

Relatività — Teoria di Dirac

Nicola Cabibbo

11 ottobre 2002

Sommario

Questi appunti partono dalla definizione del gruppo di Lorentz e della teoria dei vettori e tensori.

Nel secondo capitolo presentiamo la teoria degli spinori e in generale delle rappresentazioni del gruppo di Lorentz.

Nel terzo capitolo discutiamo del gruppo di Lorentz, e più in generale del gruppo di Poincaré, che include le trasformazioni di Lorentz e le traslazioni, nell'ambito della teoria quantistica dei campi.

Nel quarto capitolo costruiamo la teoria di Dirac a partire dalla teoria degli spinori. Il punto d'arrivo è l'equazione di Dirac, ottenuta come generalizzazione della teoria di Majorana, e più in generale della teoria di Weyl. Questo procedimento è l'inverso di quello storicamente avvenuto, ma ha il vantaggio di una costruzione più chiara a partire dai concetti più semplici.

Gli appunti potranno in futuro essere completati con una discussione della quantizzazione del campo di Dirac. In attesa di questo rimandiamo per questo argomento ai testi disponibili, ad esempio il Mandl & Shaw [1]. La notazione usata in questi appunti è compatibile con quella usata nel Mandl & Shaw.

Le sezioni segnalate con un asterisco, (*), non saranno probabilmente discusse nel corso.

Prego di comunicare eventuali (e probabili!) errori.

Indice

1	Il gruppo di Lorentz	3
1.1	Vettori covarianti e contravarianti	4
1.2	Differenziali e derivate parziali	4
1.3	Struttura del gruppo di Lorentz	5
1.4	(*) — Un teorema sulle matrici.	8
1.5	Trasformazioni di Lorentz finite.	10
1.6	Tensori, tensori invarianti e rappresentazioni del gruppo di Lorentz	11
1.7	Tensori antisimmetrici e dualità	13
1.8	Elicità dei fotoni e dualità.	16
2	Il gruppo di Lorentz proprio e le sue rappresentazioni spinoriali	18
2.1	Gli spinori	20
2.2	Spinori puntati	21
2.3	I multispinori, prima parte.	23
2.4	I multispinori, seconda parte.	24
2.5	Spinori e vettori.	25
2.6	(*)-Spinori e tensori.	27
3	Il gruppo di Lorentz inhomogeneo e la meccanica quantistica	30
3.1	Gruppi continui e algebra di Lie	30
3.2	Una regola di superselezione.	32
3.3	Algebra del gruppo di Poincaré	33
3.4	La trasformazione delle grandezze di campo.	36
4	Teorie di campo per particelle di spin 1/2.	39
4.1	Teorie di Weyl.	39
4.2	Interpretazione della teoria di Weyl	44
4.3	La teoria di Majorana	48
4.4	Majorana alla Dirac — i quadrispinori	50
4.5	Lo spinore aggiunto—i covarianti bilineari	53
4.6	Il lagrangiano nel formalismo dei quadri-spinori	56
4.7	La rappresentazione di Majorana delle matrici γ	57
4.8	La rappresentazione standard delle matrici γ	59
4.9	Dalla teoria di Majorana a quella di Dirac	60

1 Il gruppo di Lorentz

Il gruppo di Lorentz è definito come l'insieme delle trasformazioni sulle coordinate dello spazio tempo¹ $x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{t, \vec{x}\}$,

$$(1.1) \quad x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

che lasciano invariante l'intervallo²

$$(1.2) \quad (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$$

dove $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico, rappresentato dalla matrice

$$(1.3) \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La trasformazione in eq. (1.1) deve lasciare invariante l'intervallo in eq. (1.2),

$$\Lambda^\mu_\lambda x^\lambda g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho x^\rho = x^\lambda g_{\lambda\rho} x^\rho$$

per qualsiasi valore di x^μ , quindi Λ deve soddisfare la relazione

$$(1.4) \quad \Lambda^\mu_\lambda \Lambda^\nu_\rho g_{\mu\nu} = g_{\lambda\rho}$$

Esercizio 1 Dimostrare la eq. (1.4) partendo da scelte appropriate del vettore x^μ , ad esempio $x = \{1, 0, 0, 0\}$, etc.

Se definiamo la matrice trasposta, $(\Lambda^T)_\lambda^\mu = \Lambda^\mu_\lambda$ possiamo riscrivere la (1.4) utilizzando il prodotto "righe per colonne" tra matrici, ed omettendo del tutto gli indici, come³

$$(1.5) \quad \Lambda^T g \Lambda = g, \quad \text{ovvero} \quad \Lambda^{-1} = g \Lambda^T g$$

In conclusione possiamo definire il gruppo di Lorentz come l'insieme delle matrici 4×4 a componenti reali che soddisfano la eq. (1.5). Per dimostrare che si tratta di un gruppo, occorre dimostrare che

1. Il prodotto $\Lambda_1 \Lambda_2$ di due elementi del gruppo è un elemento: $(\Lambda_1 \Lambda_2)^T g \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^T \Lambda_1^T g \Lambda_1 \Lambda_2 = g$.
2. L'identità $\mathbf{1}$ appartiene al gruppo: $\mathbf{1}^T g \mathbf{1} = g$, e $\mathbf{1} \Lambda = \Lambda \mathbf{1} = \Lambda$ per ogni Λ .
3. L'inverso Λ^{-1} di un elemento appartiene al gruppo: dalla (1.5) otteniamo $\Lambda = (g \Lambda^T g)^{-1} = g (\Lambda^T)^{-1} g = g (\Lambda^{-1})^T g$, quindi $g (\Lambda^{-1})^T g \Lambda^{-1} = \mathbf{1}$, e moltiplicando da sinistra per g , $(\Lambda^{-1})^T g \Lambda^{-1} = g$.

¹Useremo sempre delle unità di misura in cui la velocità della luce è $c = 1$, ad esempio misurando il tempo in secondi e le distanze in secondi luce.

²Notiamo l'uso della convenzione secondo cui si sottointende la somma su due indici eguali, uno in alto ed uno in basso.

³Da $\Lambda^T g \Lambda = g$ segue che $\det \Lambda = \pm 1$, quindi le matrici Λ che obbediscono la (1.5) sono invertibili. Inoltre $g^2 = 1$.

1.1 Vettori covarianti e contravarianti

Un vettore contravariante è un insieme di quattro grandezze V^μ che si trasformano come il vettore posizione x^μ , fatto che indicheremo con $V^\mu \sim x^\mu$, dove il simbolo \sim significa “si trasforma come”.

$$(1.6) \quad V^\mu \rightarrow V'^\mu = \Lambda^\mu_\nu V^\nu$$

Dato un vettore contravariante, V^μ , definiamo le sue componenti covarianti, denotate da un indice in basso:

$$(1.7) \quad V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu$$

Possiamo anche andare all'indietro, da covariante a contravariante, usando le componenti contravarianti del tensore metrico, $g^{\mu\nu}$ anch'esse date dalla eq (1.3):

$$(1.8) \quad V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu$$

Il contrasto dei nomi suggerisce che i due tipi di indici corrispondono ad un comportamento opposto sotto trasformazioni di Lorentz, e così è: la legge di trasformazione di un vettore covariante risulta infatti

$$(1.9) \quad \begin{aligned} V_\mu &= g_{\mu\nu} V^\nu = (gV)_\mu \\ &\rightarrow (g\Lambda V)_\mu = (g\Lambda g V)_\mu \quad \text{e usando la (1.5)} \\ &= ((\Lambda^{-1})^T g V)_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu g_{\nu\lambda} V^\lambda \\ &= V_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \end{aligned}$$

Dalle (1.6) e (1.9) risulta che la combinazione $V_\mu W^\mu$ tra un vettore covariante ed uno contravariante è invariante,

$$V_\mu W^\mu = (VW) \rightarrow (V\Lambda^{-1}\Lambda W) = (VW)$$

Apriamo una breve parentesi: nell'ambito della relatività speciale, la trasformazione da componenti contravarianti a componenti covarianti corrisponde a due modi diversi di descrivere una stessa grandezza fisica. In relatività generale questo non è vero, dato che g è una funzione del punto, che viene identificata con il campo gravitazionale. Quindi gV è il prodotto di V con il campo gravitazionale, una grandezza fisica differente da V .

Nell'ambito della relatività speciale l'equivalenza tra componenti covarianti e contravarianti non è solamente fisica, ma anche matematica: la legge di trasformazione dei vettori covarianti corrisponde ad una rappresentazione del gruppo di Lorentz del tutto equivalente a quella dei vettori contravarianti, dato che le matrici di trasformazione nei due casi, Λ e $g\Lambda g$, sono connesse da una similitudine.

Notiamo infine che la convenzione per cui è sottintesa la somma tra indici ripetuti può essere riespressa: *è sottintesa la somma di indici ripetuti di cui uno covariante, l'altro contravariante.*

1.2 Differenziali e derivate parziali

In questo corso ci occuperemo di campi, cioè di grandezze fisiche definite in ogni punto dello spazio-tempo. Un esempio è dato dal campo elettromagnetico,

caratterizzato da due vettori spaziali $\vec{E}(\vec{x}, t), \vec{H}(\vec{x}, t)$. Dato che le componenti dei due vettori rappresentano proiezioni lungo gli assi del sistema di coordinate, per effetto di una rotazione le componenti di \vec{E} si mescolano tra loro, e lo stesso succede per le componenti di \vec{H} . Per effetto di una trasformazione di Lorentz avremo anche, come vedremo, un mescolamento delle componenti dei due vettori, che devono quindi essere considerate come componenti di un unico campo.

Vogliamo adesso considerare il caso più semplice, quello di un campo *scalare* Φ il cui valore in un dato punto P sia invariante rispetto a trasformazioni di Lorentz. Φ può essere visto come funzione delle coordinate x^μ , $\Phi(x)$. Se eseguiamo una trasformazione di Lorentz, le coordinate x^μ di un dato punto P saranno trasformate secondo la eq. (1.1) in nuove coordinate x'^μ , quindi, inteso come funzione delle coordinate il campo, viene trasformato secondo la

$$(1.10) \quad \Phi(x) \rightarrow \Phi'(x') = \Phi(x) = \Phi(\Lambda^{-1}x)$$

Questa equazione esprime la condizione che il valore di Φ in ogni punto P dello spazio-tempo *non dipenda* dal sistema di coordinate.

La differenza tra i valori di Φ in due punti vicini, P, P' , di coordinate $x^\mu, x'^\mu + dx^\mu$,

$$(1.11) \quad d\Phi = \Phi(P') - \Phi(P) = \Phi(x^\mu + dx^\mu) - \Phi(x^\mu) = dx^\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}$$

deve essere un invariante. Dato che il differenziale dx^μ si trasforma come un vettore *contravariante*, le componenti del gradiente devono formare un vettore *covariante*. Questo fatto può essere direttamente dimostrato dalla (1.10):

$$(1.12) \quad \frac{\partial \Phi'(x')}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x^\nu} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$$

che è appunto (vedi la 1.9) la legge di trasformazione di un vettore covariante. Per indicare brevemente le componenti del gradiente $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ useremo i simboli ∂_μ, ∇_μ .

1.3 Struttura del gruppo di Lorentz

I due membri della (1.5) sono matrici simmetriche, quindi questa relazione fornisce dieci relazioni tra i sedici elementi di Λ . Ci possiamo quindi aspettare che una trasformazione di Lorentz possa essere identificata da sei parametri⁴. Le matrici 4×4 possono essere considerate come vettori in uno spazio lineare⁵ a sedici dimensioni; il gruppo di Lorentz è un sottoinsieme di questo spazio, costituito dagli elementi che obbediscono la (1.5). Come è fatto questo sottoinsieme? Non si tratta di un sottospazio lineare, dato che la somma tra due trasformazioni di Lorentz, $\Lambda_1 + \Lambda_2$ non è una trasformazione di Lorentz. Tuttavia si tratta di un sottoinsieme continuo che possiamo visualizzare come una superficie a sei dimensioni immersa in uno spazio a sedici dimensioni.

⁴Come vedremo questi sei parametri possono essere scelti in modo da specificare una rotazione ordinaria e una velocità relativa tra due sistemi di riferimento (3 param.).

⁵È definita la somma di due matrici, il prodotto tra una matrice e un numero, e la combinazione lineare tra due matrici, e queste operazioni obbediscono gli assiomi per uno spazio lineare.

Per definire il concetto di continuità dobbiamo definire la *distanza* tra trasformazioni di Lorentz, ponendo ad esempio

$$(1.13) \quad D(\Lambda_1, \Lambda_2) = \sum_{\mu, \nu} |\Lambda_{2\nu}^\mu - \Lambda_{1\nu}^\mu|$$

Questa definizione stabilisce una metrica sullo spazio di Lorentz, dato che sono obbediti gli assiomi:

1. $D(\Lambda_1, \Lambda_2) = 0$ se e solo se $\Lambda_1 = \Lambda_2$.
2. $D(\Lambda_1, \Lambda_2) \geq 0$.
3. $D(\Lambda_1, \Lambda_2) + D(\Lambda_2, \Lambda_3) \geq D(\Lambda_1, \Lambda_3)$.

L'esistenza di una distanza mostra che il gruppo di Lorentz può essere considerato come uno spazio topologico, ed ha quindi molte delle proprietà dello spazio ordinario. Possiamo definire una sfera di raggio δ e centro Λ come l'insieme degli elementi che distano da Λ meno di δ ,

$$(1.14) \quad S_{\Lambda, \delta} = \{\Lambda'; D(\Lambda', \Lambda) < \delta\}$$

Le sfere sono esempi di intorni aperti nel gruppo di Lorentz. Lo studio del gruppo di Lorentz è semplificato dal fatto che esiste una mappa uno a uno tra un intorno di un qualsiasi elemento del gruppo di Lorentz e un intorno dell'identità: se conosciamo la struttura del gruppo nei dintorni della trasformazione identica, $\mathbf{1}$, conosciamo anche la sua struttura nei dintorni di qualsiasi suo elemento Λ .

Dato un punto Λ , consideriamo una sfera $S_{\Lambda, \delta}$. I punti Λ' di questa sfera possono essere espressi come $\Lambda' = \Lambda + \Delta$, con $\sum_{\mu, \nu} |\Delta_\nu^\mu| < \delta$. La mappa tra un intorno di Λ e un intorno dell'identità è semplicemente data da

$$(1.15) \quad \Lambda^{-1} \Lambda' = \mathbf{1} + E, \quad E = (g\Lambda^T g)\Delta$$

La distanza dell'elemento $\mathbf{1} + E$ dalla identità è data allora da

$$(1.16) \quad \begin{aligned} D(\mathbf{1}, \mathbf{1} + E) &= \sum_{\mu, \nu} |E_\nu^\mu| = \sum_{\mu, \nu} |(g\Lambda^T g\Delta)_\nu^\mu| \\ &< \epsilon = 64 \delta \max_{\mu, \nu} (|\Lambda_\nu^\mu|) \end{aligned}$$

Quindi la (1.15) proietta i punti di una sfera di raggio δ intorno a Λ su⁶ una sfera di raggio ϵ intorno alla identità, mentre la proiezione inversa, $\Delta = \Lambda E$ proietta una sfera di raggio ϵ intorno alla identità su una sfera di raggio $\delta' = 64 \epsilon \max_{\mu, \nu} (|\Lambda_\nu^\mu|)$ intorno all'elemento⁷ Λ .

Se adesso consideriamo un intorno infinitesimo dell'identità, cioè gli elementi

$$(1.17) \quad \Lambda = \mathbf{1} + \epsilon,$$

⁶Usiamo "su" nel suo significato tecnico: "all'interno di".

⁷L'argomento si può ripetere per qualsiasi gruppo continuo, come ad esempio il gruppo delle rotazioni, e i gruppi SU(2) e SU(3) che trovano varie applicazioni nella fisica delle particelle.

con ϵ una matrice a componenti infinitesime, otteniamo

$$(1.18) \quad \Lambda^{-1} = \mathbf{1} - \epsilon$$

e, dalla (1.5),

$$(1.19) \quad -\epsilon = g\epsilon^T g; \quad \text{cioé } (\epsilon g)^T = -\epsilon g.$$

Quindi la matrice $\epsilon^{\mu\nu} = \epsilon^\mu_\rho g^{\rho\nu}$ è antisimmetrica,

$$(1.20) \quad \epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$$

e può essere parametrizzata da sei elementi infinitesimi, che possono essere identificati con una rotazione infinitesima e con un “boost” (accelerazione) infinitesimo. Su questo torneremo più in dettaglio nel seguito. Partendo dalle trasformazioni infinitesime (1.17) possiamo costruire trasformazioni finite, ad esempio, data una matrice A tale che $gA^T g = -A$,

$$(1.21) \quad \Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbf{1} + \frac{A}{n} \right)^n = \exp(A)$$

è una trasformazione di Lorentz. Notiamo infatti che, per $n \rightarrow \infty$, $\mathbf{1} + A/n$ è una trasformazione di Lorentz infinitesima (perché?).

Esercizio 2 *Verificare questo risultato partendo dallo sviluppo in serie $\exp(A) = \sum_k A^k/k!$.*

Ci possiamo adesso domandare se il gruppo di Lorentz è connesso, se cioè sia possibile ottenere qualsiasi trasformazione di Lorentz, Λ , come prodotto di trasformazioni infinitesime, $\Lambda = \mathbf{1}(\mathbf{1} + \epsilon_1)(\mathbf{1} + \epsilon_2)\dots$. Un tale prodotto definisce una sequenza di trasformazioni di Lorentz ciascuna delle quali differisce per un infinitesimo dalla precedente, in altre parole un cammino sul gruppo, lungo cui l'elemento del gruppo varia con continuità che parte dalla trasformazione identica e termina in Λ .

Esiste per ogni Λ un cammino che connette Λ alla identità? Si vede facilmente che non è così, e che il gruppo di Lorentz è composto da quattro settori tra loro non connessi. Infatti dalla (1.5) segue che

$$(1.22) \quad \det(\Lambda) = \pm 1$$

$$(\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 = 1$$

Dato che $\det(\Lambda)$ è una funzione continua degli elementi di Λ , non possiamo tracciare un cammino continuo che connetta un elemento con $\det(\Lambda) = 1$, ad esempio l'elemento identico $\Lambda = \mathbf{1}$, ad uno con $\det(\Lambda) = -1$, ad esempio la matrice P , che genera l'operazione di parità, inversione delle coordinate spaziali,

$$(1.23) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

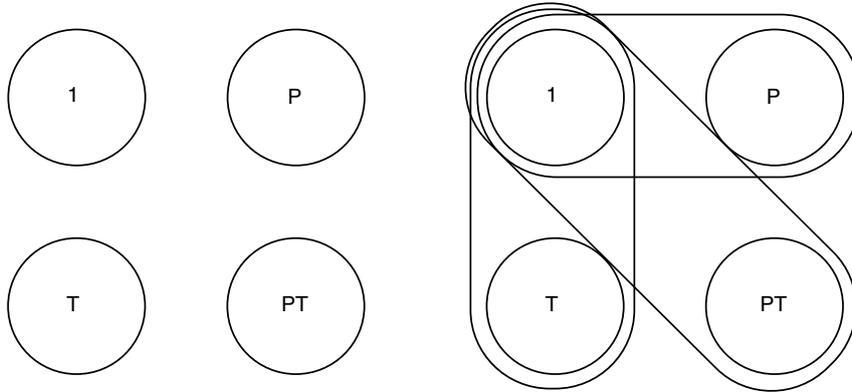


Figura 1: Settori e sottogruppi del gruppo di Lorentz.

La seconda condizione della (1.22) si traduce nella suddivisione del gruppo in due sottoinsiemi, quello con $\Lambda_0^0 > 1$, come $\mathbf{1}$ e P , e quello con $\Lambda_0^0 < 1$, ad esempio la operazione di inversione temporale, T ,

$$(1.24) \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o il prodotto $TP = -\mathbf{1}$, che ha $\det(\Lambda) = 1$.

$\det \Lambda$	Λ_0^0	Elemento generico
1	> 1	g
-1	> 1	Pg
-1	< 1	Tg
1	< 1	TPg

Tabella 1: Settori del gruppo di Lorentz. Nella tabella g indica un elemento del gruppo di Lorentz proprio

Il gruppo di Lorentz è quindi suddiviso in quattro settori (Tabella 1.3, Fig 1), tra cui il primo, l'insieme degli elementi con $\det(\Lambda) = 1$ e $\Lambda_0^0 > 1$ forma il *gruppo di Lorentz proprio*. Altri sottogruppi (Fig. 1) si ottengono aggiungendo al gruppo proprio gli elementi di uno degli altri tre settori⁸.

1.4 (*) — Un teorema sulle matrici.

Qui vogliamo dimostrare un teorema sulle matrici:

Teorema 1 *Una qualsiasi matrice A può essere diagonalizzata tramite due matrici unitarie: $U_1^\dagger A U_2 = A_D$, dove A_D è una matrice diagonale e reale.*

⁸Il lettore spieghi perchè i settori P, T, PT non sono da soli dei sottogruppi, e perchè non si possono ottenere sottogruppi mettendo insieme tre dei quattro settori.

Per la dimostrazione useremo il fatto che

Teorema 2 $A^\dagger A$ e $A A^\dagger$ hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità.

Consideriamo anzitutto il caso generico in cui gli autovalori di $A^\dagger A$ sono distinti e non nulli. Quindi $\det(A^\dagger A) = |\det(A)|^2 \neq 0$; A è invertibile, e

$$\det(A^\dagger A - \lambda) = \det(A A^\dagger - \lambda) = \det(A) \det(A^\dagger - \lambda A^{-1})$$

da questo segue l'asserto del teorema 2 nel caso generico. I casi particolari con autovalori non nulli o degeneri possono essere ottenuti come limite dal caso generico.

Dal teorema 2 segue che le due matrici hermitiane $A^\dagger A$ e $A A^\dagger$ possono essere poste nella stessa forma diagonale, D :

$$(1.25) \quad U^\dagger A A^\dagger U = D = V^\dagger A^\dagger A V$$

Se adesso definisco $A' = U^\dagger A V$, e quindi $A'^\dagger = V^\dagger A^\dagger U$ dalla (1.25) segue che

$$A' A'^\dagger = A'^\dagger A' = D$$

e cioè che la parte hermitiana di A' , $(A' + A'^\dagger)/2$ commuta con la sua parte antihermitiana, $(A' - A'^\dagger)/2i$, e che quindi A' può essere diagonalizzata con una matrice unitaria W , $W^\dagger A' W = \tilde{A}_D$. La matrice diagonale \tilde{A}_D può essere espressa come prodotto di una matrice diagonale reale A_D ed una matrice diagonale unitaria Y , $\tilde{A}_D = Y A_D$. In conclusione otteniamo $A_D = Y^\dagger W^\dagger U^\dagger A V W$, il che dimostra il teorema 1 con $U_1 = U W Y$, $U_2 = V W$

Dal teorema 1 segue un interessante corollario:

Corollario 3 (Teorema della decomposizione centrale) Una qualsiasi matrice A può essere espressa come prodotto di una matrice hermitiana e di una matrice unitaria: $A = H U$, $H^\dagger = H$, $U^\dagger U = \mathbf{1}$

Usando il teorema 1 basta infatti porre $H = U_1 A_D U_1^\dagger$, e $U = U_1 U_2$.

Nel caso di matrici reali la decomposizione porta al prodotto di una matrice simmetrica e una ortogonale: $A = S O$, $S^T = S$, $O^T O = \mathbf{1}$. Ad esempio nella prossima sezione vedremo la decomposizione di una trasformazione di Lorentz in una rotazione (matrice ortogonale) ed una trasformazione di Lorentz semplice (matrice simmetrica).

Notiamo che la decomposizione non è necessariamente unica. Ad esempio in due dimensioni si ha $\sigma_3 \times \mathbf{1} = \sigma_1 \times (i\sigma_2)$. La decomposizione diviene unica se ci restringiamo a particolari classi di matrici.

Un caso interessante è la decomposizione di elementi del gruppo $SL(2, C)$.

$$(1.26) \quad A = H U, \quad \det(A) = \det(H) = \det(U) = 1; \quad \text{Tr}(H) > 0$$

La condizione $\text{Tr}(H) > 0$ risolve una ambiguità nella attribuzione della matrice $-\mathbf{1}$: deve essere ascritta alle matrici hermitiane o a quelle unitarie? con la condizione $\text{Tr}(H) > 0$ decidiamo per la seconda alternativa, e la decomposizione è unica.

Supponiamo infatti che $HU = H'U'$. Quindi $H' = HUU'^{\dagger} = HX$ è hermitiano mentre $X = UU'^{\dagger}$ è unitario. Possiamo scrivere: $H = a + \vec{b} \cdot \vec{\sigma}$, $X = c + i\vec{d} \cdot \vec{\sigma}$ con a, \vec{b}, c, \vec{d} reali. Inoltre le condizioni $\det(H) = \det(X) = 1$; $\text{Tr}(H) > 0$ si traducono in $a^2 - \vec{b}^2 = 1$, $c^2 + \vec{d}^2 = 1$, $a > 0$. Dato che $H' = HX$

$$H' = a' + \vec{b}' \cdot \vec{\sigma} = (a + \vec{b} \cdot \vec{\sigma})(c + i\vec{d} \cdot \vec{\sigma}) = ac + i\vec{b}\vec{d} + \vec{\sigma}(c\vec{b} - \vec{b} \wedge \vec{d} + iad)$$

è hermitiano, deve essere $a\vec{d} = 0$, quindi, dato che $a > 0$ segue che $\vec{d} = 0$, cioè $c^2 = 1$ e, dalla condizione $a' > 0$, segue che $c = 1$, cioè che $X = \mathbf{1}$, e $H' = H$.

1.5 Trasformazioni di Lorentz finite.

Vogliamo adesso dimostrare che una qualsiasi trasformazione di Lorentz Λ è il prodotto di una trasformazione di Lorentz semplice (passaggio ad un sistema coordinato in moto con velocità \vec{v}), di una rotazione R , e di una trasformazione discreta D , cioè una delle quattro matrici $D = \mathbf{1}, P, T, PT$.

$$(1.27) \quad \Lambda = \Lambda(\vec{v})RD$$

Nel caso delle trasformazioni del gruppo di Lorentz proprio questo risultato già segue dalla decomposizione degli elementi di $SL(2, C)$. Infatti ad una rotazione corrisponde in $SL(2, C)$ una trasformazione unitaria, in effetti un elemento del sottogruppo $SU(2)$, $\exp(i\vec{\sigma}\vec{\alpha}/2)$, ed a una trasformazione di Lorentz semplice corrisponde una matrice hermitiana $\exp(-\vec{\sigma}\vec{b}/2)$ con $\vec{b} = \gamma\vec{v}$, $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$.

In questa sezione eseguiremo la decomposizione direttamente, anche per mostrare una via costruttiva e più diretta. Avremo anche l'occasione di rivisitare alcuni dei risultati ottenuti nella sezione 1.3.

Una trasformazione di Lorentz lungo l'asse x con velocità v è data da

$$(1.28) \quad \Lambda(\vec{v}||x) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

Per ricavare la forma di $\Lambda(\vec{v})$ per una direzione arbitraria di \vec{v} possiamo procedere nel modo seguente: se introduciamo due quadrivettori $n^\mu = \{1, 0\}$ e $v^\mu = \{0, \vec{v}\}$, $v_\nu = \{0, -\vec{v}\}$ possiamo riscrivere la (1.28) come

$$(1.29) \quad \Lambda(\vec{v})^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + (\gamma - 1)n^\mu n_\nu + \gamma(n^\mu v_\nu - v^\mu n_\nu) - (\gamma - 1)\frac{v^\mu v_\nu}{v^2}$$

Questa forma può essere considerata valida per una direzione arbitraria di \vec{v} . Possiamo allora scrivere esplicitamente:

$$(1.30) \quad \Lambda(\vec{v}) = \gamma \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_1 & -\gamma v_2 & -\gamma v_3 \\ -\gamma v_1 & \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ -\gamma v_2 & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ -\gamma v_3 & \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

Dove la forma esplicita degli elementi di matrice λ_{ik} , che non ci interessa per l'argomento che segue, può essere ottenuta dalla (1.29), e si trova per esteso nel testo di Jackson [3]. Dalla (1.29) si ottiene direttamente l'identità $\Lambda(\vec{v})\Lambda(-\vec{v}) = \mathbf{1}$.

Una qualsiasi trasformazione di Lorentz Λ può essere scritta come

$$(1.31) \quad \Lambda = \begin{pmatrix} sa & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ -sc_1 & l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ -sc_2 & l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ -sc_3 & l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix};$$

dove $s = \pm 1$ e $a > 0$. Considerando i prodotti $\Lambda\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}\Lambda = \mathbf{1}$, con $\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g$, vediamo che $a^2 - (\vec{b})^2 = a^2 - (\vec{c})^2 = 1$, da cui anche $(\vec{b})^2 = (\vec{c})^2$. Possiamo decomporre questa matrice nel prodotto

$$(1.32) \quad \Lambda = \Lambda_1 D_1 = \begin{pmatrix} a & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ -c_1 & l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ -c_2 & l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ -c_3 & l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A secondo del valore di s la matrice D_1 è la matrice identica ($s = 1$), o l'inversione temporale T ($s = -1$). Se nella identità

$$\Lambda = \Lambda(\vec{v})\Lambda(-\vec{v})\Lambda_1 D_1$$

scegliamo \vec{v} in modo tale che $\vec{c} = \vec{v}\gamma = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}$, e quindi $a = \sqrt{1+\vec{c}^2} = \gamma$, troviamo che nel prodotto $\tilde{\Lambda} = \Lambda(-\vec{v})\Lambda_1$ si ha $\tilde{\Lambda}^0_0 = 1$, e quindi anche necessariamente $\tilde{\Lambda}^0_i = \tilde{\Lambda}^i_0 = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Quindi la trasformazione di Lorentz $\tilde{\Lambda}$ è una pura rotazione $R(\vec{\alpha})$ (con $\vec{\alpha}$ il vettore di rotazione), oppure, se $\det(\tilde{\Lambda}) = \det(\Lambda_1) = -1$, il prodotto di una rotazione e dell'operatore di parità P : $\tilde{\Lambda} = RD_2$ con $D_2 = 1, P$.

In conclusione:

$$(1.33) \quad \Lambda = \Lambda(\vec{v})R(\vec{\alpha})D_2D_1 = \begin{cases} \Lambda(\vec{v})R(\vec{\alpha}) & \text{se } s = \det(\Lambda) = 1, \\ \Lambda(\vec{v})R(\vec{\alpha})P & \text{se } s = 1, \det(\Lambda) = -1, \\ \Lambda(\vec{v})R(\vec{\alpha})T & \text{se } s = -1, \det(\Lambda) = -1, \\ \Lambda(\vec{v})R(\vec{\alpha})PT & \text{se } s = -1, \det(\Lambda) = 1 \end{cases}$$

Questo risultato chiarisce la struttura dei settori del gruppo di Lorentz discussi nella sezione 1.3. Invece delle componenti della velocità, che sono limitate dalla relazione $(\vec{v})^2 < 1$ conviene utilizzare come parametri le componenti di $\vec{b} = \gamma\vec{v}$ che variano su \mathcal{R}^3 . Quindi dal punto di vista topologico ciascuno dei settori del gruppo di Lorentz è equivalente al prodotto $\mathcal{R}^3 \otimes \text{SO}(3)$, dove $\text{SO}(3)$ è il gruppo delle rotazioni in uno spazio tridimensionale.

1.6 Tensori, tensori invarianti e rappresentazioni del gruppo di Lorentz

Un tensore a due o più indici è un oggetto che si trasforma come il prodotto di vettori, $T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} \sim A^{\mu_1}B^{\mu_2}\dots C^{\mu_n}$,

$$(1.34) \quad T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} \rightarrow (T')^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = \Lambda^{\mu_1}_{\nu_1}\Lambda^{\mu_2}_{\nu_2}\dots\Lambda^{\mu_n}_{\nu_n}T^{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}$$

Per $n = 0$ abbiamo uno scalare, per $n = 1$ un vettore, etc. In maniera analoga possiamo definire tensori con uno o più indici sia covarianti, che contravarianti, ad esempio $T^\mu_\nu \sim A^\mu B_\nu$. Utilizzando le equazioni (1.7), (1.8) possiamo trasformare uno o più indici da contravariante a covariante e viceversa.

Fissando i valori degli indici si ottengono le *componenti*. Ad esempio le componenti di $T^{\mu\nu}$ sono $T^{00}, T^{01} \dots T^{33}$. In generale un tensore può avere n indici covarianti e m indici contravarianti.

Il tensore metrico $g^{\mu\nu}$ è un tensore invariante: le sue componenti sono le stesse in ogni sistema di riferimento. Infatti dalla (1.5), $\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g$ otteniamo $g = \Lambda g \Lambda^T$, ed esplicitando gli indici,

$$(1.35) \quad g^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\delta g^{\sigma\delta}$$

Notiamo che l'esistenza del tensore invariante g è proprio la condizione che definisce il gruppo di Lorentz, eq. (1.5).

Il simbolo di Ricci⁹ a quattro indici, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ è un pseudo-tensore invariante: la relazione¹⁰

$$(1.36) \quad \Lambda^\mu_{\mu'} \Lambda^\nu_{\nu'} \Lambda^\rho_{\rho'} \Lambda^\sigma_{\sigma'} \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} = \det(\Lambda) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

esprime il fatto che ϵ è invariante rispetto a trasformazioni del gruppo di Lorentz proprio, ma cambia segno per effetto di trasformazioni nei settori P o T del gruppo di Lorentz, ed è quindi uno *pseudotensore*.

Notiamo la seguente relazione, la cui dimostrazione viene lasciata come esercizio,

$$(1.37) \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} g_{\rho\rho'} g_{\sigma\sigma'} \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} = -4!$$

Si può dimostrare che non esistono altri tensori invarianti ad eccezione di g , ϵ , delle loro versioni contravarianti, e di prodotti tra g ed ϵ (ad esempio $g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}$, $g^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma\delta\tau}$, etc.). Questo implica che *non esistono tensori invarianti con un numero dispari di indici*.

Esercizio 3 *Dimostrare che non esistono vettori invarianti sotto tutte le trasformazioni di Lorentz.*

Dall'equazione (1.34) segue che ad una trasformazione di Lorentz corrisponde una trasformazione lineare tra le componenti di T . Si verifica facilmente che al variare di Λ l'insieme di queste trasformazioni lineari fornisce una rappresentazione del gruppo di Lorentz. Se il numero di indici è $n \geq 2$ queste rappresentazioni sono riducibili e possono essere scomposte in rappresentazioni di dimensione inferiore. La decomposizione si ottiene dalle seguenti osservazioni, che si dimostrano facilmente utilizzando le eq. (1.34) e (1.5)

1. Il carattere di *simmetria* o *antisimmetria* rispetto allo scambio di due indici è invariante rispetto a trasformazioni di Lorentz,

$$\begin{aligned} \text{se } T^{\mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_k \dots} &= \pm T^{\mu_1 \dots \mu_k \dots \mu_i \dots} \\ \text{allora } (T')^{\mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_k \dots} &= \pm (T')^{\mu_1 \dots \mu_k \dots \mu_i \dots} \end{aligned}$$

⁹Il simbolo ϵ è completamente antisimmetrico nello scambio di qualsiasi coppia di indici, quindi si annulla se due indici sono uguali, mentre $\epsilon^{0123} = 1$.

¹⁰La dimostrazione segue dalla definizione del determinante: se gli indici sono 0, 1, 2, 3 si ottiene il determinante di Λ ; se gli indici sono una permutazione di 0, 1, 2, 3 si ottiene il determinante di una matrice ottenuta da Λ permutando le colonne, quindi $\pm \det(\Lambda)$ a secondo che la permutazione sia pari o dispari. Se infine due indici sono uguali, si ottiene il determinante di una matrice con due colonne eguali, e il risultato è nullo.

2. La *saturazione* di una coppia di indici mediante la matrice $g_{\mu\nu}$ fa passare da un tensore con n indici ad uno con $n - 2$ indici. Se $T^{\mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_k \dots}$ è un tensore, $g_{\mu_i \mu_k} T^{\mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_k \dots}$ è anche un tensore.
3. Analogamente la *saturazione* di un indice covariante ed uno contravariante fa decrescere di due il numero degli indici, Ad esempio $A^\mu = T_\nu^{\mu\nu}$ è un vettore.
4. Il tensore ϵ permette di trasformare un insieme di $k \leq 4$ indici rispetto cui il tensore sia antisimmetrico, in $(4 - k)$ indici. Ad esempio un tensore a quattro indici antisimmetrico nello scambio di ogni coppia di indici è necessariamente proporzionale a $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, e può essere espresso come:

$$T^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} T \quad \text{e, dalla eq. (1.37)}$$

$$T = -\frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} T_{\mu\nu\rho\sigma}$$

Senza inoltrarci nella analisi del caso generale esaminiamo come esempio il caso di un tensore a due indici $T^{\mu\nu}$. Anzitutto notiamo che $C = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ è uno scalare. Possiamo quindi scrivere

$$(1.38) \quad T^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} + A^{\mu\nu} + \frac{1}{4} C g^{\mu\nu} \quad \text{dove}$$

$$C = T^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$$

$$A^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu})$$

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}) - \frac{1}{4} C g^{\mu\nu}$$

Quindi un tensore generico $T^{\mu\nu}$ (16 componenti) può essere decomposto in uno scalare C (una componente), un tensore simmetrico $S^{\mu\nu}$ a traccia nulla, tale cioè che $S^\mu_\mu = g_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = 0$ (9 componenti indipendenti), e un tensore antisimmetrico $A^{\mu\nu}$ (6 componenti indipendenti). I primi due definiscono una rappresentazione del gruppo di Lorentz che non è ulteriormente riducibile. Il tensore antisimmetrico si risolve in due rappresentazioni irriducibili del gruppo di Lorentz proprio — lo vedremo nella prossima sezione — ma risulta irriducibile rispetto al gruppo di Lorentz completo (o a quello che include il gruppo proprio e il settore della parità).

1.7 Tensori antisimmetrici e dualità

Dato un tensore antisimmetrico a due indici $A^{\mu\nu}$ definiamo il suo *duale* , A^* ,

$$(1.39) \quad A^{*\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_{\rho\sigma}$$

Notiamo che la relazione tra un tensore e il suo duale è riflessiva,

$$(1.40) \quad (A^*)^* = -A$$

Esercizio 4 Dimostrare la (1.40)

Il concetto di tensore duale ha una applicazione fisica interessante alle equazioni di Maxwell,

$$(1.41) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \dot{\vec{E}} = \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \rho$$

$$(1.42) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \dot{\vec{H}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \vec{H} = 0$$

Queste si dividono in due gruppi: le prime due, (1.41), esprimono l'effetto di una densità di corrente \vec{j} e di una densità di carica ρ , le altre due, (1.42), possono essere viste come un vincolo sui campi \vec{E}, \vec{H} , che deve essere soddisfatto indipendentemente dalla presenza di cariche e correnti. Dalle prime due si deriva la legge di continuità della carica:

$$(1.43) \quad \dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Le eq. di Maxwell devono avere la stessa forma in ogni sistema di riferimento, in modo da garantire che la velocità della luce sia invariante (è questo il punto di partenza della relatività!). Deve essere quindi possibile riorganizzare le varie grandezze ed operazioni in termini di vettori, tensori, etc. Già sappiamo (vedi 1.12) che le derivate parziali formano un quadrivettore covariante. La legge di continuità (1.43) è invariante purchè le densità di carica e corrente formino un quadrivettore, $j^\mu = \{\rho, \vec{j}\}$:

$$(1.44) \quad \partial_\mu j^\mu = 0$$

Le prime due equazioni di Maxwell hanno adesso l'aspetto

$$\partial_\nu F^{(?)\nu} = j^\mu$$

Dove $F^{(?)\nu}$ è un qualche oggetto composto dalle sei componenti di \vec{E}, \vec{H} . Il numero "6" fa emergere la possibilità che si tratti di un tensore antisimmetrico. Si verifica facilmente che se definiamo il campo elettromagnetico come.

$$(1.45) \quad \{F^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

le prime due equazioni divengono semplicemente

$$(1.46) \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$$

di modo che le equazioni sono invarianti purchè $F^{\mu\nu}$ si trasformi come tensore antisimmetrico. Il suo duale è dato da

$$(1.47) \quad \{F^{*\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 0 & H_1 & H_2 & H_3 \\ -H_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ -H_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ -H_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix}$$

La relazione di dualità corrisponde quindi alla trasformazione $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$; $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$. Notiamo che l'operazione di dualità trasforma il primo membro delle (1.41) nel primo membro delle (1.42), che possono quindi essere scritte come

$$(1.48) \quad \partial_\nu F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0$$

Questa equazione si può risolvere esprimendo il campo elettromagnetico in funzione di un quadrivettore A_μ , le cui componenti sono i cosiddetti potenziali elettromagnetici:

$$(1.49) \quad F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$$

Notiamo infine che in assenza di cariche e correnti l'operazione di dualità scambia le equazioni (1.41) e (1.42), e quindi lascia invarianti le equazioni di Maxwell nel loro insieme.

Se definiamo due campi "autoduali", $F_R^{\mu\nu}, F_L^{\mu\nu}$,

$$(1.50) \quad \begin{aligned} F_R^{\mu\nu} &= \frac{F^{\mu\nu} + iF^{*\mu\nu}}{2} & F_R^{*\mu\nu} &= -iF_R^{\mu\nu} \\ F_L^{\mu\nu} &= \frac{F^{\mu\nu} - iF^{*\mu\nu}}{2} & F_L^{*\mu\nu} &= iF_L^{\mu\nu} \end{aligned}$$

(1.51)

si può verificare, e lo faremo nella prossima sezione, che F_R è il campo che distrugge fotoni "right handed" e crea fotoni "left handed", mentre il contrario vale per F_L .¹¹ Mentre $F^{\mu\nu}$ dipende da due vettori reali, \vec{E}, \vec{B} , F_R e F_L dipendono da un singolo vettore complesso, rispettivamente $\vec{E} + i\vec{B}$ e $\vec{E} - i\vec{B}$.

Ad esempio, ponendo $\vec{W} = (\vec{E} + i\vec{B})/2$,

$$(1.52) \quad \{F_R^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 0 & W_1 & W_2 & W_3 \\ -W_1 & 0 & -iW_3 & iW_2 \\ -W_2 & iW_3 & 0 & -iW_1 \\ -W_3 & -iW_2 & iW_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo infine che F_R ed F_L sono rappresentazioni del gruppo di Lorentz proprio, in effetti rappresentazioni irriducibili, ma non rappresentazioni del gruppo di Lorentz completo. Infatti, dato che \vec{E} è un vettore ordinario, mentre \vec{B} un vettore assiale, l'effetto della operazione di parità, P , deve essere $P\vec{E} = -\vec{E}$, $P\vec{B} = \vec{B}$, quindi $PF_R = -F_L$, $PF_L = -F_R$.

F_R ed F_L sono connessi da una coniugazione complessa¹², $F_L^{\mu\nu} = (F_R^{\mu\nu})^\dagger$. Torneremo a parlare di F_R e F_L nella sezione 2.5.

¹¹L'operazione di dualità è quindi l'analogo per i fotoni (e in generale per campi vettoriali), della matrice $-i\gamma_5$ nel caso delle particelle di spin 1/2. Questa connessione può naturalmente essere apprezzata solo dopo avere studiato i campi di spin 1/2.

¹²Per non creare confusioni con $*$ che denota la operazione di dualità, qui usiamo il simbolo \dagger sia per indicare la coniugazione hermitiana che, nel caso di una teoria classica, la coniugazione complessa.

1.8 Elicità dei fotoni e dualità.

In questa sezione studiamo la relazione tra i tensori destrorsi e sinistrorsi e la elicità dei fotoni. Vogliamo essenzialmente giustificare le qualifiche di *destrorso* e *sinistrorso* assegnate ai tensori autoduali F_R, F_L definiti nella eq. (1.50).

Partiremo dalla teoria quantistica del campo elettromagnetico libero, come ad esempio si trova nel primo capitolo del Mandl e Shaw, ref. [1]. Lavoreremo quindi nella cosiddetta “gauge di radiazione”, dove $A^0(x) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x) = 0$. Per esprimere il campo $\vec{A}(x)$ in termini di operatori $a_h(\vec{k})$ che distruggono fotoni di impulso \vec{k} ed elicità $h = \pm 1$ dobbiamo far uso di vettori di polarizzazione $\epsilon_h(\vec{k})$ a componenti complesse, e scriveremo quindi¹³

$$(1.53) \quad \vec{A}(x) = \sum_{\vec{k}, h} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}} \left(\vec{\epsilon}_h(\vec{k}) a_h(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t)} + \vec{\epsilon}_h^*(\vec{k}) a_h^\dagger(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t)} \right)$$

Per determinare $\vec{\epsilon}_h(\vec{k})$ consideriamo l'elemento di matrice

$$(1.54) \quad \langle 0 | \vec{A}(0) | \vec{k}, h \rangle = \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}} \vec{\epsilon}_h(\vec{k})$$

dove $|\vec{k}, h\rangle = a_h^\dagger(\vec{k}) |0\rangle$, e consideriamo il caso¹⁴ in cui \vec{k} sia lungo l'asse 3, $\vec{k} = \{0, 0, k\}$, $k = \omega_k > 0$, di modo che

$$(1.55) \quad J_3 |\vec{k}, h\rangle = h |\vec{k}, h\rangle$$

Utilizzando le regole di commutazione del momento angolare con un vettore, $[A_2, J_3] = iA_1$ otteniamo

$$(1.56) \quad h \langle 0 | A_2(0) | \vec{k}, h \rangle = \langle 0 | [A_2(0), J_3] | \vec{k}, h \rangle = i \langle 0 | A_1(0) | \vec{k}, h \rangle$$

e quindi $h\epsilon_{h,2} = i\epsilon_{h,1}$: possiamo porre $\vec{\epsilon}_h(\vec{k}) = \{1, ih, 0\}$. Da questo seguono le relazioni

$$(1.57) \quad \begin{aligned} \vec{k} \wedge \vec{\epsilon}_h(\vec{k}) &= -i\hbar\omega_k \vec{\epsilon}_h(\vec{k}) \\ \vec{k} \wedge \vec{\epsilon}_h^*(\vec{k}) &= i\hbar\omega_k \vec{\epsilon}_h^*(\vec{k}) \end{aligned}$$

Queste relazioni, invarianti sotto rotazioni, sono valide indipendentemente dalla direzione di \vec{k} .

Abbiamo visto nella sezione precedente che i tensori destrorsi e sinistrorsi possono essere espressi in termini di un vettore complesso, $\vec{E} \pm i\vec{B}$. Utilizzando

¹³Usiamo unità di misura in cui $\hbar = c = 1$.

¹⁴Se \vec{k} ha una diversa orientazione ci possiamo ricondurre a questo caso con una rotazione.

le relazioni (1.57) si ottiene

$$\begin{aligned}
\vec{E}(x) \pm i\vec{B}(x) &= -\frac{d\vec{A}(x)}{dt} \pm i\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x) \\
&= \sum_{\vec{k}, h} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}} \left((i\omega\vec{\epsilon}_h(\vec{k}) \mp \vec{k} \wedge \vec{\epsilon}_h(\vec{k})) a_h(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega_k t)} \right) \\
&\quad + \sum_{\vec{k}, h} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}} \left((-i\omega\vec{\epsilon}_h^*(\vec{k}) \pm \vec{k} \wedge \vec{\epsilon}_h^*(\vec{k})) a_h^\dagger(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega_k t)} \right) \\
&= \sum_{\vec{k}, h} \frac{i\omega(1 \pm h)}{\sqrt{2V\omega_k}} \left(\vec{\epsilon}_h(\vec{k}) a_h(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega_k t)} \right) \\
&\quad + \sum_{\vec{k}, h} \frac{-i\omega(1 \mp h)}{\sqrt{2V\omega_k}} \left(\vec{\epsilon}_h^*(\vec{k}) a_h^\dagger(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega_k t)} \right)
\end{aligned}$$

Notiamo che in $\vec{E} + i\vec{B}$ gli operatori di distruzione con elicit  negativa sono moltiplicati per $(1 + h) = (1 - 1) = 0$, e quindi scompaiono dalla somma, e lo stesso accade degli operatori di creazione con elicit  positiva. Questo giustifica la definizione di *destrorso* data al tensore associato a $\vec{E} + i\vec{B}$. Il tensore *sinistrorso* risulta associato alle elicit  opposte.

2 Il gruppo di Lorentz proprio e le sue rappresentazioni spinoriali

La struttura del gruppo di Lorentz proprio è determinata dalla algebra di Lie del gruppo, cioè dalle proprietà degli elementi di un intorno infinitesimo della identità,

$$(2.1) \quad \Lambda = \mathbf{1} + \epsilon,$$

Abbiamo visto, eq. (1.20) che $\epsilon^{\mu\nu} = \epsilon^\mu{}_\rho g^{\rho\nu}$ deve essere antisimmetrica, per cui possiamo porre

$$(2.2) \quad \epsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_1 & 0 & -r_3 & r_2 \\ -b_2 & r_3 & 0 & -r_1 \\ -b_3 & -r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix}$$

cui corrisponde la trasformazione,

$$(2.3) \quad \begin{aligned} x'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu + \epsilon^{\mu\nu} x_\nu \\ \vec{x}' &= \vec{x} - \vec{r} \wedge \vec{x} - \vec{b}x^0 \\ x'^0 &= x^0 - (\vec{b}\vec{x}) \end{aligned}$$

che rappresenta l'effetto di una rotazione infinitesima \vec{r} degli assi coordinati (fig. 2) ed una trasformazione di Lorentz infinitesima che fa passare ad un sistema di riferimento con velocità $\vec{v} = c\vec{b}$. Possiamo riesprimere Λ in termini dei sei

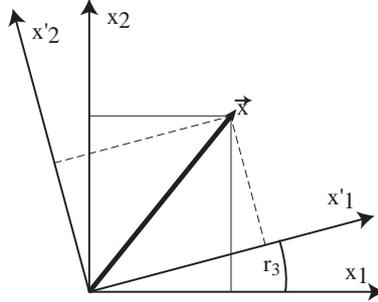


Figura 2: Effetto di una rotazione intorno all'asse 3.

parametri infinitesimi \vec{r}, \vec{b} e di sei matrici $\mathbf{J}_i, \mathbf{K}_i$,

$$(2.4) \quad \Lambda = \mathbf{1} + \epsilon = \mathbf{1} + i \sum_{i=1}^{i=3} (r_i \mathbf{J}_i - b_i \mathbf{K}_i)$$

Le matrici $\mathbf{J}_i, \mathbf{K}_i$, definite implicitamente dalle eq. (2.4) e (2.2), formano una base per l'algebra di Lie del gruppo di Lorentz (vedi sez. 3.3) Lasciamo come esercizio la deduzione delle regole di commutazione:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} [\mathbf{J}_k, \mathbf{J}_l] &= i\epsilon_{klm} \mathbf{J}_m \\ [\mathbf{J}_k, \mathbf{K}_l] &= i\epsilon_{klm} \mathbf{K}_m \\ [\mathbf{K}_k, \mathbf{K}_l] &= -i\epsilon_{klm} \mathbf{J}_m \end{aligned}$$

Le \mathbf{J}_i generano il gruppo delle rotazioni spaziali $O(3)$, un sottogruppo del gruppo di Lorentz. Le \mathbf{K}_i generano i *boost* (cambio di velocità, accelerazione).

Una rappresentazione del gruppo di Lorentz proprio deve riprodurre le regole di commutazione (2.5). Se si desidera una rappresentazione dell'intero gruppo di Lorentz occorre che nella rappresentazione sia anche definito un operatore di parità¹⁵. Considerando il prodotto tra P e gli elementi infinitesimi del gruppo (eq. (1.23), (2.1), (2.2)), otteniamo la relazione

$$P(1 + i\vec{r}\vec{\mathbf{J}} + i\vec{b}\vec{\mathbf{K}})P = (1 + i\vec{r}\vec{\mathbf{J}} - i\vec{b}\vec{\mathbf{K}})$$

che si traduce in

$$(2.6) \quad \begin{aligned} P\mathbf{J}_kP &= \mathbf{J}_k \\ P\mathbf{K}_kP &= -\mathbf{K}_k \end{aligned}$$

relazioni che devono essere soddisfatte da una rappresentazione dell'intero gruppo di Lorentz. Notiamo che queste relazioni affermano che $\vec{\mathbf{J}}$ si comporta come un vettore assiale, $\vec{\mathbf{K}}$ come un vettore ordinario.

Possiamo costruire due diverse rappresentazioni bidimensionali del gruppo di Lorentz proprio (o meglio della sua algebra), con le seguenti identificazioni per i generatori:

$$(2.7) \quad \vec{\mathbf{J}} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad \vec{\mathbf{K}} = -i\frac{\vec{\sigma}}{2} \quad \text{oppure}$$

$$(2.8) \quad \vec{\mathbf{J}} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad \vec{\mathbf{K}} = +i\frac{\vec{\sigma}}{2}$$

dove $\vec{\sigma}$ sono le matrici di Pauli.

$$(2.9) \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In corrispondenza di queste rappresentazioni per i generatori abbiamo due diverse rappresentazioni per le trasformazioni di Lorentz infinitesime

$$(2.10) \quad \Lambda = \mathbf{1} + i\vec{r}\vec{\mathbf{J}} - i\vec{b}\vec{\mathbf{K}} \rightarrow \begin{cases} U = 1 + i\frac{\vec{r}\vec{\sigma}}{2} - \frac{\vec{b}\vec{\sigma}}{2} \\ V = 1 + i\frac{\vec{r}\vec{\sigma}}{2} + \frac{\vec{b}\vec{\sigma}}{2} \end{cases}$$

Le due rappresentazioni¹⁶ sono dette rappresentazioni spinoriali, infatti se consideriamo il sottogruppo $O(3)$ del gruppo di Lorentz esse si riducono alla nota rappresentazione spinoriale del gruppo delle rotazioni.

Non è possibile aggiungere all'una o all'altra di queste rappresentazioni un operatore che rappresenti la parità: P dovrebbe (vedi eq (2.6)) commutare con $i\vec{\sigma}$ ed anticommutare con $\vec{\sigma}$, cosa manifestamente impossibile¹⁷. È tuttavia possibile ottenere una rappresentazione dell'intero gruppo di Lorentz combinando

¹⁵Dato che PT commuta con qualsiasi Λ (infatti $PT = -\mathbf{1}$), non occorre preoccuparsi separatamente della rappresentazione di T .

¹⁶Notiamo che le rappresentazioni *non* sono unitarie, $U^\dagger \neq U$, eccetto quando rappresentano una pura rotazione, $\vec{b} = 0$, e che in questo caso $U = V$: per il gruppo delle rotazioni esiste un solo tipo di spinore.

¹⁷Allo stesso modo possiamo vedere che le due rappresentazioni non sono equivalenti: non esiste una matrice X tale che $X i\vec{\sigma} X^{-1} = i\vec{\sigma}$ e $X \vec{\sigma} X^{-1} = -\vec{\sigma}$.

le due rappresentazioni. Si ottiene allora la rappresentazione quadridimensionale utilizzata nella teoria di Dirac delle particelle di spin $1/2$. Torneremo su questo argomento dopo avere studiato in maggior dettaglio le rappresentazioni spinoriali del gruppo di Lorentz proprio.

Nel caso del gruppo delle rotazioni le rappresentazioni spinoriali non sono rappresentazioni di $O(3)$, ma di un gruppo “più grande”, $SU(2)$. Ad ogni elemento di $O(3)$ corrispondono due elementi¹⁸ $(u, -u)$ di $SU(2)$. Lo stesso fenomeno accade nelle due rappresentazioni spinoriali del gruppo di Lorentz proprio, che sono in realtà due diverse rappresentazioni di $SL(2, C)$, il gruppo delle matrici 2×2 a componenti complesse con determinante eguale ad 1. Ad ogni elemento del gruppo di Lorentz proprio corrispondono due elementi, $(u, -u)$, di $SL(2, C)$. La condizione sul determinante si verifica direttamente per le trasformazioni infinitesime: dato che $\text{Tr } \sigma_k = 0$,

$$\det(1 + i\vec{r}\vec{\sigma} \mp \vec{b}\vec{\sigma}) = 1 + \text{Tr}(i\vec{r}\vec{\sigma} \mp \vec{b}\vec{\sigma}) = 1$$

Dato che una trasformazione finita può essere espressa come prodotto di trasformazioni infinitesime, la condizione sul determinante è valida in generale.

2.1 Gli spinori

In questa sezione ci occuperemo della prima delle due rappresentazioni del gruppo di Lorentz proprio contenute nella (2.10). Nella prossima sezione ci occuperemo della seconda e della relazione tra le due.

Un spinore che si trasforma secondo la trasformazione U nella (2.10) è denotato con $\xi^\alpha = \{\xi^1, \xi^2\}$.

$$(2.11) \quad \xi^\alpha \rightarrow \xi'^\alpha = U^\alpha_\beta \xi^\beta$$

Possiamo costruire uno scalare a partire da due spinori utilizzando il simbolo di Ricci $\epsilon_{\alpha\beta}$ ($\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$; $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$),

$$(2.12) \quad \epsilon = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (\epsilon)^2 = -\mathbf{1}$$

Dalla relazione (per una dimostrazione vedere la nota alla eq. (1.36))

$$(2.13) \quad U^\alpha_\gamma U^\beta_\delta \epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\gamma\delta} \det U = \epsilon_{\gamma\delta}$$

segue infatti che

$$(2.14) \quad \xi^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} \eta^\beta \rightarrow U^\alpha_\gamma \xi^\gamma \epsilon_{\alpha\beta} U^\beta_\delta \eta^\delta = \xi^\gamma \epsilon_{\gamma\delta} \eta^\delta$$

La equazione (2.14) ha una interpretazione fisica interessante: le due componenti di uno spinore corrispondono a due possibili orientazioni dello spin, quindi la combinazione $\xi^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} \eta^\beta = \xi^1 \eta^2 - \xi^2 \eta^1$ corrisponde ad uno stato di singoletto. Il singoletto ha $\vec{J} = 0$, ed è quindi invariante per rotazioni; l'equazione (2.14) ci

¹⁸Questo deriva dal fatto che nella rappresentazione spinoriale del gruppo delle rotazioni ad una rotazione determinata dal vettore di rotazione $\vec{\alpha}$, cioè una rotazione di un angolo $|\vec{\alpha}|$ intorno all'asse $\hat{\alpha}$, corrisponde l'operatore $u = \exp(i\vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha}/2)$. Ad una rotazione di angolo $|\vec{\alpha}| + 2\pi$, la stessa rotazione in $O(3)$, corrisponde $-u$ in $SU(2)$. Più correttamente diremo che ad u e $-u$ corrisponde in $O(3)$ una rotazione $\vec{\alpha}$.

dice che esso è anche invariante per trasformazioni di Lorentz arbitrarie.

La matrice ϵ ricopre per gli spinori il ruolo di un tensore metrico (vedi (1.2)).
 Convieni riscrivere la (2.13) sopprimendo gli indici:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} U^T \epsilon U &= \epsilon, \quad \text{ovvero} \\ U^{-1} &= -\epsilon U^T \epsilon, \quad \text{da cui anche} \\ U \epsilon U^T &= \epsilon \end{aligned}$$

Come nel caso dei vettori possiamo usare la ϵ per definire spinori con l'indice in basso, $\xi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \xi^\beta$, che si trasformano come

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \xi_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta} \xi^\beta = (\epsilon \xi)_\alpha \\ &\rightarrow (\epsilon U \xi)_\alpha = -(\epsilon U \epsilon \xi)_\alpha \quad \text{e usando la seconda delle (2.15)} \\ &= ((U^{-1})^T \epsilon \xi)_\alpha = (U^{-1})^\beta{}_\alpha \epsilon_{\beta\gamma} \xi^\gamma \\ &= \xi_\beta (U^{-1})^\beta{}_\alpha \end{aligned}$$

La combinazione $\xi^\alpha \eta_\alpha$ tra due spinori con indici in alto e in basso è quindi un invariante: $(\xi \eta) \rightarrow (\xi U^{-1} U \eta) = (\xi \eta)$.

Convieni inoltre definire una $\epsilon^{\alpha\beta}$ ad indici in alto, anch'essa data dalla eq. (2.12). **Attenzione!** dato che $\epsilon^2 = -1$ la transizione inversa della (2.16) acquista un segno,

$$(2.17) \quad \xi^\alpha = -\epsilon^{\alpha\beta} \xi_\beta$$

2.2 Spinori puntati

Dobbiamo adesso esaminare la seconda rappresentazione bidimensionale del gruppo di Lorentz proprio, introdotta nelle eq. (2.8) e (2.10). Definiamo quindi un secondo tipo di spinori, gli spinori “puntati” $\zeta_{\dot{\alpha}}$ con indice basso che si trasformano secondo

$$(2.18) \quad \zeta_{\dot{\alpha}} \rightarrow V_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \zeta_{\dot{\beta}} = (V \zeta)_{\dot{\alpha}}$$

dove la matrice $V_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}$ è (vedi (2.8), (2.10)), nella sua forma infinitesima,

$$(2.19) \quad V_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} = \left(1 + i \frac{\vec{r} \vec{\sigma}}{2} + \frac{\vec{b} \vec{\sigma}}{2}\right)_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}.$$

L'uso di indici “puntati” serve a distinguere questi indici da quelli degli spinori “normali” che sono “non-puntati”. Il lettore attento avrà notato che l'aver definito gli spinori ad indici “puntati” bassi come quelli che si trasformano con la matrice V definita nella eq. (2.10) è arbitraria (avremmo potuto scegliere quelli alti), come del resto arbitraria era la scelta degli spinori ad indici non-puntati alti come quelli che si trasformano con la matrice U della eq. (2.10). Le scelte opposte sarebbero state altrettanto valide. Tra le 4 possibilità abbiamo scelto quella normalmente usata, ad esempio nel testo di Landau e Lifshitz [2], che complementa utilmente queste note.

Detto questo, possiamo ripetere rapidamente i passi seguiti per gli spinori ad indici non-puntati, lasciando i dettagli al lettore. Cominciamo con l'introdurre i simboli di Ricci ad indici puntati sia alti che bassi, $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, $\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, definiti ambedue dalla (2.12). Notiamo poi che la grandezza $\xi_{\dot{\alpha}}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}}$ è un invariante. L'analogo dell'eq. (2.15) è

$$(2.20) \quad V^{-1} = -\epsilon V^T \epsilon$$

Infine utilizziamo i simboli di Ricci per passare da spinor puntati bassi a spinori puntati alti, e viceversa,

$$(2.21) \quad \zeta^{\dot{\alpha}} = -\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\zeta_{\dot{\beta}}, \quad \zeta_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\zeta^{\dot{\beta}}$$

La legge di trasformazione degli spinori ad indici puntati alti risulta

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \zeta^{\dot{\alpha}} &= -\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\zeta_{\dot{\beta}} = -(\epsilon\zeta)^{\dot{\alpha}} \\ &\Rightarrow (-\epsilon V\zeta)^{\dot{\alpha}} = (\epsilon V\epsilon\zeta)^{\dot{\alpha}} = (-\epsilon V\epsilon)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\zeta^{\dot{\beta}} \quad \text{e usando la (2.20)} \\ &= ((V^{-1}T)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}})\zeta^{\dot{\beta}} \\ &= \zeta^{\dot{\beta}}(V^{-1})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \end{aligned}$$

Le rappresentazioni U e V della equazione (2.10) sono connesse da un'operazione di coniugazione complessa. Le matrici di Pauli σ_i godono delle relazioni

$$(2.23) \quad \sigma_i^* = \epsilon\sigma_i\epsilon; \quad \text{e quindi} \quad (i\sigma_i)^* = -\epsilon i\sigma_i\epsilon$$

$$(2.24) \quad \sigma_i^T = \epsilon\sigma_i\epsilon; \quad \text{e anche} \quad (i\sigma_i)^T = \epsilon i\sigma_i\epsilon$$

e dalla (2.23) segue la seguente relazione tra le U e V :

$$(2.25) \quad U^* = -\epsilon V\epsilon \quad \text{e dalla (2.20)} \quad V^{-1} = U^\dagger$$

Il coniugato complesso dello spinore ad indici alti non-puntati, $\xi^{*\alpha}$ si trasforma come uno spinore ad indici puntati alti, $\zeta^{\dot{\alpha}}$, come si vede paragonando alla luce della (2.25) le leggi di trasformazione per i due tipi di spinori:

$$\begin{aligned} (\xi^\alpha)^* &\Rightarrow (U^\alpha_\beta \xi^\beta)^* \\ \zeta^{\dot{\alpha}} &\Rightarrow (-\epsilon V\epsilon)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\zeta^{\dot{\beta}} \quad \text{vedi eq. (2.22)} \end{aligned}$$

Quindi la coniugazione complessa permette di passare da indici puntati a indici non-puntati. Il complesso coniugato ξ^* di uno spinore ad indici non puntati, ξ^α è uno spinore ad indici puntati. Possiamo porre¹⁹

$$(2.26) \quad (\xi^\alpha)^* = (\xi^*)^{\dot{\alpha}}$$

¹⁹In generale non si possono eguagliare spinori con indici di tipo diverso. Qui vogliamo dire che alla luce della (2.25) il complesso coniugato delle componenti di uno spinore non puntato ξ^α possono essere identificate con le corrispondenti componenti di uno spinore puntato, $(\xi^1)^* = (\xi^*)^{\dot{1}}$, $(\xi^2)^* = (\xi^*)^{\dot{2}}$.

Riassumiamo le leggi di trasformazione dei due tipi di spinori, con indici puntati e non-puntati, ciascuno nelle due forme con indici in alto e in basso, alla luce delle eq. (2.10), (2.11), (2.16), (2.18), (2.22), (2.25). In ciascun caso diamo la legge di trasformazione nella sua forma infinitesima, sopprimendo gli indici spinoriali, e notiamo la relazione con gli spinori con indici spostati, alti \leftrightarrow bassi.

$$(2.27) \quad \xi^\alpha \quad \xi \Rightarrow U\xi = \left(1 + i\frac{\vec{r}\vec{\sigma}}{2} - \frac{\vec{b}\vec{\sigma}}{2}\right)\xi$$

$$(2.28) \quad \xi_\alpha \quad \xi \Rightarrow \xi U^{-1} = \xi\left(1 - i\frac{\vec{r}\vec{\sigma}}{2} + \frac{\vec{b}\vec{\sigma}}{2}\right)$$

$$(2.29) \quad \zeta^{\dot{\alpha}} \quad \zeta \Rightarrow \zeta V^{-1} = \zeta U^\dagger = \zeta\left(1 - i\frac{\vec{r}\vec{\sigma}}{2} - \frac{\vec{b}\vec{\sigma}}{2}\right)$$

$$(2.30) \quad \zeta_{\dot{\alpha}} \quad \zeta \Rightarrow V\zeta = \left(1 + i\frac{\vec{r}\vec{\sigma}}{2} + \frac{\vec{b}\vec{\sigma}}{2}\right)\zeta$$

2.3 I multispinori, prima parte.

L'analogo spinoriale dei tensori sono i *multispinori*, oggetti che si trasformano come²⁰ prodotti di spinori. Cominciamo con il caso di multispinori con indici non-puntati, definiti da $\Sigma^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} \sim \xi^{\alpha_1}\eta^{\alpha_2}\dots\theta^{\alpha_n}$, cioè

$$\Sigma^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} \rightarrow (\Sigma')^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = U_{\beta_1}^{\alpha_1} U_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots U_{\beta_n}^{\alpha_n} \Sigma^{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}$$

mentre nella prossima sezione discuteremo del caso generale, quello di multispinori con indici sia puntati che non-puntati.

Notiamo che i simboli di Ricci sono bispinori invarianti: dalla terza delle (2.15) infatti troviamo

$$(2.31) \quad U_{\beta_1}^{\alpha_1} U_{\beta_2}^{\alpha_2} \epsilon^{\beta_1\beta_2} = \epsilon^{\alpha_1\alpha_2}$$

mentre, sostituendo U con U^{-1} nella (2.13), otteniamo

$$(2.32) \quad \epsilon_{\beta_1\beta_2} (U^{-1})_{\alpha_1}^{\beta_1} (U^{-1})_{\alpha_2}^{\beta_2} = \epsilon_{\alpha_1\alpha_2}$$

Un multispinore che sia antisimmetrico rispetto allo scambio di una coppia di indici può essere espresso in termini di ϵ e di un multispinore con due indici in meno. Infatti, se $\Sigma^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n} = -\Sigma^{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\dots\alpha_n}$, avremmo

$$\begin{aligned} \Sigma^{12\alpha_3\dots\alpha_n} &= -\Sigma^{21\alpha_3\dots\alpha_n}, \quad \Sigma^{11\alpha_3\dots\alpha_n} = \Sigma^{22\alpha_3\dots\alpha_n} = 0 \\ \text{cioè } \Sigma^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n} &= \epsilon^{\alpha_1\alpha_2} \tilde{\Sigma}^{\alpha_3\dots\alpha_n} \\ \text{dove } \tilde{\Sigma}^{\alpha_3\dots\alpha_n} &= \Sigma^{12\alpha_3\dots\alpha_n} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha_1\alpha_2} \Sigma^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n} \end{aligned}$$

Possiamo quindi limitarci a considerare il caso di multispinori *totalmente simmetrici*, cioè simmetrici rispetto allo scambio di ciascuna coppia di indici. Un multispinore totalmente simmetrico ad n indici ha $n+1$ componenti differenti. Il conteggio è semplice: gli n indici possono essere divisi in due gruppi, k che prendono il valore 1, ed $n-k$ che prendono il valore 2. Data la simmetria, due

²⁰Useremo il simbolo \sim per indicare che due grandezze si trasformano nello stesso modo

componenti sono differenti solo se hanno un differente k . I possibili valori di k sono $\{0, 1, 2 \dots n\}$.

I multispinori totalmente simmetrici forniscono rappresentazioni del gruppo di Lorentz proprio, o più precisamente di $SL(2, C)$, e quindi allo stesso tempo rappresentazioni del gruppo delle rotazioni $SU(2)$. C'è una relazione precisa tra i multispinori e gli autostati del momento angolare. Consideriamo un multispinore totalmente simmetrico ad n indici; per effetto di una rotazione degli assi coordinati di un angolo α intorno all'asse z , rappresentata dalle matrici

$$\Lambda = \exp(i\alpha \mathbf{R}_3)$$

$$U = \exp\left(i\alpha \frac{\sigma_3}{2}\right),$$

la componente con k indici eguali ad 1 ed $n - k$ eguali a 2 acquista una fase $\exp(i\frac{(2k-n)\alpha}{2})$, quindi corrisponde a un momento angolare $J_3 = \frac{(2k-n)}{2}$. Al variare di k J_3 può allora assumere i valori $\{\frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1, \dots - \frac{n}{2}\}$. Le componenti di un tale multispinore corrispondono ad un multipletto di momento angolare con $j = n/2$.

Come caso particolare, per $n = 2$ ritroviamo un risultato ben noto: le combinazioni simmetriche di due spin $1/2$ formano un tripletto di stati con momento angolare $j = 1$.

2.4 I multispinori, seconda parte.

Nella sezione precedente abbiamo trattato di multispinori con indici “non-puntati”. Riprendiamo la discussione estendendola a multispinori provvisti di indici sia non-puntati che puntati, cioè di grandezze che si trasformano come prodotti di spinori con i due tipi di indici, $\Xi_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \sim \xi^{\alpha_1} \eta^{\alpha_2} \theta^{\alpha_n} \rho_{\beta_1} \dots \tau_{\beta_m}$, cioè

$$(2.33) \quad \Xi_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \rightarrow (\Xi')_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = U_{\gamma_1}^{\alpha_1} \dots U_{\gamma_n}^{\alpha_n} V_{\beta_1}^{\delta_1} \dots V_{\beta_m}^{\delta_m} (\Xi')_{\delta_1 \dots \delta_m}^{\gamma_1 \dots \gamma_n}$$

Notiamo che:

1. Possiamo facilmente estendere la definizione ad includere indici non-puntati bassi ed indici puntati alti. Questi non introducono novità dato che sappiamo trasformare gli indici da bassi a alti e viceversa.
2. Possiamo limitarci a considerare multispinori simmetrici rispetto allo scambio tra due indici dello stesso tipo (ambidue puntati oppure ambidue non-puntati). Un multispinore antisimmetrico rispetto allo scambio di una coppia di indici dello stesso tipo può essere ridotto ad uno spinore con un numero inferiore di indici. Abbiamo discusso questa situazione nella sezione precedente nel caso di multispinori ad indici “non-puntati”.
3. I simboli di Ricci $\epsilon^{\beta\gamma}$ e $\epsilon_{\beta\gamma}$ sono bispinori invarianti. Lasciamo al lettore la dimostrazione, che segue le linee di quanto fatto sulle ϵ con indici non-puntati.

La trasformazione di un multispinore Ξ in eq. (2.33) rappresenta una trasformazione lineare tra le componenti di Ξ . Se Ξ ha N componenti indipendenti,

$\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_N$, possiamo riesprimere la trasformazione (2.33) come

$$(2.34) \quad \Xi_k \Rightarrow \Xi'_k = \sum_{r=1}^{r=N} S(U)_{kr} \Xi_r$$

dove $S(U)$ è una matrice $N \times N$ funzione di U (notiamo che V non è indipendente da U cui è legato dalla (2.25)). Si verifica facilmente che $S(U)$ fornisce una rappresentazione del gruppo $SL(2, C)$,

$$\begin{aligned} S(U_1)S(U_2) &= S(U_1 U_2) \\ S(\mathbf{1}) &= \mathbf{1} \\ S(U^{-1}) &= S(U)^{-1} \end{aligned}$$

I multispinori *simmetrici* nei loro indici puntati e nei loro indici non-puntati forniscono rappresentazioni *irriducibili* del gruppo di Lorentz proprio, che possiamo identificare con una coppia di numeri $(n/2, m/2)$, dove n, m sono rispettivamente il numero di indici non-puntati e il numero di indici puntati.

Il lettore verificherà²¹ che la rappresentazione $(n/2, m/2)$ ha $(n+1)(m+1)$ componenti indipendenti.

Notiamo una importante proprietà delle rappresentazioni $(n/2, m/2)$: ad una rotazione di 2π intorno all'asse \hat{a} corrisponde la trasformazione $U = \exp(i\pi\vec{\sigma}\cdot\hat{a})$. Dato che gli autovalori di $\vec{\sigma}\cdot\hat{a}$ sono ± 1 avremo $U = -\mathbf{1}$ e, dalla eq. (2.25), $V = -\epsilon U^* \epsilon = -\mathbf{1}$. L'effetto di questa trasformazione su un multispinore con n indici non-puntati e m indici puntati sarà quindi semplicemente (eq. (2.33))

$$(2.35) \quad \Xi_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \rightarrow (-1)^{n+m} (\Xi')_{\delta_1 \dots \delta_m}^{\gamma_1 \dots \gamma_n}$$

Da questo segue che le possiamo suddividere le rappresentazioni $(n/2, m/2)$ in due classi: quelle con $(n+m)$ dispari, che cambiano segno sotto una rotazione di 2π , sono dette *rappresentazioni spinoriali* mentre quelle con $(n+m)$ pari sono dette *rappresentazioni tensoriali*.

2.5 Spinori e vettori.

Esaminiamo ora le più semplici rappresentazioni tensoriali del gruppo di Lorentz proprio, e precisamente quelle con $n, m \leq 1$. Troveremo le rappresentazioni discusse in dettaglio nel capitolo 1:

(0, 0) Lo scalare.

(1/2, 1/2) Un quadrivettore.

(1, 0) Tensore antisimmetrico a due indici destrorso.

(0, 1) Tensore antisimmetrico a due indici sinistrorso.

(1, 1) Tensore simmetrico a due indici a traccia nulla.

²¹Nella precedente sezione abbiamo considerato in dettaglio il caso di multispinori con indici non-puntati, cioè delle rappresentazioni $(n/2, 0)$.

In questa sezione esaminiamo la $(1/2, 1/2)$, mentre nella prossima verranno discusse le altre tre.

Convieni scrivere la $(1/2, 1/2)$ nella forma con i due indici in alto, $\eta^{\alpha\dot{\beta}}$; essa si trasforma come il prodotto di uno spinore non puntato ed uno spinore puntato, $\eta^{\alpha\dot{\beta}} \sim \xi^\alpha \zeta^{\dot{\beta}}$, ovvero, (vedi eq. (2.27), (2.29)),

$$(2.36) \quad \eta \Rightarrow \eta' = U\eta V^{-1}$$

Possiamo formalmente esprimere η in termini di quattro grandezze $V^\mu = \{V^0, V^1, V^2, V^3\}$ tramite la relazione

$$(2.37) \quad \eta = \begin{vmatrix} V^0 + V^3 & V^1 - iV^2 \\ V^1 + iV^2 & V^0 - V^3 \end{vmatrix} = V^0 \mathbf{1} + \vec{V} \cdot \vec{\sigma} = V^\mu \sigma_\mu,$$

dove $\sigma_\mu = \{\mathbf{1}, \vec{\sigma}\}$, ma, perchè V^μ possa essere considerato un quadrivettore occorre verificare che la trasformazione (2.36) di η si traduce in nella corrispondente trasformazione di Lorentz, $V^\mu \Rightarrow \Lambda^\mu_\nu V^\nu$. Lo possiamo verificare esplicitamente per una trasformazioni infinitesima:

$$\begin{aligned} \eta' &= V'^\mu \sigma_\mu = \left(1 + i\frac{\vec{r}\vec{\sigma}}{2} - \frac{\vec{b}\vec{\sigma}}{2}\right) V^\mu \sigma_\mu \left(1 - i\frac{\vec{r}\vec{\sigma}}{2} - \frac{\vec{b}\vec{\sigma}}{2}\right) \\ &= V^\mu \sigma_\mu + \frac{i}{2} [\vec{r}\vec{\sigma}, V^\mu \sigma_\mu] - \frac{1}{2} \{\vec{b}\vec{\sigma}, V^\mu \sigma_\mu\} \\ &= V^0 \mathbf{1} + \vec{V}' \cdot \vec{\sigma} - \vec{r} \wedge \vec{V}' \cdot \vec{\sigma} - V^0 \vec{b} \cdot \vec{\sigma} - \vec{b} \cdot \vec{V}' \mathbf{1} \end{aligned}$$

e, raccogliendo i coefficienti di $\vec{\sigma}$ e di $\mathbf{1}$,

$$\begin{aligned} \vec{V}' &= \vec{V} - \vec{r} \wedge \vec{V} - \vec{b} V^0 \\ V'^0 &= V^0 - \vec{b} \cdot \vec{V} \end{aligned}$$

Quindi V^μ si trasforma come un quadrivettore (vedi eq. 2.3). Questo conferma l'identificazione della rappresentazione $(1/2, 1/2)$ con la rappresentazione vettoriale del gruppo di Lorentz proprio.

Una seconda forma interessante del bispinore $\eta^{\alpha\dot{\beta}}$ è quella con indici in basso e scambiati, $\tilde{\eta}_{\dot{\beta}\alpha} = \epsilon_{\alpha\gamma} \epsilon_{\dot{\beta}\delta} \eta^{\gamma\dot{\delta}}$; la sua legge di trasformazione è

$$(2.38) \quad \tilde{\eta} \Rightarrow \tilde{\eta}' = V\tilde{\eta}U^{-1}$$

Possiamo riscrivere la connessione tra η e $\tilde{\eta}$ sopprimendo gli indici²², $\tilde{\eta} = -\epsilon\eta^T\epsilon$. Si ottiene quindi, usando la (2.24),

$$(2.39) \quad \tilde{\eta} = -\epsilon(V^0 \mathbf{1} + \vec{V} \cdot \vec{\sigma}^T)\epsilon = V^0 \mathbf{1} - \vec{V} \cdot \vec{\sigma} \quad \text{e quindi,}$$

$$(2.40) \quad \eta\tilde{\eta} = \left((V^0)^2 - (\vec{V})^2\right) \cdot \mathbf{1} = V^\mu V_\mu \cdot \mathbf{1}$$

²²Mettendo in ordine gli indici in modo da ottenere un prodotto righe per colonne, $\tilde{\eta}_{\dot{\beta}\alpha} = \epsilon_{\alpha\gamma} \epsilon_{\dot{\beta}\delta} \eta^{\gamma\dot{\delta}} = -\epsilon_{\dot{\beta}\delta} \eta^{T\dot{\delta}\gamma} \epsilon_{\gamma\alpha}$.

Se definiamo le matrici σ^μ con indici in basso e scambiati come²³ $\sigma^\mu = \{\mathbf{1}, \vec{\sigma}\}$ possiamo porre $\tilde{\eta}$ nella forma

$$(2.41) \quad \tilde{\eta} = V_\mu \sigma^\mu$$

Abbiamo così trovato due modi diversi di esprimere un quadrivettore come un bispinore. I due sono equivalenti e potremo usare l'uno o l'altro secondo la convenienza. Useremo queste espressioni nello scrivere equazioni differenziali per campi spinoriali.

2.6 (*)—Spinori e tensori.

Vogliamo ora considerare le $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$, e giustificare la loro identificazione con tensori a due indici. La cosa più semplice è partire da un multispinore $\Xi^{\alpha_1\alpha_2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2}$, *non simmetrico* nelle due coppie di indici, puntati e non-puntati. D'altra parte Ξ si trasforma come il prodotto di due rappresentazioni vettoriali,

$$\Xi^{\alpha_1\alpha_2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2} \sim \eta^{\alpha_1\dot{\beta}_1} \theta^{\alpha_2\dot{\beta}_2}$$

Dato che possiamo porre (vedi sopra) $\eta = V^\mu \sigma_\mu$, $\theta = W^\nu \sigma_\nu$, Ξ può essere identificato con un tensore a due indici²⁴, $T^{\mu\nu}$,

$$(2.42) \quad \Xi^{\alpha_1\alpha_2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2} = T^{\mu\nu} (\sigma_\mu)^{\alpha_1\dot{\beta}_1} (\sigma_\nu)^{\alpha_2\dot{\beta}_2}$$

Dato che Ξ non è simmetrico negli indici, si tratta di una rappresentazione riducibile. Verifichiamo che la riduzione porta allo stesso risultato della eq. (1.38), con l'ulteriore decomposizione di $A^{\mu\nu}$ in due tensori autoduali, A_R , A_L , come visto nella sezione 1.7. Cominciamo con il decomporre Ξ in quattro componenti, ciascuna delle quali è simmetrica o antisimmetrica negli indici puntati o non-puntati,

$$\Xi^{\alpha_1\alpha_2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2} = \Xi^{\{\alpha_1\alpha_2\}\{\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\}} + \Xi^{\{\alpha_1\alpha_2\}[\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2]} + \Xi^{[\alpha_1\alpha_2]\{\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\}} + \Xi^{[\alpha_1\alpha_2][\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2]}$$

Dove i simboli $\{\}$, $[\]$ indicano simmetria o antisimmetria rispetto allo scambio di una coppia di indici. Ad esempio

$$\Xi^{\{\alpha_1\alpha_2\}[\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2]} = \frac{1}{4} \left(\Xi^{\alpha_1\alpha_2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2} + \Xi^{\alpha_2\alpha_1\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2} - \Xi^{\alpha_1\alpha_2\dot{\beta}_2\dot{\beta}_1} - \Xi^{\alpha_2\alpha_1\dot{\beta}_2\dot{\beta}_1} \right)$$

Coppie di indici antisimmetrici possono essere eliminate usando i bispinori invarianti $\epsilon_{\alpha\beta}$, $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, di modo che possiamo riscrivere

$$\Xi^{\alpha_1\alpha_2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2} = S^{\{\alpha_1\alpha_2\}\{\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\}} + \epsilon^{\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2} A_R^{\{\alpha_1\alpha_2\}} + \epsilon^{\alpha_1\alpha_2} A_L^{\{\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\}} + \epsilon^{\alpha_1\alpha_2} \epsilon^{\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2} C$$

Dove abbiamo usato i nomi assegnati ai termini della decomposizione di $T^{\mu\nu}$ nella eq. (1.38). Dobbiamo adesso giustificare queste identificazioni. Cominciando dalla più semplice, C non ha indici spinoriali, ed è quindi uno scalare.

²³Ci saremmo aspettato un cambio di segno nella parte vettoriale di $\sigma^\mu_{\dot{\beta}\alpha}$, ma questo è compensato dalla trasposizione!

²⁴Notiamo subito che torna il conto delle componenti: Ξ ha $2^4 = 16$ componenti indipendenti, lo stesso numero che $T^{\mu\nu}$, $4 \times 4 = 16$.

Esaminiamo ora gli altri termini: dalla (2.42) vediamo che lo scambio delle coppie di indici $(\alpha_1\dot{\beta}_1) \Leftrightarrow (\alpha_2\dot{\beta}_2)$ equivale allo scambio $\mu \Leftrightarrow \nu$. Quindi il termine S corrisponde ad un tensore simmetrico, mentre A_R e A_L , che si trasformano secondo le rappresentazioni $(1, 0)$ e $(0, 1)$, corrispondono a tensori antisimmetrici. Ciascuno dei due ha tre componenti indipendenti (ad esempio $A_R^{11}, A_R^{12} = A_R^{21}, A_R^{22}$) e deve quindi essere identificato con un tensore autoduale. Come vedremo, A_R e A_L corrispondono rispettivamente a tensori destrorsi e sinistrorsi.

Per completare la identificazione dobbiamo rispondere a due domande:

1. È vero che S corrisponde ad un tensore a traccia nulla, $g_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 0$?
2. È corretta la attribuzione dei termini A_R ed A_L a tensori autoduali destrorsi e sinistrorsi?

Cominciamo con la prima domanda. Notiamo anzitutto che il multispinore S appartiene alla rappresentazione $(1, 1)$, e che ha quindi 9 componenti indipendenti, come deve essere per un tensore simmetrico a traccia nulla. Una dimostrazione diretta si può ottenere a partire dalla relazione

$$(2.43) \quad \epsilon_{\alpha_1\alpha_2}\epsilon_{\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2}S^{\{\alpha_1\alpha_2\}\{\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\}} = 0$$

Possiamo esprimere il multispinore S in termini di un tensore simmetrico utilizzando la (2.42) e simmetrizzando esplicitamente negli indici puntati e non-puntati,

$$(2.44) \quad S^{\{\alpha_1\alpha_2\}\{\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\}} = S^{\mu\nu}\frac{1}{4}\left((\sigma_\mu)^{\alpha_1\dot{\beta}_1}(\sigma_\nu)^{\alpha_2\dot{\beta}_2} + (\sigma_\mu)^{\alpha_1\dot{\beta}_2}(\sigma_\nu)^{\alpha_2\dot{\beta}_1} + (\sigma_\mu)^{\alpha_2\dot{\beta}_1}(\sigma_\nu)^{\alpha_1\dot{\beta}_2} + (\sigma_\mu)^{\alpha_2\dot{\beta}_2}(\sigma_\nu)^{\alpha_1\dot{\beta}_1}\right)$$

Con un po di lavoro il lettore volenteroso, che farà uso di relazioni quali la (2.23) potrà dimostrare che la (2.43) è equivalente alla $g_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 0$ e così rispondere alla prima domanda.

La risposta alla seconda domanda è più interessante. Chiediamoci: cosa distingue le rappresentazioni $(1, 0)$, $\Psi^{\{\alpha\beta\}}$, dalla $(0, 1)$, $\Phi^{\{\dot{\alpha}\dot{\beta}\}}$? Ambedue le due rappresentazioni hanno tre componenti che si trasformano come un tripletto di momento angolare, come segue dalla discussione alla fine della sezione 2.3, e quindi avranno lo stesso comportamento sotto rotazioni, mentre hanno comportamento opposto sotto trasformazioni di Lorentz, come si vede dalla differenza tra le matrici di trasformazione U, V .

Ci conviene considerare un caso semplice, quello di una rotazione infinitesima α intorno all'asse 3, e un boost b anche lungo l'asse 3. Ambedue queste trasformazioni usano la matrice σ_3 , che è diagonale e semplifica il calcolo. Inoltre nel caso del bispinore puntato conviene usare la versione con indici in basso, $\Phi_{\{\dot{\alpha}\dot{\beta}\}}$ la cui trasformazione, vedi (2.30), ha una semplice espressione in termini della matrice V .

Consideriamo quindi le componenti Ψ e Φ con componente del momento angolare $J_3 = 1$, che sono rispettivamente²⁵ Ψ^{11} e $\Phi_{\dot{1}\dot{1}}$, e le loro trasformazioni

²⁵Dato che gli indici sono uguali non ci dobbiamo preoccupare della simmetria.

sotto $U = \mathbf{1} + i\alpha\sigma_3/2 - b\sigma_3/2$ e $V = \mathbf{1} + i\alpha\sigma_3/2 + b\sigma_3/2$. Si trova facilmente che

$$(2.45) \quad \Psi^{11} \Rightarrow (1 + i\alpha - b)\Psi^{11}, \quad \text{mentre } \Phi_{1i} \Rightarrow (1 + i\alpha + b)\Phi_{1i}$$

Questa è la prima metà della risposta. Per la seconda metà dobbiamo identificare la componente $J_3 = 1$ nei tensori autoduali F_R, F_L e vedere come questa si comporta sotto trasformazioni di Lorentz lungo l'asse 3. Consideriamo il caso di F_R , la cui espressione in termini di un vettore complesso \vec{W} è nella (1.52). Cominciamo da una rotazione infinitesima intorno all'asse 3,

$$(2.46) \quad (1 + i\alpha J_3)\{W_1, W_2, W_3\} = \{W_1 + \alpha W_2, W_2 - \alpha W_1, W_3\}$$

Da cui segue che l'autostato di J_3 con autovalore 1 è il vettore $\vec{W} = \{1, i, 0\}$. Sostituendo nella (1.52), otteniamo, a meno di un fattore costante,

$$(2.47) \quad F_{R, J_3=1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Dalle (2.2), (2.1) si trova, per una rotazione α e boost b intorno all'asse 3,

$$(2.48) \quad \Lambda = 1 + \epsilon, \quad \text{dove } \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi la trasformazione di $F_{R, J_3=1}$ è data da

$$(2.49) \quad F_{R, J_3=1} \Rightarrow \Lambda F_{R, J_3=1} \Lambda^T = F_{R, J_3=1} + \epsilon F_{R, J_3=1} + F_{R, J_3=1} \epsilon^T \\ = (1 + i\alpha - b)F_{R, J_3=1}$$

Il confronto con la (2.45) dimostra che la rappresentazione $(1, 0)$ deve essere identificata con un tensore antisimmetrico destrorso, mentre un calcolo analogo mostra che la $(0, 1)$ va identificata con un tensore antisimmetrico sinistrorso, dando così una risposta positiva alla seconda domanda.

3 Il gruppo di Lorentz inhomogeneo e la meccanica quantistica

In questo capitolo ci occuperemo del gruppo di Lorentz inhomogeneo, detto anche gruppo di Poincaré. In particolare ci occuperemo della azione delle trasformazioni del gruppo di Lorentz inhomogeneo sui campi quantizzati²⁶.

In meccanica quantistica gli stati di un sistema fisico sono rappresentati da vettori in uno spazio di Hilbert. A una simmetria del sistema corrisponde una trasformazione degli stati che preserva l'interpretazione probabilistica della teoria. Se $|A\rangle, |B\rangle$ sono due vettori di stato, i vettori $T|A\rangle, T|B\rangle$ ottenuti tramite la simmetria T devono essere tali che

$$|\langle TB|TA\rangle| = |\langle B|A\rangle|$$

Wigner ha mostrato²⁷ che, nel caso di trasformazioni che appartengono ad un gruppo continuo e che sono connesse all'identità, ad esempio quelle che appartengono al gruppo di Lorentz proprio, è possibile scegliere le fasi dei vettori trasformati²⁸ in modo tale che

$$\langle TB|TA\rangle = \langle B|T^\dagger T|A\rangle = \langle B|A\rangle$$

Alla trasformazione T corrisponde quindi un operatore unitario, $T^\dagger T = \mathbf{1}$.

3.1 Gruppi continui e algebra di Lie

Come abbiamo visto nella sezione 1.3, la struttura di un gruppo continuo può in larga parte essere colta studiando gli elementi vicini all'unità.

Per un gruppo \mathcal{G} ad n dimensioni ($n=6$ per il gruppo di Lorentz) gli elementi vicini all'unità sono definiti da n operatori, X_i , i *generatori del gruppo*, e n parametri infinitesimi, α_i , e possono essere scritti nella forma.

$$(3.1) \quad g(\alpha) = g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \mathbf{1} + i \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i X_i$$

L'elemento inverso è dato da

$$g^{-1}(\alpha) = g(-\alpha) = \mathbf{1} - i \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i X_i$$

Una rappresentazione di un gruppo \mathcal{G} è una mappa $g \rightarrow U(g)$, ($g \in \mathcal{G}$) che rispetta la struttura di \mathcal{G} , cioè

$$(3.2) \quad \begin{aligned} U(\mathbf{1}) &= \mathbf{1} \\ U(g_1)U(g_2) &= U(g_1 g_2) \\ U(g^{-1}) &= U^{-1}(g) \end{aligned}$$

²⁶una discussione molto completa di questi temi si trova nel secondo capitolo del testo di Weinberg, ref. [4].

²⁷Ne discuteremo più in dettaglio quando tratteremo di simmetrie discrete come \mathbf{P} o \mathbf{T} .

²⁸il vettore associato ad uno stato fisico è definito a meno di una fase.

Per quanto riguarda gli elementi vicini all'identità, una rappresentazione è definita da n operatori \tilde{X}_i di modo che, se $U(\alpha) = U(g(\alpha))$ è l'operatore che corrisponde a $g(\alpha)$, possiamo scrivere

$$(3.3) \quad U(\alpha) = \mathbf{1} + i \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \tilde{X}_i,$$

Perchè la rappresentazione $U(g)$ sia unitaria i generatori X_i devono essere rappresentati da operatori hermitiani, $\tilde{X}_i^\dagger = \tilde{X}_i$, da cui segue che

$$U^{-1} = U(-\alpha) = \mathbf{1} - i \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \tilde{X}_i = U^\dagger(g)$$

Consideriamo adesso il prodotto $g_1 g(\alpha) g_1^{-1}$ dove $g(\alpha)$ è la trasformazione infinitesima della eq. (3.1). Se $\alpha_i = 0$ ($i = 1 \dots, n$) il prodotto si riduce all'identità, quindi per $\alpha_i \neq 0$ ma infinitesimi, il prodotto è ad una trasformazione infinitesima,

(3.4)

$$(3.5) \quad g_1 \left(\mathbf{1} + i \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i X_i \right) g_1^{-1} = g(\gamma) = \mathbf{1} + i \sum_{i=1}^{i=n} \gamma_i X_i;$$

Se g_1 è infinitesimo, $g_1 = g(\beta) = \mathbf{1} + i \sum_{j=1}^{j=n} \beta_j X_j$, si ottiene esplicitamente

$$(3.6) \quad i \sum_{j=1}^{j=n} i \sum_{i=1}^{i=n} \beta_j \alpha_i [X_j, X_i] = i \sum_{k=1}^{k=n} \gamma_k X_k$$

Da questa equazione segue che il commutatore di due generatori del gruppo deve essere una combinazione lineare di generatori,

$$(3.7) \quad [X_j, X_i] = i \sum_{k=1}^{k=n} C_{ji}^k X_k$$

Sostituendo a sinistra nella (3.6) ed eguagliando i coefficienti di X_k si ottiene

$$(3.8) \quad \gamma_k = - \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} C_{ji}^k \beta_j \alpha_i$$

I coefficienti C_{ji}^k sono detti "costanti di struttura" del gruppo. Il loro ruolo è centrale nella teoria delle rappresentazioni: è facile vedere che se \tilde{X}_i sono i generatori in una rappresentazione $g \rightarrow U(g)$, i loro commutatori devono obbedire la

$$(3.9) \quad [\tilde{X}_j, \tilde{X}_i] = i \sum_{k=1}^{k=n} C_{ji}^k \tilde{X}_k$$

con le stesse costanti di struttura. Infatti riprendiamo il prodotto nella (3.4), che per g_1 infinitesimo diventa semplicemente

$$g(\beta)g(\alpha)g(\beta)^{-1} = g(\gamma)$$

con i parametri γ_i dati dalla eq. (3.8). Deve quindi essere

$$U(\beta)U(\alpha)U(\beta)^{-1} = U(\gamma)$$

e sostituendo la (3.3) e la (3.8), si ottiene la relazione

$$i \sum_{j=1}^{j=n} i \sum_{i=1}^{i=n} \beta_j \alpha_i [\tilde{X}_j, \tilde{X}_i] = i \sum_{k=1}^{k=n} \gamma_k \tilde{X}_k = i \sum_{k=1}^{k=n} \left(- \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} C_{ji}^k \beta_j \alpha_i \right) \tilde{X}_k$$

che, dato che α_i, β_j sono parametri arbitrari, si riduce alla (3.9).

Le combinazioni lineari dei generatori, ad esempio $A(\alpha) = i \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i X_i$ formano uno spazio vettoriale lineare. L'esistenza delle regole di commutazione (3.7) permette di definire un prodotto tra elementi che risulta antisimmetrico, e che possiamo identificare con il commutatore: $[A(\beta), A(\alpha)] = A(\gamma)$. dove γ è una funzione antisimmetrica di β, α data dalla eq. (3.8). Una struttura di questo tipo è detta una "algebra di Lie".

In conclusione abbiamo visto che ad una rappresentazione di un gruppo continuo \mathcal{G} corrisponde una rappresentazione dei suoi generatori X_i . Dalla richiesta che la rappresentazione del gruppo mantenga intatta la sua struttura (vedi le (3.2)), segue che la rappresentazione dei generatori deve mantenere intatta la struttura delle regole di commutazione, o in termini tecnici la struttura dell'algebra di Lie del gruppo: ad una rappresentazione del gruppo corrisponde una rappresentazione dell'algebra.

Ci si può chiedere se sia vero il contrario, se cioè, dato un gruppo continuo \mathcal{G} , ad ogni rappresentazione della sua algebra corrisponde una rappresentazione del gruppo stesso. La risposta è "no, ma quasi". In termini un poco più precisi²⁹ si può dimostrare che data una rappresentazione dell'algebra, cioè un insieme di operatori \tilde{X}_i che hanno le stesse regole di commutazione dei generatori X_i , si può ottenere una rappresentazione di \mathcal{G} , oppure una rappresentazione di un gruppo più grande, \mathcal{G}' che viene detto "gruppo universale di ricoprimento" (UCG, universal covering group) di \mathcal{G} .

Alcuni casi di questo fenomeno ci sono già noti: se \mathcal{G} è il gruppo delle rotazioni $O(3)$, \mathcal{G}' è $SU(2)$, mentre al gruppo di Lorentz proprio corrisponde $SL(2, C)$. In ogni caso il gruppo di partenza, \mathcal{G} è una rappresentazione di \mathcal{G}' , quindi un altro modo di esprimere questo risultato è: "ad ogni rappresentazione dell'algebra di Lie di \mathcal{G} corrisponde una rappresentazione del suo UCG".

3.2 Una regola di superselezione.

Nel caso del gruppo delle rotazioni, (ma le stesse considerazioni si applicano al gruppo di Lorentz proprio), ad ogni rotazione $\vec{\alpha}$ corrispondono due elementi di $SU(2)$, $u, -u$. D'altra parte noi vogliamo assicurarci che una rotazione di 2π , $R_{2\pi}$, sia fisicamente equivalente alla identità. In altre parole per qualunque grandezza osservabile O e per qualunque coppia di stati A, B , deve valere la

²⁹Il lettore interessato ad approfondire questo argomento potrebbe consultare il secondo capitolo della rif. [4].

relazione

$$(3.10) \quad \langle B|O|A\rangle = \langle R_{2\pi}B|O|R_{2\pi}A\rangle = \langle B|R_{2\pi}^\dagger O R_{2\pi}|A\rangle$$

In meccanica quantistica ad ogni grandezza osservabile corrisponde un operatore O , detto un “osservabile”. Dato che le grandezze osservabili devono essere invarianti sotto rotazioni di 2π , tutti gli elementi di matrice dei corrispondenti operatori devono anche essere invarianti sotto rotazioni di 2π . Da questo segue che un osservabile può avere elementi di matrice non nulli solamente tra due stati con spin intero o tra due stati con spin semi-intero. Gli elementi di matrice tra uno stato a momento angolare intero, $|I\rangle$, ed uno a momento angolare semi-intero, $|S\rangle$, sono nulli:

$$(3.11) \quad \langle I|O|S\rangle = \langle R_{2\pi}I|O|R_{2\pi}S\rangle = -\langle I|O|S\rangle = 0$$

Dato che questo deve essere vero per qualsiasi grandezza osservabile la (3.11) è detta una *regola di superselezione*.

Dato che la (3.10) deve valere per una scelta arbitraria degli stati A, B , possiamo semplicemente scrivere

$$R_{2\pi}^\dagger O R_{2\pi} = O,$$

che equivale alla affermazione che ogni osservabile O deve trasformarsi secondo una rappresentazione tensoriale del gruppo di Lorentz.

Alla stessa conclusione si può arrivare partendo dal principio di micro-causalità: osservabili associati a punti x, y a distanza di tipo spazio devono commutare tra loro,

$$[O(x), O(y)] = 0 \quad \text{se } (x - y)^2 < 0$$

Grandezze di tipo spinoriale, che obbediscono a regole di anticommutazione, non possono essere osservabili. Ad esempio il campo di una particella di spin $1/2$ obbedisce a regole di anticommutazione a tempi eguali:

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(\vec{x})\psi^\dagger(\vec{y}) &= -\psi^\dagger(\vec{y})\psi^\dagger(\vec{x}) \quad \text{Inoltre} \\ \psi^\dagger(\vec{x})\psi^\dagger(\vec{y})|0\rangle &= |\text{stato a due particelle}\rangle \neq 0 \quad \text{e quindi} \\ [\psi^\dagger(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})] &= 2\psi^\dagger(\vec{x})\psi^\dagger(\vec{y}) \neq 0 \end{aligned}$$

Il campo di una particella di spin $1/2$ non è quindi osservabile.

3.3 Algebra del gruppo di Poincaré

Le trasformazioni del gruppo di Lorentz inomogeneo (o gruppo di Poincaré), consistono in una trasformazione appartenente al gruppo di Lorentz proprio, Λ , seguita da una traslazione a^μ del sistema di coordinate. Una tale trasformazione viene indicata con la coppia (Λ, a) :

$$(3.12) \quad (\Lambda, a) = (\mathbf{1}, a)(\Lambda, 0)$$

il suo effetto sulle coordinate x^μ è

$$(3.13) \quad x^\mu \Rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu - a^\mu$$

Se eseguiamo una seconda trasformazione (Λ', a') in cascata, otteniamo

$$x'^{\mu} \Rightarrow x''^{\mu} = \Lambda'^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} - a'^{\mu} = \Lambda'^{\mu}_{\nu} \Lambda^{\nu}_{\rho} x^{\rho} - \Lambda'^{\mu}_{\nu} a^{\nu} - a'^{\mu}$$

Il prodotto tra due trasformazioni è quindi dato da

$$(3.14) \quad (\Lambda', a')(\Lambda, a) = (\Lambda' \Lambda, \Lambda' a + a')$$

Studiamo adesso la struttura dell'algebra di Lie del gruppo, cioè i commutatori dei generatori. Già conosciamo le regole di commutazione dei generatori del gruppo di Lorentz proprio, (2.5),

$$(3.15) \quad \begin{aligned} [\mathbf{J}_k, \mathbf{J}_l] &= i\epsilon_{klm} \mathbf{J}_m \\ [\mathbf{J}_k, \mathbf{K}_l] &= i\epsilon_{klm} \mathbf{K}_m \\ [\mathbf{K}_k, \mathbf{K}_l] &= -i\epsilon_{klm} \mathbf{J}_m \end{aligned}$$

È conveniente esprimere le \mathbf{J}_m , \mathbf{K}_m come elementi di un tensore³⁰ antisimmetrico, $\mathbf{J}^{\mu\nu}$

$$(3.16) \quad \mathbf{J}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{K}_1 & -\mathbf{K}_2 & -\mathbf{K}_3 \\ \mathbf{K}_1 & 0 & \mathbf{J}_3 & -\mathbf{J}_2 \\ \mathbf{K}_2 & -\mathbf{J}_3 & 0 & \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{K}_3 & \mathbf{J}_2 & -\mathbf{J}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $J^{12} = J_3$, $J^{01} = K_1, \dots$, e riscrivere la trasformazione infinitesima (2.4) (vedi anche la 2.2), come

$$(3.17) \quad (\Lambda, 0) = \mathbf{1} + i \sum_{i=1}^{i=3} (r_i \mathbf{J}_i - b_i \mathbf{K}_i) = \mathbf{1} - \frac{i}{2} \sum_{\mu, \nu} \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{J}^{\mu\nu}$$

Le regole di commutazione (3.15) si riassumono in

$$(3.18) \quad [\mathbf{J}^{\mu\nu}, \mathbf{J}^{\rho\sigma}] = i \left(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho} \right)$$

Lasciamo al lettore la verifica della equivalenza di questa espressione con le (3.15), che può essere eseguita caso per caso.

Il sottogruppo delle traslazioni, composto dalle trasformazioni $(\mathbf{1}, a^{\mu})$ è definito da 4 parametri, quindi le traslazioni infinitesime possono essere scritte in termini di quattro operatori $\mathbf{P}^{\mu} = \{\mathbf{H}, \vec{\mathbf{P}}\}$,

$$(3.19) \quad (\mathbf{1}, \alpha^{\mu}) = \mathbf{1} - i \mathbf{P}^{\nu} \alpha^{\mu} g_{\mu\nu} = \mathbf{1} - i \mathbf{P}_{\mu} \alpha^{\mu}$$

La legge di moltiplicazione delle traslazioni è (scusate il bisticcio) additiva,

$$(3.20) \quad (\mathbf{1}, a^{\mu})(\mathbf{1}, b^{\mu}) = (\mathbf{1}, a^{\mu} + b^{\mu})$$

Per trasformazioni finite si ottiene semplicemente, applicando ripetutamente la (3.20), che $(\mathbf{1}, a^{\mu}) = (\mathbf{1}, a^{\mu}/N)^N$. Per $N \rightarrow \infty$ possiamo considerare $(\mathbf{1}, a^{\mu}/N)$ come una trasformazione infinitesima, quindi

$$(3.21) \quad (\mathbf{1}, a^{\mu}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbf{1} - i \frac{\mathbf{P}_{\mu} a^{\mu}}{N} \right)^N = \exp(-i \mathbf{P}_{\mu} a^{\mu})$$

³⁰Come vedremo $\mathbf{J}^{\mu\nu}$ si trasforma come un tensore.

Dato che il prodotto (3.20) è commutativo, le \mathbf{P}^μ devono commutare tra loro,

$$(3.22) \quad [\mathbf{P}^\mu, \mathbf{P}^\nu] = 0, \quad (\mu, \nu = 0 \dots 3)$$

Restano infine da determinare i commutatori tra \mathbf{J}_m , \mathbf{K}_m e \mathbf{P}_μ . Per fare questo consideriamo il prodotto,

$$(3.23) \quad (\Lambda, 0)(\mathbf{1}, a)(\Lambda^{-1}, 0) = (\mathbf{1}, \Lambda a)$$

dove a_μ sono grandezze infinitesime, e Λ è una trasformazione di Lorentz infinitesima; possiamo quindi usare le (3.17), la (3.19), e la (2.3) per scrivere

$$\left(\mathbf{1} - \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}\mathbf{J}^{\mu\nu}\right)\left(\mathbf{1} + i\mathbf{P}_\lambda\alpha^\lambda\right)\left(\mathbf{1} + \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}\mathbf{J}^{\mu\nu}\right) = \mathbf{1} + i\mathbf{P}_\mu(\alpha^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu a^\nu)$$

e, con qualche semplificazione,

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu}\alpha^\lambda[\mathbf{J}^{\mu\nu}, \mathbf{P}_\lambda] &= 2i\epsilon_{\mu\nu}a^\nu\mathbf{P}^\mu \\ &= i\epsilon_{\mu\nu}\alpha^\lambda(\delta_\lambda^\nu\mathbf{P}^\mu - \delta_\lambda^\mu\mathbf{P}^\nu) \end{aligned}$$

dato che i parametri infinitesimi $\epsilon_{\mu\nu}$, α^λ sono arbitrari, e che nel secondo termine della eguaglianza abbiamo avuto cura di antisimmetrizzare il coefficiente di $\epsilon_{\mu\nu}\alpha^\lambda$ rispetto allo scambio $\mu \leftrightarrow \nu$, risultano le regole di commutazione

$$[\mathbf{J}^{\mu\nu}, \mathbf{P}_\lambda] = i(\delta_\lambda^\nu\mathbf{P}^\mu - \delta_\lambda^\mu\mathbf{P}^\nu)$$

ovvero:

$$(3.24) \quad [\mathbf{J}^{\mu\nu}, \mathbf{P}^\lambda] = i(g^{\lambda\nu}\mathbf{P}^\mu - g^{\lambda\mu}\mathbf{P}^\nu)$$

che possiamo scrivere in dettaglio come

$$(3.25) \quad \begin{aligned} [\mathbf{J}_i, \mathbf{P}_0] &= 0 \\ [\mathbf{J}_i, \mathbf{P}_k] &= i\epsilon_{ikm}\mathbf{P}_m \\ [\mathbf{K}_i, \mathbf{P}_0] &= iP_i \\ [\mathbf{K}_i, \mathbf{P}_k] &= i\delta_{ik}P_0 \end{aligned}$$

Dalle regole di commutazione (3.25) segue che il valore di aspettazione di P^μ tra stati fisici si trasforma come un vettore sotto trasformazioni di Lorentz $T(\Lambda, 0)$

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \langle B | \mathbf{P}^\rho | A \rangle &\Rightarrow \langle TB | \mathbf{P}^\rho | TA \rangle = \langle B | T^\dagger \mathbf{P}^\rho T | A \rangle \\ &= \langle B | \left(\mathbf{1} + \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}\mathbf{J}^{\mu\nu}\right)\mathbf{P}^\rho\left(\mathbf{1} - \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}\mathbf{J}^{\mu\nu}\right) | A \rangle \\ &= \langle B | (\mathbf{P}^\rho + \epsilon^\rho{}_\nu\mathbf{P}^\nu) | A \rangle \\ &= \Lambda^\rho{}_\nu \langle B | \mathbf{P}^\nu | A \rangle \end{aligned}$$

A livello operatoriale abbiamo semplicemente

$$(3.27) \quad T^\dagger \mathbf{P}^\rho T = \Lambda^\rho{}_\nu \mathbf{P}^\nu$$

Abbiamo verificato questa equazione per trasformazioni di Lorentz infinitesime. Dato che una trasformazione finita si ottiene dal prodotto di trasformazioni infinitesime, per verificarla in generale basta dimostrare che la trasformazione di \mathbf{P} rispetta il prodotto tra elementi del gruppo. Questo si verifica facilmente: T , che è un operatore che agisce sui vettori dello spazio di Hilbert, commuta con grandezze numeriche come gli elementi della matrice Λ , quindi:

$$(3.28) \quad T_1^\dagger T_2^\dagger \mathbf{P} T_2 T_1 = T_1^\dagger \Lambda_2 \mathbf{P} T_1 = \Lambda_2 T_1^\dagger \mathbf{P} T_1 = \Lambda_2 \Lambda_1 \mathbf{P}$$

In modo del tutto analogo possiamo dimostrare che $\mathbf{J}^{\mu\nu}$ si trasforma come un tensore a due indici; per trasformazioni infinitesime³¹,

$$(3.29) \quad \begin{aligned} T^\dagger \mathbf{J}^{\rho\sigma} T &= \left(\mathbf{1} + \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{J}^{\mu\nu} \right) \mathbf{J}^{\rho\sigma} \left(\mathbf{1} - \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{J}^{\mu\nu} \right) \\ &= \mathbf{J}^{\rho\sigma} + \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} [\mathbf{J}^{\mu\nu}, \mathbf{J}^{\rho\sigma}] \\ &= \mathbf{J}^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} \left(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho} \right) \\ &= \mathbf{J}^{\rho\sigma} + \epsilon^\rho{}_\mu \mathbf{J}^{\mu\sigma} + \epsilon^\sigma{}_\nu \mathbf{J}^{\rho\nu} \\ &= \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu \mathbf{J}^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Per dimostrare il risultato anche nel caso di trasformazioni finite basta anche in questo caso dimostrare che il risultato ottenuto rispetta la legge del prodotto tra elementi del gruppo; lo lasciamo come esercizio per il lettore.

3.4 La trasformazione delle grandezze di campo.

Nella teoria di campo le grandezze fisiche sono operatori funzione delle coordinate. In questa sezione esploriamo le trasformazioni dei campi per effetto di elementi del gruppo di Poincaré.

In generale un campo Ψ avrà un certo numero di componenti, $\Psi(x) = \{ \Psi_1(x), \Psi_2(x), \dots, \Psi_n(x) \}$. Ad esempio il campo elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ ha sei componenti (vedi la sezione 1.7). Una trasformazione di Lorentz produce due effetti: un cambiamento delle coordinate e una trasformazione lineare delle componenti. Per sbrogliare questa situazione un poco complessa, cominciamo con il considerare il comportamento del campo nel punto con coordinate $x^\mu = 0$, cioè l'origine del sistema di riferimento, le cui coordinate sono invarianti sotto trasformazioni di Lorentz. Una trasformazione di Lorentz può solamente produrre una trasformazione lineare delle componenti,

$$(3.30) \quad T^\dagger(\Lambda, 0) \Psi_r(0) T(\Lambda, 0) = S_{rs}(\Lambda) \Psi_s(0)$$

Ad ogni trasformazione Λ deve corrispondere una matrice di trasformazione $n \times n$, $S_{rs}(\Lambda)$. Si vede facilmente che questa corrispondenza deve essere una *rappresentazione* del gruppo di Lorentz proprio. Infatti alla non trasformazione, $\Lambda = \mathbf{1}$ deve corrispondere la matrice unità $S_{rs} = \delta_{rs}$, e l'effetto di due trasformazioni successive Λ_1, Λ_2 deve essere (vedere la discussione della (3.28)) quello

³¹Nei passaggi utilizziamo la antisimmetria di ϵ e \mathbf{J} , ad esempio $-\epsilon_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \epsilon_{\nu\mu} g^{\nu\rho} = \epsilon^\rho{}_\mu$, e nel passaggio finale trascuriamo termini del secondo ordine in ϵ .

del loro prodotto:

$$\begin{aligned} T^\dagger(\Lambda_1, 0)T^\dagger(\Lambda_2, 0)\Psi(0)T(\Lambda_2, 0)T(\Lambda_1, 0) &= S(\Lambda_2)S(\Lambda_1)\Psi(0) \\ &= T^\dagger(\Lambda_2\Lambda_1, 0)\Psi(0)T(\Lambda_2\Lambda_1, 0) = S(\Lambda_2\Lambda_1)\Psi \end{aligned}$$

e da questo segue $S(\Lambda_2)S(\Lambda_1) = S(\Lambda_2\Lambda_1)$. Quindi i campi possono essere classificati sulla base delle rappresentazioni del gruppo di Lorentz proprio. È sufficiente considerare le rappresentazioni *irriducibili*, di cui abbiamo trovato una lista completa nella sezione 2.

Il secondo passo nel nostro studio riguarda l'effetto delle traslazioni. L'effetto di una traslazione $T(\mathbf{1}, a^\mu)$ è semplicemente $x^\mu \Rightarrow x'^\mu = x^\mu - a^\mu$; x e x' sono coordinate *dello stesso punto*, quindi se la funzione $f(x)$ rappresenta una qualche proprietà di un sistema fisico, la funzione trasformata $f'(x')$, che rappresenta la stessa grandezza nello stesso punto, ma in un diverso sistema di coordinate, sarà semplicemente data da $f'(x') = f(x)$. Dato che $x = x' + a$, avremo semplicemente, vedi la figura 3, $f'(x') = f(x' + a)$.

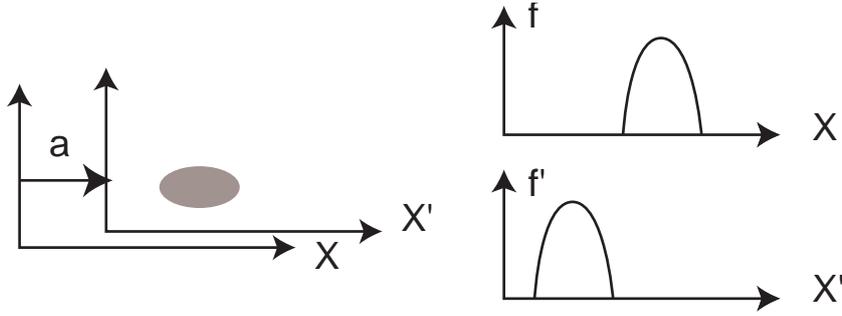


Figura 3: Traslazioni: a sinistra, effetto sulle coordinate, a destra, effetto su una funzione delle coordinate.

Consideriamo adesso gli elementi di matrice di un operatore di campo $\Psi(x)$. Gli effetti di una traslazione $T = T(\mathbf{1}, a) = \exp(-i\mathbf{P}_\mu a^\mu)$, eq. (3.21), sono dati da³²

$$(3.31) \quad \begin{aligned} \langle B | \Psi(x) | A \rangle &\Rightarrow \langle TB | \Psi(x) | TA \rangle = \langle B | T^\dagger \Psi(x) T | A \rangle \\ &= \langle B | \Psi(x + a) | A \rangle \end{aligned}$$

A livello operatoriale abbiamo quindi semplicemente

$$(3.32) \quad T^\dagger \Psi(x) T = \exp(i\mathbf{P}_\mu a^\mu) \Psi(x) \exp(-i\mathbf{P}_\mu a^\mu) = \Psi(x + a)$$

Notiamo che, se consideriamo una trasformazione infinitesima, $T = \mathbf{1} + i\mathbf{P}_\mu \delta^\mu$, la (3.32) diviene

$$(\mathbf{1} + i\mathbf{P}_\mu \delta^\mu) \Psi(x) (\mathbf{1} - i\mathbf{P}_\mu \delta^\mu) = \Psi(x + \delta) = \Psi(x) + \delta^\mu \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x^\mu}$$

³²Possiamo considerare $\langle B | \Psi(x) | A \rangle$ come una funzione del punto cui applicare le precedenti osservazioni.

da cui, eguagliando i termini del primo ordine in δ , otteniamo le regole di commutazione tra \mathbf{P}_μ ed il campo Ψ ,

$$(3.33) \quad [\mathbf{P}_\mu, \Psi(x)] = -i \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x^\mu}$$

Ovvero, separatamente per le componenti spaziali e quelle temporali,

$$(3.34) \quad [\mathbf{H}, \Psi(x)] = -i \dot{\Psi}(x), \quad [\vec{\mathbf{P}}, \Psi(x)] = i \vec{\nabla} \Psi(x)$$

Armati di questo risultato possiamo tornare alle trasformazioni di Lorentz e dedurre la legge di trasformazione per un campo in un punto x^μ arbitrario. L'idea è di eseguire tre trasformazioni: (1) traslare il campo nell'origine, (2) applicare la trasformazione di Lorentz, (3) ritraslare il campo al punto giusto. Il primo e il terzo passo sono traslazioni, e possiamo usare la (3.32), mentre la seconda è la trasformazione di Lorentz di un campo in $x = 0$, e possiamo usare la (3.30). Quale sia la traslazione giusta da applicare nel terzo passo lo dice la legge del prodotto tra trasformazioni di Poincaré, eq. (3.14), da cui ricaviamo la identità

$$(3.35) \quad T(\Lambda, 0) = T(\mathbf{1}, -x)T(\Lambda, 0)T(\mathbf{1}, \Lambda^{-1}x) = T_1 T_2 T_3$$

In conclusione la legge di trasformazione del campo risulta

$$(3.36) \quad T^\dagger(\Lambda, 0)\Psi_r(x)T(\Lambda, 0) = S_{rs}(\Lambda)\Psi_s(\Lambda^{-1}x)$$

Lasciamo al lettore lo sviluppo dei singoli passi, come pure la soluzione del seguente

Esercizio 5 *Dimostrare che $T^\dagger(\Lambda, a)\Psi_r(x)T(\Lambda, a) = S_{rs}(\Lambda)\Psi_s(\Lambda^{-1}(x+a))$*

Nel caso di una trasformazione infinitesimale, se indichiamo con $s^{\mu\nu}$ i generatori nella rappresentazione $S(\Lambda)$, cioè, per Λ infinitesimale,

$$(3.37) \quad S(\mathbf{1} - \frac{i}{2} \sum_{\mu, \nu} \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{J}^{\mu\nu}) = \mathbf{1} - \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} s^{\mu\nu}$$

la (3.36) diviene

$$(3.38) \quad \begin{aligned} (\mathbf{1} + \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{J}^{\mu\nu})\Psi(x)(\mathbf{1} - \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{J}^{\mu\nu}) &= (\mathbf{1} - \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} s^{\mu\nu})\Psi(x^\mu - \epsilon^\mu_\nu x^\nu) \\ &= (\mathbf{1} - \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} s^{\mu\nu})(\Psi(x) - \epsilon^\mu_\nu x^\nu \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x^\mu}) \\ &= (\mathbf{1} - \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} s^{\mu\nu})(\Psi(x) - \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} (x^\nu \partial^\mu - x^\mu \partial^\nu)\Psi(x)) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo avuto cura di antisimmetrizzare il coefficiente di $\epsilon_{\mu\nu}$. Dal termine lineare in $\epsilon_{\mu\nu}$ otteniamo le regole di commutazione

$$(3.39) \quad [\mathbf{J}^{\mu\nu}, \Psi(x)] = -\left(s^{\mu\nu} + i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)\right)\Psi(x)$$

Le regole di commutazione del momento angolare si ottengono ponendo $\mathbf{J}^{12} = \mathbf{J}_3$, $s^{12} = s_3$, etc. e ricordando che $\partial^i = -\nabla_i$, col risultato:

$$(3.40) \quad [\mathbf{J}_i, \Psi(x)] = -(s_i + L_i)\Psi(x); \quad \vec{L} = \vec{x} \wedge (-i\vec{\nabla})$$

I due termini corrispondono rispettivamente al momento angolare di spin e al momento angolare orbitale.

4 Teorie di campo per particelle di spin 1/2.

In questo capitolo ci occupiamo delle possibili teorie di campo basate su spinori. Cominceremo con una teoria basata su un campo a due componenti, $\phi^\alpha(x)$, che rappresenta particelle di massa nulla e di elicità positiva — campo destrorso. Una analoga teoria basata su un campo ad indici puntati, $\zeta_{\dot{\alpha}}(x)$, rappresenterebbe particelle di elicità negativa — campo sinistrorso. Teorie basate su campi a due componenti che uniscono la caratteristica di massa nulla e elicità definita sono dette “di Weyl”.

Il secondo passo sarà quello di mostrare che si può modificare una teoria di Weyl con l'introduzione di un termine di massa. Si ottiene così una teoria di Majorana, che descrive particelle di massa diversa da zero ma con le due elicità. Faremo vedere che una teoria di Majorana o una di Weyl può essere riscritta in modo del tutto equivalente in termini di spinori a quattro componenti — spinori di Dirac. In effetti le teorie di Weyl o di Majorana possono essere viste come casi particolari di una teoria di Dirac. In questo modo potremo ricostruire la teoria di Dirac a partire da teorie che coinvolgono spinori a due componenti. Procedendo in questo modo potremo ricostruire la teoria di Dirac a partire dalla più semplice teoria degli spinori bidimensionali. La invarianza relativistica della teoria di Dirac si riconduce alla invarianza relativistica delle teorie con spinori a due componenti e non richiede ulteriori dimostrazioni.

4.1 Teorie di Weyl.

Iniziamo quindi con il considerare un campo $\phi^\alpha(x)$, e cerchiamo di costruire una teoria di campo, invariante sotto trasformazioni del gruppo di Lorentz proprio, che descriva particelle prive di interazione. Abbiamo visto nella eq. (2.26) che³³ ϕ^\dagger si trasforma come uno spinore puntato, $(\phi^\dagger)^{\dot{\alpha}}$ (o brevemente $\phi^{\dagger\dot{\alpha}}$), quindi il campo $\phi^\alpha(x)$ è necessariamente un campo a componenti complesse — una condizione di realtà del tipo $\phi^\dagger = \phi$ non sarebbe relativisticamente invariante.

Formuleremo la teoria partendo dal principio d'azione, con

$$(4.1) \quad S = \int d^4x \mathcal{L} \left(\phi(x), \phi^\dagger(x), \partial\phi(x), \partial\phi^\dagger(x) \right)$$

dove la densità di Lagrangiano \mathcal{L} deve essere un invariante relativistico. Dato che cerchiamo una teoria senza interazioni le equazioni del moto devono essere lineari³⁴ e quindi la densità di Lagrangiano bilineare. \mathcal{L} deve inoltre essere reale ($\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$), e relativisticamente invariante. Le derivate possono essere espresse come bispinori in una delle due forme (sezione 2.5)

$$(4.2) \quad \nabla^{\alpha\dot{\beta}} = \sigma_\mu^{\alpha\dot{\beta}} \partial^\mu; \quad \tilde{\nabla}_{\dot{\beta}\alpha} = \sigma_{\dot{\beta}\alpha}^\mu \partial_\mu$$

La forma più semplice per il lagrangiano è quindi

$$(4.3) \quad \mathcal{L} = i\phi^\dagger \tilde{\nabla} \phi = i\phi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \phi$$

³³Useremo il simbolo ϕ^\dagger per indicare indifferentemente l'hermitiano coniugato di ϕ (teoria quantistica) o il coniugato complesso (teoria classica).

³⁴Una equazione lineare (invariante per traslazioni) ha come soluzioni delle onde piane $\exp i(\vec{p}\vec{x} - \omega t)$ che corrispondono a particelle libere di impulso \vec{p} ed energia ω .

Il coefficiente “ i ” garantisce che l’azione sia reale: con una integrazione per parti si ottiene infatti

$$(4.4) \quad S = i \int d^4x \phi^\dagger(x) \sigma^\mu \partial_\mu \phi(x) = -i \int d^4x [\partial_\mu \phi^\dagger(x)] \sigma^\mu \phi(x) = S^\dagger$$

Nell’ultimo passaggio abbiamo usato l’hermeticità delle matrici $\sigma^\mu = \sigma^{\mu\dagger}$.

La distinzione tra indici puntati e non puntati ci ha permesso di utilizzare i risultati della precedente discussione sugli spinori ed è stata essenziale per guidarci ad un Lagrangiano relativisticamente invariante. In molti casi però questa notazione può risultare pesante e di impaccio alle derivazioni. Nel resto di questa sezione eviteremo per quanto possibile di usare indici puntati usando due strumenti:

1. Per quanto possibile eviteremo di esplicitare gli indici, tacendoli nel caso di prodotti tra spinori o tra matrici e spinori “righe per colonne”. Abbiamo già cominciato a farlo nella (4.4).
2. Indici puntati sorgono quando prendiamo il complesso coniugato (o l’hermitiano coniugato) di spinori non puntati, ad esempio $\phi^{\dagger\dot{\alpha}}$. Possiamo evitarli anche in questo caso, ricordando che $\phi^{\dagger\dot{\alpha}} = (\phi^\alpha)^\dagger$, quindi invece di $\phi^{\dagger\dot{\alpha}}$ scriveremo $\phi^{\alpha\dagger}$, intendendo il complesso coniugato di ϕ^α .

In ogni momento si potrà ritornare alla espressione con indici puntati esplicitando i prodotti riga per colonna e rimettendo gli indici a posto: $\phi^{\alpha\dagger} \rightarrow \phi^{\dagger\dot{\alpha}}$.

Per ottenere le equazioni del moto consideriamo il principio d’azione,

$$(4.5) \quad \delta S = \int d^4x (i[\delta\phi^\dagger(x)]\sigma^\mu\partial_\mu\phi(x) - i[\partial_\mu\phi^\dagger(x)]\sigma^\mu\delta\phi(x)) = 0$$

nel secondo termine abbiamo eseguito una integrazione per parti. Le variazioni $\delta\phi(x)$, $\delta\phi^\dagger(x)$ sono funzioni arbitrarie di x (che si annullano all’infinito), e indipendenti tra loro, dato che $\delta\phi(x)^\dagger = \pm\delta\phi(x)$ a seconda che $\delta\phi(x)$ sia reale o immaginario. L’equazione del moto risulta semplicemente

$$(4.6) \quad i\sigma^\mu\partial_\mu\phi(x) = 0; \quad -i\phi^\dagger(x)\overleftarrow{\partial}_\mu\sigma^\mu = 0$$

che possiamo scrivere più esplicitamente come

$$(4.7) \quad i\dot{\phi}(x) = -i(\vec{\sigma}\vec{\nabla})\phi(x); \quad i\dot{\phi}^\dagger(x) = -i(\vec{\nabla}\phi^\dagger(x)) \cdot \vec{\sigma}$$

Dato che $\mathcal{L} = i\phi^\dagger\dot{\phi} + i\phi^\dagger\vec{\sigma}\vec{\nabla}\phi$, il momento coniugato a $\phi(x)$ è

$$(4.8) \quad \pi_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^\alpha} = i\phi^{\alpha\dagger}$$

e la densità di Hamiltoniano

$$(4.9) \quad \mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \phi^\dagger\vec{\sigma}(-i\vec{\nabla})\phi$$

Per quantizzare la teoria, useremo le regole di quantizzazione canonica, lasciando per un momento indecisa la scelta tra regole di commutazione (campo bosonico) o regole di anticommutazione (campo fermionico),

$$(4.10) \quad [\phi^\alpha(\vec{x}, t), \pi_\beta(\vec{y}, t)]_\pm = i\delta_\beta^\alpha \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

che si traducono in

$$(4.11) \quad [\phi^\alpha(\vec{x}, t), \phi^{\beta\dagger}(\vec{y}, t)]_\pm = \delta^{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

cui si deve aggiungere:

$$(4.12) \quad [\phi^\alpha(\vec{x}, t), \phi^\beta(\vec{y}, t)]_\pm = [\phi^{\alpha\dagger}(\vec{x}, t), \phi^{\beta\dagger}(\vec{y}, t)]_\pm = 0$$

Cominciamo con la ricerca di soluzioni ad onda piana della (4.6). Useremo la quantizzazione in un cubo di lato L , con volume $V = L^3$, e condizioni periodiche ai bordi. Cerchiamo quindi soluzioni del tipo $f(x) \sim \exp(i\vec{p}\vec{x})$ dove \vec{p} è uno dei punti del reticolo reciproco, $\vec{p} = \frac{2\pi}{L}\{l, m, n\}$. Come vedremo esistono soluzioni con energia sia positiva che negativa. Le soluzioni ad energia positiva possono essere scritte

$$(4.13) \quad f_{\vec{p}}^{+\alpha}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} z^\alpha(\vec{p}) e^{i(\vec{x}\vec{p} - Et)}$$

dove $z^\alpha(\vec{p})$ è uno spinore a due componenti. L'equazione del moto (4.7) diviene

$$(4.14) \quad (\vec{\sigma}\vec{p}) z(\vec{p}) = E z(\vec{p})$$

Dato che $(\vec{\sigma}\vec{p})^2 = (\vec{p})^2$ gli autovalori di $(\vec{\sigma}\vec{p})$ sono $\pm|\vec{p}|$, quindi dalla (4.14) segue che $E = E_{\vec{p}} = |\vec{p}|$ e che quindi la teoria descrive particelle di massa nulla. Inoltre, dividendo i due membri della (4.14) per $|\vec{p}|$ otteniamo

$$(4.15) \quad (\vec{\sigma}\hat{p}) z(\vec{p}) = z(\vec{p})$$

Dato che l'autovalore 1 di $(\vec{\sigma}\hat{p})$ è singolo, questa equazione ha una sola soluzione, definita a meno di un fattore di fase. Le particelle della nostra teoria hanno quindi elicità positiva.

Convien definire le soluzioni ad energia negativa come³⁵

$$(4.16) \quad f_{\vec{p}}^{-\alpha}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} w^\alpha(\vec{p}) e^{-i(\vec{x}\vec{p} - Et)}$$

Anche in questo caso l'equazione del moto (4.14) si riduce a

$$(4.17) \quad (\vec{\sigma}\vec{p}) w(\vec{p}) = E w(\vec{p})$$

Quindi $w(\vec{p})$ e $z(\vec{p})$ obbediscono *la stessa equazione* e sono quindi eguali a meno di un fattore di fase³⁶. Notiamo però che la particella di energia negativa descritta dalla (4.16) ha *elicità negativa* dato che questa particella ha impulso $-\vec{p}$.

³⁵In questa definizione è da notare che rispetto alla (4.13) abbiamo cambiato non soltanto il segno di E , ma anche quello di \vec{p} . La ragione di questa scelta si vede facilmente pensando al mare di Dirac: la funzione d'onda $f_{\vec{p}}(\vec{x}, t)$ descrive una particella di energia $-E$ ed impulso $-\vec{p}$; togliendo dal mare di Dirac una tale particella si produce una lacuna (antiparticella) di energia E ed impulso \vec{p} .

³⁶Questa coincidenza è una peculiarità degli spinori di particelle a massa nulla. Vedremo che la coincidenza non si ripete per particelle con massa diversa da zero.

La lacuna (antiparticella) descritta dalla $f_{\vec{p}}(\vec{x}, t)$ ha anch'essa *elicità negativa*. Infatti passando dalla particella alla lacuna (la sua mancanza) sia l'impulso che il momento angolare cambiano segno; il loro prodotto non cambia. In una seguente sezione vedremo un argomento più formale che non fa uso del “mare di Dirac” e che porta alla stessa conclusione.

Resta da definire la normalizzazione degli spinori $w(\vec{p})$ e $z(\vec{p})$. Possiamo porre semplicemente

$$(4.18) \quad (z^\dagger(\vec{p})z(\vec{p})) = (w^\dagger(\vec{p})w(\vec{p})) = 1$$

Dato che $z(\vec{p})$, $w(\vec{p})$ da una parte e $z(-\vec{p})$, $w(-\vec{p})$ dall'altra sono autostati dello stesso operatore ($\vec{\sigma}\vec{p}$) con autovalori opposti (vedi 4.14, 4.17), abbiamo le relazioni di ortogonalità

$$(4.19) \quad (z^\dagger(\vec{p})z(-\vec{p})) = (z^\dagger(\vec{p})w(-\vec{p})) = (w^\dagger(\vec{p})z(-\vec{p})) = (w^\dagger(\vec{p})w(-\vec{p})) = 0$$

L'insieme delle soluzioni ad energia positiva e negativa forma un sistema completo di soluzioni della equazione d'onda, e possiamo quindi esprimere campo $\phi(\vec{x}, t)$ come una loro combinazione lineare,

$$(4.20) \quad \phi^\alpha(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \left[c(\vec{p})z^\alpha(\vec{p})e^{i(\vec{x}\vec{p}-Et)} + d^\dagger(\vec{p})w^\alpha(\vec{p})e^{-i(\vec{x}\vec{p}-Et)} \right]$$

I coefficienti $c(\vec{q})$ e $d^\dagger(\vec{q})$ possono essere espressi come funzione del campo al tempo $t = 0$,

$$(4.21) \quad c(\vec{q}) = \int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{-i(\vec{q}\vec{x})} (z^\dagger(\vec{q})\phi(\vec{x}, 0))$$

$$(4.22) \quad d^\dagger(\vec{q}) = \int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{i(\vec{q}\vec{x})} (w^\dagger(\vec{q})\phi(\vec{x}, 0))$$

dove l'integrazione è estesa sul volume di quantizzazione, V . Lasciamo al lettore la dimostrazione, molto elementare, che fa uso delle (4.19).

Notiamo le espressioni del campo ϕ^\dagger , che si ottiene dalla (4.20),

$$(4.23) \quad \phi^{\alpha\dagger}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \left[c^\dagger(\vec{p})z^{\alpha\dagger}(\vec{p})e^{-i(\vec{x}\vec{p}-Et)} + d(\vec{p})w^{\alpha\dagger}(\vec{p})e^{i(\vec{x}\vec{p}-Et)} \right]$$

e dei coefficienti $c^\dagger(\vec{q})$ e $d(\vec{q})$,

$$(4.24) \quad c^\dagger(\vec{q}) = \int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{i(\vec{q}\vec{x})} (\phi^\dagger(\vec{x}, 0)z(\vec{q}))$$

$$(4.25) \quad d(\vec{q}) = \int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{-i(\vec{q}\vec{x})} (\phi^\dagger(\vec{x}, 0)w(\vec{q}))$$

A seconda della scelta di regole di commutazione o anticommutazione per i campi (eq. 4.11) si otterranno regole di commutazione o di anticommutazione per gli operatori c , d

$$(4.26) \quad \begin{aligned} [c(\vec{q}), c^\dagger(\vec{p})]_{\pm} &= \delta_{\vec{p}\vec{q}} \\ [d^\dagger(\vec{q}), d(\vec{p})]_{\pm} &= \delta_{\vec{p}\vec{q}} \\ [c, c]_{\pm} &= [d, d]_{\pm} = [c, d]_{\pm} = [c, d^\dagger]_{\pm} = \dots = 0 \end{aligned}$$

Le derivazioni sono ancora una volta elementari. Mostriamo i passi fondamentali della prima:

$$(4.27) \quad \begin{aligned} [c(\vec{q}), c^\dagger(\vec{p})]_{\pm} &= \int \frac{d^3x d^3y}{V} e^{i(\vec{q}\vec{x} - \vec{p}\vec{y})} z^{\alpha\dagger} [\phi^\alpha(\vec{x}, 0), \phi^{\beta\dagger}(\vec{y}, 0)]_{\pm} z^\beta(\vec{p}) \\ &= \int \frac{d^3x}{V} e^{i\vec{x}(\vec{q} - \vec{p})} (z^\dagger(\vec{q})z(\vec{p})) = \delta_{\vec{p}\vec{q}} \end{aligned}$$

Lasciamo le altre come esercizio, notando solamente che nel calcolo di $[d(\vec{q}), c(\vec{p})]_{\pm}$ si arriva al prodotto $(w^\dagger(-\vec{p})z(\vec{p}))$ che si annulla per le relazioni di ortogonalità (4.19).

Sostituendo le (4.20, 4.23) nella espressione (4.9) otteniamo l'Hamiltoniano

$$(4.28) \quad \mathbf{H} = \int d^3x \mathcal{H} = \sum_{\vec{p}} E_{\vec{p}} [c^\dagger(\vec{p})c(\vec{p}) - d(\vec{p})d^\dagger(\vec{p})]$$

dove $E_{\vec{p}} = |\vec{p}|$. La derivazione è semplice e la lasciamo come esercizio. Il solo accorgimento consiste nel rispettare l'ordinamento degli operatori nella (4.9): gli operatori c^\dagger, d che appaiono in ϕ^\dagger precedono c, d^\dagger che appaiono in ϕ ; la prudenza è d'obbligo, dato che non conosciamo ancora le regole di commutazione o di anticommutazione di tali operatori. Solo le regole di anticommutazione portano ad un risultato ragionevole. L'Hamiltoniano (4.28) corrisponde a un insieme di oscillatori armonici, ma gli oscillatori "d" danno un contributo negativo all'energia. Se usiamo regole di commutazione (4.26) possiamo scrivere $-d(\vec{p})d^\dagger(\vec{p}) = -d^\dagger(\vec{p})d(\vec{p}) + 1$. Dato che $d^\dagger(\vec{p})d(\vec{p})$, l'operatore "numero di eccitazione", può assumere valori interi arbitrariamente grandi, nella quantizzazione "bosonica" non esiste un limite inferiore all'energia.

Uno degli assiomi fondamentali della teoria dei campi richiede che esista uno stato di minima energia, lo stato privo di particelle, il "vuoto", $|0\rangle$. Per quanto abbiamo detto questo assioma esclude la possibilità di una teoria bosonica basata su spinori a due componenti. Vedremo che la situazione si ripete nella teoria di Dirac. Particelle di spin 1/2 non possono essere bosoni.

Con regole di anticommutazione troviamo $d(\vec{p})d^\dagger(\vec{p}) = -d^\dagger(\vec{p})d(\vec{p}) + 1$, e l'Hamiltoniano diviene:

$$(4.29) \quad \mathbf{H} = \sum_{\vec{p}} E_{\vec{p}} [c^\dagger(\vec{p})c(\vec{p}) + d^\dagger(\vec{p})d(\vec{p}) - 1]$$

In questo caso esiste uno stato di energia minima, quello in cui tutti i numeri di occupazione sono nulli. La scelta obbligata è quindi quella di regole di anticommutazione,

$$(4.30) \quad \begin{aligned} [c(\vec{q}), c^\dagger(\vec{p})]_+ &= \delta_{\vec{p}\vec{q}} \\ [d^\dagger(\vec{q}), d(\vec{p})]_+ &= \delta_{\vec{p}\vec{q}} \\ [c, c]_+ &= [d, d]_+ = [c, d]_+ = [c, d^\dagger]_+ = \dots = 0 \end{aligned}$$

L'energia del vuoto nell'Hamiltoniano (4.29) è negativa e infinita. Possiamo però ridefinire la scala delle energie, ponendo a zero l'energia del vuoto, cosa che equivale ad omettere il "-1". Si giunge così alla espressione finale,

$$(4.31) \quad \mathbf{H} = \sum_{\vec{p}} E_{\vec{p}} [c^\dagger(\vec{p})c(\vec{p}) + d^\dagger(\vec{p})d(\vec{p})]$$

La scelta di fissare a zero l'energia del vuoto è in realtà l'unica compatibile con l'invarianza relativistica della teoria. Infatti il vuoto deve essere unico e invariante rispetto a trasformazioni di Lorentz. Questo è essenzialmente il significato dell'esperimento di Michelson-Morley. Formalmente per qualsiasi trasformazione di Lorentz $T(\Lambda, 0)$ deve essere $T|0\rangle = |0\rangle$. Quindi il valore d'aspettazione nel vuoto dell'impulso-energia $\mathbf{P}^\mu = \{\mathbf{H}, \mathbf{P}\}$, $P^\mu = \langle 0|\mathbf{P}^\mu|0\rangle$, deve essere invariante sotto trasformazioni di Lorentz,

$$P^\mu = \langle 0|\mathbf{P}^\mu|0\rangle \rightarrow \langle T0|\mathbf{P}^\mu|T0\rangle = \langle 0|\mathbf{P}^\mu|0\rangle = P^\mu$$

D'altra parte la (3.26) dice che $P^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu P^\nu$. L'unico valore di P^μ compatibile con i due risultati per qualunque Λ è $P^\mu = 0$. Quindi il vuoto deve avere impulso ed energia nulli. Allo stesso risultato si giunge imponendo la condizione che il vuoto sia invariante sotto traslazioni nello spazio e nel tempo, da cui segue che $\mathbf{P}^\mu |0\rangle = 0$.

Ci possiamo allora chiedere: come mai partendo da una azione (4.4) relativisticamente invariante siamo arrivati ad un risultato (4.29), che non è accettabile? La procedura che abbiamo seguito è quella di una quantizzazione:

Teoria classica \Rightarrow Teoria Quantistica

Il passaggio da una teoria quantistica al suo limite classico è univocamente definita, ma la quantizzazione in generale non lo è. In generale il processo di quantizzazione non conduce ad una singola teoria quantistica, ma a una rosa di possibilità tra cui scegliere quella giusta. Espressioni che sono identiche nel limite classico non lo sono nella teoria quantistica. In effetti il secondo membro delle regole di commutazione o anticommutazione, eq. (4.11) è proporzionale³⁷ ad \hbar e si annulla nel limite classico, in cui i campi commutano od anticommutano.

4.2 Interpretazione della teoria di Weyl

In questa sezione vogliamo verificare che gli operatori $c^\dagger(\vec{p}), d^\dagger(\vec{p})$ creano particelle di impulso \vec{p} , energia $E_{\vec{p}} = |\vec{p}|$ ed elicità rispettivamente positiva e negativa, mentre $c(\vec{p}), d(\vec{p})$ sono i rispettivi operatori di distruzione. In altre parole il campo $\phi(x)$ è un campo *destrorso*. Nella precedente sezione ci siamo più volte "appoggiati" al mare di Dirac e questo può lasciare molti dubbi. In questa sezione verificheremo vari risultati che sono suggeriti da questo modello, ma senza mai farne uso. In altre parole riportiamo la teoria sulla terra ferma!

Dato che disponiamo della espressione (4.31) di \mathbf{H} e delle regole di anticommutazione (4.30) degli operatori $c, d, c^\dagger, d^\dagger$, possiamo calcolare facilmente le regole di commutazione di \mathbf{H} con i vari operatori,

$$(4.32) \quad \begin{aligned} [\mathbf{H}, c^\dagger(\vec{p})] &= E_{\vec{p}}c^\dagger(\vec{p}), & [\mathbf{H}, d^\dagger(\vec{p})] &= E_{\vec{p}}d^\dagger(\vec{p}) \\ [\mathbf{H}, c(\vec{p})] &= -E_{\vec{p}}c(\vec{p}), & [\mathbf{H}, d(\vec{p})] &= -E_{\vec{p}}d(\vec{p}) \end{aligned}$$

Se $|E\rangle$ è autostato di \mathbf{H} con autovalore E , si verifica facilmente che gli stati $c^\dagger(\vec{p})|E\rangle$ e $d^\dagger(\vec{p})|E\rangle$, se non sono nulli, hanno energia $E + E_{\vec{p}}$, mentre $c(\vec{p})|E\rangle$ e $d(\vec{p})|E\rangle$, se non sono nulli, hanno energia $E - E_{\vec{p}}$. Ad esempio

$$\mathbf{H}c^\dagger(\vec{p})|A\rangle = c^\dagger(\vec{p})\mathbf{H}|A\rangle + E_{\vec{p}}c^\dagger(\vec{p})|A\rangle = (E + E_{\vec{p}})c^\dagger(\vec{p})|A\rangle$$

³⁷Questo fatto è oscurato dalla nostra scelta di usare unità con $\hbar = 1$.

Lo stato fondamentale della teoria, il vuoto $|0\rangle$ deve quindi obbedire a

$$(4.33) \quad c(\vec{p})|0\rangle = d(\vec{p})|0\rangle = 0 \quad \text{per qualsiasi } \vec{p}$$

mentre $c^\dagger(\vec{p})|0\rangle$ e $d^\dagger(\vec{p})|0\rangle$ possono essere considerati come stati ad una particella, una interpretazione che si rafforzerà quando verificheremo che tali stati hanno effettivamente impulso \vec{p} .

Notiamo anche $(c^\dagger(\vec{p}))^2 = (d^\dagger(\vec{p}))^2 = 0$, quindi non possiamo creare due particelle nello stesso stato — il principio di esclusione di Pauli. Gli operatori $n(\vec{p}) = c^\dagger(\vec{p})c(\vec{p})$ e $\bar{n}(\vec{p}) = d^\dagger(\vec{p})d(\vec{p})$ possono essere interpretati come “numero di particelle (o di antiparticelle) con impulso \vec{p} ”, ed hanno autovalori 0, 1; ad esempio

$$(c^\dagger(\vec{p})c(\vec{p}))c^\dagger(\vec{p})|0\rangle = c^\dagger(\vec{p})|0\rangle, \quad (c^\dagger(\vec{p})c(\vec{p}))|0\rangle = 0$$

Prima di procedere dobbiamo sciogliere un possibile dubbio: abbiamo ottenuto le regole di commutazione (4.32) partendo dalle regole di anticommutazione (4.30). Avremmo ottenuto lo stesso risultato partendo dalle regole di commutazione (3.34), che sono state ricavate in maniera molto generale per una qualsiasi teoria di campo? In altre parole, la quantizzazione che abbiamo eseguito nella sezione precedente è coerente con l'invarianza della teoria, almeno per quanto riguarda le traslazioni? L'Hamiltoniano della (4.31) può veramente essere identificato con il generatore delle traslazioni temporali di cui abbiamo parlato nella sezione 3.3?

La verifica è semplice, e porta al risultato atteso. Cominciamo dalla prima delle (4.32) che riguarda l'operatore di creazione $c^\dagger(\vec{p})$. La eq. 3.34 può essere espressa, usando le equazioni del moto (4.7), come

$$(4.34) \quad [\mathbf{H}, \phi^\dagger(x)] = -i\dot{\phi}^\dagger(x) = i(\vec{\nabla}\phi^\dagger(x)) \cdot \vec{\sigma}$$

quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}, c^\dagger(\vec{p})] &= \left[\mathbf{H}, \int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{i(\vec{p}\vec{x})} (\phi^\dagger(\vec{x}, 0)z(\vec{p})) \right] \\ &= \int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{i(\vec{p}\vec{x})} ([\mathbf{H}, \phi^\dagger(\vec{x}, 0)] \cdot \vec{\sigma}z(\vec{p})) \\ \text{dalla (4.34)} &= \int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{i(\vec{p}\vec{x})} (i(\vec{\nabla}\phi^\dagger(\vec{x}, 0)) \cdot \vec{\sigma}z(\vec{p})) \\ \text{integrando per parti} &= \int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{i(\vec{p}\vec{x})} (\phi^\dagger(\vec{x}, 0)\vec{p} \cdot \vec{\sigma}z(\vec{p})) \\ \text{dalla (4.14)} &= \int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{i(\vec{p}\vec{x})} (\phi^\dagger(\vec{x}, 0)E_{\vec{p}}z(\vec{p})) \\ \text{il risultato giusto!} &= E_{\vec{p}}c^\dagger(\vec{p}) \end{aligned}$$

Il lettore potrà con lo stesso metodo verificare le rimanenti regole di commutazione (4.32).

Possiamo anche usare le regole di commutazione (3.34) per ottenere le regole di commutazione dell'impulso $\vec{\mathbf{P}}$ con gli operatori di creazione e distruzione,

$$(4.35) \quad \begin{aligned} [\vec{\mathbf{P}}, c^\dagger(\vec{p})] &= \vec{p}c^\dagger(\vec{p}), & [\vec{\mathbf{P}}, d^\dagger(\vec{p})] &= \vec{p}d^\dagger(\vec{p}) \\ [\vec{\mathbf{P}}, c(\vec{p})] &= -\vec{p}c(\vec{p}), & [\vec{\mathbf{P}}, d(\vec{p})] &= -\vec{p}d(\vec{p}) \end{aligned}$$

Questo ci permette di verificare che gli operatori $c^\dagger(\vec{p}), d^\dagger(\vec{p})$ creano particelle di impulso \vec{p} ,

$$(4.36) \quad \vec{\mathbf{P}} c^\dagger(\vec{p}) |0\rangle = \vec{p} c^\dagger(\vec{p}) |0\rangle, \quad \vec{\mathbf{P}} d^\dagger(\vec{p}) |0\rangle = \vec{p} d^\dagger(\vec{p}) |0\rangle$$

Verifichiamo la terza delle (4.35), lasciando le altre come esercizio al lettore:

$$\begin{aligned} [\vec{\mathbf{P}}, c(\vec{p})] &= \left[\vec{\mathbf{P}}, \int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{-i(\vec{p}\vec{x})} (z^\dagger(\vec{p})\phi(\vec{x}, 0)) \right] \\ &= \int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{-i(\vec{p}\vec{x})} \left(z^\dagger(\vec{p}) [\vec{\mathbf{P}}, \phi(\vec{x}, 0)] \right) \\ \text{dalla (3.34)} \quad &= \int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{-i(\vec{p}\vec{x})} \left(z^\dagger(\vec{p}) i\vec{\nabla}\phi(\vec{x}, 0) \right) \\ \text{integrando per parti} \quad &= -\vec{p} \int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{-i(\vec{p}\vec{x})} (z^\dagger(\vec{p})\phi(\vec{x}, 0)) \\ &= -\vec{p} c(\vec{p}) \end{aligned}$$

Non disponiamo ancora di una espressione esplicita dell'operatore $\vec{\mathbf{P}}$. Potremmo costruirlo facilmente partendo dal teorema di Noether (vedi ad esempio [1]), ma è più facile verificare direttamente che l'espressione giusta è

$$(4.37) \quad \vec{\mathbf{P}} = \int d^3x \left(\phi^\dagger(\vec{x}, 0) - i\vec{\nabla}\phi(\vec{x}, 0) \right) = \sum_{\vec{p}} \vec{p} [c^\dagger(\vec{p}) c(\vec{p}) + d^\dagger(\vec{p}) d(\vec{p})]$$

Infatti questa espressione soddisfa le regole di commutazione (3.34 ,4.35) e la condizione $\vec{\mathbf{P}} |0\rangle = 0$.

Possiamo adesso rivolgerci alla elicità delle particelle e antiparticelle della teoria. La elicità è definita dall'operatore $(\vec{\mathbf{J}}\vec{\mathbf{P}})$. Notiamo che dalle regole di commutazione (3.25) segue che

$$\left[(\vec{\mathbf{J}}\vec{\mathbf{P}}), \mathbf{P}^i \right] = 0$$

Quindi possiamo scegliere gli stati di singola particella come autostati simultanei dell'impulso e di questo operatore, $|\vec{p}, h\rangle$. Per particelle di spin 1/2 definiamo h tramite

$$(\vec{\mathbf{J}}\vec{\mathbf{P}}) |\vec{p}, h\rangle = h \frac{|\vec{p}|}{2} |\vec{p}, h\rangle$$

di modo che, come vedremo, i possibili valori di h sono ± 1 . Dato che $|\vec{p}, h\rangle$ è autovalore di $\vec{\mathbf{P}}$, possiamo semplificare questa definizione,

$$(\vec{\mathbf{J}}\hat{p}) |\vec{p}, h\rangle = h \frac{1}{2} |\vec{p}, h\rangle$$

Nel caso (o antiparticelle) della teoria di Weyl, esiste un solo stato di singola particella o singola antiparticella di impulso \vec{p} , $c^\dagger(\vec{p}) |0\rangle$ oppure $d^\dagger(\vec{p}) |0\rangle$. Questi stati sono quindi necessariamente autostati di $(\vec{\mathbf{J}}\vec{\mathbf{P}})$ e di elicità definita, ma con quale valore di h ? La risposta è nelle seguenti regole di commutazione

$$(4.38) \quad \left[(\vec{\mathbf{J}}\hat{p}), c^\dagger(\vec{p}) \right] = \frac{1}{2} c^\dagger(\vec{p}), \quad \left[(\vec{\mathbf{J}}\hat{p}), d^\dagger(\vec{p}) \right] = -\frac{1}{2} d^\dagger(\vec{p})$$

da cui segue che, come più volte preannunciato, le particelle della nostra teoria hanno elicità positiva, le antiparticelle elicità negativa. Dato che il vuoto deve essere invariante per rotazioni, $J_i |0\rangle = 0$; $\{i = 1,2,3\}$, si ottiene infatti per lo stato di particella

$$(\vec{\mathbf{J}}\hat{p})c^\dagger(\vec{p})|0\rangle = \left[(\vec{\mathbf{J}}\hat{p})c^\dagger(\vec{p}) - c^\dagger(\vec{p})(\vec{\mathbf{J}}\hat{p}) \right] |0\rangle = \frac{1}{2}c^\dagger(\vec{p})|0\rangle$$

ed analogamente (con il segno opposto) per lo stato di antiparticella.

Per ottenere le regole di commutazione (4.38) partiamo dalle regole di commutazione del momento angolare con una grandezza di campo, date nella (3.40) che nel caso del campo di Weyl $\phi(x)$ possiamo scrivere come

$$[\mathbf{J}_i, \phi(x)] = - \left(s_i + (\vec{x} \wedge -i\vec{\nabla})_i \right) \phi(x)$$

Ricordiamo la definizione delle s_i : ad una rotazione infinitesima (vedi 2.4, 2.4) $\Lambda = \mathbf{1} + i\vec{r}\vec{\mathbf{J}}$ corrisponde una trasformazione del campo in $x = 0$ (vedi 3.30)

$$\phi(0) \rightarrow S(\Lambda)\phi(0)$$

dove $S(\Lambda)$ è una rappresentazione del gruppo di Lorentz proprio. Alla rotazione infinitesima $\Lambda = \mathbf{1} + i\vec{r}\vec{\mathbf{J}}$ corrisponderà

$$S(\Lambda) = \mathbf{1} + i\vec{r}\vec{\sigma}$$

e questa corrispondenza definisce le matrici s_i . Dato che il campo ϕ è uno spinore ad indici non puntati, $S(\Lambda)$ coincide con la matrice $U = 1 + i\frac{\vec{x}\vec{\sigma}}{2}$ (vedi eq. 2.10), quindi abbiamo semplicemente, e non sorprendentemente, $s_i = \sigma_i/2$. In conclusione otteniamo le regole di commutazione

$$(4.39) \quad [\mathbf{J}_i, \phi(x)] = - \left(\frac{\sigma_i}{2} + (\vec{x} \wedge -i\vec{\nabla})_i \right) \phi(x)$$

e dall'hermitiano coniugato della precedente,

$$(4.40) \quad [\mathbf{J}_i, \phi^\dagger(x)] = \phi^\dagger(x) \frac{\sigma_i}{2} + (\vec{x} \wedge i\vec{\nabla})_i \phi^\dagger(x)$$

Possiamo ora derivare i commutatori della (4.38). Esaminiamo il secondo:

$$\begin{aligned} [(\vec{\mathbf{J}}\hat{p}), d^\dagger(\vec{p})] &= \left[(\vec{\mathbf{J}}\hat{p}), \int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{-i(\vec{p}\vec{x})} (w^\dagger(\vec{p})\phi(\vec{x}, 0)) \right] \\ &= \int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{-i(\vec{p}\vec{x})} \left(w^\dagger(\vec{p}) [(\vec{\mathbf{J}}\hat{p}), \phi(\vec{x}, 0)] \right) \\ \text{dalla (4.39)} &= - \int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{-i(\vec{p}\vec{x})} \left(w^\dagger(\vec{p}) \left(\frac{\vec{\sigma}\hat{p}}{2} + \vec{x} \wedge (-i\vec{\nabla}) \cdot \hat{p} \right) \phi(x) \right) \end{aligned}$$

Il secondo termine, corrispondente al momento orbitale, non contribuisce, come si verifica con una integrazione per parti:

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{-i(\vec{p}\vec{x})} \left(w^\dagger(\vec{p}) (\vec{x} \wedge -i\vec{\nabla}) \cdot \hat{p} \right) \phi(x) \\ &= \int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{-i(\vec{p}\vec{x})} \left(w^\dagger(\vec{p}) (\vec{x} \wedge \vec{p} \cdot \hat{p}) \right) \phi(x) = 0 \end{aligned}$$

quindi otteniamo

$$\begin{aligned} \left[(\vec{\mathbf{J}}\hat{p}), d^\dagger(\vec{p}) \right] &= - \int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{-i(\vec{p}\vec{x})} \left(w^\dagger(\vec{p}) \frac{\vec{\sigma}\hat{p}}{2} \phi(x) \right) \\ \text{e dalla (4.17)} &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3x}{\sqrt{V}} e^{-i(\vec{p}\vec{x})} (w^\dagger(\vec{p}) \phi(x)) = -\frac{1}{2} d^\dagger(\vec{p}) \end{aligned}$$

Il primo dei commutatori nella (4.38) si deriva in modo analogo. La differenza di segno deriva dalla differenza di segno del termine σ nelle ((4.40), (4.40)).

A conclusione di queste due sezioni dedicate a una trattazione di una teoria di Weyl basata su spinori non puntati, notiamo che si può costruire una teoria del tutto simile basata su un campo spinoriale con indici puntati, $\eta^\alpha(x)$. In questo caso otterremmo particelle di elicità negativa e antiparticelle di elicità positiva. In altre parole $\eta^\alpha(x)$ è un campo sinistrorso. In realtà non è necessario molto lavoro per costruire questa teoria alternativa: le due teorie possono essere viste come due diverse descrizioni della stessa fisica, semplicemente con lo scambio di particelle e antiparticelle. La relazione tra le due descrizioni è molto semplice, e deriva dalla (2.26). Basta infatti porre:

$$(4.41) \quad \eta^{\dot{\alpha}}(x) = \phi^{\alpha\dagger}(x), \quad \text{e} \quad \eta^{\dot{\alpha}\dagger}(x) = \phi^\alpha(x)$$

La possibilità di una descrizione alternativa in cui vengono scambiate le particelle e le antiparticelle mostra che l'interpretazione delle antiparticelle come "lacune" in un mare di particelle di energia negativa non va presa troppo sul serio. E' stata utile a Dirac per comprendere il significato delle soluzioni a energia negativa della sua equazione d'onda, ma non ha posto nella teoria dei campi. Naturalmente non ci dobbiamo vergognare di usarla ogni tanto come guida e non ci siamo vergognati di utilizzarla per una prima discussione della elicità nella teoria di Weyl. Alla fine però occorre sempre una verifica all'interno della teoria di campo.

4.3 La teoria di Majorana

Nelle due sezioni precedenti abbiamo discusso di una teoria basata su un campo spinoriale $\phi^\alpha(x)$. La teoria descrive particelle di spin 1/2 e di massa nulla. Ci possiamo chiedere: è possibile modificare la teoria in modo che descriva particelle di massa differente da zero? La domanda non è oziosa, dato che negli ultimi anni abbiamo imparato che anche i neutrini hanno una massa, sia pure molto piccola. La risposta è positiva: basta modificare la densità di lagrangiano con l'aggiunta di un nuovo termine,

$$(4.42) \quad \mathcal{L}_M = i\phi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \phi + \frac{m}{2} \left[\phi^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} \phi^\beta - \phi^{\dagger\dot{\beta}} \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \phi^{\dagger\dot{\alpha}} \right]$$

dove ϵ è il simbolo di Ricci, (2.12). La teoria definita da \mathcal{L}_M è detta "di Majorana" dato che questa teoria fu formulata (come vedremo in forma leggermente diversa) da Ettore Majorana [5] come possibile teoria del neutrino.

Ci sono molte cose da notare su questo nuovo termine:

1. Il nuovo termine è un invariante relativistico, come risulta dal modo in cui abbiamo saturato indici alti e bassi dello stesso tipo.

2. Il nuovo termine è reale (hermitiano): dato che $\epsilon^\dagger = -\epsilon$,

$$(\phi \epsilon \phi)^\dagger = (\phi^\dagger \epsilon^\dagger \phi^\dagger) = -(\phi^\dagger \epsilon \phi^\dagger)$$

3. Il nuovo termine è differente da zero date le regole di anticommutazione, $\phi^\alpha \phi^\beta = -\phi^\beta \phi^\alpha$. Sarebbe identicamente eguale a zero, dato che ϵ è antisimmetrico, se avessimo adottato regole di commutazione.

4. Non è possibile un termine di massa del tipo $m\phi^\dagger\phi$, che non sarebbe relativisticamente invariante.

Per applicare il principio d'azione, considereremo una variazione $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \delta\phi(x)$ tale che $\delta\phi$ sia esso stesso un campo fermionico, che anticommuta con ϕ , di modo che

$$\delta(\phi \epsilon \phi) = (\delta\phi \epsilon \phi) + (\phi \epsilon \delta\phi) = 2(\phi \epsilon \delta\phi)$$

La variazione dell'azione risulta quindi

$$(4.43) \quad \delta S = \int d^4x \left(i[\delta\phi^\dagger(x)]\sigma^\mu \partial_\mu \phi(x) - i[\partial_\mu \phi^\dagger(x)]\sigma^\mu \delta\phi(x) + m\phi(x)\epsilon \delta\phi(x) - m[\delta\phi^\dagger(x)]\epsilon \phi^\dagger(x) \right)$$

e le equazioni del moto — i coefficienti di $\delta\phi^\dagger, \delta\phi^\dagger$

$$\begin{aligned} i\sigma^\mu \partial_\mu \phi(x) &= m\epsilon \phi^\dagger(x) \\ i\partial_\mu \phi^\dagger(x)\sigma^\mu &= m\phi(x)\epsilon \end{aligned}$$

Conviene riscrivere esplicitamente:

$$\begin{aligned} i\dot{\phi}(x) &= -i\vec{\sigma}\vec{\nabla}\phi(x) + m\epsilon \phi^\dagger(x) \\ i\dot{\phi}^\dagger(x) &= -i\vec{\sigma}^T\vec{\nabla}\phi^\dagger(x) + m\epsilon^T \phi(x) \end{aligned}$$

Ricordando che (vedi eq. 2.24) $\vec{\sigma}^T = \epsilon\vec{\sigma}\epsilon$, e che $\epsilon^2 = -\mathbf{1}$, $\epsilon^T = -\epsilon$, possiamo riscrivere la seconda come

$$i\epsilon\dot{\phi}^\dagger(x) = i\vec{\sigma}\vec{\nabla}\epsilon\phi^\dagger(x) + m\phi(x)$$

Se definiamo ora un campo $\eta(x)$, che si trasforma come uno spinore ad indici puntati bassi:

$$(4.44) \quad \eta_{\dot{\alpha}}(x) = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\phi^{\dagger\dot{\beta}}(x)$$

$$\text{o brevemente} \quad \eta(x) = \epsilon\phi^\dagger(x)$$

le equazioni del moto diventano

$$(4.45) \quad \begin{aligned} i\dot{\phi}(x) &= -i\vec{\sigma}\vec{\nabla}\phi(x) + m\eta(x) \\ i\dot{\eta}(x) &= i\vec{\sigma}\vec{\nabla}\eta(x) + m\phi(x) \end{aligned}$$

La prima cosa da notare è che sia ϕ che η obbediscono la equazione di Klein-Gordon

$$(4.46) \quad (\square + m^2)\phi(x) = (\square + m^2)\eta(x) = 0$$

Quindi la teoria descriverà particelle di massa m^2 . Ad esempio, usando due volte le equazioni del moto,

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= -i \frac{\partial}{\partial t} (i\dot{\phi}) \\ &= - \left(-i\vec{\sigma}\vec{\nabla} (i\dot{\phi}) + m (i\dot{\eta}) \right) \\ &= - \left[-i\vec{\sigma}\vec{\nabla} \left(-i\vec{\sigma}\vec{\nabla}\phi + m\eta \right) + m \left(i\vec{\sigma}\vec{\nabla}\eta + m\phi \right) \right] \\ &= \left(\vec{\nabla}^2 - m^2 \right) \phi \end{aligned}$$

Una teoria di questo tipo è detta di Majorana. Ettore Majorana formulò questa teoria come caso particolare della teoria di Dirac. Qui vogliamo percorrere il cammino contrario, costruire cioè la teoria di Dirac come generalizzazione di quella di Majorana. Torneremo alla teoria di Majorana dopo avere costruito una teoria di Dirac. Per questa ragione non procediamo oltre nella quantizzazione della teoria di Majorana; notiamo solamente che per $m = 0$ la teoria di Majorana si riduce alla teoria di Weyl.

4.4 Majorana alla Dirac — i quadrispinori

In questa sezione riesprimiamo la teoria di Majorana nel linguaggio dei quadrispinori di Dirac. Nella teoria di Majorana sono presenti due campi, ϕ e η , che obbediscono alle equazioni del moto (4.45) e sono connessi dalla (4.44). Dato che i due spinori sono mescolati dalle equazioni del moto, conviene considerarli come elementi di uno oggetto a quattro componenti, $\psi(x) = \{\phi(x), \eta(x)\}$, che tratteremo come un oggetto a quattro componenti detto *quadrispinore*,

$$(4.47) \quad \psi = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \eta \end{pmatrix}$$

dove abbiamo indicato anche una forma condensata, in cui ψ viene visto come la composizione di due spinori a due componenti. Gli spinori $\phi(x)$, $\eta(x)$ sono detti la parte destrorsa e sinistrorsa di ψ . Le due parti non sono dinamicamente indipendenti, dato che obbediscono una equazione accoppiata, (4.45), tranne nel caso con massa nulla in cui si ricade nella teoria di Weyl.

Le equazioni del moto (4.45) possono essere sintetizzate nella “equazione di Dirac”,

$$(4.48) \quad i\dot{\psi}(x) = (\vec{\alpha}\vec{P} + \beta m)\psi(x)$$

dove $\vec{P} = -i\vec{\nabla}$ e $\vec{\alpha}, \beta$ sono matrici 4×4 la cui espressione a blocchi 2×2 è data esplicitamente da

$$(4.49) \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Le matrici $\vec{\alpha}, \beta$ obbediscono le seguenti regole di anticommutazione, come segue da un calcolo esplicito:

$$(4.50) \quad \{\alpha_i, \alpha_k\} = 2\delta_{ik}\mathbf{1}; \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0; \quad \beta^2 = \mathbf{1}$$

In altre parole, le quattro matrici α_i, β anticommutano tra loro, ed il quadrato di ciascuna di esse è $\mathbf{1}$. Infine le quattro matrici sono hermitiane:

$$(4.51) \quad \alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad (i = 1, 2, 3); \quad \beta^\dagger = \beta$$

L'equazione (4.48) può essere posta in forma più simmetrica tra le derivate temporali e spaziali se moltiplichiamo i due membri per β , e definiamo un quartetto di matrici γ^μ , ($\mu = 0, 1, 2, 3$):

$$(4.52) \quad \gamma^0 = \beta; \quad \gamma^i = \beta\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

L'equazione di Dirac (4.48) diviene allora

$$(4.53) \quad (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

Notiamo a questo punto le regole di anticommutazione delle matrici γ^μ

$$(4.54) \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}$$

quindi le quattro γ anticommutano tra loro, e $(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}$, $(\gamma^i)^2 = -\mathbf{1}$. La matrice $\gamma^0 = \beta$ è hermitiana, le altre tre sono anthermitiane: $(\beta\alpha_i)^\dagger = \alpha_i^\dagger\beta^\dagger = -\beta\alpha_i$, proprietà che possiamo riassumere in

$$(4.55) \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$

A questo punto ci chiediamo: l'equazione di Dirac (4.53) è relativisticamente invariante? La risposta è: certamente sì! La (4.53) non è altro che la (4.45) riscritta in modo differente, e la invarianza della seconda scende direttamente dalla teoria degli spinori. Nella vita di tutti i giorni si usa quasi sempre la formulazione in termini di quadrispinori, e quasi mai quella in termini di bispinori. Può essere quindi un utile esercizio rivedere brevemente le proprietà di trasformazione della teoria in termini di quadrispinori.

Sotto trasformazioni di Lorentz Λ ciascuno dei due bispinori che formano un quadrispinore si trasforma separatamente (vedi 3.36, 2.27, 2.30)

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U(\Lambda)\phi(\Lambda^{-1}x), \quad \eta(x) \rightarrow \eta'(x) = V(\Lambda)\eta(\Lambda^{-1}x),$$

Quindi per il quadrispinore abbiamo semplicemente

$$(4.56) \quad \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x)$$

Dove $S(\Lambda)$ ha la struttura a blocchi

$$(4.57) \quad S(\Lambda) = \begin{pmatrix} U(\Lambda) & 0 \\ 0 & V(\Lambda) \end{pmatrix}$$

Sempre dalle (2.27, 2.30) ricaviamo $S(\Lambda)$ nel caso di Λ infinitesima, eq. (2.4), $\Lambda = \mathbf{1} + i(\vec{r}\vec{\mathbf{J}} - \vec{b}\vec{\mathbf{K}})$:

$$(4.58) \quad S(\Lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} + i\frac{\vec{r}\vec{\sigma}}{2} - \frac{\vec{b}\vec{\sigma}}{2} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} + i\frac{\vec{r}\vec{\sigma}}{2} + \frac{\vec{b}\vec{\sigma}}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{1} + i\frac{\vec{r}\vec{\sigma}}{2} - \frac{\vec{b}\vec{\sigma}}{2}$$

dove le $\vec{\alpha}$ sono le matrici definite nella (4.49), e le $\vec{\sigma}$ sono definite come

$$(4.59) \quad \sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}$$

Usare lo stesso simbolo per matrici 2×2 e 4×4 non dovrebbe creare confusione dato che le due hanno le stesse caratteristiche, cioè le stesse regole di commutazione e di anticommutazione, e lo stesso significato fisico. Nella sezione 3.3 abbiamo visto che i generatori \mathbf{J}_m , \mathbf{K}_m delle trasformazioni di Lorentz sono elementi di un tensore antisimmetrico $\mathbf{J}^{\mu\nu}$. Possiamo analogamente definire un tensore $\sigma^{\mu\nu}$,

$$(4.60) \quad \sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & i\alpha_1 & i\alpha_2 & i\alpha_3 \\ -i\alpha_1 & 0 & \sigma_3 & -\sigma_2 \\ -i\alpha_2 & -\sigma_3 & 0 & \sigma_1 \\ -i\alpha_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo esprimere $\sigma^{\mu\nu}$ come commutatore delle matrici γ ,

$$(4.61) \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \begin{cases} 0 & \text{per } \mu = \nu \\ i\gamma^\mu\gamma^\nu & \text{per } \mu \neq \nu \end{cases}$$

ad esempio: $\sigma^{01} = i\alpha_1 = i\gamma^0\gamma^1 = i\beta\beta\alpha_1$, e, come si verifica facilmente, $\sigma^{12} = \sigma_3 = i\gamma_1\gamma_2$. Usando $\sigma^{\mu\nu}$ possiamo riscrivere la matrice di trasformazione infinitesima (vedi la eq. 3.17) come

$$(4.62) \quad S(\Lambda) = \mathbf{1} - \frac{i}{4} \sum_{\mu, \nu} \epsilon_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$$

Possiamo adesso verificare direttamente che l'equazione di Dirac, (4.53), è invariante rispetto a trasformazioni di Lorentz: la ψ' in (4.56) obbedisce alla stessa equazione del moto che la ψ . Il punto centrale della dimostrazione è la relazione

$$(4.63) \quad S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\rho \gamma^\rho$$

Per dimostrare questa relazione per gli elementi del gruppo di Lorentz proprio è sufficiente verificare la sua validità nel caso di trasformazioni infinitesime (4.58). Usando le regole di commutazione (la cui verifica è lasciata al lettore)

$$(4.64) \quad \begin{aligned} [\sigma_i, \beta] &= 0 & [\sigma_i, \gamma^k] &= 2i\epsilon^{ikl}\gamma^l \\ [\alpha_i, \beta] &= -2\gamma^i & [\alpha_i, \gamma^k] &= -2\delta_{ik}\beta \end{aligned}$$

e dato che

$$S^{-1}(\Lambda) = \mathbf{1} - i\frac{\vec{r}\vec{\sigma}}{2} + \frac{\vec{b}\vec{\alpha}}{2}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} S^{-1}(\Lambda)\gamma^0 S(\Lambda) &= \gamma^0 - (\vec{b}\vec{\gamma}) \\ S^{-1}(\Lambda)\vec{\gamma} S(\Lambda) &= \vec{\gamma} - \vec{r} \wedge \vec{\gamma} - \vec{b}\gamma^0 \end{aligned}$$

Questo è il risultato corretto, come si vede paragonando con la (2.3).

Per il caso di trasformazioni discrete possiamo usare la (4.63) per scegliere il valore opportuno di $S(\Lambda)$. Ad esempio per la parità \mathbf{P} possiamo porre $S(\mathbf{P}) = \beta$, di modo che, in accordo con la (4.63), $\beta\gamma^0\beta = \gamma^0$, $\beta\vec{\gamma}\beta = -\vec{\gamma}$.

Siamo ora attrezzati per dimostrare che il campo trasformato $\psi'(x)$, vedi (4.56), obbedisce l'equazione di Dirac. Per convenienza, definiamo $y^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu x^\mu$, di modo che³⁸

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi'(x) &= \gamma^\mu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} S(\Lambda) \psi(y) \\ &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y^\nu} S(\Lambda) \psi(y) \\ &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu S(\Lambda) S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) \frac{\partial}{\partial y^\nu} \psi(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{e usando la (4.63)} \quad &= S(\Lambda) (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \Lambda^\mu{}_\rho \gamma^\rho \frac{\partial}{\partial y^\nu} \psi(y) \\ &= S(\Lambda) \gamma^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu} \psi(y)\end{aligned}$$

$$\text{il risultato atteso!} \quad = S(\Lambda) m \psi(y) = m \psi'(x)$$

Non possiamo concludere questa prima visita al formalismo di Dirac senza parlare della matrice γ^5 ,

$$(4.65) \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La cosa interessante di questa matrice è che essa permette di proiettare dal quadrispinore di Dirac le sue parti destrorse e sinistrorse:

$$(4.66) \quad \psi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi = \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$$

Come abbiamo notato, le due proiezioni non sono dinamicamente indipendenti, tranne nel caso con $m = 0$, o con buona approssimazione in quei casi in cui la massa è trascurabile rispetto alle energie in gioco. Notiamo le espressioni, che il lettore potrà verificare direttamente:

$$(4.67) \quad \gamma^5 = -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

La matrice γ^5 anticommute con le altre γ^μ ,

$$(4.68) \quad \gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5,$$

ma commuta con le α_i, σ_i .

4.5 Lo spinore aggiunto—i covarianti bilineari

La matrice di trasformazione $S(\Lambda)$ è legata alla sua inversa dalla relazione

$$(4.69) \quad S(\Lambda)^{-1} = \beta S(\Lambda)^\dagger \beta$$

³⁸Nei seguenti passaggi ricordiamo che $(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$ è un *numero*, che quindi commuta con la matrice $S(\Lambda)$.

Infatti questa relazione vale per trasformazioni infinitesime, dato che $\beta\sigma_i = \sigma_i\beta, \beta\alpha_i = -\alpha_i\beta$, di modo che

$$\beta \left(\mathbf{1} + i \frac{\vec{r}\vec{\sigma}}{2} - \frac{\vec{b}\vec{\alpha}}{2} \right)^\dagger \beta = \beta \left(\mathbf{1} - i \frac{\vec{r}\vec{\sigma}}{2} - \frac{\vec{b}\vec{\alpha}}{2} \right) \beta = \left(\mathbf{1} - i \frac{\vec{r}\vec{\sigma}}{2} + \frac{\vec{b}\vec{\alpha}}{2} \right)$$

Inoltre la relazione vale per il prodotto di trasformazioni infinitesime,

$$\beta (S_1 S_2 \dots S_n)^\dagger \beta = \beta S_n^\dagger \beta \dots \beta S_2^\dagger \beta \beta S_1^\dagger \beta = (S_1 S_2 \dots S_n)^{-1}$$

Quindi vale per trasformazioni finite del gruppo di Lorentz proprio. Infine vale anche per la trasformazione di parità, $S(\mathbf{P}) = \beta : \beta\beta^\dagger\beta = \beta = \beta^{-1}$

Lo spinore “aggiunto” $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger\beta$ si trasforma secondo

$$(4.70) \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)S(\Lambda)^{-1}$$

i passaggi della dimostrazione sono:

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger\beta \rightarrow \psi'^\dagger(x)\beta = \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x)S(\Lambda)^\dagger\beta = \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x)\beta\beta S(\Lambda)^\dagger\beta$$

Combinando uno spinore e il suo aggiunto definiamo i “covarianti bilineari”, cioè combinazioni del tipo $\bar{\psi}\mathbf{O}\psi$, dove \mathbf{O} è una matrice 4×4 . Il più semplice è $S(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x)$, una grandezza scalare:

$$(4.71) \quad S(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x)\psi'(x) = \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\Lambda^{-1}\Lambda\psi(\Lambda^{-1}x) \\ = \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)\psi(\Lambda^{-1}x) = S(\Lambda^{-1}x)$$

Possiamo costruire sistematicamente tutti i possibili covarianti bilineari considerando per \mathbf{O} i prodotti di più matrici γ ,

$$\mathbf{O} = \mathbf{1}, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho \dots$$

Possiamo però eliminare dalla lista prodotti che contengono due γ con lo stesso indice, che si riducono a prodotti con un numero minore di γ , ad esempio:

$$\gamma^1\gamma^\nu\gamma^1 = \pm\gamma^\nu$$

e si eliminano egualmente prodotti che differiscono per l'ordinamento delle γ , che differiscono al più per un segno, ad esempio $\gamma^2\gamma^1 = -\gamma^1\gamma^2$.

Questo elimina dalla lista i prodotti di cinque o più γ . L'unico prodotto tra quattro γ che sopravvive è proporzionale a γ^5 , eq. (4.67), mentre i prodotti di tre γ si riducono a $\gamma^\mu\gamma^5$, ad esempio $\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma^0\gamma^5$. Infine i prodotti di due γ che sopravvivono si riducono a $\sigma^{\mu\nu}$, eq. (4.61). In conclusione sopravvivono cinque gruppi di matrici, elencati nella tabella 2. Ci si convince facilmente che la lista è completa. Infatti la lista contiene 16 matrici linearmente indipendenti, e da questo segue che qualsiasi matrice 4×4 può essere espressa come loro combinazione lineare. La dimostrazione della indipendenza lineare delle matrici è elementare, e basata sui seguenti fatti che si possono verificare esaminando caso per caso. Il lettore potrà quanto meno verificare le affermazioni che seguono in alcuni dei casi!

1. Chiamiamo $O_1 \dots O_{16}$ le sedici matrici: $O_1 = \mathbf{1}$, $O_2 = \gamma^0, \dots, O_{16} = \gamma^5$. Il quadrato di ciascuna matrice vale $\pm \mathbf{1}$:

$$(O_K)^2 = r_K \mathbf{1}; \quad K = 1 \dots 16; \quad r_K = \pm 1$$

2. Per $K \neq 1$ esiste una O_L (almeno una) che anticommute con O_K . Ne segue che $\text{Tr}(O_K) = 0$; ($K \neq 1$):

$$\begin{aligned} \text{Tr}(O_K) &= r_L \text{Tr}(O_K O_L O_L) = -r_L \text{Tr}(O_L O_K O_L) \\ (\text{proprietà ciclica della traccia}) &= -r_L \text{Tr}(O_K O_L O_L) = 0 \end{aligned}$$

3. Il prodotto di due O è proporzionale ad una terza O : $O_K O_L = \eta(K, L) O_{M(K, L)}$ dove:

- $\eta(K, L) = \pm 1, \pm i$; $\eta(K, K) = r_K = \pm 1$.
- $M(K, L) = 1$ se e solo se $K = L$.

4. Dai fatti precedenti segue che

$$\text{Tr}(O_K O_L) = \delta_{KL} r_K \text{Tr}(\mathbf{1}) = 4 r_L \delta_{KL}$$

A questo punto per dimostrare la indipendenza lineare delle sedici matrici basta mostrare che se una loro combinazione lineare si annulla,

$$\bar{O} = \sum c_K O_K = 0$$

i coefficienti c_K sono identicamente nulli. Infatti otteniamo

$$0 = \text{Tr}(O_L \bar{O}) = \sum c_K \text{Tr}(O_L O_K) = 4 r_L c_L \quad L = 1 \dots 16$$

e dato che $r_L = \pm 1$, deve essere $c_L = 0$ per ciascun $L = 1 \dots 16$.

Simbolo	Nome	O	Numero
S	Scalare	1	1
V	Vettore	γ^μ	4
T	Tensore	$\sigma^{\mu\nu}$	6
A	vett. Assiale	$\gamma^\mu \gamma^5$	4
P	Pseudoscalare	γ^5	1

Tabella 2: I covarianti bilineari

I nomi riflettono le proprietà di trasformazione. Della scalare S abbiamo già detto. Nel seguito tralasciamo per semplicità la dipendenza da x , rimandando alla (4.71) per un caso trattato in maggiore dettaglio, e poniamo $S(\Lambda) = \mathbf{S}$. Abbiamo quindi la legge di trasformazione del vettore V , con l'aiuto della (4.63),

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rightarrow \bar{\psi}' \gamma^\mu \psi'(x) = \bar{\psi} \mathbf{S}^{-1} \gamma^\mu \mathbf{S} \psi = \Lambda^\mu_\rho \bar{\psi} \gamma^\rho \psi$$

Analogamente si dimostra la legge di trasformazione del tensore T , usando la relazione

$$\mathbf{S}^{-1} \gamma^\mu \gamma^\nu \mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1} \gamma^\mu \mathbf{S} \mathbf{S}^{-1} \gamma^\nu \mathbf{S} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\theta \gamma^\rho \gamma^\theta$$

Restano da discutere i casi di A e P . Cominciamo dal secondo, partendo dall'identità³⁹

$$(4.72) \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$$

Abbiamo quindi

$$(4.73) \quad \begin{aligned} \mathbf{S}^{-1}\gamma^5\mathbf{S} &= \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\underbrace{\Lambda^\mu_{\mu'}\Lambda^\nu_{\nu'}\Lambda^\rho_{\rho'}\Lambda^\sigma_{\sigma'}}_{\det(\Lambda)}\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\gamma^{\rho'}\gamma^{\sigma'} \\ \text{il passaggio chiave!} &= \frac{i}{4!}\det(\Lambda)\epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\gamma^{\rho'}\gamma^{\sigma'} \\ &= \det(\Lambda)\gamma^5 \end{aligned}$$

La dimostrazione del “passaggio chiave” è analoga a quella della eq. (1.36) alla quale rimandiamo. Combinando questo risultato con la (4.63) si dimostra facilmente che $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ si trasforma come un vettore assiale,

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \rightarrow \det(\Lambda)\Lambda^\mu_{\rho'}\bar{\psi}\gamma^{\rho'}\gamma^5\psi$$

concludendo così la discussione delle leggi di trasformazione delle combinazioni bilineari del tipo $\bar{\psi}O\psi$.

4.6 Il lagrangiano nel formalismo dei quadri-spinori

L'azione della teoria di Majorana (vedi 4.42),

$$(4.74) \quad S_M = \int d^4x \mathcal{L}_M = \int d^4x \left(i\phi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \phi + \frac{m}{2} [\phi \epsilon \phi - \phi^\dagger \epsilon \phi^\dagger] \right)$$

Può essere ripresa nel linguaggio dei quadrispinori come

$$(4.75) \quad S_M = \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\psi} (i\gamma^\mu \nabla_\mu - m) \psi$$

Vogliamo verificare la equivalenza delle due espressioni. Cominciamo con lo scrivere più esplicitamente la (4.75) in termini di bispinori, usando la (4.47), e la forma esplicita delle matrici $\vec{\alpha}, \beta$

$$(4.76) \quad \begin{aligned} S_M &= \int d^4x \frac{1}{2} \psi^\dagger (i\partial_t + i\vec{\alpha}\vec{\nabla} - \beta m) \psi \\ &= \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi^\dagger (i\partial_t + i\vec{\sigma}\vec{\nabla}) \phi + \frac{1}{2} \eta^\dagger (i\partial_t - i\vec{\sigma}\vec{\nabla}) \eta \right. \\ &\quad \left. - \frac{m}{2} (\phi^\dagger \eta + \eta^\dagger \phi) \right] \end{aligned}$$

La teoria di Majorana è caratterizzata dalla condizione (4.44), $\eta = \epsilon\phi^\dagger$ da cui anche, dato che $\epsilon^\dagger = -\epsilon$,

$$\eta^\dagger = \phi\epsilon^\dagger = -\phi\epsilon$$

Questa equazione, assieme alla (4.44) permettono di verificare che il termine di massa nella (4.76) coincide con quello della (4.74). Il primo termine nella (4.76)

³⁹I 4! termini non-nulli della somma sono eguali a γ^5 : il segno della ϵ è compensato da quello che si ottiene riordinando le quattro γ che anticommutano tra loro.

è, a parte il fattore $1/2$, eguale alla prima parte della (4.74); il secondo termine fornisce la metà mancante, come si verifica facilmente con i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \frac{1}{2} \eta^\dagger (i\partial_t - i\vec{\sigma}\vec{\nabla})\eta = - \int d^4x \frac{1}{2} \phi \epsilon (i\partial_t - i\vec{\sigma}\vec{\nabla}) \epsilon \phi^\dagger \\
\text{dalla eq. (2.24), ed } \epsilon^2 = -\mathbf{1} & \quad = \int d^4x \frac{1}{2} \phi (i\partial_t + i\sigma_i^T \nabla_i) \phi^\dagger \\
\text{Integrando per parti} & \quad = - \int d^4x \frac{1}{2} \phi (i\overleftarrow{\partial}_t + i\sigma_i^T \overleftarrow{\nabla}_i) \phi^\dagger \\
\text{Trasposizione} & \quad = \int d^4x \frac{1}{2} \phi^\dagger (i\partial_t + i\sigma_i \nabla_i) \phi
\end{aligned}$$

Il cambio di segno nella trasposizione deriva dal fatto che ϕ e ϕ^\dagger anticommuto⁴⁰.

4.7 La rappresentazione di Majorana delle matrici γ

La teoria di Majorana è, come abbiamo visto, caratterizzata da una condizione, (4.44), $\eta = \epsilon\phi^\dagger$ che può essere riscritta in forma più simmetrica,

$$\begin{aligned}
(4.77) \quad & \phi^\dagger = -\epsilon\eta \\
& \eta^\dagger = \epsilon\phi
\end{aligned}$$

Possiamo anche esprimere queste relazioni in termini di quadrispinori,

$$(4.78) \quad \psi^\dagger = \begin{pmatrix} \phi^\dagger \\ \eta^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon\eta \\ \epsilon\phi \end{pmatrix} = \mathcal{C}\psi$$

dove \mathcal{C} è la matrice

$$(4.79) \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} = i\gamma^2; \quad \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}, \quad \mathcal{C}^2 = 1$$

L'equazione (4.78) ha una interpretazione fisica diretta in termini della simmetria per coniugazione di carica: essa afferma che in un campo di Majorana le particelle coincidono con le antiparticelle. Dal punto di vista formale, questa relazione è molto simile ad una condizione di realtà. È possibile eseguire una trasformazione unitaria delle grandezze di campo

$$(4.80) \quad \psi(x) \rightarrow \psi_M(x) = \mathbf{W}\psi(x)$$

di modo che la condizione di Majorana divenga semplicemente

$$(4.81) \quad \psi_M^\dagger(x) = \psi_M(x)$$

Il lettore potrà verificare che una possibile scelta della matrice unitaria \mathbf{W} è data da:

$$(4.82) \quad \mathbf{W} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ i\epsilon & -i \end{pmatrix}; \quad \mathbf{W}^\dagger \mathbf{W} = \mathbf{1}$$

⁴⁰L'anticommutatore di ϕ e ϕ^\dagger nella teoria quantizzata è una costante numerica, che può essere omessa dall'azione perché non modifica la dinamica — ad esempio le equazioni del moto. Come la analoga costante numerica che appare nell'Hamiltoniano, anche questa può essere eliminata con un appropriato ordinamento degli operatori. Rimandiamo alla discussione nella sezione 4.2.

di modo che

$$(4.83) \quad \psi_M = \mathbf{W}\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi - \epsilon\eta \\ i\epsilon\phi - i\eta \end{pmatrix} = \psi_M^\dagger$$

Dato che desideriamo che la fisica resti invariata, occorre modificare anche le matrici γ , in modo da garantire che l'azione non risulti modificata,

$$(4.84) \quad \gamma^\mu \rightarrow \gamma_M^\mu = \mathbf{W}\gamma^\mu\mathbf{W}^\dagger$$

e in conseguenza lo spinore aggiunto va definito come

$$(4.85) \quad \bar{\psi}_M = \psi_M^\dagger\beta_M = \psi^\dagger\mathbf{W}^\dagger\mathbf{W}\beta\mathbf{W}^\dagger = \bar{\psi}\mathbf{W}^\dagger$$

Notiamo che la trasformazione si deve estendere a tutte le matrici che si derivano dalle γ : le $\sigma^{\mu\nu}$, γ^5 , etc. Dato che si tratta di una trasformazione unitaria, restano invariate tutte le relazioni tra le matrici γ e loro derivate, a partire dalle regole di anticommutazione (4.54, 4.50), e delle proprietà di hermiticità della (4.51).

Una trasformazione di questo tipo da luogo a una differente “rappresentazione” della *stessa* teoria. La densità di lagrangiano nella rappresentazione di Majorana è identica a quella nella rappresentazione originale⁴¹,

$$(4.86) \quad \bar{\psi}_M(i\gamma_M^\mu\nabla_\mu - m)\psi_M = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\nabla_\mu - m)\psi$$

quindi le conseguenze fisiche della teoria non dipendono dalla rappresentazione usata, ma solamente dalle proprietà delle γ espresse dalle loro regole di anticommutazione e proprietà di hermiticità. È possibile eseguire quasi ogni calcolo senza fare ricorso ad una specifica rappresentazione delle matrici γ . Questa è la linea seguita ad esempio nel Mandl e Shaw [1], dove rappresentazioni specifiche delle matrici γ sono relegate in una appendice. Questo non toglie nulla al fatto che talvolta sia più efficiente, per eseguire particolari calcoli, ricorrere a una rappresentazione specifica.

Un calcolo esplicito mostra che le matrici γ_M^μ , ($\mu = 1 \dots 4$) sono matrici ad elementi immaginari,

$$(\gamma_M^\mu)^* = -\gamma_M^\mu$$

Ad esempio⁴²

$$\beta_M = \mathbf{W}\beta\mathbf{W}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Nella rappresentazione di Majorana l'equazione di Dirac

$$(i\gamma_M^\mu\partial_\mu - m)\psi_M = 0$$

è quindi un sistema di equazioni differenziali a *coefficienti reali* per le grandezze di campo $\psi_M(x)$. Possiamo quindi imporre la condizione di realtà (4.81).

⁴¹Per evitare possibili equivoci, notiamo che la trasformazione (4.80) *non è una simmetria della teoria*: per simmetria si intende una variazione dei campi che lascia invariata l'azione. Ad esempio una trasformazione di Lorentz (4.56) lascia invariante il valore dell'azione. Al contrario, la trasformazione (4.80) modifica il valore della azione. Il fatto che il valore originale venga ripristinato modificando le γ non fa della (4.80) una simmetria.

⁴²lasciamo al lettore la verifica di questo risultato e il calcolo delle γ_M^i con ($i = 1, 2, 3$).

4.8 La rappresentazione standard delle matrici γ

Abbiamo visto due rappresentazioni differenti delle matrici γ : La prima che abbiamo incontrato diagonalizza γ^5 , ed è particolarmente adatta a discutere l'invarianza relativistica della teoria, perché il quadrispinore si scompone in uno spinore puntato ed uno non puntato; la chiameremo semplicemente "rappresentazione spinoriale". La seconda, quella di Majorana, mette in evidenza il fatto che un campo spinoriale che obbedisce la condizione di Majorana è essenzialmente un campo reale. Vedremo che questo fatto ha un particolare significato fisico, l'assenza di antiparticelle.

In realtà la rappresentazione più usata è una terza, che chiameremo rappresentazione "standard", scelta in modo che β sia diagonale. La rappresentazione standard può essere ottenuta dalla rappresentazione spinoriale con una trasformazione unitaria generata dalla matrice⁴³

$$(4.87) \quad \mathbf{W}' = (\mathbf{W}')^\dagger = \frac{\gamma^5 + \beta}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Passando dalla rappresentazione spinoriale alla rappresentazione standard γ^5 e β si scambiano tra loro,

$$(4.88) \quad \beta_S = \frac{1}{2}(\gamma^5 + \beta)\beta(\gamma^5 + \beta) = \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(4.89) \quad \gamma_S^5 = \frac{1}{2}(\gamma^5 + \beta)\gamma^5(\gamma^5 + \beta) = \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mentre le $\vec{\alpha}$ e le $\vec{\gamma}$ divengono

$$(4.90) \quad \vec{\alpha}_S = \beta\gamma^5\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma}_S = \beta_S\vec{\alpha}_S = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

e le $\vec{\sigma}$, che commutano sia con γ^5 che β , sono le stesse nelle due rappresentazioni.

- Nell'uso normale non è quasi mai necessario specificare una rappresentazione. Dato che l'unica rappresentazione largamente usata è quella standard, si usano normalmente i nomi generici γ^5 , β , etc. per indicare le matrici in questa rappresentazione.
- Anche se si vuole usare una rappresentazione differente per un particolare calcolo, conviene usare i nomi generici e dichiarare esplicitamente che si intende usare, ad esempio, la rappresentazione di Majorana.

Notiamo per completezza la forma che la condizione di Majorana prende nella rappresentazione standard. Basta notare che (vedi 4.87)

$$(4.91) \quad \psi_S = \mathbf{W}'\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi + \eta \\ \phi - \eta \end{pmatrix}$$

⁴³Notiamo che $(\mathbf{W}')^2 = \mathbf{1}$, di modo che la stessa matrice genera la trasformazione inversa, dalla rappresentazione standard alla rappresentazione spinoriale.

di modo che, con l'aiuto della (4.77),

$$(4.92) \quad \psi_S^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi^\dagger + \eta^\dagger \\ \phi^\dagger - \eta^\dagger \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \epsilon\phi - \epsilon\eta \\ -\epsilon\phi - \epsilon\eta \end{pmatrix} = \mathcal{C}\psi_S$$

dove

$$(4.93) \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = i\gamma_S^2 \quad \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}, \quad \mathcal{C}^2 = 1$$

Esattamente la stessa espressione che nella rappresentazione spinoriale, (4.79), ma naturalmente nella rappresentazione standard.

4.9 Dalla teoria di Majorana a quella di Dirac

Si passa dalla teoria di Majorana a quella di Dirac lasciando cadere la condizione di Majorana. Un campo di Dirac, che non obbedisce la relazione di Majorana, eq. (4.92), può essere visto come sovrapposizione di una parte reale ed una immaginaria, dove il concetto di reale ed immaginario sono definiti dalla relazione di Majorana⁴⁴,

$$(4.94) \quad \psi = \frac{\psi_1 + i\psi_2}{\sqrt{2}}$$

dove ψ_1, ψ_2 sono campi "di Majorana". L'azione per il campo di Dirac può essere definita come la somma delle azioni per i due campi di Majorana (vedi la 4.75) ψ_1, ψ_2 , ma anche direttamente in termini del campo di Dirac come

$$(4.95) \quad S = \int d^4x \bar{\psi}(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi \\ = \frac{1}{2} \left[\int d^4x \bar{\psi}_1(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi_1 + \int d^4x \bar{\psi}_2(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi_2 \right]$$

Infatti si verifica facilmente che i due termini che mancano nella seconda espressione, quelli in $\bar{\psi}_1 \dots i\psi_2$ e in $-i\bar{\psi}_2 \dots \psi_1$ si cancellano esattamente. Questa cancellazione risulta dalle relazioni

$$(4.96) \quad \mathcal{C}\beta\gamma^\mu\mathcal{C} = \gamma^{T\mu}\beta^T; \quad \mathcal{C}\beta\mathcal{C} = -\beta^T$$

che seguono dalle forme esplicite (4.90, 4.90, 4.93), da cui segue che $\beta^T = \beta$, $\gamma_{1,3}^T = -\gamma_{1,3}$, e $\gamma_2^T = \gamma_2$. Quindi $\mathcal{C}\beta\beta\mathcal{C} = \beta\beta = \beta^T\beta$, $\mathcal{C}\beta\gamma_1\mathcal{C} = \beta\gamma_1 = -\gamma_1\beta = \gamma_1^T\beta$, etc.

⁴⁴Alcuni passaggi nella discussione che segue sarebbero leggermente semplificati dalla adozione della rappresentazione di Majorana per le matrici di Dirac. Ad esempio il concetto di campo reale diventa semplicemente $\psi^\dagger = \psi$ nella rappresentazione di Majorana, vedi la eq. (4.81). Noi useremo invece la rappresentazione standard, la più comunemente usata. Al prezzo di una minore eleganza avremo una trattazione direttamente legata ai formalismi più in uso.

Quindi il termine $\bar{\psi}_1 \dots i\psi_2$ nello sviluppo della (4.75),

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \bar{\psi}_1 (i\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi_2 = i \int d^4x \psi_1^\dagger \beta (i\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi_2 \\
(4.97) \quad & \text{[Cond. di Majorana, } \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}] \quad = i \int d^4x \psi_1 \mathcal{C} \beta (i\gamma^\mu \nabla_\mu - m) \mathcal{C} \psi_2^\dagger \\
& \text{[dalla (4.96)]} \quad = i \int d^4x \psi_1 (i\gamma^{T\mu} \nabla_\mu + m) \beta^T \psi_2^\dagger \\
& \text{[}\psi_1, \psi_2^\dagger \text{anticommutano]} \quad = i \int d^4x \psi_2^\dagger \beta (-i\gamma^\mu \overleftarrow{\nabla}_\mu - m)\psi_1 \\
& \text{[integrazione per parti]} \quad = i \int d^4x \bar{\psi}_2 (i\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\psi_1
\end{aligned}$$

cancella esattamente il corrispondente termine $-i\bar{\psi}_2 \dots \psi_1$.

Riferimenti bibliografici

- [1] F. Mandl e G. Shaw, *Quantum Field Theory*, Wiley, 1984.
- [2] L Landau e E. Lifschitz, *Teoria Quantistica Relativistica*, Editori Riuniti.
- [3] D. Jackson, *Elettrodinamica Classica*
- [4] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, primo volume, Cambridge University Press, 1995.
- [5] E. Majorana, *Nuovo Cimento*, vol. 5 pp.174-184 (1937)