Prova scritta del corso di Fisica con soluzioni

Prof. F. Ricci-Tersenghi

17/04/2013

Quesiti

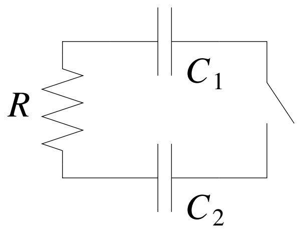
1. Una massa si trova al centro di un triangolo equilatero di lato $L = 20\,cm$ ed è attaccata con tre molle di costante elastica $K = 100\,N/m$ ai vertici del triangolo. Quanto lavoro è richiesto per portare la massa al centro di uno dei lati, sapendo che nella posizione iniziale tutte le molle sono a riposo? Quale forza è necessaria per mantenere la massa in questa nuova posizione? Si trascuri ogni attrito e la forza di gravità (il triangolo è in orizzontale).

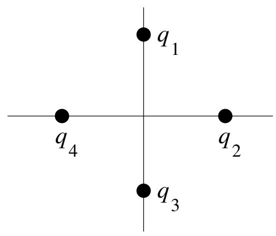
2. Un giocoliere lancia una palla in verticale con la mano sinistra ad una velocità $v_S = 19.6\,m/s$. Dopo un tempo $\Delta t = 1\,s$ lancia una seconda palla in verticale con la mano destra ad una velocità $v_D = 14.7\,m/s$. Ipotizzando che le palle vengano lanciate e riafferrate alla stessa altezza, quale delle due palle torna prima nelle mani del giocoliere? Nel caso in cui il giocoliere ripeta in continuazione i lanci delle palle con le due mani, sempre con le velocità v_S e v_D, calcolare la potenza media erogata da ognuna delle due braccia (la massa di ogni palla è $m = 100\,g$ e si consideri trascurabile il tempo che ogni palla passa nella mano).

3. Un corpo di massa $m = 300\,g$ è appoggiato su un piano scabro ($\mu_s = 0.5$ e $\mu_d = 0.3$) inclinato di $\theta = 20^o$. Calcolare la forza minima necessaria a mettere in movimento la massa sia verso l'alto (F_+) che verso il basso (F_-). Supponendo di mantenere applicata una forza costante pari a F_+, parallela al piano inclinato

e verso l'alto, calcolare il tempo e il lavoro richiesti per portare la massa ad una quota superiore di $h = 20\,cm$ rispetto a quella iniziale.

4. Il circuito in figura è composto da una resistenza $R = 1\,k\Omega$, due condensatori di capacità $C_1 = 10\mu F$ e $C_2 = 40\,\mu F$ ed un interruttore, inizialmente aperto. Dei due condensatori, solo quello di capacità C_1 è inizialmente carico con una carica elettrica pari a $Q = 12\,mC$ su un'armatura ed una carica $-Q$ sull'altra armatura. Cosa avviene nel circuito se al tempo $t = 0$ l'interruttore viene chiuso? Calcolare il tempo caratteristico del circuito. Quali sono le cariche sulle armature dei due condensatori dopo un tempo molto piú lungo del tempo caratteristico?





5. Siano date quattro cariche disposte come in figura; la distanza di ognuna di esse dall'origine è pari a $d = 10\,cm$. Le loro cariche elettriche sono $q_1 = 3\,nC$, $q_2 = 6\,nC$, $q_3 = 5\,nC$ e $q_4 = 4\,nC$. Calcolare il campo elettrico nell'origine. È possibile annullare il campo elettrico nell'origine cambiando l'intensità di una sola carica elettrica? In caso di risposta affermativa, si dica quale carica deve essere cambiata e di quanto. In caso di risposta negativa, determinare posizione ed intensità di una quinta carica elettrica che renda nullo il campo nell'origine.

Soluzioni

1. L'energia potenziale di ogni molla è pari a
$$U = \frac{1}{2}K(\ell - \ell_0)^2 \ ,$$
dove ℓ è la lunghezza della molla ed ℓ_0 è la lunghezza a riposo, pari alla distanza tra un vertice e il centro del triangolo, $\ell_0 = L/\sqrt{3}$. Nella posizione iniziale l'energia potenziale delle tre molle è nulla, $U_i = 0$, mentre nella posizione finale è pari a
$$U_f = 2\,\frac{1}{2}K\left(\frac{L}{2} - \ell_0\right)^2 + \frac{1}{2}K\left(\frac{\sqrt{3}L}{2} - \ell_0\right)^2 = \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)KL^2 = 0.19\,J$$
Nella posizione finale le due molle compresse imprimono alla massa due forze uguali ed opposte che si annullano, quindi l'unica forza che è necessario compensare (con una forza uguale ed opposta) è quella prodotta dalla molla allungata, che è diretta verso il centro del triangolo e di intensità pari a
$$F = K\left(\frac{\sqrt{3}L}{2} - \ell_0\right) = 5.77\,N$$

2. Calcoliamo il tempo t^* che impiega una palla lanciata in verticale con velocità iniziale v_0 a tornare alla quota di partenza. Il modo piú semplice per calcolarlo è notando che nel momento che torna alla quota iniziale la palla ha una velocità pari a $-v_0$ e quindi dalla legge $v(t) = v_0 - gt$ possiamo ricavare
$$v(t^*) = -v_0 = v_0 - gt^* \quad \Longrightarrow \quad t^* = \frac{2v_0}{g}$$
Quindi le due palle tornano in mano al giocoliere dopo dei tempi pari a
$$t^*_S = \frac{2v_S}{g} = 4\,s \qquad t^*_D = \frac{2v_D}{g} = 3\,s$$
e considerando che la seconda è stata lanciata $\Delta t = 1\,s$ dopo, concludiamo che le due palle arrivano contemporaneamente nelle mani del giocoliere.

Per calcolare la potenza erogata dalle due braccia è sufficiente notare che il braccio sinistro compie il lavoro necessario ad invertire il verso della velocità della palla ogni $t^*_S = 4\,s$, mentre quello destro ogni $t^*_D = 3\,s$. Il lavoro per invertire la velocità della palla può essere ottenuto come la somma del lavoro resistente per ridurre l'energia cinetica della palla da $mv^2/2$ a zero, piú il lavoro attivo per aumentare l'energia cinetica della palla da zero a $mv^2/2$. Quindi le due potenze cercate sono pari a
$$P_S = \frac{mv_S^2}{t^*_S} = 9.6\,W \qquad P_D = \frac{mv_D^2}{t^*_D} = 7.2\,W$$

3. Per prima cosa verifichiamo che la massa, inizialmente in quiete, rimanga in tale stato. La condizione da verificare è

$$mg\sin(\theta) < \mu_s mg\cos(\theta) \quad \Longrightarrow \quad \tan(\theta) < \mu_s$$

ed è effettivamente soddisfatta dai dati del problema.

La forza minima per muovere la massa deve essere parallela al piano, altrimenti la sua componente ortogonale al piano non è utile ai fini del movimento e potrebbe essere annullata diminuendo così la forza applicata. In presenza di una forza parallela al piano verso il basso, la massa si mette in moto quando vale

$$F_- + mg\sin(\theta) = \mu_s mg\cos(\theta) \quad \Longrightarrow \quad F_- = mg[\mu_s\cos(\theta) - \sin(\theta)] = 0.376\,N$$

mentre se la forza è diretta verso l'alto (sempre parallela al piano) l'equazione è

$$F_+ - mg\sin(\theta) = \mu_s mg\cos(\theta) \quad \Longrightarrow \quad F_+ = mg[\mu_s\cos(\theta) + \sin(\theta)] = 2.39\,N$$

Applicando una forza costante F_+ parallela al piano verso l'alto la risultante delle forze è

$$F_R = F_+ - mg\sin(\theta) - \mu_d mg\cos(\theta) = (\mu_s - \mu_d)mg\cos(\theta)$$

Al fine di aumentare di h l'altezza della massa è necessario farle percorrere un tratto lungo $\Delta s = h/\sin(\theta)$. Considerando che l'accelerazione è costante e pari a

$$a = F_R/m = (\mu_s - \mu_d)g\cos(\theta)$$

il tempo richiesto è

$$t = \sqrt{\frac{2\Delta s}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{(\mu_s - \mu_d)g\sin(\theta)\cos(\theta)}} = 0.797\,s$$

Il lavoro fatto è pari a

$$L = F_+\,\Delta s = mgh\left(\frac{\mu_s}{\tan(\theta)} + 1\right) = 1.40\,J$$

4. Nel momento che l'interruttore viene chiuso parte della carica elettrica presente sul condensatore di capacità C_1 passa all'altro condensatore. Questo genera una corrente nel circuito che segue le stessa legge esponenziale vista per un normale circuito RC. Il tempo caratteristico del circuito può essere calcolato dalla formula usuale $\tau = RC$ dove la capacità C è pari alla capacità equivalente dei due condensatori in serie, quindi

$$\tau = R\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} = 8\cdot 10^{-3}\,s$$

Quando il circuito raggiunge il nuovo stato di equilibrio e non vi è piú nessuna corrente che scorre nel circuito, le due armature destre dei condensatori sono allo stesso potenziale elettrico (altrimenti vi sarebbe una corrente) e così anche sono allo stesso potenziale (ma diverso dal primo) le due armature di sinistra. Quindi entrambi i condensatori hanno la stessa differenza di potenziale tra le proprie armature e dalla definizione di capacità $C = Q/\Delta V$ capiamo che la carica che ognuno di essi possiede è proporzionale alla propria capacità. In formule abbiamo che

$$Q_1 + Q_2 = Q \qquad Q_1 = C_1 \Delta V \qquad Q_2 = C_2 \Delta V$$

da cui ricaviamo le cariche presenti sui due condensatori

$$Q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q = 2.4\, mC \qquad Q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q = 9.6\, mC$$

5. Per come sono disposte le cariche, abbiamo che q_2 e q_4 determinano la componente x del campo, mentre q_1 e q_3 la componente y. Calcoliamo queste due componenti separatamente

$$E_x = k_0 \frac{q_4 - q_2}{d^2} = -1.8 \cdot 10^3\, V/m \qquad E_y = k_0 \frac{q_3 - q_1}{d^2} = 1.8 \cdot 10^3\, V/m$$

Per annullare il campo elettrico è necessario annullare entrambe le sue componenti E_x ed E_y, ma per fare ciò dobbiamo cambiare l'intensità di almeno due cariche elettriche: quindi la risposta alla domanda è negativa. Tuttavia è possibile annullare il campo elettrico aggiungendo una quinta carica di intensità q che produca nell'origine un campo uguale ed opposto a quello appena calcolato. Data la direzione di quest'ultimo, la quinta carica dovrà trovarsi lungo la retta $y = -x$ ad una distanza r dall'origine che soddisfi l'equazione

$$\sqrt{E_x^2 + E_y^2} = k_0 \frac{q}{r^2}$$

Le coppie di valori q ed r che risolvono questa equazione sono infiniti: una possibile soluzione è ad esempio porre una carica $q = 2\, nC$ nella posizione $(-5.95, 5.95)\, cm$.