Prova scritta del corso di Fisica e Fisica 2 con soluzioni

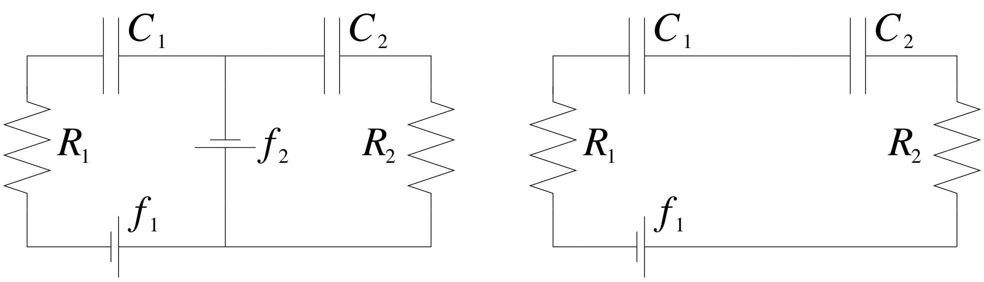
Prof. F. Ricci-Tersenghi

15/04/2014

Quesiti

1. Un corpo di massa $m = 1\,kg$ è appoggiato su di un piano scabro inclinato di $\theta = 20^o$ rispetto all'orizzontale i cui coefficienti di attrito statico e dinamico sono rispettivamente $\mu_s = 0.3$ e $\mu_d = 0.2$. La massa è attaccata ad una molla di costante elastica $k = 30\,N/m$ che è posizionata parallelamente al piano. Facendo riferimento ad un asse cartesiano parallelo al piano, con l'origine nel punto di riposo della molla e diretto verso il basso, si calcolino le posizioni in cui la massa può rimanere ferma. Se la massa viene posizionata ferma nell'origine, si calcoli in quale posizione si fermerà.

2. Il circuito nella figura di sinistra è composto da due generatori di f.e.m. $f_1 = 6\,V$ e $f_2 = 12\,V$, due resistori $R_1 = R_2 = 10\,k\Omega$ e due condensatori $C_1 = C_2 = 200\,pF$. Sapendo che nel circuito non sta circolando alcuna corrente si calcolino le cariche sui due condensatori, indicando quali siano le armature cariche positivamente. Se ad un certo istante viene eliminato istantaneamente il generatore di f.e.m. f_2 (come nella figura a destra) e si lascia che il circuito ritorni in condizione di equilibrio (ossia assenza di correnti). Si calcolino nuovamente le cariche sui due condensatori in questa nuova situazione.



3. Due sfere metalliche di raggio $R_1 = 1\,cm$ e $R_2 = 2\,cm$ sono in contatto e viene loro fornita con una carica $Q = 60\,nC$. Le sfere vengono quindi allontanate in una posizione tale che i loro centri distano $d = 10\,m$. Si calcoli il campo elettrico da esse generato nel punto che si trova a metà del segmento di lunghezza d che connette i centri delle sfere. Si calcoli inoltre il lavoro necessario a portare un elettrone dalla sfera di raggio R_1 a quella di raggio R_2.

4. Un cubo di lato $L = 6\,cm$ centrato nell'origine è uniformemente carico con densità di carica pari a $\rho = 50\,\mu C/m^3$. Si calcoli il flusso del campo elettrico generato dal cubo attraverso due superfici sferiche centrate nell'origine e di raggi $r_1 = 2\,cm$ e $r_2 = 6\,cm$.

5. Un cavo coassiale è composto da un conduttore cilindrico di raggio $r_1 = 1\,mm$ (l'anima), uno strato isolante spesso $2\,mm$ e un secondo conduttore (la maglia) che avvolge lo strato isolante. Se nell'anima e nella maglia scorrono correnti elettriche costanti e di verso opposto, con intensità $i = 10\,A$ si calcoli il campo magnetico nello strato isolante e fuori dal cavo.

Soluzioni

1. Le posizioni in cui la massa può rimanere ferma sono quelle in cui la componente parallela al piano della risultante della somma della forza peso e della forza elastica è in modulo minore della forza d'attrito statica, ossia

$$|mg\sin\theta - kx| < \mu_s mg\cos\theta \implies -\mu_s mg\cos\theta < mg\sin\theta - kx < \mu_s mg\cos\theta\ .$$

   Risolvendo le ultime due disuguaglianze possiamo ottenere i valori limite per la posizione in cui la massa è stabile

$$x_{\min} = \frac{mg}{k}(\sin\theta - \mu_s\cos\theta) = 2\,cm \qquad x_{\max} = \frac{mg}{k}(\sin\theta + \mu_s\cos\theta) = 20\,cm$$

   Posizionando la massa ferma in $x = 0$ questa si mette in moto dato che $x = 0$ non appartiene all'intervallo $[x_{\min}, x_{\max}]$ in cui la massa rimane ferma. Per calcolare il punto x_* in cui si fermerà possiamo imporre che la perdita di energia potenziale deve uguagliare la dissipazione di energia in attrito dinamico, visto che tra il punto iniziale e quello finale non vi è variazione dell'energia cinetica:

$$\Delta U = L_{\text{attr}} \implies \frac{1}{2}kx_*^2 - mgx_*\sin\theta = -\mu_d mgx_*\cos\theta \implies x_* = \frac{2mg}{k}(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) = 10\,cm$$

   Il punto x_* appartiene all'intervallo $[x_{\min}, x_{\max}]$ e quindi la massa rimane ferma in quel punto.

2. Applicando la legge delle maglie alle due maglie quadrate del circuito possiamo scrivere

$$\Delta V_1 + f_2 - f_1 = 0 \qquad \Delta V_2 - f_2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta V_1 = f_1 - f_2 = -6\,V \qquad \Delta V_2 = f_2 = 12\,V\ ,$$

   dove $\Delta V_{1,2}$ sono le differenze di potenziale passando dall'armatura di sinistra a quella di destra dei condensatori. Il fatto che ΔV_1 sia negativo vuol dire che sul primo condensatore l'armatura di sinistra è quella con carica positiva, mentre sul secondo condensatore la carica positiva è sull'armatura di destra. La carica (in valore assoluto) su ogni armatura del primo condensatore è pari a $Q_1 = C_1|\Delta V_1| = 1.2\,nC$ e sul secondo è pari a $Q_2 = C_2|\Delta V_2| = 2.4\,nC$.

   Nel momento in cui viene tolto il generatore di f.e.m. f_2 il circuito può essere risolto sempre con la legge delle maglie

$$\Delta V_1' + \Delta V_2' - f_1 = 0\ ,$$

   dove $\Delta V_{1,2}'$ sono le nuove differenze di potenziale ai capi dei due condensatori, ma dobbiamo anche imporre che la carica nel tratto di circuito tra i due condensatori deve mantenersi costante (quel tratto di circuito è isolato dal generatore di f.e.m.): questa condizione e l'ultima equazione scritta sono sufficienti a trovare i valori delle nuove cariche sui condensatori.

Tuttavia prima di risolvere il problema algebricamente, proviamo a vedere se la soluzione precedente (quella in presenza del generatore di f.e.m. f_2) risolve anche le nuove equazioni. Infatti notiamo che $\Delta V_1 + \Delta V_2 = f_1$ e quindi la soluzione $\Delta V_1' = \Delta V_1$ e $\Delta V_2' = \Delta V_2$ è quella giusta, visto che le cariche sono le stesse di prima e quindi anche la carica tra i due condensatori rimane la stessa.

In pratica togliendo il generatore di f.e.m. f_2 il circuito rimane in equilibrio, non si genera alcuna corrente e cariche non si spostano.

3. La carica Q fornita alle due sfere conduttrici si distribuisce tra di esse in modo proporzionale alle loro capacità elettrostatiche, $C = 4\pi\epsilon_0 R$, ossia $Q_1 = Q/3$ e $Q_2 = 2Q/3$. Per definizione le due sfere sono allo stesso potenziale elettrostatico.

   La distanza a cui vengono portate le sfere è molto maggiore dei loro diametri e quindi possiamo trascurare il fatto che le cariche elettriche su una sfera non sono distribuite in modo perfettamente omogeneo sulla superficie a causa del campo elettrico generato dall'altra. Ipotizzando quindi che la carica sia distribuita in modo omogeneo, il campo elettrico generato da una sfera è identico a quello generato da una carica puntiforme posta nel centro della sfera.

   Il campo nel punto di mezzo del segmento che unisce i centri è quindi diretto lungo tale segmento nella direzione della sfera piú piccola e di intensità pari a

$$E = k_0 \frac{Q_2 - Q_1}{(d/2)^2} = k_0 \frac{4Q}{3d^2} = 7.2\, V/m$$

   Dato che le due sfere sono allo stesso potenziale elettrico, lo spostamento di una carica elettrica (molto piú piccola di Q) da una sfera all'altra non costa alcun lavoro.

4. Per calcolare il flusso del campo elettrico usiamo il teorema di Gauss, $\Phi(E) = Q_{\text{int}}/\epsilon_0$, dove Q_{int} è la carica contenuta nella superficie gaussiana.

   La sfera di raggio r_1 è completamente contenuta nel cubo essendo $r_1 < L/2$. Quindi la carica interna è pari a $Q_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \rho$ e il flusso è pari a

$$\Phi_1(E) = \frac{4\pi r_1^3 \rho}{3\epsilon_0} = 189\, Vm$$

La sfera di raggio r_2 contiene completamente il cubo essendo $r_2 > \sqrt{3}L/2 = 5.19\,cm$. Quindi la carica interna è pari a $Q_2 = L^3\rho$ e il flusso è pari a

$$\Phi_1(E) = \frac{L^3\rho}{\epsilon_0} = 1220\,Vm$$

5. Per ragioni di simmetria le linee di forza del campo magnetico sono dei cerchi centrati sull'asse del cavo e ad esso ortogonali. L'intensità del campo magnetico ad una distanza d dall'asse può essere calcolato con il teorema d'Ampere applicato ad un cerchio di raggio d centrato sull'asse del cavo. Per distanze $1\,mm < d < 3\,mm$ (ossia nello strato isolante) si ha

$$2\pi dB = \mu_0 i \implies B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}\ ,$$

mentre fuori dal cavo il campo magnetico è nullo perché le due correnti sommano a zero.