Esercizi e soluzioni della prova scritta del 20 aprile 2012

Prof. F. Ricci-Tersenghi

20/04/2012

1. Una massa di $200\,g$ è posta su un piano inclinato che forma un angolo di $\theta = 20^{\circ}$ con l'orizzontale e possiede un coefficiente di attrito statico pari a $\mu_s = 0.3$ e uno dinamico pari a $\mu_d = 0.2$. Se inizialmente la massa è in quiete ad un altezza $h = 50\,cm$ rispetto al suolo, si calcoli la velocità con cui raggiunge il suolo e il lavoro fatto dalla forza d'attrito. Raggiungendo il suolo, la massa vi si conficca: si calcoli quanta energia si è dissipata in questo processo.

2. Un bambino sta su una giostra che gira con una frequenza di un giro ogni 2 secondi. Mentre la giostra gira il bambino si trova a una distanza di $R = 5\,m$ dal centro della giostra e ad un'altezza di $h = 3\,m$ da suolo. Ad un certo punto il bambino perde l'orsacchiotto che teneva in mano. Si disegni la traiettoria che compie l'orsacchiotto e si calcoli la sua legge oraria. A che distanza dal centro della giostra l'orsacchiotto atterra? Si trascuri l'attrito dell'orsacchiotto con l'aria.

3. Si consideri un circuito elettrico formato dai seguenti 4 elementi in serie: un generatore di fem $f = 12\,V$, un condensatore di capacità $C_1 = 10\,\mu F$, un resistore di resistenza $R = 2\,k\Omega$ e un secondo condensatore di capacità $C_2 = 40\,\mu F$. Al tempo $t = 0$ i condensatori sono scarichi e il circuito viene chiuso. Si calcoli come varia con il tempo la corrente che scorre attraverso il resistore e quale sia il massimo valore per questa corrente.

4. Sia data una sbarra cilindrica molto lunga e di diametro $d = 4\,cm$, uniformemente carica con densità di carica pari a $\rho = 300\,nC/m^3$. Si calcoli il campo elettrico generato dalla sbarra in un punto che dista $r = 40\,cm$ dall'asse della sbarra. Se in tale punto fosse posto in quiete un elettrone ($q = -1.6 \cdot 10^{-19}\,C$, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$), si calcoli la velocità con cui l'elettrone raggiungerebbe la sbarra.

Soluzioni

1. Possiamo scomporre le forze a cui è soggetta la massa nelle loro componenti ortogonali e parallele al piano inclinato. Alle prime contribuiscono la forza peso e la reazione vincolare normale che risolvono quindi la seguente equazione

$$mg\cos(\theta) - N = 0 \ ,$$

mentre parallelamente al piano abbiamo un contributo della forza peso e la forza d'attrito, la cui somma fornisce la forza risultante (scegliamo come direzione positiva, quella in cui si scende lungo il piano)

$$F = mg\sin(\theta) - \mu N = mg[\sin(\theta) - \mu\cos(\theta)] \ .$$

Si può avere moto solo se la forza risultante è positiva, ossia se

$$\tan(\theta) > \mu_s \ .$$

Questa relazione è verificata dai dati del problema, quindi la massa si mette in moto e durante il moto la forza che sente è costante e pari a

$$F = mg[\sin(\theta) - \mu_d\cos(\theta)] \ .$$

L'energia cinetica acquisita dalla massa durante la discesa lungo il piano inclinato è pari al lavoro fatto su di essa dalla forza risultante

$$K = F\ell \ ,$$

dove $\ell = h/sin(\theta)$ è la lunghezza del piano inclinato. Quindi

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = F\ell = mgh\left(1 - \mu_d\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) \ ,$$

che risolta rispetto a v fornisce la velocità con cui la massa arriva al suolo

$$v = \sqrt{2gh\left(1 - \mu_d\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)} = 2.1\,m/s$$

Il lavoro fatto dalla forza d'attrito è pari a

$$L_{attr} = -mgh\mu_d\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = -0.54\,J$$

Nel conficcarsi al suolo la massa perde tutta la sua energia cinetica che è pari a

$$K = 0.44\,J$$

2. Nel momento che l'orsacchiotto si stacca dalle mani del bambino segue una traiettoria che, se vista dall'alto, coincide con la retta tangente alla circonferenza descritta dal moto del bambino, mentre, se vista dal suolo, è una parabola. La legge oraria seguita dall'orsacchiotto è quella di un punto materiale soggetto alla sola forza di gravità, ossia un moto uniforme nella componente orizzontale e uniformemente accelerato nella componente verticale. Scegliamo come origine degli assi il punto del suolo esattamente sotto al bambino nel momento che perde l'orsacchiotto e l'orientamento degli assi in modo che la direzione dell'asse delle x coincida con la tangente alla circonferenza: in questo moto il moto dell'orsacchiotto si svolge nel piano (x, z) e al momento iniziale si trova nella posizione $(0, h)$ con una velocità $(v, 0)$, dove v è data dalla velocità del bambino sulla giostra: $v = \omega R = \pi R$. La legge del moto è quindi data da

$$x(t) = vt \; , \qquad z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \; .$$

L'orsacchiotto tocca il suolo ad un tempo $t^* = \sqrt{2h/g}$ ed il punto in cui atterra dista dal centro della giostra

$$d = \sqrt{R^2 + x(t^*)^2} = R\sqrt{1 + 2\pi^2 h/g} = 13.3\, m$$

3. Essendo i due condensatori in serie possono essere sostituiti da un condensatore equivalente di capacità

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 8\, \mu F \; .$$

Il circuito risultante è un normale circuito RC e se questo viene chiuso al tempo $t = 0$ la corrente che circola nel circuito (e quindi attraverso il resistore) è pari a

$$i(t) = \frac{f}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \; ,$$

dove $\tau = RC_{eq} = 16\, ms$ è il tempo caratteristico e $f/R = 6\, mA$ è la massima corrente.

4. Per calcolare il campo elettrico generato dalla sbarra cilindrica in un punto a distanza r dall'asse della sbarra stessa, possiamo usare il teorema di Gauss prendendo come superficie gaussiana un disco di raggio r ed altezza h centrato sull'asse del cilindro. Per simmetria il campo elettrico è radiale ed attraversa quindi il disco solo per la sua superficie laterale curva, ma non per le sue basi piatte. Quindi il flusso Φ è pari a

$$\Phi = E(r) 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\pi R^2 h \rho}{\varepsilon_0} \; ,$$

dove $Q_{int} = \pi R^2 h \rho$ è la carica elettrica del tratto di cilindro di altezza h contenuto nel disco $(R = d/2)$. Quindi l'intensità del campo elettrico è

$$E(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} = 17\, V/m$$

Per calcolare la variazione di energia cinetica dell'elettrone nel passare da un punto a distanza $r = 40\,cm$ dall'asse della sbarra ad un punto sulla superficie della sbarra a distanza $R = 2\,cm$ dall'asse, conviene scrivere il potenziale elettrostatico che è, a meno di una costante,

$$V(r) = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln(r)\ .$$

Quindi la variazione di potenziale è pari a

$$\Delta V = V(R) - V(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln(r/R)\ ,$$

e l'energia cinetica acquisita dall'elettrone è data da

$$K = \frac{1}{2}m_e v^2 = -q\Delta V \Longrightarrow v = R\sqrt{\frac{q\rho}{m_e\varepsilon_0}\ln(r/R)} = 2.67\,10^6\,m/s$$