Prova scritta del corso di Fisica e Fisica 1 con soluzioni

Prof. F. Ricci-Tersenghi

17/02/2014

Quesiti

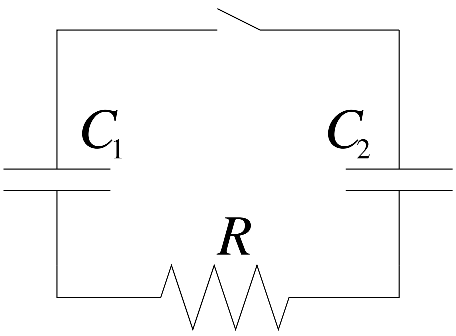
1. Un frutto si stacca da un albero e cade dentro una piscina. Sapendo che il ramo da cui si è staccato è ad un'altezza di $h = 3\,m$ sopra il livello dell'acqua e che la forza d'attrito con l'acqua è ben descritta dalla formula $\vec{F}_{attr} = -\beta\vec{v}$ e tale che la velocità limite del frutto nell'acqua è pari a $v_{lim} = 50\,cm/s$, si calcoli la velocità del frutto ai seguenti tempi: $t_1 = 0.5\,s$, $t_2 = 1\,s$ e $t_3 = 1.5\,s$. Si trascuri l'attrito con l'aria e si supponga che il frutto non abbia raggiunto il fondo della piscina al tempo t_3.

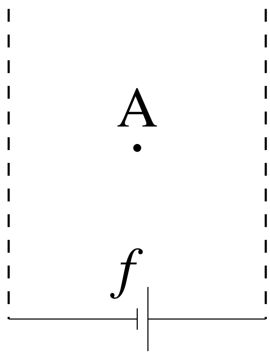
2. Due corpi di massa $m_A = 2\,kg$ e $m_B = 5\,kg$, collegati da una molla di costante elastica $K = 50\,N/m$, stanno scivolando a velocità costante lungo un piano inclinato scabro (con quello di massa m_A piú in alto). Sapendo che i coefficienti d'attrito dinamico dei due corpi sono $\mu_A = 0.2$ e $\mu_B = 0.3$, si calcoli l'inclinazione del piano e di quanto è deformata la molla (allungata o compressa).

3. Una roccia di massa $m = 10\,kg$ si stacca da una parete rocciosa e rotola giú per una scarpata fino al fondo valle. Sapendo che la differenza di quota tra il punto in cui la roccia si è staccata e il fondo valle è pari a $h = 200\,m$ si calcoli il lavoro fatto da ogni forza coinvolta nel processo.

4. Si considerino due cilindri infinitamente lunghi ed uniformemente carichi con densità di carica pari a $\rho = 1\mu C/m^3$, i cui assi sono paralleli all'asse z e passanti per i punti di coordinate $(0, 0, 0)$ il primo e $(10\,cm, 0, 0)$ il secondo. Il primo cilindro ha raggio pari a $R_1 = 4\,cm$ e il secondo ha raggio pari a $R_2 = 3\,cm$. Si calcoli il campo elettrico generato dai due cilindri nei seguenti punti: $A = (6\,cm, 0, 0)$, $B = (7\,cm, 0, 0)$ e $C = (8\,cm, 0, 0)$.

5. Si consideri il circuito nella figura a sinistra in cui il condensatore di capacità $C_1 = 10\,pF$ possiede inizialmente una carica elettrica pari a $Q = 0.12\,nC$, mentre quello di capacità $C_2 = 20\,pF$ è scarico. Al tempo $t = 0$ l'interruttore viene chiuso. Si calcolino (a) le cariche finali possedute dai due condensatori, (b) il tempo caratteristico con cui il primo condensatore si scarica e il secondo si carica, (c) l'energia dissipata sul resistore di resistenza $R = 1\,M\Omega$.





6. Si consideri la situazione illustrata nella figura di destra, in cui all'interno delle due griglie metalliche collegate al generatore di tensione $f = 12\,V$ è presente solo un campo elettrico costante, mentre fuori dalle griglie è presente solo un campo magnetico costante uscente dal foglio. Un elettrone ($m_e = 9.1\,10^{-31}\,kg$, $q = -1.6\,10^{-19}\,C$) è inizialmente nel punto A, equidistante dalle due griglie, con velocità parallela al campo elettrico. L'elettrone si muove soggetto solo ai campi elettrico e magnetico ora descritti; dopo aver attraversato le griglie 6 volte si ritrova nuovamente nel punto A. Si descriva o si disegni la traiettoria seguita dall'elettrone e si calcoli la sua velocità iniziale.

Soluzioni

1. Fino all'impatto con la piscina il frutto segue un moto uniformemente accelerato in cui la velocità cresce linearmente con il tempo secondo la legge $v(t) = gt$. Il frutto raggiunge il livello dell'acqua dopo un tempo t_* che risolve l'equazione

$$\frac{1}{2}gt_*^2 = h \qquad \Longrightarrow \qquad t_* = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.78\,s$$

Quindi al tempo $t_1 < t_*$ la velocità è pari a $v_1 = gt_1 = 4.9\,m/s$.

Dentro l'acqua il frutto sente un'accelerazione pari a

$$a(t) = g - \frac{\beta}{m}v(t) = g\left(1 - \frac{v(t)}{v_{lim}}\right) \ ,$$

dove la seconda uguaglianza deriva dall'espressione per la velocità limite: $v_{lim} = \frac{mg}{\beta}$. La velocità del frutto nell'acqua si ottiene quindi risolvendo l'equazione differenziale

$$\frac{dv(t)}{dt} = g\left(1 - \frac{v(t)}{v_{lim}}\right) \ ,$$

con condizione iniziale $v(t_*) = g\,t_*$. La soluzione di questa equazione è

$$v(t) = v_{lim} + (gt_* - v_{lim})e^{-g(t-t_*)/v_{lim}} \ ,$$

da cui si ottiene $v(t_2) = 0.6\,m/s$ e $v(t_3) = 0.5\,m/s$.

2. Calcoliamo le forze risultanti su ognuno dei due corpi. Le componenti normali al piano sono rispettivamente $N_A = m_A g\cos\theta$ e $N_B = m_B g\cos\theta$, dove θ è l'angolo tra il piano e l'orizzontale. Le componenti parallele al piano sono (prendendo come positive le forze dirette verso il basso)

$$R_A = m_A g\sin\theta - \mu_A m_A g\cos\theta - F_{el} \qquad R_B = m_B g\sin\theta - \mu_B m_B g\cos\theta + F_{el} \ .$$

La scelta del segno davanti alla forza elastica è tale che F_{el} risulta positiva se la molla è compressa e negativa se la molla è allungata. Ci aspettiamo che la molla sia compressa perché il coefficiente d'attrito maggiore è quello del corpo piú in basso, che quindi dovrebbe scivolerebbe piú lentamente senza la molla.

Dato che i corpi scendono a velocità costante le risultanti delle forze sono nulle

$$m_A g\sin\theta - \mu_A m_A g\cos\theta - F_{el} = 0 \qquad m_B g\sin\theta - \mu_B m_B g\cos\theta + F_{el} = 0 \ .$$

Sommando le due equazioni otteniamo

$$(m_A + m_B)g \sin\theta - (\mu_A m_A + \mu_B m_B)g \cos\theta = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \arctan \frac{\mu_A m_A + \mu_B m_B}{m_A + m_B} \simeq 15^{\circ}$$

Sostituendo questo valore per θ in una delle due equazioni di prima ricaviamo

$$F_{el} = m_A g \sin\theta - \mu_A m_A g \cos\theta = 1.35\, N \ ,$$

da cui capiamo che la molla è compressa di una quantià

$$\Delta\ell = F_{el}/K = 2.7\, cm \ .$$

3. Le uniche forze coinvolte nel processo sono la forza peso e le forze d'attrito (in diverse forme). Il lavoro della forza peso è pari a $L_P = m\, g\, h = 19.6\, 10^3\, J$. Dato che la roccia è ferma sia nella configurazione iniziale che in quella finale, il teorema dell'energia cinetica, ci dice che la somma dei lavori delle forze coinvolte nel processo deve essere nulla, per cui il lavoro delle forze d'attrito è pari all'opposto del lavoro della forza peso, $L_{attr} = -L_P = -19.6\, 10^3\, J$.

4. Il campo elettrico generato da un cilindro di raggio R uniformemente carico con densità di carica ρ è diretto radialmente (ossia in direzioni ortogonali all'asse del cilindro) ed è uscente dal cilindro se $\rho > 0$. Per calcolare la sua intensità usiamo il teorema di Gauss, prendendo come superficie gaussiana un cilindro di raggio r ed altezza h, coassiale al cilindro carico. Il flusso del campo attraverso la superficie gaussiana si può scrivere come

$$\Phi(E) = 2\pi\, r\, h\, E \ ,$$

mentre la carica interna alla superficie gaussiana è pari a

$$Q_{int} = \begin{cases} \pi\, r^2\, h\, \rho & \text{per } r < R \\ \pi\, R^2\, h\, \rho & \text{per } r \geq R \end{cases}$$

da cui si ottiene che l'intensità del campo elettrico è pari a

$$E(r, R) = \begin{cases} \frac{\rho\, r}{2\varepsilon_0} & \text{per } r < R \\ \frac{\rho\, R^2}{2\varepsilon_0 r} & \text{per } r \geq R \end{cases}$$

Con questa espressione possiamo calcolare il campo elettrico nei punti richiesti dal problema. Prima di tutto notiamo che i tre punti A, B e C sono sull'asse delle x in posizioni di coordinate maggiori dell'asse del primo cilindro e minori dell'asse del secondo cilindro. Di conseguenza i campi generati dai due cilindri in quei tre punti hanno sempre la direzione dell'asse delle x, ma versi opposti. L'intensità del campo elettrico in quei punti si ottiene quindi sommando le intensità dei campi generati dai due cilindri con segni opposti

$$\begin{aligned} E_A &= E(6\,cm, 4\,cm) - E((10-6)cm, 3\,cm) = 229\,V/m \\ E_B &= E(7\,cm, 4\,cm) - E((10-7)cm, 3\,cm) = -393\,V/m \\ E_C &= E(8\,cm, 4\,cm) - E((10-8)cm, 3\,cm) = 0\,V/m \end{aligned}$$

5. Quando l'interruttore viene chiuso le cariche elettriche si distribuiscono sui due condensatori in modo proporzionali alle loro capacità elettriche, quindi alla fine le cariche possedute dai due condensatori sono

$$Q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q = 0.04\,nC \qquad Q_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q = 0.08\,nC\ .$$

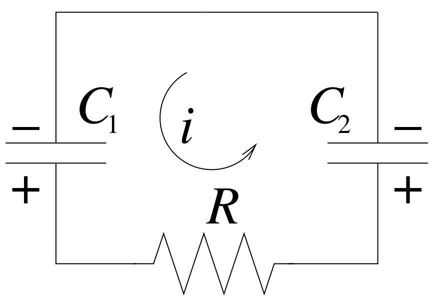
L'energia dissipata sulla resistenza, può essere calcolata come la differenza tra l'energia potenziale elettrostatica contenuta nei condensatori alla fine e quella che contengono all'inizio

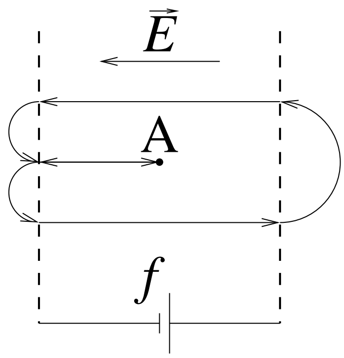
$$E_{dis} = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1} = -\frac{C_2 Q^2}{2C_1(C_1 + C_2)} = -4.8\,10^{-10}\,J\ .$$

Per calcolare il tempo caratteristico del circuito, deriviamo la dipendenza temporale della carica del primo condensatore, $Q_1(t)$. Scegliendo il verso della corrente come nella figura di sinistra qui sotto, possiamo scrivere la legge della maglia come

$$0 = \frac{Q_1(t)}{C_1} - R\,i(t) - \frac{Q_2(t)}{C_2} = \frac{Q_1(t)}{C_1} + R\,\frac{dQ_1(t)}{dt} - \frac{Q - Q_1(t)}{C_2} = R\,\frac{dQ_1(t)}{dt} + Q_1(t)\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} - \frac{Q}{C_2}\ ,$$

che riconosciamo essere l'equazione del circuito RC con costante di tempo pari a $\tau = \frac{RC_1C_2}{C_1+C_2} = 6.67\,10^{-6}\,s$.





6. L'elettrone segue la traiettoria disegnata nella figura di destra qui sopra. Nei tratti rettilinei esegue un moto uniformemente accelerato (decelerato) muovendosi verso destra (sinistra). Fuori dalle griglie segue delle traiettorie circolari con moto circolare uniforme. Per ritornare nel punto A dopo aver attraversato le griglie 6 volte, è necessario e sufficiente che il raggio di curvatura a destra R_+ sia il doppio di quello a sinistra R_- (come si deduce facilmente dalla figura). Questi due raggi di curvatura sono proporzionali alla velocità dell'elettrone (essendo il campo magnetico costante). Quindi dobbiamo imporre che la velocità che l'elettrone raggiunge sulla griglia di destra v_+ sia il doppio di quella che ha quando raggiunge la griglia di sinistra v_-. Tali velocità possono essere calcolate con l'uso del teorema dell'energia cinetica; chiamando v_0 la velocità iniziale, abbiamo che

$$\frac{m}{2}(v_-^2 - v_0^2) = -|q|\frac{f}{2}\,, \qquad \frac{m}{2}(v_+^2 - v_-^2) = |q|\,f \quad \Longrightarrow \quad v_-^2 = v_0^2 - \frac{|q|\,f}{m}\,, \qquad v_+^2 = v_0^2 + \frac{|q|\,f}{m}$$

La condizione $v_+ = 2v_-$ implica quindi

$$v_+^2 = 4v_-^2 \implies v_0^2 + \frac{|q|\,f}{m} = 4\left(v_0^2 - \frac{|q|\,f}{m}\right) \implies v_0^2 = \frac{5|q|\,f}{3m} \implies v_0 = \sqrt{\frac{5|q|\,f}{3m}} = 1.88\,10^6\,m/s$$