Esercizi e soluzioni della prova scritta del 16 luglio 2012

Prof. F. Ricci-Tersenghi

16/07/2012

1. Un uomo di $80\,kg$ pratica il bungee jumping (salto con l'elastico) lanciandosi da un ponte alto $120\,m$ attaccato ad una corda elastica lunga $50\,m$ a riposo. Quale deve essere la minima costante elastica della corda affinché l'uomo non raggiunga terra. Trascurate il peso della corda, l'attrito tra l'uomo e l'aria, e gli attriti interni alla corda (ossia ipotizzate che sia una molla ideale).

2. Una pietra di $1\,kg$ si stacca da uno sperone di roccia in montagna e cade al suolo dopo un lungo volo. Ipotizzando che la forza d'attrito prodotta dall'aria sia ben descritta dalla formula $F = -Av$, dove v è la velocità della pietra e il coefficiente d'attrito è $A = 0.01\,kg/s$, calcolate il tempo di volo della pietra, sapendo che l'energia cinetica con cui è arrivata al suolo è pari a $5000\,J$.

3. Un uomo che nuota a velocità costante pari a $1\,m/s$ vuole attraversare un fiume che scorre alla velocità di $0.5\,m/s$ in modo da arrivare all'altra riva in un punto che non sia né piú a monte né piú a valle del punto da cui parte. In quale direzione deve nuotare per riuscire nel suo scopo?

4. Considerate un circuito composto da un generatore di f.e.m. f con una resistenza interna r, messo in parallelo ad una resistenza R e ad un condensatore di capacità C inizialmente scarico. Calcolate la massima corrente che passa per la resistenza R e la massima carica positiva accumulatasi sul condensatore.

5. Si considerino due solenoidi coassiali, quello esterno ha un diametro di $10\,cm$ e 5 spire per centimetro, mentre quello interno ha un diametro di $4\,cm$ e 20 spire per centimetro. Entrambi i solenoidi sono percorsi da una corrente di $40\,A$, ma in versi opposti. Si calcoli l'intensità del campo magnetico in un punto lungo l'asse dei solenoidi, in un punto a distanza $d_1 = 3\,cm$ dall'asse e in un punto a distanza $d_2 = 6\,cm$.

6. Considerate uno spazio bidimensionale in cui è presente un potenziale elettrico a simmetria radiale che dipende dalla distanza secondo la formula
$$V(r) = \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r}$$
dove r è espresso in metri e il potenziale in Volt. Calcolate il campo elettrico nei punti di coordinate $(1/2, 1/2)$, $(0, 1)$ e $(3/2, 0)$. Quanto lavoro si deve compiere per portare un elettrone ($q = -1.6\,10^{-19}\,C$, $m = 9.1\,10^{-31}\,Kg$) dal primo di questi tre punti all'ultimo, passando per il secondo?

7. Considerate un cubo di lato $\ell = 10\,cm$ uniformemente carico con densità di carica $\rho = 6\,\mu C/m^3$ e calcolate il campo elettrico in un punto che si trovi al centro di una faccia del cubo.

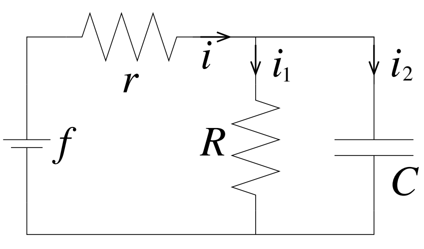
Soluzioni

1. Se l'uomo salta con una corda elastica che ha la costante elastica minima a permettergli di non urtare il suolo, raggiungerà quest'ultimo con velocità nulla. In questa situazione tutta la sua energia potenziale gravitazionale mgh (con $m = 80\,kg$ e $h = 120\,m$) è stata trasferita nell'energia potenziale della corda $K\Delta x^2/2$ (dove $\Delta x = (120 - 50)m = 70\,m$ è l'allungamento della corda). Da cui
$$K = \frac{2mgh}{\Delta x^2} = 38.4\,N/m$$
Nel caso realistico in cui la corda è legata ai piedi dell'uomo si può considerare che il massimo allungamento accettabile sia circa $\Delta x \simeq 68\,m$ da cui $K \simeq 40.7\,N/m$. Entrambe le soluzioni sono accettabili.

2. Le forze che agiscono sulla pietra che cade sono la forza peso e la forza d'attrito con l'aria, per cui l'equazione che determina la sua velocità al tempo t è data da
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - Av\ ,$$
la cui soluzione è
$$v(t) = \frac{mg}{A}\left(1 - e^{-At/m}\right)$$
Dato che a noi interessa il tempo impiegato dalla pietra a raggiungere una certa velocità (quella con cui raggiunge il suolo) dobbiamo risolvere l'ultima equazione rispetto al tempo
$$t = -\frac{m}{A}\log\left(1 - \frac{Av}{gm}\right)$$
La velocità con cui la pietra raggiunge il suolo si ricava dalla sua energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2 = 5000\,J$ ed è pari a $v = 100\,m/s$. Il risultato finale è che il temo di caduta della pietra è pari a $t = 10.76\,s$.

3. La direzione di nuoto dell'uomo deve essere tale che la componente della sua velocità di nuoto $v = 1\,m/s$ nella direzione in cui scorre il fiume compensi esattamente la velocità del fiume $w = 0.5\,m/s$. Ossia se chiamiamo θ l'angolo che forma la direzione in cui nuota l'uomo relativamente alla direzione opposta a quella in cui scorre il fiume, abbiamo $\theta = \arccos(w/v) = 60^o$.

4. La figura mostra il circuito e la convenzione per i versi delle correnti ($i = i_1 + i_2$). Chiamiamo inoltre $Q(t)$ la carica positiva sul condensatore al tempo t, che è legata alla corrente i_2 dall'equazione $\mathrm{d}Q(t)/\mathrm{d}t = i_2$.



Scriviamo le leggi di Kirchhoff per le due maglie del circuito
$$f = r\,i + R\,i_1 \qquad R\,i_1 = \frac{Q}{C}$$

che insieme all'equazioni $i = i_1 + i_2$ e $\dot{Q}(t) = i_2$ permettono di determinare le 4 incognite, $Q(t)$, $i(t)$, $i_1(t)$ e $i_2(t)$. Risolviamo le equazioni eliminando le correnti con le equazioni

$$i_1 = \frac{Q}{RC} \qquad i_2 = \dot{Q} \qquad i = \dot{Q} + \frac{Q}{RC}$$

Così possiamo ottenere un'equazione che coinvolge solo la carica del condensatore (esattamente come abbiamo fatto a lezione per lo studio del circuito RC standard)

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right) = f$$

la cui soluzione che soddisfa $Q(0) = 0$ è

$$Q(t) = \frac{fCR}{r+R}\left(1 - e^{-\frac{r+R}{CrR}t}\right)$$

La massima carica sul condensatore si ottiene nel limite $t \to \infty$ quando questo è completamente carico ed è pari a $Q_{\max} = fCR/(r+R)$. La corrente che passa per la resistenza R è pari a

$$i_1(t) = \frac{f}{r+R}\left(1 - e^{-\frac{r+R}{CrR}t}\right)$$

che raggiunge nel limite $t \to \infty$ il suo massimo pari a $i_{\max} = f/(r+R)$.

I valori di $i_{\max}$ e $Q_{\max}$ possono essere ottenuti anche senza risolvere le equazioni differenziali, bensì considerando solo la situazione asintotica dopo che il condensatore si è completamento caricato. Se il condensatore è completamente carico, allora non riceve piú nessuna carica: quindi $i_2 = 0$ e $i_1 = i_{\max}$. In questa situazione vi è un'unica corrente che scorre attraverso le due resistenze di intensità pari a $i = f/(r+R) = i_1 = i_{\max}$. Inoltre in questa situazione la carica sul condensatore è massima e può essere determinata notando che la differenza di potenziale ai capi del condensatore è pari a quella ai capi della resistenza R, ossia $\Delta V = Ri$. Quindi $Q_{\max} = C\Delta V = fCR/(r+R)$.

5. Il solenoide piú esterno produce un campo magnetico al suo interno di intensità pari a $B_1 = \mu_0 n i = 2.5\,10^{-2}\,T$, mentre quello piú interno ne produce uno di intensità pari a $B_2 = 10^{-1}\,T$ e verso opposto rispetto al primo. Quindi lungo l'asse dei solenoidi il campo è di intensità pari a $B_2 - B_1 = 7.5\,10^{-2}\,T$, mentre a distanza $d_1 = 3\,cm$ dall'asse è di intensità pari a $B_1 = 2.5\,10^{-2}\,T$ ed infine a distanza $d_2 = 6\,cm$ è nullo perché il punto è esterno ad entrambi i solenoidi.

6. Il campo elettrico è dato dalla derivata del potenziale elettrico cambiata di segno. Dato che il potenziale è a simmetria radiale anche il campo elettrico è diretto sempre verso l'origine. Nel punto di coordinate $(3/2, 0)$ il campo elettrico è di intensità pari a $0.296\,V/m$ e diretto verso l'origine, mentre nel punto di coordinate $(1/2, 1/2)$ ha verso opposto e intensità $1.66\,V/m$. Infine nel punto di coordinate $(0, 1)$ il campo elettrico è nullo.

   Dato che il campo elettrico derivato da un potenziale è per definizione conservativo, il lavoro per andare da un punto ad un altro non dipende dal cammino che si compie, ma solo dalla differenza di potenziale tra i punti finale ed iniziale

$$L = q\Delta V = -1.6\,10^{-19}\Big(V(1/\sqrt{2}) - V(1.5)\Big) = 9.67\,10^{-21}\,J$$

7. Nonostante il cubo non abbia simmetria sferica, l'esercizio si può risolvere con il teorema di Gauss, usando come superficie gaussiana la sfera inscritta nel cubo. Infatti i punti al centro dei lati del cubo sono anche sulla superficie della sfera inscritta nel cubo.

   La carica elettrica all'interno di tale superficie sferica gaussiana è pari a $Q_{\mathrm{int}} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\ell}{2}\right)^3 \rho$. Usando il teorema di Gauss, si trova che il campo elettrico su tale superficie sferica (e quindi anche al centro del lato del cubo) è di intensità pari a

$$E = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0 \pi \ell^2} = \frac{\rho \ell}{6\varepsilon_0} = 1.13\,10^4\,V/m$$