

Prova scritta del corso di Fisica con soluzioni

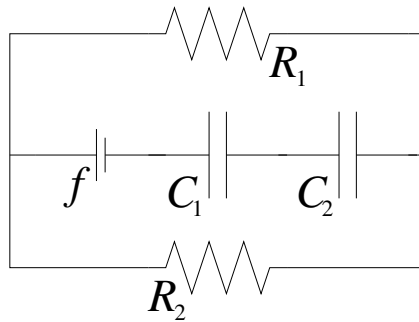
Prof. F. Ricci-Tersenghi

21/01/2013

Quesiti

1. Una corpo di massa $m = 250\text{ g}$ è appoggiato su un piano scabro ($\mu_d = 0.2$ e $\mu_s = 0.6$) e collegato ad una molla di costante elastica $K = 49\text{ N/m}$ posta orizzontalmente (in modo che la massa possa oscillare a contatto con il piano). Al tempo iniziale la massa è in una posizione a distanza $x_0 = 10\text{ cm}$ dalla posizione di riposo della molla. Quale distanza percorre la massa nella sua prima oscillazione? In quale posizione raggiunge la sua massima velocità e qualè questa massima velocità? Quante oscillazioni compie la massa prima di arrestarsi definitivamente e in quale posizione si trova alla fine?
2. Sono date tre cariche elettriche fisse nel piano: la prima di intensità $2q$ posta in un punto di coordinate $(-2, 0)$ e le altre due di intensità q nei punti $(1, \sqrt{3})$ e $(1, -\sqrt{3})$, dove $q = 1\ \mu\text{C}$ e le distanze sono espresse in centimetri. Si consideri ora un'altra carica elettrica di intensità q e massa $m = 10\text{ mg}$ posta ferma nell'origine. Sapendo che per effetto delle forze elettrostatiche (le uniche da considerare) questa carica raggiunge l'infinito, si calcoli la traiettoria che segue e la sua velocità asintotica.

Quale sarebbe invece la traiettoria della carica inizialmente nell'origine se le altre 3 cariche elettriche avessero tutte le stessa intensità q ?



3. Si consideri il circuito in figura i cui elementi hanno i seguenti valori $f = 50 V$, $R_1 = 3 k\Omega$, $R_2 = 6 k\Omega$, $C_1 = 50 \mu F$ e $C_2 = 200 \mu F$ e si calcoli il suo tempo caratteristico di carica τ . Per tempi molto maggiori di τ si calcoli la carica presente sull'armatura sinistra di ognuno dei due condensatori.
4. Si consideri un cilindro infinitamente lungo, internamente cavo (il raggio interno è di $2 cm$ e quello esterno è di $4 cm$) e uniformemente carico con densità di carica pari a $\rho = 10^{-6} C/m^3$. Si calcoli il campo elettrico generato dal cilindro in 3 punti che distano dall'asse del cilindro rispettivamente $d_1 = 2 cm$, $d_2 = 3 cm$ e $d_3 = 6 cm$.
5. Un elettrone viene sparato da una distanza $d = 1 m$ perpendicolarmente verso un filo percorso da una corrente $i = 10 A$. Sapendo che la velocità iniziale dell'elettrone è pari a $v_0 = 10^4 m/s$, quale sarà la sua velocità nel punto della traiettoria piú vicino al filo? In che piano si svolge il moto dell'elettrone? Si trascuri la forza gravitazionale.

Domanda extra (difficile): si calcoli la distanza minima dal filo raggiunta dall'elettrone.

Soluzioni

1. Nelle posizioni di massimo allungamento della molla, la massa si trova in condizione di velocità nulla e per capire se si muoverà nuovamente o se rimarrà per sempre ferma dobbiamo confrontare la forza elastica con la massima forza d'attrito statico

$$K x_{min} = mg\mu_s \quad \Longrightarrow \quad x_{min} = \frac{mg\mu_s}{K} = 3 \text{ cm} .$$

In altre parole, nei punti in cui la massa ha velocità nulla, se $x > x_{min}$ la massa continuerà il suo moto oscillatorio, altrimenti resterà ferma per sempre. Nella condizione iniziale si ha $x_0 > x_{min}$.

Chiamiamo x_1 la posizione della massa dopo una oscillazione (ricordando che x_1 è negativo dato che dopo una oscillazione la massa si troverà sul lato opposto rispetto al punto di riposo della molla). Il lavoro della forza d'attrito durante questa prima oscillazione è pari a

$$L_{attr} = mg\mu_d(x_1 - x_0) ,$$

mentre la differenza in energia potenziale elastica tra i due punti è pari a

$$\Delta U = \frac{1}{2}K(x_1^2 - x_0^2) .$$

Il teorema dell'energia cinetica richiede che $L_{attr} = \Delta U$ da cui si ricava che

$$x_1 = -x_0 + \Delta x \quad \text{con} \quad \Delta x = \frac{2mg\mu_d}{K} = 2 \text{ cm} .$$

Ossia, ad ogni oscillazione la massa diminuisce di Δx la sua distanza dal punto di riposo della molla. Quindi la massa compirà 4 oscillazioni ($x_0 = 10 \text{ cm} \rightarrow x_1 = -8 \text{ cm}$, $x_1 = -8 \text{ cm} \rightarrow x_2 = 6 \text{ cm}$, $x_2 = 6 \text{ cm} \rightarrow x_3 = -4 \text{ cm}$ e $x_3 = -4 \text{ cm} \rightarrow x_4 = 2 \text{ cm}$) prima di arrestarsi del tutto nella posizione x_4 .

La lunghezza della prima oscillazione è quindi pari a $|x_1 - x_0| = 18 \text{ cm}$. Il punto in cui la velocità della massa è massima corrisponde al punto in cui l'accelerazione è nulla, ossia il punto x_M in cui la risultante delle forze è nulla

$$F_R = -Kx_M + mg\mu_d = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_M = \frac{mg\mu_d}{K} = 1 \text{ cm} .$$

In tale punto la velocità può essere calcolata usando il teorema dell'energia meccanica totale

$$\frac{1}{2}Kx_0^2 = \frac{1}{2}Kx_M^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{K}{m}(x_0^2 - x_M^2)} = 1.39 \text{ m/s} .$$

2. Grazie alla disposizione simmetrica delle 3 cariche il campo elettrico in qualsiasi punto appartenente all'asse delle ascisse è proprio nella direzione dell'asse stesso; di conseguenza la particella originamente nell'origine si muove lungo l'asse delle x . Per calcolare la sua velocità asintotica è sufficiente usare il teorema dell'energia cinetica e calcolare l'energia potenziale elettrostatica nell'origine, notando che tutte e tre le cariche fisse sono a distanza $d = 2 \text{ cm}$ dall'origine

$$\frac{1}{2}mv^2 = k_0q\frac{4q}{d} \implies v = \sqrt{\frac{8k_0q^2}{md}} = 600 \text{ m/s} .$$

Nel caso in cui tutte e tre le cariche fisse abbiano la stessa intensità allora il campo elettrico nell'origine sarebbe nullo per simmetria, dato che le cariche sono poste ai vertici di un triangolo equilatero di cui l'origine è il baricentro. Quindi la carica nell'origine resterebbe ferma.

3. I due condensatori in serie sono equivalenti ad un condensatore di capacità $C_{eq} = (C_1^{-1} + C_2^{-1})^{-1} = 40 \mu F$, mentre le due resistenze sono in parallelo ed equivalenti ad una resistenza $R_{eq} = (R_1^{-1} + R_2^{-1})^{-1} = 2 \text{ k}\Omega$. A seguito di queste due riduzioni il circuito diventa equivalente ad un normale circuito RC con tempo caratteristico pari a $\tau = R_{eq}C_{eq} = 80 \text{ ms} = 0.08 \text{ s}$.

Essendo i due condensatori in serie la corrente elettrica che entra in entrambi è la stessa e quindi anche le cariche sulle loro armature sono le stesse. Per come è orientato il generatore di f.e.m. la corrente entra nelle armature di destra e quindi la carica sulle armature di sinistra è negativa. Il suo valore assoluto è pari alla carica massima in un circuito RC, ossia $Q = fC_{eq} = 2 \text{ mC}$.

4. I campi elettrici richiesti possono essere calcolati con il teorema di Gauss usando delle superfici gaussiane cilindriche di raggio d_1 , d_2 e d_3 rispettivamente e di altezza arbitraria h . Nel primo caso la carica interna alla superficie gaussiana è nulla e quindi $E_1 = 0$. Nel secondo caso la carica interna è pari a $Q_{int} = \rho\pi(d_2^2 - R_1^2)h$ ed il campo elettrico è quindi

$$E_2 = \frac{\rho\pi(d_2^2 - R_1^2)h}{2\pi d_2 h \epsilon_0} = 0.94 \cdot 10^3 \text{ V/m} .$$

Nel terzo caso si ha infine

$$E_3 = \frac{\rho\pi(R_2^2 - R_1^2)h}{2\pi d_3 h \epsilon_0} = 1.1 \cdot 10^3 \text{ V/m} .$$

5. Essendo l'elettrone sottoposto solo alla forza di Lorentz dovuta alla presenza del campo magnetico generato dal filo percorso da corrente e considerando che la forza di Lorentz non compie lavoro, la velocità dell'elettrone rimane invariata durante il suo moto. Notando inoltre che il vettore campo magnetico è ortogonale sia al filo che al vettore velocità dell'elettrone, quest'ultimo ruoterà durante il moto, rimanendo nel piano che passa per il filo.

Risposta alla domanda extra. Chiamo $x(t)$ la distanza dell'elettrone dal filo e $\theta(t)$ l'angolo tra la direzione di moto dell'elettrone e la normale al filo: all'istante iniziale si ha $x(0) = d$ e $\theta(0) = 0$. La distanza dal filo diminuisce nel tempo con la componente della velocità ortogonale al filo

$$\frac{dx(t)}{dt} = -v_0 \cos(\theta(t)) ,$$

mentre la direzione del moto cambia perché la velocità ruota nel piano a causa della forza di Lorentz. La velocità di rotazione dipende dal raggio di curvatura della traiettoria: anche se la traiettoria non è circolare, in ogni istante è possibile approssimare un tratto infinitesimo di traiettoria con un tratto infinitesimo di arco circolare, lungo il quale possiamo calcolare la velocità angolare con le formule note nel caso del moto uniforme circolare

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m} ,$$

dove nell'ultimo passaggio ho usato l'espressione del raggio di curvatura per il moto di una particella carica nel campo magnetico: $R = mv/(qB)$. Infine è sufficiente sostituire all'intensità del campo magnetico prodotto dal filo in cui scorre una corrente costante l'espressione data dalla legge di Biot-Savart per ottenere la seguente coppia di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -v_0 \cos(\theta(t)) , \\ \frac{d\theta(t)}{dt} &= \frac{q}{m} \frac{\mu_0 i}{2\pi x(t)} . \end{aligned}$$

Visto che il problema ci richiede solo la distanza minima raggiunta dall'elettrone e non il tempo impiegato, possiamo eliminare il tempo dalle due equazioni derivando una nuova equazione differenziale

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{2\pi m v_0}{\mu_0 i q} x \cos(\theta) ,$$

che si risolve facilmente separando le variabili

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2\pi m v_0}{\mu_0 i q} \cos(\theta) d\theta .$$

Imponendo la condizione iniziale $x = d$ e $\theta = 0$ si ottiene la soluzione

$$x(\theta) = d \exp \left[-\frac{2\pi m v_0}{\mu_0 i q} \sin(\theta) \right]$$

che raggiunge il valore minimo quando $\theta = \pi/2$

$$x_{min} = d \exp \left[-\frac{2\pi m v_0}{\mu_0 i q} \right] = 0.7 \text{ m} .$$