# Prova scritta del corso di Fisica con soluzioni

Prof. F. Ricci-Tersenghi

13/11/2012

## Quesiti

1. Un acrobata è in piedi su un cavallo che procede in orizzontale con velocità costante pari a $v_x = 3.5\,m/s$. L'acrobata vuole fare un salto per passare in un cerchio che si trova piú in alto di $h = 1.6\,m$ rispetto alla sua quota attuale. Sapendo che un suo salto in verticale gli fornisce una velocità iniziale verso l'alto pari a $v_y = 5.6\,m/s$, si calcoli a quale distanza dal cerchio deve effettuare il salto (misurate la distanza nella componente orizzontale, come se fosse la distanza tra le relative proiezioni al suolo). Qualè il modulo della velocità dell'acrobata nell'istante in cui attraversa il cerchio?

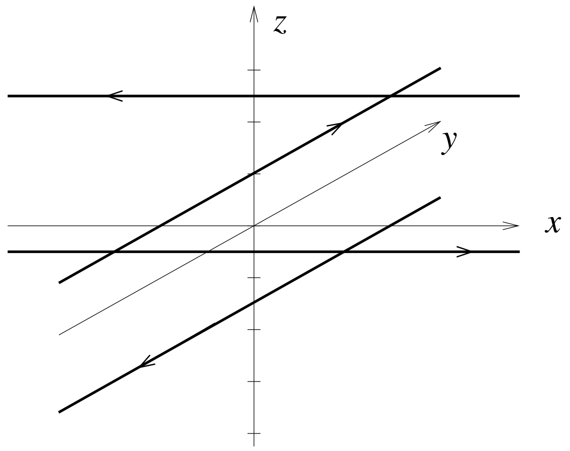
2. Avete un elastico di costante elastica $k = 50\,N/m$ e lunghezza a riposo $\ell = 30\,cm$, che può sopportare una tensione massima pari a $T_{\max} = 20\,N$ (dopo di che si rompe). Immaginate di attaccare all'elastico una pietra di peso ignoto e iniziare a rotearla sempre piú velocemente, fino a raggiungere la massima tensione sopportabile dall'elastico. Quanto vale l'energia cinetica della pietra quando l'elastico si spezza?

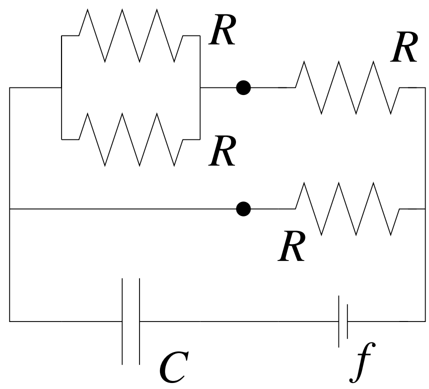
3. Dovete portare una cassa di massa $m = 100\,kg$ ad una altezza di $h = 3\,m$ facendola scivolare lungo una trave d'acciaio. I coefficienti d'attrito statico e dinamico tra cassa e trave sono rispettivamente $\mu_s = 0.7$ e $\mu_d = 0.3$. Scegliete l'inclinazione della trave che minimizzi il vostro lavoro considerando che le seguenti due condizioni devono essere rispettate: (i) la massima forza che potete applicare alla cassa (sempre parallelamente alla trave) è pari a $F_{\max} = 900\,N$ e (ii) quando smettete di spingere (per riposarvi) la cassa non deve scivolare indietro. Qual'è il minimo lavoro che dovete fare? Se la cassa avesse invece massa $m' = 150\,kg$, quali sarebbero l'inclinazione ottimale e il minimo lavoro da compiere?

4. Una molla di costante elastica ignota ha una lunghezza a riposo di $10\,cm$ ed è attaccata con una estremità ad un chiodo alla parete e con l'altra ad una massa di $2\,kg$. Inizialmente la massa è attaccata alla parete e tiene la molla in orizzontale e in posizione di riposo. Ad un certo momento la massa si stacca dalla parete e cade rimanendo attaccata alla molla; dopo una serie di oscillazioni si ferma in una nuova posizione di

equilibrio, esattamente 25 $cm$ sotto il chiodo che sostiene l'altra estremità della molla. Calcolate il lavoro fatto dalle forze d'attrito per fermare il moto della massa.

5. I quattro fili infinitamente lunghi disegnati in neretto nella figura di sinistra sono percorsi da una corrente di 15 $A$ ognuno nel verso indicato dalla freccia. Due fili sono paralleli all'asse $x$ (a distanze di 2.5 $cm$ e 0.5 $cm$), mentre gli altri due sono paralleli all'asse $y$ (a distanze di 1.0 $cm$ e 1.5 $cm$). Determinare il campo magnetico nell'origine e la forza per unità di lunghezza che agisce tra la coppia di fili paralleli all'asse $x$.




6. Considerate il circuito nella figura di destra in cui tutti i resistori hanno una resistenza pari a $R = 1\,k\Omega$, il capacitore ha una capacità pari a $C = 20\,\mu F$ e il generatore di f.e.m. produce una differenza di potenziale pari a $f = 48\,V$. Al tempo iniziale il condensatore è scarico e poi alla chiusura del circuito inizia a caricarsi. Calcolate quale sia la differenza di potenziale tra i due punti neri in figura nel momento in cui la carica sul condensatore è pari alla metà del valore massimo finale.

7. Si considerino 3 sbarre (cilindri pieni) di raggio $r = 3\,cm$ uniformemente cariche. Le sbarre sono appoggiate l'una alle altre in modo che i loro assi siano paralleli e ad una distanza pari a $2r$ l'uno dagli altri. Due sbarre hanno una densità di carica pari a $\rho_+ = 1\,nC/cm^3$, mentre la terza ha una densità di carica pari a $\rho_- = -2\,nC/cm^3$. Si calcoli il campo elettrico al centro dello spazio tra le sbarre, ossia lungo quella retta parallela agli assi delle sbarre e da essi equidistante.

8. Una particella con rapporto tra carica elettrica e massa pari $q/m = 10\,C/kg$ è ferma nell'origine. Al tempo $t = 0$ viene acceso un campo elettrico uniforme $\vec{E} = (0.1, 0.2, 0)\,V/m$. Al tempo $t_1 = 2\,s$ viene spento il campo elettrico e viene acceso un campo magnetico di intensità pari a $B = \frac{\pi}{10}\,T$ nella direzione positiva dell'asse $z$. Al tempo $t_2 = 4\,s$ viene spento il campo magnetico e riacceso il campo elettrico $\vec{E}$. Calcolare posizione e velocità della particella ai tempi $t_1$, $t_2$ e $t_3 = 6\,s$.

## Soluzioni

1. Nella direzione verticale la legge oraria è

$$y(t) = v_y t - \frac{1}{2} g t^2$$

Il tempo $t^*$ per cui $y(t^*) = h$ risolve quindi l'equazione

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_y t + h = 0$$

le cui soluzioni sono

$$t^* = \frac{v_y \pm \sqrt{v_y^2 - 2gh}}{g}$$

Notiamo che con i dati del problema l'argomento della radice è nullo ($v_y^2 - 2gh = 0$), ossia le due soluzioni coincidono. In altre parole il punto ad altezza $h$ è anche il massimo raggiunto dalla traiettoria per un tempo $t^* = v_y/g$. L'acrobata deve quindi saltare ad una distanza dal cerchio pari a

$$\Delta x = v_x t^* = \frac{v_x v_y}{g} = 2.0\, m$$

Quando l'acrobata passa per il cerchio la componente verticale della sua velocità è nulla

$$v_y(t^*) = v_y - g t^* = 0$$

Quindi in quel momento la sua velocità è data solo dalla componente orizzontale pari a $v_x = 3.5\, m/s$.

2. Un attimo prima della rottura, quando ha la tensione massima, l'elastico ha raggiunto una lunghezza $r_{\max}$ che soddisfa l'equazione

$$T_{\max} = k(r_{\max} - \ell) \quad \Longrightarrow \quad r_{\max} = \ell + \frac{T_{\max}}{k} = 0.7\, m$$

La tensione dell'elastico è anche legata alla forza centripeta dalla relazione

$$T_{\max} = \frac{m v^2}{r_{\max}}$$

L'energia cinetica può quindi essere scritta come

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} r_{\max} T_{\max} = 7\, J$$

3. Chiamiamo $\theta$ l'angolo tra la trave e il suolo orizzontale. Il lavoro che dovete fare per portare la cassa ad $h = 3\,m$ di altezza è pari alla differenza di energia potenziale gravitazionale $\Delta U = mgh$ piú il valore assoluto del lavoro dissipato dalle forze di attrito. Questo secondo contributo vale

$$|L_{attr}| = \mu_d mg \cos\theta \frac{h}{\sin\theta} = \mu_d \frac{mgh}{\tan\theta}$$

dove $h/\sin\theta$ è lo spostamento lungo la trave (che è tanto maggiore quanto meno inclinata è la trave). Per minimizzare il lavoro da compiere per portare in alto la cassa dobbiamo minimizzare $|L_{attr}|$ rispetto a $\theta$ visto che $\Delta U$ non dipende da $\theta$. Essendo $|L_{attr}|$ una funzione decrescente di $\theta$ il minimo lavoro si ottiene massimizzando $\theta$ sotto i due vincoli dati dal problema. Il primo vincolo dice che la somma della proiezione longitudinale della forza peso e della forza d'attrito dinamica deve essere minore di $F_{\max}$

$$mg\sin\theta + \mu_d mg\cos\theta < F_{\max}$$

mentre il secondo chiede che la massima forza d'attrito statica sia maggiore della proiezione longitudinale della forza peso

$$mg\sin\theta < \mu_s mg\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad \tan\theta < \mu_s$$

Quale di questi due vincoli è piú stringente e determina il valore massimo di $\theta$ che possiamo usare dipende dai valori di $m$ e $F_{\max}$. Visto che la soluzione analitica del primo vincolo richiede l'uso della trigonometria e la soluzione di un'equazione del secondo grado, conviene mettersi al valore di $\theta$ che risolve il secondo vincolo $\theta_s = \tan^{-1}(\mu_s) \simeq 35^{o}$ e semplicemente *verificare* se il primo vincolo è soddisfatto o violato. Nel caso $m = 100\,kg$ abbiamo che

$$mg\sin\theta_s + \mu_d mg\cos\theta_s = 803\,N < F_{\max} = 900\,N$$

ossia il primo vincolo è verificato e quindi si deve inclinare la trave di un angolo $\theta_s$. Il relativo lavoro è pari a

$$mgh\left(1 + \frac{\mu_d}{\mu_s}\right) = 4200\,J$$

Invece nel caso $m = 150\,kg$ il primo vincolo per $\theta = \theta_s$ è violato perché

$$mg\sin\theta_s + \mu_d mg\cos\theta_s = 1205\,N > F_{\max} = 900\,N$$

Di conseguenza si deve inclinare la trave di meno e precisamente di un angolo $\theta^*$ che risolve

$$mg\sin\theta^* + \mu_d mg\cos\theta^* = F_{\max}$$

La soluzione di questa equazione per i dati del problema è pari a $\theta^* = 0.335\,rad \simeq 19^o$ e fornisce un valore per il lavoro minimo pari a

$$mgh\left(1+\frac{\mu_d}{\tan\theta}\right) = 8208\,J$$

Notate che per far salire una cassa che pesa una volta e mezza quella di prima usiamo quasi il doppio dell'energia, perché non possiamo farla salire con la pendenza $\theta_s$ di prima.

4. Per risolvere questo problema è sufficiente usare il teorema dell'energia meccanica totale. L'energia dissipata in attrito è pari alla differenza tra la variazione di energia potenziale gravitazionale e quella dell'energia potenziale elastica della molla.

$$L_{attr} = mg(h_f - h_i) + \frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$$

dove $h$ è l'altezza della massa e $x$ è l'allungamento della molla relativamente alla lunghezza a riposo. La costante elastica della molla può essere ottenuta dal calcolo delle forze nella posizione finale

$$mg = kx \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{mg}{x}$$

dove $m = 2\,kg$ e $x = 0.15\,m$. Sostituendo nella formula precedente si ottiene

$$L_{attr} = -mg\Delta h + \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{x}\right)x^2 = -mg\Delta h + \frac{1}{2}mgx = -3.43\,J$$

5. Bisogna usare solo la legge di Biot-Savart. I fili paralleli all'asse $x$ (risp. $y$) danno nell'origine un campo magnetico nella direzione $y$ (risp. $x$). Inoltre la regola della mano destra ci permette di capire che ogni filo fornisce un contributo di verso negativo. Numericamente abbiamo che le due componenti del campo nell'origine sono pari a

$$B_x = -k_m i\left(\frac{1}{10^{-2}} + \frac{1}{1.5\,10^{-2}}\right) = -5\cdot 10^{-4}\,T$$

e

$$B_y = -k_m i\left(\frac{1}{0.5\,10^{-2}} + \frac{1}{2.5\,10^{-2}}\right) = -7.2\cdot 10^{-4}\,T$$

dove $i = 15\,A$, mentre $B_z = 0$. La forza tra i due fili paralleli all'asse $x$ è attrattiva e pari a

$$\frac{F_m}{L} = k_m\frac{i^2}{0.03} = 1.5\cdot 10^{-3}\,N/m$$

6. Le tre resistenze nel ramo in alto equivalgono ad una resistenza $R_1 = 3/2R$. Nel momento in cui il capacitore si è caricato con la metà della massima carica, la differenza di potenziale tra le sue facce è pari a $-f/2$ e di conseguenza la differenza di potenziale agli estremi del ramo in basso (e quindi agli estremi

di ognuno dei 3 rami) è pari a $f/2$. La corrente nel ramo in alto è quindi pari a $i_1 = (f/2)/R_1 = f/(3R)$ e quella nel ramo in mezzo è pari a $i_2 = (f/2)/R$. La differenza di potenziale tra i punti neri in figura può essere calcolata come la differenza tra le cadute di potenziale dovute alle due resistenze piú a destra

$$\Delta V = i_2 R - i_1 R = f/6 = 8\,V$$

7. Per ragioni di simmetria il campo elettrico prodotto da un cilindro infinitamente lungo e uniformemente carico è diretto in direzione radiale e nel piano ortogonale all'asse del cilindro. La sua intensità può essere calcolata con l'uso del teorema di Gauss considerando come superficie gaussiana un cilindro coassiale di raggio $R$ (maggiore di $r$) ed altezza $h$: l'area della superficie laterale di questo cilindro è pari a $2\pi Rh$ e il campo elettrico attraversa questa superficie in modo ortogonale. La carica contenuta all'interno della superficie gaussiana è pari a $Q_{int} = \rho\pi r^2 h$. Quindi l'intensità del campo elettrico a distanza $R$ può essere dedotta dal teorema di Gauss

$$2\pi RhE(R) = \rho\pi r^2 h/\varepsilon_0 \quad \Longrightarrow \quad E(R) = \frac{\rho r^2}{2\varepsilon_0 R}$$

Per calcolare la somma dei campi elettrici prodotti dalle tre sbarre, invece di fare la somma vettoriale, possiamo ragionare come segue: se le tre sbarre avessero la stessa densità, per simmetria la somma dei 3 campi sarebbe nulla, quindi possiamo aumentare o diminuire la densità delle sbarre della stessa quantità senza che il risultato della somma cambi. Quindi aggiungiamo alle densità un valore pari a $-\rho_+$ tale che due sbarre diventino neutre e il campo è dato solo dalla terza. Quindi il campo elettrico è diretto nella direzione dell'asse della sbarra carica negativamente e di intensità pari a

$$E = \left| \frac{(\rho_- - \rho_+) r^2}{2\varepsilon_0 R} \right| = 4.4\,10^6\,V/m$$

dove $R = r/\cos(30^\text{o})$ è la distanza dall'asse della sbarra del punto in cui si vuole calcolare il campo elettrico.

8. Nel primo tratto la particella segue un moto uniformemente accelerato con accelerazione pari a $q\,E/m = (1,2)\,m/s^2$, quindi al tempo $t_1$ si trova nella posizione $x_1 = a\,t_1^2/2 = (2,4,0)\,m$ con velocità pari a $v_1 = a\,t_1 = (2,4,0)\,m/s$. Nel secondo tratto segue un moto circolare uniforme di raggio $R = \frac{m\,v_1}{q\,B}$ nel piano $xy$. La cosa fondamentale da notare è che il periodo di questo moto circolare è pari a $T = \frac{2\pi\,m}{q\,B} = 2\,s$. Quindi al tempo $t_2$ la particella si trova esattamente nelle condizioni che aveva al tempo $t_1$, ossia nella posizione $x_2 = x_1$ con velocità $v_2 = v_1$. Infine nel terzo tratto continua il moto uniformemente accelerato del primo tratto, arrivando al tempo $t_3$ nella posizione $x_3 = a\,t_3^2/2 = (18,36,0)\,m$ e alla velocità $v_3 = a\,t_3 = (6,12,0)\,m/s$.