8.2.1 Il metodo dei rettangoli

Se la funzione integranda si può approssimare con una costante C nell'intervallo d'integrazione (o, il che è lo stesso, se l'intervallo d'integrazione è abbastanza piccolo da poter considerare costante $f(x)$) possiamo scrivere che

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)\, dx \simeq I_i^{(1)} = C\,(c_{i+1} - c_i) = Ch\,, \tag{8.19}$$

dove $C = f(\xi)$ e $\xi \in [c_i, c_{i+1}]$ è arbitrario. Questa operazione corrisponde alla sostituzione della funzione integranda con un polinomio di Lagrange di grado 0 passante per il punto $(\xi, f(\xi))$.

La relazione (8.19) si chiama formula dei rettangoli[1] perché geometricamente il calcolo di I_i equivale a calcolare l'area di un rettangolo di base $h = (c_{i+1} - c_i)$ e di altezza C (come si vede dalla Figura 8.1). Il resto di questa formula di quadratura si può derivare facilmente dall'equazione (8.18) con $n = 1$ ed è

$$\delta^{(1)} \leqslant \left|\sup_{\xi\in[a,b]} f'(\xi)\right| D_1 \frac{(b-a)^2}{4M} = \left|\sup_{\xi\in[a,b]} f'(\xi)\right| D_1 \frac{b-a}{4} h\,, \tag{8.20}$$

dove D_1 può variare, secondo la scelta del punto ξ, tra 1 e 2. In genere questo metodo si usa quando la funzione da integrare è sconosciuta, ma se ne conoscono i suoi valori in alcuni punti (ad esempio perché sono stati misurati). Quando invece la funzione da integrare è nota si preferisce usare il metodo del punto di mezzo.

8.2.2 Il metodo del punto di mezzo

Il metodo del punto di mezzo è un caso particolare di applicazione della formula dei rettangoli, e corrisponde a scegliere per ξ il punto di mezzo dell'intervallo o, nella variabile t, $t_1 = 0$. Le prestazioni dei metodi d'integrazione si possono migliorare parecchio sfruttando le proprietà di simmetria del polinomio interpolatore. Se scegliamo per ξ il punto di mezzo dell'intervallo, $\xi = (c_{i+1} + c_i)/2$, non è difficile convincersi del fatto che il rettangolo di base h e altezza $f(\xi)$ è equivalente a qualunque trapezio di altezza h, con il lato obliquo passante per $f(\xi)$. In altre parole, invece di approssimare la funzione f con una costante la approssimiamo con una retta passante per il punto

$$\left(\frac{c_i + c_{i+1}}{2}, f\left(\frac{c_i + c_{i+1}}{2}\right)\right)\,. \tag{8.21}$$

La formula di quadratura non cambia: è sempre la (8.19), ma l'errore è piú piccolo. Espandendo in serie la funzione $f(x)$ intorno al punto di mezzo, infatti, si ha che

[1] La formula (8.19) si chiama anche formula di quadratura di Newton, poiché è stata introdotta proprio dal celebre scienziato per valutare l'area della porzione di piano compresa tra l'asse delle ascisse e la curva descritta dalla funzione integranda, quando ancora non era stato introdotto il calcolo differenziale.

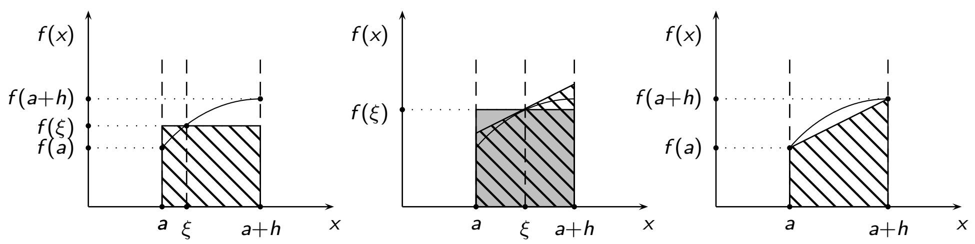

Figura 8.1 Geometricamente la formula dei rettangoli corrisponde a sostituire l'integrale della curva $f(x)$ con l'area tratteggiata nella figura a sinistra, mentre nel caso della formula dei trapezi si approssima l'integrale della curva con l'area del trapezio mostrato nella figura a destra. Il metodo del punto di mezzo è illustrato al centro. L'area del trapezio tratteggiato (con il lato obliquo tangente alla curva in ξ) è uguale a quella del rettangolo grigio (con un lato passante per ξ).

$$f(x) \simeq f\left(\frac{c_i + c_{i+1}}{2}\right) + f'\left(\frac{c_i + c_{i+1}}{2}\right)\left(x - \frac{c_i + c_{i+1}}{2}\right) + \\ + \frac{1}{2} f''\left(\frac{c_i + c_{i+1}}{2}\right)\left(x - \frac{c_i + c_{i+1}}{2}\right)^2 + \ldots$$

I primi due termini della serie rappresentano proprio una retta passante per il punto (8.21), perciò l'errore commesso in questa approssimazione è dato da

$$\delta_i^{(1)} \leqslant \left|\frac{1}{2} f''\left(\frac{c_i + c_{i+1}}{2}\right)\right| \int_{c_i}^{c_{i+1}} \left|\left(x - \frac{c_i + c_{i+1}}{2}\right)^2\right| dx = \\ = \frac{1}{24}\left|f''\left(\frac{c_i + c_{i+1}}{2}\right)\right| (c_{i+1} - c_i)^3 ,$$

da cui si ricava che

$$\delta^{(1)} \leqslant \frac{1}{24}\left|\sup_{\xi \in [a,b]} f''(\xi)\right| h^2 (b-a) = \frac{1}{24}\left|\sup_{\xi \in [a,b]} f''(\xi)\right| \frac{(b-a)^3}{M^2} , \tag{8.22}$$

che è identica, a meno di un fattore 2, alla (8.18) per $n = 2$. Quindi, pur avendo usato di fatto un solo punto per approssimare la funzione integranda in ciascun intervallo, abbiamo ottenuto una stima dell'errore che è dello stesso ordine di quella derivante dall'impiego di due punti. In effetti possiamo pensare che la formula del punto di mezzo derivi dall'approssimazione della funzione integranda con un polinomio di Lagrange di primo grado passante per due punti coincidenti localizzati nel punto centrale dell'intervallo.