

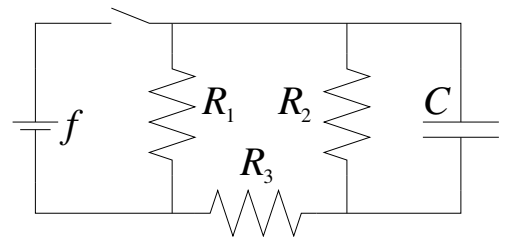
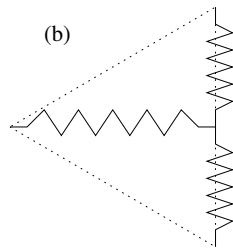
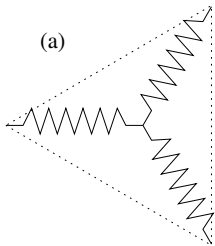
# Prova scritta del corso di Fisica

Prof. F. Ricci-Tersenghi

30/01/2014

## Quesiti

1. Si supponga di applicare una forza  $\vec{F}$  in orizzontale su di un corpo di massa  $m = 10 \text{ kg}$  che è appoggiato su un piano scabro ( $\mu_s = 0.8$ ) inclinato di un angolo  $\theta = 30^\circ$  rispetto all'orizzontale. Quale deve essere il valore minimo dell'intensità della forza  $\vec{F}$  per mettere in moto la massa verso l'alto? Esiste un angolo limite  $\theta_{max}$  oltre il quale non è possibile mettere in moto la massa verso l'alto applicando un forza in direzione orizzontale? In caso affermativo, si calcoli il valore di  $\theta_{max}$ .
2. Si considerino tre molle di costante elastica  $k = 100 \text{ N/m}$  e lunghezza a riposo pari a  $\ell = 15 \text{ cm}$ . Le molle sono attaccate ai vertici di un triangolo equilatero e nella configurazione in figura (a) sono tutte e tre a riposo. Si calcoli il lavoro che è necessario compiere per portare le molle nella configurazione (b) in cui due di esse sono allineate. Quale forza è richiesta per mantenere le molle nella configurazione (b)?



3. Si consideri il circuito in figura i cui elementi valgono  $f = 12 \text{ V}$ ,  $C = 20 \text{ nF}$ ,  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$  e  $R_3 = 30 \text{ k}\Omega$ . Al tempo  $t = 0$  il condensatore è scarico e l'interruttore viene chiuso. Si calcoli come varia con il tempo la carica sul condensatore.

4. Due sfere di raggio  $R = 10 \text{ cm}$  sono uniformemente cariche con densità di carica elettrica pari a  $\rho_1 = 100 \text{ nC/m}^3$  e  $\rho_2 = -\rho_1$ . La sfera di densità  $\rho_1$  ha il proprio centro in  $(0.2, 0, 0) \text{ m}$ , mentre quella di densità  $\rho_2$  è centrata in  $(-0.1, 0, 0) \text{ m}$ . Si calcoli il campo elettrico generato dalle due sfere nell'origine e il flusso di tale campo attraverso la superficie del cubo di lato  $\ell = 40 \text{ cm}$ , centrato nell'origine e con gli spigoli paralleli agli assi cartesiani.
5. Si considerino 3 conduttori di capacità elettrostatiche  $C_1 = 10 \text{ pF}$ ,  $C_2$  e  $C_3$  (ossia solo il valore della prima è noto), carichi con cariche elettriche  $Q_1 = Q_2$  e  $Q_3$  (ossia è solo noto che le prime due sono uguali, ma non i loro valori). Si eseguono ora le seguenti operazioni: (1) si connette il terzo conduttore alla terra e poi lo si disconnette, (2) si connette il terzo conduttore al primo (con un cavo di capacità elettrostatica trascurabile) e poi lo si disconnette, (3) si connette il terzo conduttore al secondo (con un cavo di capacità elettrostatica trascurabile) e poi lo si disconnette. Dopo queste operazioni le cariche elettriche possedute dai tre conduttori sono uguali. Si calcolino le capacità elettrostatiche  $C_2$  e  $C_3$ .
6. Al tempo  $t = 0$  un elettrone ( $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $q = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ) si trova nell'origine degli assi con velocità  $\vec{v} = (v_0, 0, 0)$ ,  $v_0 = 10^6 \text{ m/s}$ . Nello spazio in cui si muove l'elettrone è presente un campo magnetico costante pari a  $\vec{B} = (0, 0, 1) \text{ G}$ ; inoltre l'elettrone interagisce con il mezzo in cui si sta muovendo in modo da sentire una forza efficace d'attrito pari a  $\vec{F}_{attr} = -\beta \vec{v}$  con  $\beta = 3 \cdot 10^{-24} \text{ N s/m}$ . Si descriva qualitativamente la traiettoria seguita dall'elettrone. Si calcoli quindi la lunghezza di tale traiettoria e il lavoro totale fatto dalle forze d'attrito.

## Soluzioni

1. Le forze che agiscono sul corpo sono  $\vec{F}$ , applicata orizzontalmente, la forza peso  $\vec{P} = m\vec{g}$  che agisce verticalmente e la forza d'attrito statico (parallela al piano verso il basso, visto che stiamo spingendo la massa verso l'alto). Scomponiamo  $\vec{R} = \vec{F} + \vec{P}$  nelle sue componenti parallela e ortogonale al piano

$$R_{\parallel} = F \cos \theta - mg \sin \theta \quad R_{\perp} = F \sin \theta + mg \cos \theta .$$

L'intensità della reazione vincolare normale è pari a  $N = R_{\perp}$  per cui la massima forza d'attrito statico è

$$F_{s,max} = \mu_s N = \mu_s (F \sin \theta + mg \cos \theta) .$$

Il corpo si mette in moto quando

$$R_{\parallel} > F_{s,max} \implies F \cos \theta - mg \sin \theta > \mu_s (F \sin \theta + mg \cos \theta) \implies F > F_{min} \equiv mg \frac{\sin \theta + \mu_s \cos \theta}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta} .$$

Per i dati del problema si ha che l'intensità minima della forza deve essere pari a  $F_{min} = 251 N$ .

Se  $F_{min}$  diverge vuol dire che anche con una forza infinitamente grande non è possibile mettere in moto la massa. Tale divergenza avviene quando si annulla il denominatore nella definizione di  $F_{min}$ , ossia

$$\cos \theta_{max} - \mu_s \sin \theta_{max} = 0 \implies \tan \theta_{max} = \frac{1}{\mu_s} \implies \theta_{max} = \arctan \frac{1}{\mu_s} \simeq 51^\circ .$$

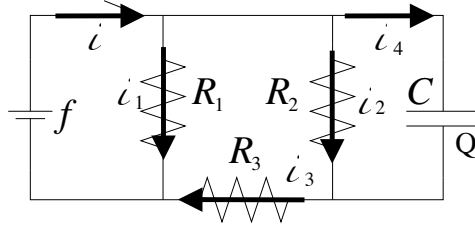
2. Per calcolare il lavoro per andare dalla configurazione (a) alla configurazione (b) è sufficiente calcolare l'energia potenziale elastica delle due configurazioni. Nella configurazione (a) le molle sono in posizione di riposo e la loro energia potenziale è quindi nulla,  $U_{el}^{(a)} = 0$ . Calcoliamo ora la lunghezza delle molle nella configurazione (b). Chiamando  $\alpha = 30^\circ$  l'angolo tra la direzione di una molla e un lato del triangolo, si ha che la lunghezza della molla orizzontale in (b) è pari a  $\ell_H = \ell + \ell \sin \alpha = \frac{3}{2}\ell$ , mentre la lunghezza di una delle molle verticali in (b) è pari a  $\ell_V = \ell \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$ . L'energia potenziale della configurazione (b) è quindi data da

$$U_{el}^{(b)} = \frac{k}{2} [(\ell_H - \ell)^2 + 2(\ell_V - \ell)^2] = k\ell^2 \left( \frac{15}{8} - \sqrt{3} \right) .$$

Il lavoro per andare da (a) a (b) è infine pari a  $L = U_{el}^{(b)} - U_{el}^{(a)} = 0.32 J$ .

Nella configurazione (b) le forze delle molle verticali sono uguali ed opposte, quindi l'unica forza da compensare è quella della molla orizzontale, pari a  $F = k(\ell_H - \ell) = 7.5 N$ .

3. Si tratta fondamentalmente di un circuito RC in cui sia le correnti che la carica sul condensatore dipendono dal tempo. Fissiamo nomi e versi delle correnti come in figura.



Le incognite sono le 5 correnti e la carica sul condensatore, che risolvono le seguenti 6 equazioni

$$i = i_1 + i_2 + i_4 \quad i_3 = i_2 + i_4 \quad \frac{dQ}{dt} = i_4 \quad f = i_1 R_1 \quad i_1 R_1 = i_2 R_2 + i_3 R_3 \quad i_2 R_2 = \frac{Q}{C}$$

Visto che due equazioni legano la carica  $Q$  e la sua derivata temporale  $dQ/dt$  alle correnti  $i_2$  ed  $i_4$  rispettivamente, cerchiamo di scrivere un'equazione chiusa per  $Q(t)$  attraverso la seconda equazione,  $i_3 = i_2 + i_4$ , da cui vogliamo eliminare  $i_3$  in favore di  $i_2$  ed  $i_4$ . Per fare questo usiamo la quarta e la quinta equazione per ottenere

$$f = i_2 R_2 + i_3 R_3 \implies i_3 = \frac{f - i_2 R_2}{R_3} = \frac{fC - Q}{R_3 C},$$

con cui trasformiamo la seconda equazione in

$$\frac{fC - Q}{R_3 C} = \frac{Q}{R_2 C} + \frac{dQ}{dt} \implies \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{f}{R_3} = 0.$$

Per non dover risolvere esplicitamente questa equazione, è sufficiente notare che è identica a quella del piú semplice circuito RC

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{R_{eq} C} - \frac{f_{eq}}{R_{eq}} = 0,$$

con dei valori equivalenti pari a

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \implies R_{eq} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad \text{e} \quad \frac{f_{eq}}{R_{eq}} = \frac{f}{R_3} \implies f_{eq} = \frac{f R_2}{R_2 + R_3}.$$

Quindi la soluzione del piú semplice circuito RC fornisce anche la soluzione al problema

$$Q(t) = f_{eq} C \left[ 1 - \exp\left(\frac{-t}{R_{eq} C}\right) \right] = \frac{f C R_2}{R_2 + R_3} \left[ 1 - \exp\left(\frac{-t(R_2 + R_3)}{R_2 R_3 C}\right) \right].$$

4. Le cariche elettriche delle due sfere sono pari a  $Q_1 = -Q_2 = \rho_1 \frac{4}{3} \pi R^3$ . Dato che l'origine non è dentro nessuna delle due sfere, per calcolare il campo elettrico nell'origine conviene sfruttare il fatto che il campo elettrico all'esterno di una sfera uniformemente carica è uguale a quello generato da una carica puntiforme localizzata al centro della sfera con la stessa carica elettrica della sfera. Essendo la carica positiva posizionata sul semiasse positivo delle  $x$  e quella negativa sul semiasse negativo delle  $x$ , il campo elettrico nell'origine è diretto lungo l'asse delle  $x$  in direzione negativa. La sua intensità è pari a

$$E_0 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} - \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = \frac{\rho_1 R^3}{3\epsilon_0 r_1^2} - \frac{\rho_2 R^3}{3\epsilon_0 r_2^2} = \frac{\rho_1 R}{3\epsilon_0} \left( \frac{R^2}{r_1^2} + \frac{R^2}{r_2^2} \right) = \frac{5\rho_1 R}{12\epsilon_0} = 471 \text{ V/m} ,$$

dove  $r_1 = 0.2 \text{ m}$  e  $r_2 = 0.1 \text{ m}$  sono le distanze dei centri delle sfere dall'origine.

Per calcolare il flusso del campo elettrico attraverso la superficie del cubo è sufficiente usare il teorema di Gauss, che ci dice che tale flusso è pari alla carica contenuta all'interno della superficie del cubo divisa per  $\epsilon_0$ . Visto che la seconda sfera è completamente contenuta nel cubo, mentre la prima viene tagliata esattamente a metà da una faccia del cubo, la carica interna alla superficie del cubo è pari a  $Q_{int} = Q_1/2 + Q_2$ , da cui

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = -23.7 \text{ Nm}^2/\text{C} .$$

5. Vediamo come cambiano le cariche sui 3 conduttori durante le operazioni descritte nel testo dell'esercizio.

(1) Connettendo il terzo conduttore alla terra, questo si scarica, per cui  $Q_3 \rightarrow 0$ . (2) Connettendo il primo e il terzo conduttore la loro carica totale  $Q_1$  si ripartisce tra i due conduttori connessi in modo proporzionale alle loro capacità elettrostatiche, per cui

$$Q'_1 = \frac{Q_1 C_1}{C_1 + C_3} \quad Q'_3 = \frac{Q_1 C_3}{C_1 + C_3} .$$

(3) Connettendo il secondo e il terzo conduttore la loro carica totale  $Q_{tot} = Q_2 + Q'_3$  si ripartisce tra i due conduttori connessi in modo proporzionale alle loro capacità elettrostatiche, per cui

$$Q'_2 = \frac{Q_{tot} C_2}{C_2 + C_3} \quad Q''_3 = \frac{Q_{tot} C_3}{C_2 + C_3} .$$

Le cariche finali sono uguali, ossia valgono le equazioni

$$\frac{Q_1 C_1}{C_1 + C_3} = \frac{Q_{tot} C_2}{C_2 + C_3} = \frac{Q_{tot} C_3}{C_2 + C_3} .$$

Dalla seconda equazione ricaviamo immediatamente che  $C_2 = C_3$ , mentre la prima equazione può essere risolta rispetto a  $C_2$  ottenendo (si ricordi che  $Q_1 = Q_2$ )

$$C_2 = \frac{(2Q_1 - Q_2)C_1}{Q_1 + Q_2} = \frac{C_1}{2} = 5 \text{ pF} .$$

Un secondo modo di risolvere il problema con meno conti è il seguente. Dopo aver scaricato il terzo conduttore mettendolo a terra, si ha  $Q_1 = Q_2 = Q_{in}$  e  $Q_3 = 0$ , mentre nello stato finale vale  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_{fin}$ . Dato che la carica totale sui tre conduttori si conserva nei passi (2) e (3) si ha che

$$3Q_{fin} = 2Q_{in} \implies Q_{fin} = \frac{2}{3}Q_{in} .$$

Nel passo (3), quando il secondo e il terzo conduttore sono in contatto, vale l'equazione

$$V_2 = V_3 \implies \frac{Q_{fin}}{C_2} = \frac{Q_{fin}}{C_3} \implies C_2 = C_3 .$$

Nel passo (2), quando il primo e il terzo conduttore sono in contatto, la carica iniziale del primo conduttore  $Q_{in}$  si distribuisce tra i due in modo proporzionale alle loro capacità elettrostatiche. Considerando che la carica che rimane sul primo conduttore è quella finale,  $Q_{fin}$ , si può scrivere per questa carica l'equazione

$$Q_{fin} = \frac{C_1}{C_1 + C_3}Q_{in} \implies \frac{C_1}{C_1 + C_3} = \frac{2}{3} \implies C_3 = \frac{C_1}{2} .$$

6. L'elettrone compie un moto nel piano  $(xy)$  visto che non vi sono forze nella direzione  $z$  (la forza di Lorentz è ortogonale al campo e la forza d'attrito è nella stessa direzione della velocità). Se non vi fosse l'attrito l'elettrone farebbe un moto circolare uniforme con raggio di curvatura pari a

$$R = \frac{m_e v}{qB}$$

Tuttavia in presenza di attrito la sua velocità decresce e proporzionalmente anche il raggio di curvatura decresce, formando quindi una spirale: dato che la carica dell'elettrone è negativa, esso spiraleggia curvando verso sinistra, ossia in senso antiorario.

Per calcolare la lunghezza della traiettoria è sufficiente integrare la velocità lungo la traiettoria fino al momento in cui l'elettrone si arresta. L'equazione differenziale da risolvere è

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{\beta}{m_e}v(t)$$

con condizione iniziale  $v(0) = v_0$ . Si è presa in considerazione la sola forza d'attrito, perché la forza di Lorentz non compie lavoro e non cambia quindi il modulo della velocità, bensì solo la direzione della velocità. La soluzione dell'equazione differenziale è

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{\beta}{m_e}t\right) ,$$

da cui possiamo ricavare la lunghezza della traiettoria integrando la velocità

$$s = \int_0^{\infty} v(t)dt = \frac{m_e v_0}{\beta} = 30.3 \text{ cm} .$$

Il lavoro totale fatto dalle forze d'attrito è pari all'opposto dell'energia cinetica iniziale, visto che alla fine l'elettrone è fermo, quindi

$$L_{attr} = -\frac{1}{2}m_e v_0^2 = -4.55 \cdot 10^{-19} \text{ J} = -2.84 \text{ eV} .$$