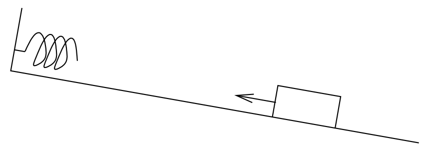
Prova scritta del corso di Fisica con soluzioni

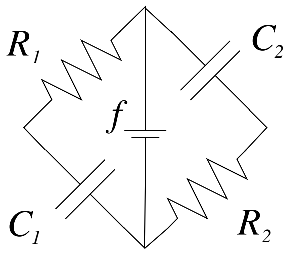
Prof. F. Ricci-Tersenghi

21/07/2014

Quesiti

1. Un corpo di massa $m = 2\,kg$ sta scorrendo in salita su un piano scabro inclinato di $\theta = 10^o$ in direzione di una molla fissata in posizione parallela al piano e di costante elastica $K = 100\,N/m$, come illustrato in figura. Sapendo che il coefficiente d'attrito dinamico tra massa e piano è pari a $\mu_d = 0.2$ e che la velocità della massa è pari a $v = 2.85\,m/s$ quando dista $d = 1\,m$ dalla molla, si calcoli la massima compressione della molla. Notando inoltre che dopo la compressione la massa viene nuovamente messa in moto (in direzione opposta), si calcoli un limite superiore al coefficiente d'attrito statico.





2. Si consideri il circuito in figura, in cui il generatore di f.e.m. ha $f = 12\,V$, i due condensatori hanno capacità $C_1 = C_2 = 1\,nF$ e i resistori hanno resistenze elettriche pari a $R_1 = 1\,k\Omega$ e $R_2 = 1\,M\Omega$. Se all'istante $t = 0$ entrambi i condensatori sono scarichi si calcolino i tempi a cui il primo e il secondo condensatore avranno una carica pari a $Q = 6\,nC$ sull'armatura positiva.

3. In una prima configurazione tre cariche elettriche ($q = 1\,nC$) si trovano nei punti $A_1 = (-1, 1/2, 0)\,m$, $A_2 = (-1, -1/2, 0)\,m$ e $A_3 = (1/\sqrt{2}, 0, 0)\,m$. In una seconda configurazione le stesse tre cariche si trovano nei punti $B_1 = (0, -1/2, -1/\sqrt{2})\,m$, $B_2 = (0, 0, 1)\,m$ e $B_3 = (0, 1/2, -1/\sqrt{2})\,m$. Si calcoli il

lavoro necessario a spostare le 3 cariche dalla prima alla seconda configurazione, sapendo che non vi è altro campo elettrico se non quello generato dalle cariche stesse. Si calcoli anche la variazione, tra la prima e la seconda configurazione, del flusso del campo elettrico attraverso una superficie sferica di raggio $R = 82.5\,cm$ centrata nell'origine.

4. Si consideri uno spazio in cui vi è una carica elettrica $q = 1\,nC$ su ogni punto di coordinate $(k, 0, 0)\,m$, con $k \in \mathbb{Z}$ e $k \neq 0$ (in altre parole vi è una carica su ogni posizione intera, sia positiva che negativa, dell'asse delle x, tranne che nell'origine). Si calcoli il campo elettrico nell'origine e nel punto $A = (1/2, 0, 0)\,m$.

Soluzioni

1. L'energia cinetica iniziale viene in parte dissipata dalla forza d'attrito e in parte trasformata nell'energia potenziale gravitazionale (la massa sale) e nell'energia potenziale della molla che si comprime. L'equazione che lega queste energie è la seguente

$$\frac{1}{2}mv^2 - \mu_d\, mg\cos(\theta)(d+\Delta x) = mg\sin(\theta)(d+\Delta x) + \frac{1}{2}K\Delta x^2 \ ,$$

   dove Δx è la compressione della molla. La soluzione di questa equazione quadratica fornisce il risultato $\Delta x = 7.72\, cm$.

   Nel momento in cui la molla ha la compressione Δx le forze che agiscono sulla massa sono la forza elastica, la forza gravitazionale e la forza d'attrito statico: la somma delle prime due deve essere maggiore della massima forza d'attrito statico, affinché la massa si metta nuovamente in moto, da cui

$$K\Delta x + mg\sin(\theta) > \mu_s\, mg\cos(\theta) \implies \mu_s < \frac{K\Delta x + mg\sin(\theta)}{mg\cos(\theta)} = 0.576$$

2. Scrivendo la legge delle maglie per la maglia di sinistra e per quella di destra si ottengono due equazioni identiche a quella del circuito RC

$$f = \frac{Q_1}{C_1} + R_1\frac{dQ_1}{dt} \ , \qquad f = \frac{Q_2}{C_2} + R_2\frac{dQ_2}{dt} \ ,$$

   dove Q_1 e Q_2 sono le cariche sulle armature positive dei due condensatori. Quindi i condensatori si caricheranno fino alla carica massima $Q_{\max} = fC_1 = fC_2 = 12\, nC$ con due tempi caratteristici pari a $\tau_1 = R_1C_1 = 10^{-6}\, s$ e $\tau_2 = R_2C_2 = 10^{-3}\, s$. I tempi a cui i due condensatori raggiungono la carica $Q = 6\, nC = Q_{\max}/2$ sono pari a $t_1 = \log(2)\, \tau_1 = 6.93\, 10^{-7}\, s$ e $t_2 = \log(2)\, \tau_2 = 6.93\, 10^{-4}\, s$.

3. Per calcolare il lavoro necessario a trasformare la prima configurazione di cariche nella seconda è sufficiente calcolare l'energia potenziale della forza elettrostatica nelle due configurazioni e farne la differenza. Dato che non vi sono altri campi elettrici oltre quelli generati dalla cariche stesse, l'energia potenziale elettrostatica è la somma delle energie potenziali elettrostatiche di ogni coppia di cariche, ossia

$$U = U_{12}(d_{12}) + U_{13}(d_{13}) + U_{23}(d_{23}) \ ,$$

   dove abbiamo reso esplicito il fatto che l'energia potenziale della forza elettrostatica tra due cariche dipende dalla distanza tra di loro

$$U_{12}(d_{12}) = k_0\frac{q_1q_2}{d_{12}} \ .$$

Senza calcolare l'energia potenziale elettrostatica nella prima e nella seconda configurazione, ci è sufficiente notare che le distanze relative tra le cariche sono rimaste le stesse, ossia

$$|A_1 - A_2| = |(0,1,0)| = |B_3 - B_1| = |(0,1,0)|$$

$$|A_3 - A_1| = |(1 + 1/\sqrt{2}, -1/2, 0)| = |B_2 - B_3| = |(0, -1/2, 1 + 1/\sqrt{2})|$$

$$|A_3 - A_2| = |(1 + 1/\sqrt{2}, 1/2, 0)| = |B_2 - B_1| = |(0, 1/2, 1 + 1/\sqrt{2})|$$

Quindi l'energia potenziale della forza elettrostatica è la stessa nella prima e nella seconda configurazione e pertanto il lavoro necessario per spostare le cariche tra queste due configurazioni è nullo.

Per calcolare il flusso attraverso una superficie, si devono sommare le cariche all'interno di tale superficie. In questo caso solo i punti A_3, B_1 e B_3 sono all'interno della superficie sferica di raggio R centrata nell'origine. Quindi il flusso del campo elettrico attraverso tale superficie passa da $\Phi_1 = q/\epsilon_0$ a $\Phi_2 = 2q/\epsilon_0$, con un aumento di $\Delta\Phi = q/\epsilon_0 = 113\,Nm^2/C$.

4. L'esercizio può essere risolto sfruttando solo le simmetrie della distribuzione delle cariche elettriche.

   Nell'origine il campo elettrostatico risultante è nullo, perché per ogni carica in posizione $(i, 0, 0)\,m$, con $i > 0$, ne esiste un'altra in posizione $(-i, 0, 0)\,m$ che genera nell'origine un campo uguale ed opposto a quello generato dalla prima carica. Quindi per ogni coppia di cariche speculari rispetto all'origine la risultante del campo è nulla, e di conseguenza anche la somma di queste risultanti, che è pari alla risultante di tutte le forze nell'origine, è nulla.

   Nel calcolo del campo risultante nel punto A potremmo fare il ragionamento di cui sopra ed ottenere come risultato un campo nullo se fosse presente anche una carica q nell'origine: infatti in quel caso avremmo che il campo elettrico generato dalle cariche in $(i, 0, 0)\,m$ e $(1 - i, 0, 0)\,m$, con $i \geq 1$, è nullo visto che le due cariche sono equidistanti da A. Tuttavia, per il principio di sovrapposizione, il campo elettrico generato dalla configurazione di cariche senza la carica nell'origine è uguale al campo elettrico generato dalla configurazione di cariche con anche la carica q nell'origine piú il campo elettrico generato da una singola carica $-q$ nell'origine. Quindi il campo elettrico in A è solo quello generato dalla carica $-q$ nell'origine, ossia $\vec{E} = (-k_0 q/x_A^2, 0, 0) = (-36, 0, 0)\,N/C$, dove $x_A = 0.5\,m$ è la coordinata x del punto A.