

Prova scritta del corso di Fisica con soluzioni

Prof. F. Ricci-Tersenghi

08/09/2014

Quesiti

1. Un camion di massa pari a 20 tonnellate sta salendo per una strada con pendenza costante pari a $\theta = 10^\circ$. Sapendo che il suo motore può erogare al massimo una potenza pari a $P = 500 \text{ kW}$ ed ipotizzando che tutte le forze d'attrito del camion possano essere approssimate con $F_{attr} = -A v$, dove $A = 1000 \text{ N s/m}$ e v è la velocità del camion, si calcoli la massima velocità a cui può salire il camion.
Mentre il camion sta salendo alla velocità massima, l'autista smette di accelerare e non tocca i freni. Quanto tempo è necessario al camion per fermarsi?
2. Due conduttori di capacità elettrostatiche pari a $C_1 = 10 \text{ pF}$ e $C_2 = 40 \text{ pF}$ sono carichi rispettivamente con cariche elettriche pari a $Q_1 = 2 \mu\text{C}$ e $Q_2 = 1 \mu\text{C}$. Quando vengono connessi con un filo elettrico di resistenza $R = 1 \text{ k}\Omega$, le loro cariche si ridistribuiscono. Calcolare la nuove cariche presenti sui due conduttori e l'energia che si è dissipata sulla resistenza.
Come sarebbero cambiate le risposte se la resistenza del filo fosse stata $R' = 100 \Omega$?
3. Si considerino tre cariche elettriche puntiformi di intensità $q_1 = 1 \text{ nC}$, $q_2 = 2 \text{ nC}$ e $q_3 = 3 \text{ nC}$ disposte ai vertici di un triangolo equilatero di lato $L = 40 \text{ cm}$ e si calcoli il campo elettrico al centro del triangolo. Quanta energia sarebbe necessaria per portare un elettrone dal centro del triangolo all'infinito?
4. Un elettrone inizialmente fermo al centro tra due griglie distanti $d = 10 \text{ cm}$, viene prima accelerato applicando alle griglie una differenza di potenziale elettrico pari a $\Delta V = 0.1 \text{ V}$. Dopo essere uscito dalle griglie, entra in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico costante di intensità $B = 10 \text{ G}$ e ortogonale alla direzione di volo dell'elettrone. Si calcolino le accelerazioni a cui viene sottoposto l'elettrone.

Soluzioni

1. Alla velocità massima l'accelerazione del camion è nulla e pertanto la risultante delle forze parallele alla strada deve annullarsi

$$F_{motore} = mg \sin(\theta) + Av_{max}$$

Inoltre, in questa situazione, la potenza erogata dal motore è pari a

$$P = F_{motore}v_{max} = mg \sin(\theta)v_{max} + Av_{max}^2$$

La soluzione fisicamente interessante (ossia con v_{max} positivo) di questa equazione del secondo ordine è

$$v_{max} = \frac{-mg \sin \theta + \sqrt{(mg \sin \theta)^2 + 4AP}}{2A} = 11.1 \text{ m/s} \simeq 40 \text{ km/h}$$

Nel momento in cui viene a mancare la forza dovuta al motore ($F_{motore} = 0$) la velocità decresce seguendo la seconda legge della dinamica

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin(\theta) - Av(t)$$

con condizione iniziale $v(0) = v_{max}$. La soluzione dell'equazione può essere ottenuta per separazione delle variabili

$$-\frac{dv}{g \sin(\theta) + Av/m} = dt$$

da cui si ottiene che il tempo affinché la velocità raggiunga il valore nullo è pari a

$$t^* = - \int_{v_{max}}^0 \frac{dv}{g \sin(\theta) + Av/m} = \frac{m}{A} \log \left(1 + \frac{Av_{max}}{mg \sin \theta} \right) = 5.6 \text{ s}$$

2. Quando i due conduttori vengono connessi le loro cariche ($Q_1 + Q_2 = 3nC$) si distribuiscono in modo proporzionale alle loro capacità, per cui le nuove cariche saranno

$$Q'_1 = C_1 \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = 0.6nC \quad Q'_2 = C_2 \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = 2.4nC$$

L'energia che viene dissipata sulla resistenza nel processo di redistribuzione delle cariche può essere calcolato come la differenza tra le energie immagazzinate nei conduttori prima e dopo il collegamento

$$E_{diss} = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} - \frac{Q_1'^2}{2C_1} - \frac{Q_2'^2}{2C_2} = 0.18 \text{ J}$$

Entrambe le risposte non dipendono dal valore della resistenza elettrica del filo che connette i conduttori.

3. La distanza tra i vertici e il centro del triangolo è pari a $d = L/\sqrt{3}$. Il campo elettrico al centro del triangolo è dato dalla somma vettoriale dei campi elettrici prodotti dalle 3 cariche, che hanno intensità pari a $E_i = k_0 q_i / d^2$ ($i = 1, 2, 3$) e angoli di 120° tra di loro. Per comodità fissiamo il lato inferiore del triangolo parallelo all'asse delle ascisse e mettiamo la carica q_1 sul vertice superiore del triangolo. Con questa scelta i tre campi elettrici da sommare sono pari a

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \frac{k_0 q_1}{d^2} (0, -1) & \vec{E}_2 &= \frac{k_0 q_1}{d^2} (2 \cos(\pi/6), 2 \sin(\pi/6)) = \frac{k_0 q_1}{d^2} (\sqrt{3}, 1) \\ \vec{E}_3 &= \frac{k_0 q_1}{d^2} (3 \cos(5\pi/6), 3 \sin(5\pi/6)) = \frac{k_0 q_1}{d^2} \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right)\end{aligned}$$

da cui

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{k_0 q_1}{d^2} \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right) = \frac{3k_0 q_1}{L^2} \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right) = (-146, 253) V/m$$

che ha modulo pari a $E = 3\sqrt{3}k_0 q_1 / L^2 = 292 V/m$ e direzione verso il lato con q_1 e q_2 , con angolo di 30° rispetto alla retta che congiunge il centro del triangolo e la carica q_1 .

Il potenziale elettrostatico al centro del triangolo è pari a

$$V = \frac{k_0}{d} q_1 + \frac{k_0}{d} q_2 + \frac{k_0}{d} q_3 = 234 V$$

mentre all'infinito è nullo, quindi l'energia necessaria a spostare un elettrone dal centro del triangolo all'infinito è pari a $234 eV = 3.74 \cdot 10^{-17} J$.

4. Tra le griglie è presente un campo elettrico di intensità pari a $E = \Delta V / d = 1 V/m$, quindi l'elettrone sente un'accelerazione d'intensità pari a

$$a_E = \frac{q_e E}{m_e} = 1.76 \cdot 10^{11} m/s^2$$

La velocità con cui l'elettrone esce dalle griglie può essere calcolata tramite il teorema dell'energia cinetica

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = q_e \frac{\Delta V}{2} \implies v = \sqrt{\frac{q_e}{m_e} \Delta V}$$

Nella regione di spazio con il campo magnetico l'elettrone percorre una traiettoria circolare di raggio

$$R = \frac{m_e v}{q_e B}$$

durante la quale subisce un'accelerazione centripeta pari a

$$a_B = \frac{v^2}{R} = \frac{q_e B v}{m_e} = \frac{q_e B}{m_e} \sqrt{\frac{q_e}{m_e} \Delta V} = 2.33 \cdot 10^{13} m/s^2$$