

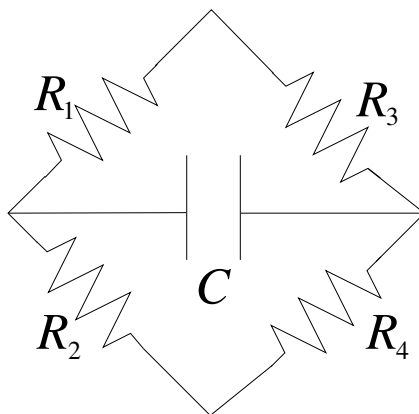
Prova scritta del corso di Fisica con soluzioni

Prof. F. Ricci-Tersenghi

14/11/2014

Quesiti

1. Si deve trascinare una cassa di massa $m = 250 \text{ kg}$, tirandola con una fune e facendola scorrere su un piano scabro orizzontale, che ha un coefficiente d'attrito statico $\mu_s = 0.58$. Quale è l'inclinazione θ della fune rispetto al piano orizzontale che permette di svolgere questa operazione usando la minima forza possibile? Quale deve essere la tensione minima sopportabile dalla fune per mettere in movimento la cassa? Una volta in movimento, se volessimo tirare la cassa con una fune che si rompe se la tensione supera il valore minimo appena calcolato, ma tenendola in posizione orizzontale, quale è il valore massimo del coefficiente d'attrito dinamico μ_d che ci permette di fare ciò?



2. Un condensatore di capacità $C = 100 \text{ pF}$ è inizialmente carico con una carica di modulo pari a $Q = 120 \text{ nC}$ su ogni armatura. Viene quindi inserito in un circuito come in figura, formato da quattro resistenze con i seguenti valori: $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$ e $R_4 = 4 \text{ k}\Omega$. Si calcoli l'energia dissipata da ognuna delle 4 resistenze nel processo di scarica del condensatore.

3. Si assuma che nello spazio sia presente un potenziale elettrostatico pari a

$$V(x, y, z) = \frac{V_0}{1 + x^2 + y^2 + z^2},$$

dove $V_0 = 500 V$ e le coordinate spaziali x , y e z sono misurate in metri. Si consideri un protone ($m = 1.6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, $q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$) posto con velocità nulla nel punto di coordinate $(1, 2, -2)$ e si calcolino la sua traiettoria e la sua velocità a tempi grandi.

Se al posto del protone ci fosse stato un'elettrone (sempre con velocità iniziale nulla), quale sarebbe stata la sua traiettoria, ossia il luogo dei punti visitati durante il moto?

4. Un dispositivo posto nell'origine emette lungo la direzione positiva dell'asse x particelle con rapporto massa su carica pari a $m/q = 10^{-8}$ e velocità al più pari a $v_{max} = 10^5 \text{ m/s}$. Nella regione di spazio $x \in [x_0, x_0 + d)$ (con $x_0 > 0$ e $d = 10 \text{ cm}$) è presente un campo magnetico di intensità $B = 10 \text{ G}$ diretto nella direzione positiva dell'asse z , mentre nella regione $x \in (x_0 + d, x_0 + 2d]$ lo stesso campo ha direzione opposta. In $x = x_1$ (con $x_1 > x_0 + 2d$) è presente uno schermo che rivela le particelle. Si discuta la traiettoria seguita dalle particelle, determinando, in particolare, quali particelle finiscono sullo schermo e in quali posizioni.

Si ricordi che per $\theta \ll 1$ le seguenti approssimazioni possono essere usate: $\sin \theta \simeq \theta$ e $\cos \theta \simeq 1 - \theta^2/2$.

Soluzioni

1. Applicando una tensione T alla corda inclinata di un'angolo θ rispetto al piano orizzontale si hanno le seguenti componenti verticale ed orizzontale per la risultante delle forze sulla cassa

$$R_y = T \sin \theta - mg + N = 0 \quad \Longrightarrow \quad N = mg - T \sin \theta$$

$$R_x = T \cos \theta - F_{attr} = T \cos \theta - \mu_s N = T(\cos \theta + \mu_s \sin \theta) - \mu_s mg > 0$$

dove l'ultima disuguaglianza è richiesta dal fatto che vogliamo mettere in movimento la cassa. Quindi la tensione richiesta è almeno pari a

$$T_{min}(\theta) = \frac{\mu_s mg}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta}$$

che assume il valore minimo per l'angolo θ_{min} che massimizza il denominatore (in pratica vuol dire che se tiriamo la cassa con una fune inclinata di un angolo $\theta \neq \theta_{min}$ facciamo una fatica inutile). Il massimo di una funzione si ottiene mettendo a zero la sua derivata prima, da cui

$$-\sin \theta_{min} + \mu_s \cos \theta_{min} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu_s = \tan(\theta_{min}) \quad \theta_{min} = \arctan(\mu_s) \simeq 30^\circ$$

Per $\theta = \theta_{min}$ si ottiene il valore minimo di tensione che deve essere sopportabile dalla fune, pari a

$$T_{min}(\theta_{min}) = mg \sin \theta_{min} = \frac{\mu_s mg}{\sqrt{1 + \mu_s^2}} \simeq 1230 \text{ N}$$

Usando una fune che può sopportare al più una tensione pari a T_{min} la cassa rimane in movimento con la fune orizzontale ($\theta = 0$) solo se tale tensione è maggiore della forza d'attrito

$$T_{min} > mg\mu_d \quad \Longrightarrow \quad \mu_d < \frac{T_{min}}{mg} = \frac{\mu_s}{\sqrt{1 + \mu_s^2}} \simeq 0.50$$

2. L'energia inizialmente immagazzinata nel condensatore è pari a

$$E_0 = \frac{Q^2}{2C} = 7.2 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

Quando il condensatore viene inserito nel circuito, genera delle correnti (dipendenti dal tempo) che attraversano le 4 resistenze e disperdono energia per effetto Joule. L'energia dissipata su una resistenza può essere scritta integrando nel tempo la potenza (energia per unità di tempo), la quale può essere scritta in diversi modi possibili:

$$E = \int_0^\infty P(t) dt, \quad P(t) = V(t) i(t) = R i(t)^2 = \frac{V(t)^2}{R}.$$

Se due resistenze R e R' sono in serie, la corrente che le attraversa $i(t)$ è la stessa e di conseguenza le energie disperse sulle due resistenze

$$E = \int_0^\infty R i(t)^2 dt \quad E' = \int_0^\infty R' i(t)^2 dt$$

sono proporzionali alle resistenze stesse. Nel caso di due resistenze R e R' in parallelo è la differenza di potenziale $V(t)$ ad essere uguale per le due resistenze, da cui si ottiene che le energie disperse

$$E = \int_0^\infty \frac{V(t)^2}{R} dt \quad E' = \int_0^\infty \frac{V(t)^2}{R'} dt$$

sono inversamente proporzionali alle resistenze.

Usando queste proporzioni per il caso del circuito in figura, in cui le resistenze equivalenti del ramo superiore ed inferiore sono pari a $R_{13} = R_1 + R_3$ e $R_{24} = R_2 + R_4$, si ottengono le seguenti equazioni per le energie E_1, E_2, E_3 ed E_4 dissipate sulle 4 resistenze

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 + E_3 + E_4 &= E_0 \\ R_{13}(E_1 + E_3) &= R_{24}(E_2 + E_4) \\ E_1/R_1 &= E_3/R_3 \\ E_2/R_2 &= E_4/R_4 \end{aligned}$$

la cui soluzione è

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{3}{20} E_0 = 10.8 \cdot 10^{-6} J \\ E_2 &= \frac{2}{15} E_0 = 9.6 \cdot 10^{-6} J \\ E_3 &= \frac{9}{20} E_0 = 32.4 \cdot 10^{-6} J \\ E_4 &= \frac{4}{15} E_0 = 19.2 \cdot 10^{-6} J \end{aligned}$$

3. Il potenziale $V(x, y, z)$ è radiale. Essendo la velocità iniziale della particella nulla, il moto avviene lungo un raggio, ossia lungo la retta che congiunge il punto iniziale con l'origine. Lungo tale retta il moto si riduce ad un moto unidimensionale in presenza di un potenziale

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + r^2}$$

Il punto iniziale corrisponde lungo tale retta ad una posizione $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{9} = 3m$. Il protone, avendo carica positiva, si muove verso i punti in cui il potenziale $V(r)$ è minore, ossia lungo la retta passante per l'origine ed il punto iniziale, aumentando la distanza r dall'origine. A tempi lunghi la sua velocità può essere calcolata grazie alla conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV(r_0) \implies v = \sqrt{2\frac{q}{m}V(r_0)} = \sqrt{\frac{2qV_0}{m(1+r_0^2)}} = 10^5 \text{ m/s}$$

Nel caso dell'elettrone la forza è diretta verso l'origine (l'elettrone ha carica negativa e tende ad andare verso i punti in cui il potenziale è maggiore). Il moto si svolgerà quindi sempre sulla stessa retta, ma tra le coordinate r_0 e $-r_0$. La velocità è massima nell'origine e si annulla in $-r_0$: è una sorta di oscillatore anarmonico (il potenziale non è esattamente parabolico).

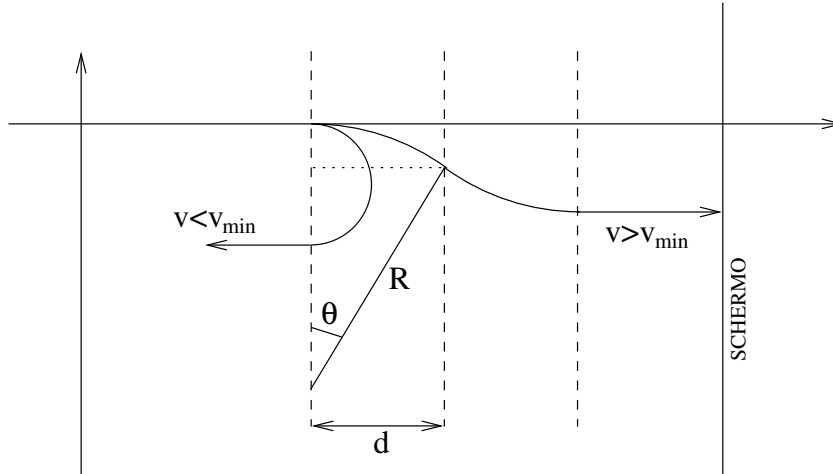
4. Ogni particella si muove con velocità costante, quella con cui è stata emessa dal dispositivo (perché la forza di Lorentz non compie lavoro): all'inizio lungo la direzione positiva dell'asse x ; poi nella regione di spazio $x_0 \leq x < x_0 + d$ curvando verso destra, ossia verso le y negative, con raggio di curvatura $R = mv/(qB)$; infine (se ci arriva) nella regione $x_0 + d < x \leq x_0 + 2d$ curvando in direzione opposta con lo stesso raggio di curvatura e per $x > x_0 + 2d$ di moto rettilineo. Quest'ultimo moto rettilineo è parallelo all'asse x perché le curve eseguite nella prima e nella seconda regione con il campo sono uguali e in direzioni opposte (si veda la figura).

Le particelle che non raggiungono lo schermo sono quelle la cui velocità è tale che $R < d$, ossia quelle per cui

$$v < v_{min} = \frac{qBd}{m} = 10^4 \text{ m/s}$$

Le particelle che raggiungono lo schermo sono solo quelle con velocità $v \in [v_{min}, v_{max}]$. Per calcolare in quali punti dello schermo finiscono queste particelle è sufficiente calcolare il punto raggiunto dalle più lente ($v = v_{min}$) e dalle più veloci ($v = v_{max}$), e le posizioni di tutte le altre sono contenute in questo intervallo.

Le particelle con $v = v_{min}$ alla fine della prima regione con il campo magnetico hanno effettuato esattamente un quarto di circonferenza di raggio $R = d$ e sono quindi nel punto di coordinate $(x_0 + d, -d)$; dopo la seconda regione con il campo, avendo seguito un quarto di circonferenza nell'altra direzione, hanno raggiunto il punto $(x_0 + 2d, -2d)$; infine raggiungono lo schermo nel punto di coordinate $(x_1, -2d) = (x_1, -20 \text{ cm})$.



Per le particelle con $v = v_{max}$, seguendo la notazione in figura, si può calcolare la posizione alla fine della prima regione con campo, che viene pari a $(x_0 + d, -(1 - \cos \theta)R_{max})$, dove $R_{max} = mv_{max}/(qB)$ e l'angolo θ è determinato dall'equazione $d = R_{max} \sin \theta$. Come nel caso precedente, nella seconda regione con il campo la traiettoria seguita è nuovamente un arco di circonferenza con lo stesso raggio della prima regione, ma curvatura opposta, con il risultato che le particelle si trovano in $(x_0 + 2d, -2(1 - \cos \theta)R_{max})$ alla fine della seconda regione con il campo e urtano lo schermo in $(x_1, -2(1 - \cos \theta)R_{max})$. Per calcolare il valore numerico di questo punto senza usare le funzioni trigonometriche inverse, notiamo che $d/R_{max} = 0.1$ e possiamo quindi fare le seguenti approssimazioni

$$d = R_{max} \sin \theta \simeq R_{max} \theta \quad \implies \quad \theta = \frac{d}{R_{max}}$$

$$-2(1 - \cos \theta)R_{max} \simeq -\theta^2 R_{max} \simeq -\frac{d^2}{R_{max}} = -1 \text{ cm}$$

Quindi le particelle che raggiungono lo schermo lo fanno in punti la cui coordinata y è compresa tra -20 cm e -1 cm .