Prova scritta del corso di Fisica con soluzioni

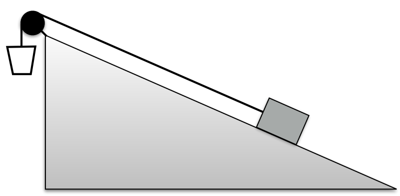
Prof. F. Ricci-Tersenghi

11/11/2013

Quesiti

1. Osservate un corpo di massa $m = 100\,g$ muoversi lungo un piano orizzontale scabro verso una molla posta in orizzontale. Quando il corpo si trova ad una distanza $x_0 = 1\,m$ dalla molla, esso possiede una velocità pari a $v_0 = 3\,m/s$. Sapendo che la costante elastica della molla è pari a $k = 3\,N/m$ e che la massa arresta il suo moto (per sempre) dopo aver compresso la molla di $20\,cm$, calcolate il coefficiente d'attrito dinamico μ_d tra massa e piano, e un limite inferiore al corrispondente coefficiente d'attrito statico μ_s.

2. Dovendo usare una liana per lanciarvi da un albero ad un altro, volete prima testare che non si rompa durante il volo. Volete quindi appendere alla liana in posizione verticale un peso adeguato a testare la sua resistenza. Sapendo che nel volo partirete da una posizione in cui la liana forma una angolo di 45^o con la verticale, calcolate quanto (in percentuale) la massa del peso di prova deve essere superiore al vostro peso.



3. Una massa di $5\,kg$ è appoggiata su un piano scabro inclinato di $\theta = 30^o$ ed è legata ad un secchio tramite una corda inestensibile e di massa trascurabile (come in figura). I coefficienti d'attrito statico e dinamico tra massa e piano sono, rispettivamente, $\mu_s = 0.6$ e $\mu_d = 0.3$. Il secchio viene riempito d'acqua fino al momento in cui la massa si mette in moto. Determinate quanto pesa il secchio riempito e la tensione della corda mentre la massa si muove. Quanto lavoro compie la forza d'attrito durante i primi due secondi del moto?

4. State giocando con una macchinina elettrica che corre lungo un circuito trainata da una forza motrice costante che è tale da compensare, nei tratti orizzontali del circuito, la forza d'attrito dinamico (con

coefficiente $\mu_d = 0.3$). Lungo il circuito è presente un cosiddetto 'giro della morte', ossia un tratto di circuito in verticale che segue una circonferenza di raggio $r = 20\,cm$. Sapendo che la macchinina entra con velocità $v_0 = 4\,m/s$ nel giro della morte calcolate la velocità della macchinina quando questa raggiunge il punto piú alto del giro e il lavoro fatto durante un intero giro della morte da ognuna delle forze presenti. Quale è la velocità minima che deve possedere la macchinina nel momento in cui entra nel giro della morte per poterlo completare senza cadere?

[Purtroppo una modifica dell'ultimo minuto al testo di questo problema, lo ha reso troppo difficile per essere risolto completamente con carta e penna. Me ne scuso. Per questo motivo sono stati considerati pienamente soddisfacenti quei compiti in cui la soluzione a questo problema sia stata correttamente impostata, anche senza essere svolta fino in fondo.]

Soluzioni

1. Usando il teorema dell'energia cinetica tra la posizione in cui la massa si trova quando dista $x_0 = 1\,m$ dalla molla e la posizione finale d'arresto possiamo scrivere

$$\Delta K = -\frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu_d mg(x_0 + \ell) - \frac{1}{2}k\ell^2 \quad \Longrightarrow \quad \mu_d = \frac{mv_0^2 - k\ell^2}{2mg(x_0 + \ell)} = 0.33\ ,$$

dove $\ell = 20\,cm$ è la compressione della molla. Un limite inferiore a μ_s può essere ottenuto, notando che la molla compressa di ℓ non è in grado di muovere nuovamente la massa, quindi deve valere

$$k\ell < \mu_s mg \quad \Longrightarrow \quad \mu_s > \frac{k\ell}{mg} = 0.61\ .$$

2. Bisogna calcolare la tensione massima che si ha sulla liana durante il volo. La tensione ad un generico istante del volo è tale che, sommata alla forza peso, deve produrre la giusta forza centripeta, ossia

$$T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{\ell} \quad \Longrightarrow \quad T = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{\ell}\ ,$$

dove θ è l'angolo rispetto alla verticale ed ℓ la lunghezza della liana. Da questa equazione è chiaro che il massimo della tensione si ha per $\theta = 0$ dove sia $\cos\theta$ che la velocità v sono massimi. La velocità $v_{\max}$ nel punto con $\theta = 0$ può essere calcolata con il teorema dell'energia cinetica

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = mg\ell(1 - \cos\theta_0) \quad \Longrightarrow \quad v_{\max}^2 = 2g\ell(1 - \cos\theta_0)\ ,$$

dove $\theta_0 = 45^o$. La tensione massima che deve sopportare la liana durante il volo è pari a

$$T_{\max} = mg + m\frac{v_{\max}^2}{\ell} = mg + 2mg(1 - \cos\theta_0) = mg(3 - 2\cos\theta_0)$$

Quindi il peso di prova deve pesare $(3 - 2\cos\theta_0) = 1.59$ volte il proprio peso, ossia appendendo un peso che pesa il 59% in piú del proprio peso si è certi che la liana non si rompe durante il volo.

3. Chiamiamo $m = 5\,kg$ la massa del corpo sul piano ed M la massa del secchio pieno. Fintanto che la massa e il secchio sono in quiete, la tensione della corda si ottiene uguagliando a zero la risultante delle forze sul secchio (che è fermo)

$$R_s = Mg - T = 0 \quad \Longrightarrow \quad T = Mg \ .$$

La somma delle forze agenti sulla massa e parallele al piano può essere annullata dalla forza d'attrito statico solo fino a che vale

$$T - mg\sin\theta < \mu_s mg\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad M < m(\sin\theta + \mu_s\cos\theta) = 5.1\,kg$$

Quindi $M = 5.1\,kg$ è il peso del secchio riempito che mette in moto la massa.

Mentre il sistema secchio-massa è in moto le risultanti delle forze (sul secchio e sulla massa) sono legate all'accelerazione (la stessa per il secchio e per la massa) dalla seconda legge della dinamica

$$Mg - T = Ma \ , \qquad T - mg\sin\theta - \mu_d mg\cos\theta = ma \ ,$$

che devono essere risolte rispetto a T ed a. La soluzione delle due equazioni determina la tensione

$$T = mg(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)\frac{1+\sin\theta+\mu_d\cos\theta}{1+\sin\theta+\mu_s\cos\theta} = 43.5\,N$$

e l'accelerazione

$$a = g\left(1 - \frac{1+\sin\theta+\mu_d\cos\theta}{1+\sin\theta+\mu_s\cos\theta}\right) = \frac{g(\mu_s-\mu_d)\cos\theta}{1+\sin\theta+\mu_s\cos\theta} = 1.26\,m/s^2$$

Trattandosi di moto uniformemente accelerato che parte con velocità iniziale nulla lo spazio percorso in un tempo $\Delta t = 2\,s$ è pari a $\Delta x = a\Delta t^2/2 = 2.52\,m$, da cui si può calcolare il lavoro fatto dalla forza d'attrito

$$L_{\text{attr}} = -\mu_d mg\cos\theta\Delta x = -32.1\,J$$

4. Scegliamo una convenzione dei versi in cui le forze parallele al circuito sono positive se concordi al verso in cui si muove la macchinina e le forze ortogonali al circuito sono positive se puntano verso l'interno del giro della morte. La forza che traina la macchinina è pari a $F_T = \mu_d mg$ e rimane costante (e tangenziale al circuito) in qualsiasi punto. La forza peso ha sia una componente parallela al circuito $P_p = -mg\sin\theta$ sia una componente normale al circuito $P_n = -mg\cos\theta$, dove θ è l'angolo rispetto alla verticale che identifica la posizione della macchinina nel giro della morte; durante il giro θ varia da 0 a 2π. In ogni punto del giro la macchinina sente una forza centripeta, che le permette di seguire la traiettoria circolare del circuito, la cui intensità è pari a $F_c = mv^2/r$. La reazione vincolare normale

dipende dalla posizione e dalla velocità della macchinina in modo che la risultante delle forze ortogonali sia esattamente la forza centripeta necessaria

$$F_c = N + P_n \quad \Longrightarrow \quad N = F_c - P_n = m\frac{v^2}{r} + mg\cos\theta \ .$$

La macchinina rimane in contatto con il circuito solo finché $N > 0$. L'ultima forza presente è l'attrito dinamico parallelo al circuito e di intensità pari a $F_{\mathrm{attr}} = -\mu_d N$.

La risultante delle forze parallele è pari a

$$R = F_T + P_p + F_{\mathrm{attr}} = ma$$

Scriviamo l'equazione in termini della sola variabile θ, ricordando che $v = r\dot{\theta}$ e $a = r\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{r}\Big[-\sin\theta + \mu_d(1-\cos\theta)\Big] - \mu_d\dot{\theta}^2$$

Purtroppo questa equazione non ammette una soluzione semplice e deve essere risolta con una integrazione numerica. Tale integrazione permette di scoprire che la velocità minima per soddisfare la condizione $N > 0$ durante tutto il giro è $v_{\mathrm{min}} = 4.5\,m/s$, quindi superiore a quella fornita (ahime!) nel testo del problema. Partendo con velocità v_0 la macchinetta non raggiunge il punto piú in alto del giro della morte.