntiformi, si riduce all' espressione:

$$V_{Coul} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{1}{4\pi} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i(t) - \vec{x}_j(t)|} \quad (5.56)$$

Troviamo:

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \int d^3x (E_T^2 + B^2) + \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \frac{1}{4\pi} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.57)$$

Il primo termine contiene solo i gradi di libertà del campo di radiazione, il secondo e terzo i gradi di libertà delle particelle.

A partire dalle (5.54) si può ricavare, infine, il tensore impulso-energia non integrato, nella forma:

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu} &= \Theta_{e.m.}^{\mu\nu} + \theta^{\mu\nu}; \\ \theta^{\mu\nu} &= mc^2 \frac{1}{\gamma} u^\mu u^\nu \delta^{(3)}[\vec{x} - \vec{x}(t)] \end{aligned}$$

Problema . Partendo dalla legge di trasformazione: $(A^\mu)'(x') = \Lambda_\nu^\mu A^\nu(x)$ calcolare le matrici del momento angolare, $(\Sigma^{\alpha\beta})_\nu^\mu$, introdotte nella Parte 1 e mostrare che $\Theta_{e.m.}^{\mu\nu}$ in eq.(5.48) si ottiene dal tensore canonico $T_{e.m.}^{\mu,\nu}$ con la costruzione di Belinfante e Rosenfeld.

Commento. Per una particella puntiforme abbiamo introdotto le *densità* di lagrangiana, corrente e impulso-energia nella forma:

$$\begin{aligned} L &= -mc^2 \frac{1}{\gamma} \delta[\vec{x} - \vec{x}(t)]; \\ j^\mu &= q \frac{1}{\gamma} u^\mu \delta[\vec{x} - \vec{x}(t)]; \\ \theta^{\mu\nu} &= mc^2 \frac{1}{\gamma} u^\mu u^\nu \delta[\vec{x} - \vec{x}(t)]; \end{aligned}$$

E' interessante osservare che il fattore $1/\gamma$ é essenziale per compensare la non covarianza della funzione delta e produrre delle grandezze appropriatamente covarianti, come si vede con l' argomento seguente. Moltiplichiamo j^μ per una 4-densità esplicitamente covariante e per un elemento finito ma piccolo di 4-volume intorno a $(\vec{x}(t), t)$:

$$\Delta(jA) = \Delta^3x \Delta t (j_\mu A^\mu) = q \frac{\Delta t}{\gamma} u_\mu A^\mu(\vec{x}(t), t) = q \Delta\tau [u_\mu A^\mu(\vec{x}(\tau), \tau)] \quad (5.58)$$

dove τ é il tempo proprio della particella. Abbiamo ottenuto un risultato invariante *qualunque sia* il 4-vettore A^μ , quindi j^μ deve esso stesso trasformare come un 4-vettore. Analogo ragionamento vale per le altre densità.

5.2.2 Formalismo Hamiltoniano e sostituzione minimale

Il momento coniugato della particella é stato già calcolato nella (5.51):

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} + q\vec{A}[\vec{x}(t), t] \quad (5.59)$$

di qui dobbiamo ricavare \vec{v} come funzione di \vec{p} . Troviamo

$$\vec{v} = \frac{c\vec{\pi}}{\sqrt{|\vec{\pi}|^2 + (mc)^2}};$$

$$\vec{\pi} = \vec{p} - q\vec{A}$$

L' Hamiltoniana della particella carica si ottiene da:

$$\mathbf{H}_p = \vec{p} \cdot \vec{v} - (\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_{int}) = \vec{p} \cdot \vec{v} + qA^0 - q\vec{v} \cdot \vec{A} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} =$$

$$= qA^0 + \vec{v} \cdot \vec{\pi} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Eliminando \vec{v} troviamo infine:

$$\mathbf{H}_p = qA^0 + \sqrt{(mc^2)^2 + c^2(\vec{p} - q\vec{A})^2} \quad (5.60)$$

Se confrontiamo con l' Hamiltoniana della particella libera:

$$\mathbf{H}_p = \sqrt{(mc^2)^2 + (c\vec{p})^2} \quad (5.61)$$

vediamo che l' interazione di una particella carica in un campo elettromagnetico assegnato si introduce con la *Sostituzione Minimale*:

$$\mathbf{H}_p \rightarrow \mathbf{H}_p - qA^0;$$

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A} \quad (5.62)$$

ovvero, in termini covarianti:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu \quad (5.63)$$

Concludiamo con l' Hamiltoniana del campo elettromagnetico. Si parte dalla definizione del momento coniugato di A^μ :

$$\Pi^\mu = \frac{\partial L}{\partial \partial_0 A_\nu} = F^{0\mu} \quad (5.64)$$

Notiamo che $\Pi^0 = F^{00} = 0$, coerentemente con il fatto che A^0 non é una reale variabile del campo elettromagnetico. Inoltre, come abbiamo visto nelle equazioni (5.31) e seguenti, possiamo scegliere una gauge in cui il potenziale vettore é trasverso: $\partial_i A^i = 0$. In questa gauge,

$$\Pi^i = -\partial_0 A^i = E_T^i \quad (5.65)$$

L' Hamiltoniana del campo é data da:

$$\mathbf{H}_{e.m.} = \int d^3x \{ \vec{\Pi} \cdot (\partial_0 \vec{A}) - L_{e.m.} \} = \int d^3x \{ E_T^2 - \frac{1}{2}(E^2 - B^2) \} =$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3x \{ (E_T^2 + B^2) \} - \frac{1}{2} \int d^3x E_L^2$$

Dobbiamo aggiungere questo risultato all' Hamiltonian della particella (5.60). Consideriamo il caso di diverse particelle cariche, troviamo ($A_i^\mu = A^\mu[\vec{x}_i(t), t]$):

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{tot} &= \frac{1}{2} \int d^3x (E_T^2 + B^2) - \frac{1}{2} \int d^3x E_L^2 + \Sigma_i q A_i^0 + \Sigma_i \sqrt{(m_i c^2)^2 + c^2(\vec{p}_i - \vec{A}_i)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x (E_T^2 + B^2) + \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \frac{q_i q_j}{4\pi|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} + \Sigma_i \sqrt{(m_i c^2)^2 + c^2(\vec{p}_i - \vec{A}_i)^2} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Nel limite non-relativistico troviamo il risultato ben noto:

$$\mathbf{H}_{tot} = \frac{1}{2} \int d^3x (E_T^2 + B^2) + \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \frac{q_i q_j}{4\pi|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} + \Sigma_i \frac{(\vec{p}_i - q_i \vec{A}_i)^2}{2m_i^2} \quad (5.67)$$

L' effetto Zeeman classico. La sostituzione minimale conduce alla forza di Lorentz e quindi la sua validità trova numerose conferme nei fenomeni elettromagnetici classici.

Un' applicazione caratteristica della sostituzione minimale é quella dell' *effetto Zeeman*, la moltiplicazione delle righe spettrali emesse o assorbite dagli atomi quando sono posti in un campo magnetico, considerata nella teoria classica da H. A. Lorentz [6]. Consideriamo un elettrone in un sistema atomico descritto dall' Hamiltoniana:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \dots + V(\mathbf{x}, \dots) \quad (5.68)$$

dove \vec{x}, \vec{p} sono le variabili canoniche dell' elettrone e i punti di sospensione indicano ulteriori termini nell' energia cinetica o nel potenziale dovuti agli altri gradi di libertà del sistema. Supponiamo inoltre che V abbia una simmetria sferica, $V = V(r^2, \dots)$ con $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Le equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m}; \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \vec{x}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}} = -\frac{\partial V}{\partial r^2} 2\vec{x} \end{aligned} \quad (5.69)$$

Adesso introduciamo un campo magnetico costante diretto lungo l' asse z , generato dal potenziale vettore:

$$\mathbf{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0); \quad \text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Secondo la sostituzione minimale, la nuova Hamiltoniana é adesso:

$$\mathbf{H} = \frac{(\vec{p} + e\vec{A})^2}{2m} + \dots + V(r^2, \dots) \quad (5.70)$$

La simmetria sferica é ridotta ad una simmetria assiale, intorno alla direzione di \vec{B} , per cui dobbiamo trattare separatamente le variabili z, p_z dalle x, p_x e y, p_y . Introduciamo, al posto di queste ultime, le variabili complesse:

$$\zeta = x + iy; \quad p = p_x + ip_y \quad (5.71)$$

ed inoltre:

$$A = A_x + iA_y = i\frac{B}{2}\zeta \quad (5.72)$$

Le equazioni di Hamilton per le coordinate trasverse a B sono:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_x} + i\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_y} = \frac{p}{m} + i\omega_L \zeta$$

dove abbiamo introdotto la *frequenza di Larmor*:

$$\omega_L = \frac{eB}{2m}. \quad (5.73)$$

Definiamo una nuova variabile $\chi(t)$ ponendo:

$$\zeta(t) = \chi(t)e^{i\omega_L t} \quad (5.74)$$

L'equazione precedente ci dá:

$$\frac{d\chi}{dt} e^{i\omega_L t} = \frac{p}{m} \quad (5.75)$$

che suggerisce di ridefinire anche il momento coniugato, ponendo:

$$p(t) = \pi(t)e^{i\omega_L t} \quad (5.76)$$

La equazione di Hamilton per p si scrive allora:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \left(\frac{d\pi}{dt} + i\omega_L \pi\right)e^{i\omega_L t} = -\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} + i\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y}\right) = \\ &= -\frac{\partial V}{\partial r^2} 2\zeta + i\omega_L p = \left(-\frac{\partial V}{\partial r^2} 2\chi + i\omega_L \pi\right)e^{i\omega_L t} \end{aligned} \quad (5.77)$$

dove abbiamo ommesso termini quadratici nel campo magnetico, che sono trascurabili nelle condizioni sperimentali usuali.

La conclusione che si ottiene dalle equazioni (5.73) e (5.77) é che le variabili χ e π obbediscono alle stesse equazioni del moto dell'atomo imperturbato. Dalla (5.74) vediamo che al moto imperturbato si sovrappone un movimento di precessione intorno al campo magnetico con la frequenza di Larmor. Il moto lungo z non é influenzato affatto dal campo (del resto, la componente z della forza di Lorentz é nulla).

Se assumiamo che il moto imperturbato sia armonico con frequenza ω_0 , abbiamo:

$$\chi(t) = ae^{+i\omega_0 t} + be^{-i\omega_0 t}, \quad z = ce^{i\omega_0 t}$$

per le soluzioni della (5.69) mentre:

$$\zeta(t) = ae^{+i(\omega_0 + \omega_L)t} + be^{-i(\omega_0 - \omega_L)t}, \quad z = ce^{i\omega_0 t} \quad (5.78)$$

per il moto nel campo magnetico.

La riga spettrale con frequenza ω_0 assorbita o emessa dall'atomo in condizioni normali, nel campo magnetico si scinde in tre componenti di frequenza $\omega_0 \pm \omega_L$, ω_0 . Inoltre, la luce che va

nella direzione del campo magnetico, cui non può contribuire il moto lungo z , contiene solo le prime due componenti.

Le previsioni classiche sono rispettate in un certo numero di casi (effetto Zeeman *normale*). In altri casi, tuttavia, la struttura delle linee nel campo magnetico è più complicata. L'effetto Zeeman *anomalo* si può spiegare solo tenendo conto del momento magnetico di spin dell'elettrone, su cui torneremo nella Sez. ??.

5.3 Quantizzazione del campo elettromagnetico nel vuoto

A dispetto del fatto che l'osservazione dei fenomeni elettromagnetici è stata all'origine dello sviluppo della teoria dei campi classici, la quantizzazione del campo elettromagnetico nel formalismo canonico presenta problemi non banali.

Il punto di partenza è la densità di lagrangiana (5.13)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)\partial_\nu A_\mu = \frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2) \quad (5.79)$$

dalla quale si ricavano, attraverso il principio di azione, le equazioni di Maxwell in assenza di cariche e correnti. Le variabili canoniche coniugate alle componenti del potenziale vettore A^μ , che si ottengono dalla

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = F^{0\mu} \quad (5.80)$$

sono ($i = 1, 2, 3$)

$$\pi^0 = F^{00} = 0 \quad , \quad \pi^i = F^{0i} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = E^i \quad (5.81)$$

Dall'espressione corrispondente della densità hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^3 \pi^i \dot{A}_i - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 E^i \dot{A}_i - \frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2) = \frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) + \mathbf{E} \cdot \nabla \phi \quad (5.82)$$

con $\phi = A^0$, segue che (si confronti con la (5.54))

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) \quad (5.83)$$

come si vede facilmente integrando per parti ed usando la $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$.

Le regole di commutazione canoniche per le A^μ e π^i ($i, k = 1, 2, 3$)

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] = 0 \quad (5.84)$$

$$[\pi^i(\mathbf{x}, t), \pi^k(\mathbf{x}', t)] = 0 \quad (5.85)$$

$$[\pi^k(\mathbf{x}, t), A^0(\mathbf{x}', t)] = 0 \quad (5.86)$$

mostrano che, a causa dell'annullarsi del momento coniugato π^0 , la componente A^0 del potenziale vettore, a differenza delle A^i , commuta con tutte le A^μ e π^i , e può quindi essere descritta da un numero, invece che da un operatore. Ci si può quindi limitare ad applicare il formalismo quantistico alle sole componenti A^i , e trattare A^0 come un campo classico. Questa procedura, seguita originariamente da Dirac [?], pur essendo di grande utilità in molte applicazioni ha lo svantaggio di non essere manifestamente covariante, in quanto le componenti del quadrivettore A^μ sono trattate in modo asimmetrico. La quantizzazione covariante del campo elettromagnetico presenta problemi tecnici non banali e sarà discussa più avanti.

5.3.1 Energia e impulso del campo elettromagnetico

Nella gauge definita dalla condizione

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 , \quad (5.87)$$

il potenziale vettore soddisfa alla

$$\square \mathbf{A}(x) = \mathbf{j}(x) - \nabla \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} , \quad (5.88)$$

come segue dalla (5.3), mentre la (5.1) implica che il potenziale scalare $A^0 = \phi$, soluzione dell'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \phi(x) = -\rho(x) , \quad (5.89)$$

è il potenziale coulombiano generato dalla distribuzione di carica $\rho(x)$

$$\phi(x) = \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} . \quad (5.90)$$

Per questo motivo la gauge (5.87) è chiamata gauge di Coulomb.

In linea di principio, il termine contenente ϕ nel secondo membro della (5.88) si può ottenere dalla (5.90). Tuttavia, separando le componenti longitudinale e trasversa della corrente, cioè scrivendo

$$\mathbf{j}(x) = \mathbf{j}_T(x) + \mathbf{j}_L(x) \quad (5.91)$$

con

$$\nabla \times \mathbf{j}_L = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{j}_T = 0 \quad (5.92)$$

e usando la (5.90) e l'equazione di continuità si dimostra facilmente che

$$\nabla \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} = \mathbf{j}_L(x) , \quad (5.93)$$

cioè che il termine di sorgente nell'equazione che determina il potenziale vettore \mathbf{A} si riduce alla componente trasversa della corrente, $\mathbf{j}_T(x)$.

In assenza di cariche e correnti, $\phi(x) \equiv 0$ e la (5.88), diventa

$$\square \mathbf{A} = 0 . \quad (5.94)$$

Una soluzione particolare della (5.94) che soddisfa alle condizioni di periodicità sui bordi di una scatola cubica, discusse nella sezione 4.1.1, si può scrivere nella la forma

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} , \quad (5.95)$$

dove V è il volume di normalizzazione e

$$\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}| . \quad (5.96)$$

La condizione di gauge (5.87) implica che il vettore di polarizzazione gode della proprietà

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}} = 0 , \quad (5.97)$$

cioè che per ogni vettore d'onda \mathbf{k} , $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}}$ giace sul piano perpendicolare a \mathbf{k} . Possiamo quindi definire due vettori unitari reali, $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}1}$ and $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}2}$, tali che ($r, r' = 1, 2$)

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r'} = \delta_{rr'} \quad (5.98)$$

e

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r} \cdot \mathbf{k} = 0 . \quad (5.99)$$

La soluzione generale della (5.94) che soddisfa alla condizione di gauge (5.87) si ottiene dalla combinazione lineare delle $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t)$ (ricordiamo che $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ è una funzione reale)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 [c_{\mathbf{k}r} \mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x}, t) + c_{\mathbf{k}r}^* \mathbf{u}_{\mathbf{k}r}^*(\mathbf{x}, t)] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 [c_{\mathbf{k}r}(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x}) + c_{\mathbf{k}r}^*(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k}r}^*(\mathbf{x})] , \end{aligned} \quad (5.100)$$

dove abbiamo definito

$$c_{\mathbf{k}r}(t) = c_{\mathbf{k}r} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} \quad (5.101)$$

e le funzioni

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} . \quad (5.102)$$

soddisfano le relazioni di ortonormalità

$$\int d^3x \mathbf{u}_{\mathbf{k}r}^*(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{\mathbf{k}'r'}(\mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}'r'}}{V} \int d^3x e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} = \delta_{rr'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} . \quad (5.103)$$

Sostituendo nell'espressione dell'energia del campo elettromagnetico classico (si confronti con la (5.54))

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (|\mathbf{B}|^2 + |\mathbf{E}|^2) = \frac{1}{2} \int d^3x \left(|\nabla \times \mathbf{A}|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right|^2 \right) \quad (5.104)$$

lo sviluppo di Fourier (5.100) si ottiene

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}r} \sum_{\mathbf{k}'r'} \int d^3x \left\{ [c_{\mathbf{k}r}(t) \nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x}) + c.c.] \cdot [c_{\mathbf{k}'r'}^*(t) \nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}'r'}^*(\mathbf{x}) + c.c.] + \left[\frac{\partial c_{\mathbf{k}r}}{\partial t} \mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x}) + c.c. \right] \cdot \left[\frac{\partial c_{\mathbf{k}'r'}^*}{\partial t} \mathbf{u}_{\mathbf{k}'r'}^*(\mathbf{x}) + c.c. \right] \right\}. \quad (5.105)$$

Il calcolo del contributo del campo magnetico richiede integrazioni del tipo

$$\begin{aligned} & \int d^3x (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x})) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}'r'}^*(\mathbf{x})) \\ &= \int d^3x \nabla \cdot [\mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x}) \times (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}'r'}^*(\mathbf{x}))] + \int d^3x \mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x}) \cdot [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}'r'}^*(\mathbf{x}))] \\ &= - \int d^3x \mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x}) \nabla^2 \mathbf{u}_{\mathbf{k}'r'}^*(\mathbf{x}) \\ &= \frac{|\mathbf{k}'|^2}{V} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}'r'} \int d^3x e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} = \omega_k^2 \delta_{rr'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \end{aligned}$$

che si effettuano facilmente usando le condizioni di periodicità sui bordi del volume di integrazione e le identità $(\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \cdot [\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v})] + \mathbf{u} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})]$ e $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$. Gli integrali corrispondenti al contributo del campo elettrico sono invece del tipo

$$\int d^3x \frac{\partial c_{\mathbf{k}r}}{\partial t} \mathbf{u}_{\mathbf{k}r}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial c_{\mathbf{k}'r'}^*}{\partial t} \mathbf{u}_{\mathbf{k}'r'}^*(\mathbf{x}) = \omega_k \omega_{k'} \delta_{rr'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}r}(t) c_{\mathbf{k}'r'}^*(t).$$

Il risultato finale è

$$H = \sum_{\mathbf{k}r} \omega_k^2 [c_{\mathbf{k}r}(t) c_{\mathbf{k}r}^*(t) + c_{\mathbf{k}r}^*(t) c_{\mathbf{k}r}(t)], \quad (5.106)$$

dove le funzioni $c_{\mathbf{k}r}(t)$ soddisfano all'equazione differenziale

$$\ddot{c}_{\mathbf{k}r}(t) = -\omega_k^2 c_{\mathbf{k}r}(t), \quad (5.107)$$

cioè all'equazione del moto di un oscillatore armonico classico di frequenza angolare ω_k e massa unitaria. Si noti che, se le funzioni $c_{\mathbf{k}r}(t)$ sono numeri complessi, $[c_{\mathbf{k}r}(t) c_{\mathbf{k}r}^*(t) + c_{\mathbf{k}r}^*(t) c_{\mathbf{k}r}(t)] = 2c_{\mathbf{k}r}(t) c_{\mathbf{k}r}^*(t)$. Il motivo per cui abbiamo scritto H nella forma (5.106) sarà chiaro tra poco.

L'energia di un sistema di oscillatori classici di massa unitaria, oscillanti nelle direzioni individuate dai vettori d'onda \mathbf{k} con frequenza angolare ω_k è

$$H_{osc} = \sum_{\mathbf{k}r} \frac{1}{2} (p_{\mathbf{k}r}^2 + \omega_k^2 x_{\mathbf{k}r}^2), \quad (5.108)$$

dove $x_{\mathbf{k}r}$ and $p_{\mathbf{k}r}$ sono le variabili canoniche classiche, che soddisfano alle equazioni del moto

$$\ddot{x}_{\mathbf{k}r}(t) = -\omega_k^2 x_{\mathbf{k}r}(t) \quad , \quad \ddot{p}_{\mathbf{k}r}(t) = -\omega_k^2 p_{\mathbf{k}r}(t). \quad (5.109)$$

Confrontando la (5.106) alla (5.108) vediamo subito che H coincide con H_{osc} se

$$c_{\mathbf{k}r} = \frac{1}{2\omega_k} (\omega_k x_{\mathbf{k}r} + i p_{\mathbf{k}r}) \quad , \quad c_{\mathbf{k}r}^* = \frac{1}{2\omega_k} (\omega_k x_{\mathbf{k}r} - i p_{\mathbf{k}r}), \quad (5.110)$$

ovvero se

$$x_{\mathbf{k}r} = c_{\mathbf{k}r} + c_{\mathbf{k}r}^* \quad , \quad p_{\mathbf{k}r} = -i\omega_k(c_{\mathbf{k}r} - c_{\mathbf{k}r}^*) . \quad (5.111)$$

Questo risultato suggerisce di interpretare H come l'energia di un insieme di oscillatori classici. Il passaggio al caso quantistico, usando il formalismo descritto nell'Appendice ?? è immediato. L'energia di un sistema di oscillatori quantistici ha infatti la forma

$$H = \sum_{\mathbf{k}r} \frac{\omega_k}{2} \left(a_{\mathbf{k}r}^\dagger a_{\mathbf{k}r} + a_{\mathbf{k}r} a_{\mathbf{k}r}^\dagger \right) , \quad (5.112)$$

che coincide con quella dell'energia del campo elettromagnetico (5.106) se si interpretano i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di \mathbf{A} come operatori quantistici definiti dalle relazioni

$$c_{\mathbf{k}r} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} a_{\mathbf{k}r} \quad , \quad c_{\mathbf{k}r}^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} a_{\mathbf{k}r}^\dagger . \quad (5.113)$$

Il potenziale vettore \mathbf{A} si può quindi esprimere in termini degli operatori di creazione e distruzione $a_{\mathbf{k}r}^\dagger$ e $a_{\mathbf{k}r}$

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{\mathbf{k}r} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r} \left[a_{\mathbf{k}r}(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}r}^\dagger(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] \quad (5.114)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\mathbf{k}r} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r} \left[a_{\mathbf{k}r} e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + a_{\mathbf{k}r}^\dagger e^{i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right] \\ &= \mathbf{A}^+(x) + \mathbf{A}^-(x) . \end{aligned} \quad (5.115)$$

ed è un'operatore nello spazio di Hilbert i cui vettori di stato sono

$$|n_{\mathbf{k}_1 r_1}, n_{\mathbf{k}_2 r_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_n r_n} \dots\rangle , \quad (5.116)$$

dove $n_{\mathbf{k}r}$ è il numero di quanti nel modo di oscillazione caratterizzato dal vettore d'onda \mathbf{k} e dal vettore di polarizzazione $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r}$. Lo stato (5.116) si può ottenere a partire dallo stato di vuoto, che corrisponde a $n_{\mathbf{k}r} \equiv 0$, usando la

$$|n_{\mathbf{k}_1 r_1}, n_{\mathbf{k}_2 r_2}, \dots\rangle = \prod_{\mathbf{k}_i r_i} \frac{(a_{\mathbf{k}_i r_i}^\dagger)^{n_{\mathbf{k}_i r_i}}}{\sqrt{n_{\mathbf{k}_i r_i}!}} |0\rangle . \quad (5.117)$$

Si noti che nella (5.115) abbiamo separato il contributo dei termini contenenti operatori di creazione ($\mathbf{A}^-(x)$) e annichilazione ($\mathbf{A}^+(x)$). Ovviamente si ha che

$$\mathbf{A}^+(x)|0\rangle = 0 . \quad (5.118)$$

Scegliendo $\langle 0|H|0\rangle$ come zero della scala delle energie, l'hamiltoniana del campo elettromagnetico si riduce a

$$H = \sum_{\mathbf{k}r} \omega_k N_{\mathbf{k}r} , \quad (5.119)$$

con $N_{\mathbf{k}r} = a_{\mathbf{k}r}^\dagger a_{\mathbf{k}r}$, e soddisfa l'equazione agli autovalori

$$H|n_{\mathbf{k}_1 r_1}, n_{\mathbf{k}_2 r_2}, \dots\rangle = \sum_{\mathbf{k}_i r_i} n_{\mathbf{k}_i r_i} \omega_{k_i} |n_{\mathbf{k}_1 r_1}, n_{\mathbf{k}_2 r_2}, \dots\rangle . \quad (5.120)$$

Poichè $\mathbf{A}(x)$ è lineare negli operatori di creazione e distruzione, dalle regole di commutazione

$$[a_{\mathbf{k}r}, N_{\mathbf{k}'r'}] = [a_{\mathbf{k}r}, a_{\mathbf{k}'r'}^\dagger a_{\mathbf{k}'r'}] = \delta_{rr'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}r} \quad (5.121)$$

e

$$[a_{\mathbf{k}r}^\dagger, N_{\mathbf{k}'r'}] = [a_{\mathbf{k}r}^\dagger, a_{\mathbf{k}'r'}^\dagger a_{\mathbf{k}'r'}] = \delta_{rr'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}r}^\dagger , \quad (5.122)$$

segue che l'operatore $N_{\mathbf{k}r}$ non commuta con $\mathbf{A}(x)$, e quindi neppure con i campi elettrico e magnetico \mathbf{E} e \mathbf{B} . Questo risultato implica che i valori di \mathbf{E} e \mathbf{B} e gli $n_{\mathbf{k}r}$ non possono essere misurati simultaneamente con precisione arbitraria. Inoltre, dalla linearità di $\mathbf{A}(x)$ negli $a_{\mathbf{k}r}$ e $a_{\mathbf{k}r}^\dagger$, segue anche che i valori di aspettazione $\langle \mathbf{E} \rangle$ and $\langle \mathbf{B} \rangle$ negli stati (5.116) sono tutti nulli.

Classicamente, l'impulso del campo elettromagnetico è dato dal vettore di Poynting (si confronti con la (5.54))

$$\mathbf{P} = \int d^3x \mathbf{E} \times \mathbf{B} = - \int d^3x \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \times (\nabla \times \mathbf{A}) . \quad (5.123)$$

Sostituendo la (5.114) nella (5.123) troviamo

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_{\mathbf{k}r} \mathbf{k} \frac{1}{2} \left(a_{\mathbf{k}r}^\dagger a_{\mathbf{k}r} + a_{\mathbf{k}r} a_{\mathbf{k}r}^\dagger \right) \\ &= \sum_{\mathbf{k}r} \mathbf{k} \left(a_{\mathbf{k}r}^\dagger a_{\mathbf{k}r} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{k}r} \mathbf{k} N_{\mathbf{k}r} . \end{aligned} \quad (5.124)$$

Per ottenere la (5.124) è conveniente riscrivere la (5.123) nella forma

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{2} \int d^3x (\mathbf{E} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{E}) . \quad (5.125)$$

In questo modo si vede subito che i termini contenenti due operatori di creazione o due operatori di distruzione non contribuiscono. Per il calcolo degli altri termini si utilizza la

$$\begin{aligned} &\int d^3x \sum_{\mathbf{k}r} \sum_{\mathbf{k}'r'} \frac{1}{2V} \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r} \times (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}'r'}) \omega_k \left[a_{\mathbf{k}r} a_{\mathbf{k}'r'}^\dagger e^{-i(k-k')x} + a_{\mathbf{k}r}^\dagger a_{\mathbf{k}'r'} e^{i(k-k')x} \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}r} \sum_{\mathbf{k}'r'} \frac{1}{2} \frac{\omega_k}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}r} \times (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}'r'}) \left(a_{\mathbf{k}r} a_{\mathbf{k}'r'}^\dagger + a_{\mathbf{k}r}^\dagger a_{\mathbf{k}'r'} \right) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ &= \sum_{\mathbf{k}r} \mathbf{k} \left(a_{\mathbf{k}r}^\dagger a_{\mathbf{k}r} + \frac{1}{2} \right) , \end{aligned} \quad (5.126)$$

dove, ovviamente, $\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} = 0$.

L'equazione (5.124) mostra che il quanto del campo elettromagnetico di energia $\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$ ha impulso \mathbf{k} , e può quindi essere identificato con una particella di massa nulla (come segue dalla $\omega_{\mathbf{k}}^2 - |\mathbf{k}|^2 = 0$), il fotone. La natura corpuscolare della radiazione elettromagnetica è stata confermata nel 1922 dall'osservazione dell'effetto Compton, cioè della conservazione di impulso ed energia nell'urto elastico tra fotoni ed elettroni atomici.

5.3.2 Spin del fotone

Lo stato di polarizzazione del fotone è determinato dalla proiezione del suo momento angolare lungo l'asse di quantizzazione, che possiamo prendere lungo x^3 . Applicando la definizione del tensore canonico del momento angolare del Capitolo 2 (eq.(3.73) e (3.74)) al caso del campo elettromagnetico si ottiene risultato

$$J^3 = \int d^3x \left[\sum_{i=1}^3 \dot{A}^i \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) A^i - (\dot{A}^1 A^2 - \dot{A}^2 A^1) \right]. \quad (5.127)$$

Sostituendo la (5.114) nella (5.127) troviamo che J^3 soddisfa alle regole di commutazione

$$[J^3, a_{\mathbf{k}r}^\dagger] = i \left(\epsilon_{\mathbf{k}r}^1 a_{\mathbf{k}2}^\dagger - \epsilon_{\mathbf{k}r}^2 a_{\mathbf{k}1}^\dagger \right), \quad (5.128)$$

dove abbiamo scelto l'asse x^3 lungo la direzione del vettore d'onda \mathbf{k} . Si noti che solo il secondo termine nell'integrando della (5.127), che possiamo interpretare come momento angolare di spin, dà contributo non nullo al commutatore (5.128).

Definiamo ora i due nuovi operatori

$$a_{\mathbf{k}R}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_{\mathbf{k}1}^\dagger + i a_{\mathbf{k}2}^\dagger \right), \quad a_{\mathbf{k}L}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_{\mathbf{k}1}^\dagger - i a_{\mathbf{k}2}^\dagger \right), \quad (5.129)$$

che creano fotoni polarizzati *circolarmente*, cioè fotoni il cui stato di polarizzazione è descritto dai vettori

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}R} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}1} + i \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}2}), \quad \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}L} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}1} - i \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}2}). \quad (5.130)$$

Ponendo $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}1} \equiv (1, 0, 0)$ e $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}2} \equiv (0, 1, 0)$ e riscrivendo la (5.128) in termini dei nuovi operatori otteniamo le regole di commutazione

$$[J^3, a_{\mathbf{k}R}^\dagger] = a_{\mathbf{k}R}^\dagger, \quad [J^3, a_{\mathbf{k}L}^\dagger] = -a_{\mathbf{k}L}^\dagger, \quad (5.131)$$

dalle quali segue che la terza componente del momento angolare dello stato con un fotone è data dalle

$$J^3 a_{\mathbf{k}R}^\dagger |0\rangle = [J^3, a_{\mathbf{k}R}^\dagger] |0\rangle = a_{\mathbf{k}R}^\dagger |0\rangle, \quad (5.132)$$

$$J^3 a_{\mathbf{k}L}^\dagger |0\rangle = [J^3, a_{\mathbf{k}L}^\dagger] |0\rangle = -a_{\mathbf{k}L}^\dagger |0\rangle. \quad (5.133)$$

Questo risultato mostra che il fotone ha spin $|\mathbf{J}| = 1$, come richiesto dalla natura vettoriale del campo elettromagnetico, e che le due proiezioni $J_3 = \pm 1$ corrispondono agli stati polarizzati circolarmente. L'assenza dello stato con $J_3 = 0$ è una conseguenza della condizione di trasversalità (5.87), che abbassa di uno il numero di gradi di libertà.

Bibliografia

- [1] Landau e Lifshitz, *Meccanica Quantistica Relativistica*.
- [2] Landau e Lifshitz, *Teoria dei Campi Classici*
- [3] F. J. Belinfante, *Physica* **6** (1939) 887; L. Rosenfeld, *Memoires de l' Acad. Roy. Belgique*, **6** (1940) 30.
- [4] F. Mandl, G. Shaw, *Quantum Field Theory*, J. Wiley and Sons, 1984.
- [5] N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, *Introduction to the theory of quantized fields*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1959.
- [6] H. A. Lorentz, *The Theory of the Electron*, Dover
- [7] P. A. M. Dirac, *I Principi della Meccanica Quantistica*, Paolo Boringhieri, 1959, p. 371.
- [8] Gli esperimenti sono dovuti a G. Gabrielse e Coll., vedi p.e. G. Gabrielse, *Extremely Cold Antiprotons*, *Scientific American*, December, 1992 p. 78-89.
- [9] S. Eidelman et al, *Phys. Lett. B* **592** , 1 (2004)
- [10] W. Pauli in N. Bohr and the evolution of Physics, 1949.
- [11] Landau, Lifshitz RQM
- [12] N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, *Introduction to the theory of quantized fields*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1959.
- [13] S. Eidelman et al, *Phys. Lett. B* **592**, 1 (2004).
- [14] R. P. Feynman, M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* **109**, 193 (1958); vedi anche S. S. Gershtein, J. B. Zeldovich, *Soviet. Phys.-JETP* **2**, 576 (1957).
- [15] J.C. Hardy, I.S. Towner, *Phys.Rev.C***7**, 055501 (2005); e-Print Archive: nucl-th/0412056.
- [16] N. Cabibbo, *Phys. Rev. Letters* **10** 531 (1963).
- [17] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, L. Maiani, *Phys.Rev.* **D2** 1285 (1970).
- [18] M. Kobayashi, T. Maskawa, *Progr. Theor. Phys.* **49**, 652 (1973).

- [19] J. Schwinger, *Ann. of Phys.* **2**, 407, (1957).
- [20] S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22**, 579, (1961).
- [21] E. Majorana, *Il Nuovo Cimento* **14** (1937) 171.