Prova scritta del corso di Fisica (con soluzioni)

Prof. F. Ricci-Tersenghi

03/02/2012

1. Una massa ($m = 1\,kg$) scorre a velocità costante $v_0 = 1\,m/s$ su un piano orizzontale in assenza di attrito. Il piano ha una zona scabra lunga $L = 10\,cm$ con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.25$. Riesce la massa a superare senza fermarsi la zona scabra? Qual'è il lavoro fatto dalle forze d'attrito? Qual'è la velocità minima v_m che permette alla massa di non fermarsi nella zona scabra? Se la massa viaggia inizialmente con una velocità pari a $v_m/2$ quando dovrebbe essere inclinato il piano affinché la massa non si fermi nella zona scabra?

2. Si consideri un circuito composto da 5 resistori di resistenza $R = 4\,\Omega$ disposti come segue: quattro formano i lati di una quadrato (i cui vertici chiamiamo A, B, C e D) e il quinto collega lungo la diagonale i vertici A e C che sono opposti. Si calcoli la corrente che scorre nel circuito se un generatore di fem $f = 12\,V$ viene collegato ai capi A e C. Se invece venisse collegato ai capi B e D, quale sarebbe la corrente?

3. Tre fili infinitamente lunghi e con densità di carica lineare pari a $\lambda = 10\,\mu C/m$ sono disposti parallelamente ad una distanza di $20\,cm$ l'uno dall'altro. Un quarto filo infinitamente lungo e con densità lineare di carica pari a $\lambda' = -5\,\mu C/m$ è disposto parallelamente agli altri e da essi equidistante (in pratica è al centro degli altri 3 fili). Calcolare il flusso del campo elettrico uscente da un cilindro il cui asse coincide con il filo carico negativamente, di altezza $h = 60\,cm$ e raggio pari a $30\,cm$. Se il raggio fosse di $10\,cm$ quanto varrebbe il flusso del campo elettrico uscente dal cilindro?

4. Si studi il moto di una particella di carica elettrica $q = 10^{-18}\,C$ nel piano bidimensionale. Si consideri che all'inizio tale particella è in quiete nella posizione $(-1\,m, 0)$. Nel semipiano $x < 0$ è presente solo un potenziale elettrico $V(x, y) = \frac{-10\,V}{1-x+y^2}$ (dove le coordinate sono espresse in metri), mentre nel semipiano con $x > 0$ è presente solo un campo magnetico perpendicolare al piano $\vec{B} = -(0, 0, 0.1\,T)$. Sapendo che ad un certo istante la particella passa per l'origine con velocità parallela all'asse delle x e che in un momento successivo viene trovata nel punto $(0, 2\,m)$ si calcoli la sua massa e la velocità con cui passa per l'origine.

1 Soluzioni

1. Iniziamo con il calcolo della velocità minima v_m, che soddisfa l'equazione

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = L\mu_d mg \ ,$$

ossia l'energia cinetica iniziale viene persa lungo tutto ed esattamente il tratto scabro. Il valore di v_m è quindi

$$v_m = \sqrt{2L\mu_d g} = 0.7\, m/s \ .$$

Quindi $v_0 = 1\, m/s$ è maggiore di v_m e la massa supera la zona scabra. In questo caso il lavoro fatto dalle forze d'attrito è pari a

$$L_{attr} = L\mu_d mg = 0.245\, J \ .$$

Se invece il piano è inclinato di un angolo θ le forze tangenziali che agiscono sulla massa sommano a

$$F_R = -\mu_d mg\cos(\theta) + mg\sin(\theta) \ .$$

Quindi la condizione che con una velocità iniziale $v_0 = v_m/2$ la massa si fermi esattamente alla fine della zona scabra può essere scritta come

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{v_m}{2}\right)^2 = mgL(\mu_d\cos\theta - \sin\theta) \ .$$

Per ottenere il massimo punteggio su questo esercizio sarebbe stato sufficiente arrivare a scrivere l'equazione qui sopra, magari semplificata sostituendo l'espressione per v_m, ossia

$$\frac{\mu_d}{4} = \mu_d\cos\theta - \sin\theta \ .$$

Sfruttando l'equazione trigonometrica $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$ si capisce che questa equazione è del secondo ordine in $\cos\theta$ e si può risolvere analiticamente ottenendo

$$\cos\theta = \frac{\mu^2 \pm \sqrt{16 + 15\mu^2}}{4(1+\mu^2)} \ ,$$

dove il segno davanti alla radice quadrata deve essere fissato a $+$, perché nel limite $\mu_d \to 0$ l'angolo θ deve essere nullo (non serve inclinare il piano se non vi è attrito). Con il valore $\mu_d = 0.25$ si ottiene quindi

$$\theta = \arccos(0.983) \simeq 11^{\text{o}} \ .$$

2. Iniziamo con il caso in cui il generatore di fem è collegato ai nodi A e C. Le due resistenze lungo il tratto ABC sono in serie e quindi equivalenti ad una di valore $R_{\rm ABC} = 2R$ e lo stesso vale per le due resistenze lungo ADC equivalenti ad una pari a $R_{\rm ADC} = 2R$. I 3 tratti ABC, ABD e AC sono in parallelo e quindi equivalenti ad un'unica resistenza di valore
$$R_{\rm AC} = \left(\frac{1}{R_{\rm ABC}} + \frac{1}{R_{\rm ADC}} + \frac{1}{R}\right)^{-1} = \frac{R}{2} = 2\,\Omega\ .$$
Quindi la corrente che scorre in questo caso è $i_{\rm AC} = f/R_{\rm AC} = 6\,A$.

   Nel caso in cui il generatore di fem è collegato ai nodi B e D non è sufficiente calcolare la resistenza equivalente, perché il verso della corrente nel tratto AC dipende dai valori delle altre 4 resistenze. In linea di principio bisognerebbe risolvere il problema con le leggi di Kirchhoff; tuttavia il caso dell'esercizio è particolarmente semplice perché grazie al fatto che tutte le resistenze sono uguali, si possono sfruttare le simmetrie del circuito e dedurre che i nodi A e C sono allo stesso potenziale, quindi nel tratto AC non scorre alcuna corrente. Quindi la corrente totale che scorre nel circuito è la somma delle correnti nei tratti BAD e BCD
$$i_{\rm BD} = i_{\rm BAD} + i_{\rm BCD}\ ,$$
che a loro volta possono essere stimate calcolando le resistenze equivalenti $R_{\rm BAD} = R_{\rm BCD} = 2R$,
$$i_{\rm BD} = \frac{f}{2R} + \frac{f}{2R} = \frac{f}{R} = 3\,A\ .$$

3. Dato che l'esercizio richiede solo il calcolo del flusso del campo elettrico, non è necessario calcolare il campo elettrico (che varia nello spazio in modo assolutamente non banale), bensí è sufficiente usare il teorema di Gauss e calcolare la carica elettrica interna al cilindro.

   Nel caso del cilindro di raggio $30\,cm$ tutti e 4 i fili attraversano il cilindro e quindi la carica contenuta all'interno del cilindro è pari a
$$Q_{\rm int} = h(3\lambda + \lambda') = 0.6\,m \cdot 25\,\mu C/m = 1.5\,10^{-5}\,C\ ,$$
da cui si deduce che il flusso di campo elettrico è uscente dal cilindro e pari a
$$\Phi(E) = \frac{Q_{\rm int}}{\varepsilon_0} = 1.7\,10^{6}\,Vm\ .$$

   Nel caso del cilindro di raggio $10\,cm$ solo il filo centrale attraversa il cilindro e quindi la carica contenuta all'interno del cilindro è pari a
$$Q_{\rm int} = h\,\lambda' = -5\,\mu C/m \cdot 0.6\,m = -3\,10^{-6}\,C\ ,$$
da cui si deduce che il flusso di campo elettrico è entrante nel cilindro e pari a
$$\Phi(E) = \frac{Q_{\rm int}}{\varepsilon_0} = 3.4\,10^{5}\,Vm\ .$$

4. Non è necessario risolvere le equazioni del moto della particella (che ci direbbero che la particella rimane sempre sull'asse delle ascisse per $x \leq 0$), perché il testo dell'esercizio stesso afferma che la particella passa per l'origine con velocità parallela all'asse delle x. In quel momento la velocità v_0 della particella può essere calcolata dalla differenza di potenziale tra il punto iniziale e l'origine

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = q\Delta V = q[V(-1,0) - V(0,0)] \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2q\,\Delta V}{m}} \ .$$

Nel semipiano $x > 0$ la particella non perde velocità e percorre una traiettoria circolare di raggio

$$R = \frac{m\,v_0}{q\,|B|} \ .$$

Risolvendo le due equazioni rispetto ad m e v_0 si ottiene

$$m = \frac{q\,B^2\,R^2}{2\,\Delta V} = 10^{-21}\,kg \ , \qquad v_0 = \frac{2\,\Delta V}{|B|\,R} = 100\,m/s \ .$$