Prova scritta del corso di Fisica con soluzioni

Prof. F. Ricci-Tersenghi

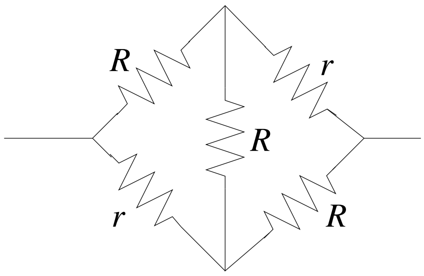
13/02/2013

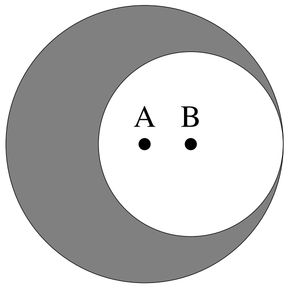
Quesiti

1. State osservando una giostra di quelle con i seggiolini "volanti" che gira a velocità angolare costante. Su uno dei seggiolini è seduto un bambino di massa $m = 30\,kg$ e le catene che tengono quel seggiolino sono inclinate di $\theta = 30^{\circ}$ rispetto alla verticale. Calcolate la tensione lungo tali catene (trascurando il peso delle catene e del seggiolino). Sapendo inoltre che il bambino in questa posizione dista $d = 10\,m$ dall'asse di rotazione della giostra, calcolate la velocità angolare con cui la giostra sta ruotando. Se il bambino avesse avuto una massa $m' = 45\,kg$, quale sarebbe stato l'angolo d'inclinazione delle catene?

2. In uno spazio bidimensionale sono presenti due fili infinitamente lunghi e uniformemente carichi. Entrambi i fili sono paralleli all'asse delle ordinate e distano da tale asse $d = 10\,cm$: quello a sinistra dell'asse ha densità lineare di carica pari a $\lambda_S = 2\,nC/m$, mentre quello a destra ne ha una pari a $\lambda_D = -\lambda_S/2 = -1\,nC/m$. Determinate il luogo dei punti in cui il campo elettrico è nullo. Quanto lavoro è necessario compiere per portare un elettrone dall'origine degli assi ad uno di questi punti in cui il campo elettrico è nullo?

3. Considerate il circuito nella figura a sinistra e calcolate la sua resistenza equivalente nei seguenti due casi: (a) $R = r = 6\,k\Omega$ e (b) $R = 15\,k\Omega$, $r = 5\,k\Omega$. Cercate di ottenere l'espressione generale simbolica in termini di R e r.





4. Considerate un cilindro di raggio $R = 3\,cm$ uniformemente carico con densità di carica $\rho = 20\,nC/m^3$, che ha una cavità cilindrica di raggio $r = 2\,cm$ al suo interno. Gli assi del cilindro e della cavità cilindrica sono paralleli e distano $d = 1\,cm$ tra di loro. La figura di destra mostra una sezione ortogonale agli assi. Calcolate il campo elettrico nel centro del cilindro e nel centro della cavità cilindrica (punti A e B rispettivamente in figura). Calcolate inoltre il campo elettrico massimo e quello minimo sulla superficie esterna del cilindro.

5. Un cavo coassiale (rettilineo ed infinitamente lungo) è composto da un filo conduttore interno (di diametro trascurabile) contenuto in un cilindro isolante di diametro $d = 1\,cm$. Sulla superficie di questo cilindro è quindi presente una maglia conduttrice di spessore trascurabile (che potete ipotizzare perfettamente omogenea). Se nel filo conduttore interno scorre una corrente di $i = 10\,A$ e nella maglia esterna un corrente di pari intensità e verso opposto, calcolate il campo magnetico generato dal cavo coassiale.

Soluzioni

1. Il bambino è sottoposto a due forze: quella di gravità mg verticale verso il basso e quella centrifuga $md\omega^2$ orizzontale verso l'esterno (ω è la velocità angolare della giostra). La somma delle due deve avere un'inclinazione θ rispetto alla verticale ed è perfettamente compensata dalla tensione T lungo le catene. Scomponendo le forze nelle componenti orizzontale e verticale abbiamo che

$$\begin{aligned} T\sin(\theta) &= md\omega^2 \; , \\ T\cos(\theta) &= mg \; . \end{aligned}$$

Dalla seconda otteniamo la tensione delle catene $T = mg/\cos(\theta) = 339\,N$, mentre facendo il rapporto tra le due equazioni ne otteniamo una nuova in cui non compare né la tensione né la massa del bambino

$$\tan(\theta) = \frac{d\omega^2}{g} \; .$$

Da questa ricaviamo la velocità angolare

$$\omega = \sqrt{\frac{g\tan(\theta)}{d}} = 0.75\,s^{-1} \; ,$$

e notiamo inoltre che l'angolo d'inclinazione θ non dipende dalla massa del bambino. Infatti dovrebbe essere esperienza comune che quando queste giostre girano tutti i seggiolini hanno la stessa inclinazione indipendentemente da chi vi sia seduto sopra (basta notare che quelli vuoti hanno la stessa inclinazione!).

2. Grazie alla simmetria delle distribuzioni di carica sia il campo elettrico che il potenziale elettrostatico dipendono solo dalla coordinata x, e quindi possiamo ignorare completamente la coordinata y (immaginate di lavorare solo sull'asse delle ascisse). L'unica componente non nulla del campo elettrico è quella parallela all'asse delle x che assume il valore

$$E_x = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\lambda_S}{x+d} + \frac{\lambda_D}{x-d}\right) = \frac{\lambda_S}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{x+d} - \frac{1}{x-d}\right) = \frac{\lambda_S}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x-3d}{(x+d)(x-d)} \; .$$

Il luogo dei punti del piano in cui il campo elettrico si annulla è quindi quello con $x = 3d = 30\,cm$.

Al fine di calcolare il lavoro richiesto nel quesito dobbiamo calcolare la differenza di potenziale tra l'origine degli assi ($x = 0$) e un punto con $x = 3d$. Essendo il potenziale elettrostatico la somma dei potenziali dei due fili, scriviamo la differenza di potenziale come

$$\Delta V = \Delta V_S + \Delta V_D \; .$$

La differenza di potenziale del singolo filo può essere calcolata con la seguente formula

$$\Delta V_i = \frac{\lambda_i}{2\pi\varepsilon_0} \log(r_1/r_2) \ ,$$

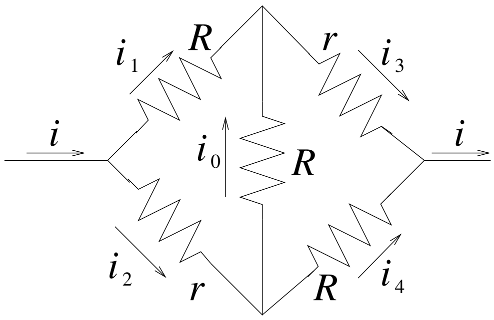
dove r_1 è la distanza dal filo del punto iniziale ed r_2 quella del punto finale. La differenza di potenziale cercata è quindi pari a

$$\Delta V = \frac{\lambda_S}{2\pi\varepsilon_0} \log(1/4) + \frac{\lambda_D}{2\pi\varepsilon_0} \log(1/2) = \frac{3\lambda_S}{4\pi\varepsilon_0} \log(1/2) = -37.4\,V$$

e il corrispondente lavoro è pari a

$$L = 37.4\,eV = 5.98\,10^{-18}\,J$$

3. Ricaviamo direttamente l'espressione simbolica generica in termini di R e r; in seguito sostituiremo i valori specifici per rispondere alle prime due domande. La figura illustra la scelta dei versi delle correnti.



La legge dei nodi ci fornisce le seguenti quattro equazioni:

$$i = i_1 + i_2 \ , \qquad i_1 + i_0 = i_3 \ , \qquad i_2 = i_0 + i_4 \ , \qquad i_3 + i_4 = i \ ,$$

delle quali solo 3 sono indipendenti (infatti la somma delle quattro equazioni è identicamente soddisfatta). La legge delle maglie ci fornisce invece le seguenti due equazioni:

$$Ri_1 - Ri_0 - ri_2 = 0 \ , \qquad Ri_0 + ri_3 - Ri_4 = 0 \ .$$

Infine dobbiamo esprimere la differenza di potenziale ai capi del circuito in termini di quantità interne con la seguente equazione

$$\Delta V = Ri_1 + ri_3$$

La resistenza equivalente che dobbiamo calcolare è data da $R_{eq} = \Delta V/i$.

Piuttosto che risolvere di forza bruta le sei equazioni appena scritte in termini delle sei correnti, notiamo che la simmetria del circuito suggerisce una soluzione in cui valgano

$$i_1 = i_4 \; , \qquad i_2 = i_3 \; .$$

È facile verificare che con queste sostituzioni le equazioni di sopra si riducono alle seguenti:

$$i = i_1 + i_2 \; , \qquad i_1 + i_0 = i_2 \; , \qquad Ri_1 - Ri_0 - ri_2 = 0 \; ,$$

la cui soluzione ci fornisce tre correnti in funzione della quarta, ad esempio,

$$i_0 = \frac{R - r}{R + r} i_1 \; , \qquad i_2 = \frac{2R}{R + r} i_1 \; , \qquad i = \frac{3R + r}{R + r} i_1 \; .$$

La resistenza equivalente è quindi data dalla seguente espressione

$$R_{eq} = \frac{\Delta V}{i} = \frac{Ri_1 + ri_2}{i} = \frac{R + 3r}{3R + r} R \; .$$

Sostituendo i valori numerici troviamo che nel caso (a) $R_{eq} = 6\, k\Omega$, mentre nel caso (b) $R_{eq} = 9\, k\Omega$.

4. Per prima cosa ricaviamo l'espressione del campo elettrico generato da un cilindro di raggio R uniformemente carico con densità di carica ρ. Il campo elettrico è diretto radialmente e la sua intensità dipende solo dalla distanza δ dall'asse del cilindro. Tale espressione può essere ottenuta con il teorema di Gauss, usando come superficie gaussiana un cilindro di raggio δ coassiale al primo. Il flusso risulta sempre essere pari a $\Phi = 2\pi\delta h E$, mentre la carica all'interno della superficie gaussiana è pari a $Q_{int} = \pi\delta^2 h\rho$ se $\delta \le R$ e pari a $Q_{int} = \pi R^2 h\rho$ altrimenti. Quindi l'intensità del campo elettrico è pari a

$$E(\delta; \rho, R) = \begin{cases} |\rho|\delta/(2\varepsilon_0) & \text{se } \delta \le R \; , \\ |\rho| R^2/(2\varepsilon_0 \delta) & \text{se } \delta > R \; . \end{cases}$$

La sua direzione è uscente se $\rho > 0$ ed entrante se $\rho < 0$.

Il campo elettrico generato dalla distribuzione di carica dell'esercizio è equivalente alla somma dei campi elettrici generati da un cilindro con densità di carica ρ e raggio R (come quello del quesito, ma senza la cavità!), che chiameremo *esterno*, piú un cilindro con densità di carica $-\rho$ e raggio r, posizionato esattamente dove si trova la cavità, che chiameremo *interno*.

Iniziamo con il calcolare i campi generati da questi due cilindri nei punti A e B della figura (per comodità introduciamo un sistema di assi cartesiani in cui il punto A coincide con l'origine e il punto B è sul semiasse positivo dell'asse delle x). Essendo il punto A al centro del cilindro esterno, il campo generato da quest'ultimo è nullo, $E(0; \rho, R) = 0$, mentre il campo generato dal cilindro interno è di intensità pari a $E(d;-\rho,r) = 11.3\,V/m$ e diretto nel verso positivo dell'asse delle x. Nel punto B, invece, è il campo generato dal cilindro esterno ad essere di intensità pari a $E(d;\rho,R) = 11.3\,V/m$ e di verso concorde all'asse delle x, mentre il campo generato dal cilindro interno è nullo perché il punto B è sul suo asse. Quindi abbiamo trovato che nei punti A e B il campo è lo stesso, ma diverso da zero. N.B.: il campo elettrico nei punti interni A e B sarebbe stato nullo se il cilindro cavo carico fosse stato conduttore; in quel caso le cariche si sarebbero distribuite nel conduttore in modo da annullare il campo elettrico nella cavità, ma qui abbiamo un corpo *uniformemente* carico (e le cariche non possono muoversi).

Infine, osservando la simmetria nella distribuzione di carica, risulta evidente che i punti dove il campo elettrico è massimo e minimo sono quelli in cui l'asse delle x attraversa la superficie esterna del cilindro esterno: chiamiamo C il punto a sinistra, ossia quello di coordinate $(-3\,cm, 0)$, e D quello a destra, di coordinate $(3\,cm, 0)$. In entrambi i punti i campi generati dai due cilindri sono paralleli all'asse delle x, ma con versi discordi: quello generato dal cilindro esterno è sempre di intensità maggiore e quindi il verso dei campi risultanti in C e D è uscente. Calcoliamo ora le rispettive intensità: nel punto C abbiamo

$$E_C = E(R;\rho,R) - E(2R-r;-\rho,r) = \frac{\rho R}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{2\varepsilon_0(2R-r)} = \frac{\rho R}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{r^2}{R(2R-r)}\right) = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0} = 22.6\,V/m$$

mentre nel punto D abbiamo

$$E_D = E(R;\rho,R) - E(r;-\rho,r) = \frac{\rho R}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho R}{6\varepsilon_0} = 11.3\,V/m\ .$$

5. Il calcolo del campo magnetico generato dal cavo coassiale può essere fatto sfruttando il teorema della circuitazione di Ampère. Considerando una qualsiasi linea chiusa esterna al cavo coassiale, notiamo che la somma delle correnti concatenate con tale linea sono nulle e quindi il campo magnetico fuori dal cavo coassiale è pari a zero. Quindi l'unica regione di spazio in cui vi può essere campo magnetico diverso da zero è all'interno della maglia: il fatto che in questa regione di spazio vi sia un isolante non deve farci pensare che non possa esserci un campo magnetico; un isolante è un materiale che non permette il movimento delle proprie cariche elettriche interne, ma nulla vieta la presenza di un campo elettrico o magnetico dentro un isolante (per convincervi, mettete una calamita dentro una busta di plastica e verificate che sia ancora in grado di attirare la limatura di ferro). Dentro la maglia del cavo coassiale il campo magnetico può essere generato solo dalla corrente che scorre nel filo conduttore interno (l'unica che può concatenarsi con una linea chiusa interna alla maglia). Il campo magnetico generato da un filo rettilineo ed infinitamente lungo è dato dalla legge di Biot-Savart

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad \text{per } r < d\ .$$