Soluzioni degli esercizi delle prove scritte del 29 febbraio 2012

Prof. F. Ricci-Tersenghi

Lo scritto di Fisica 1 consisteva negli esercizi 1, 2, 3 e 4, quello di Fisica 2 negli esercizi 5, 6, 7 e 8, ed infine quello di Fisica negli esercizi 3, 5, 6, 8.

1. Siano date due forze $\vec{F}_1 = (3, 0, 0)$ e $\vec{F}_2 = (4, 2, 0)$, si calcoli quanto vale una terza forza data dal loro prodotto vettoriale $\vec{F}_3 = \vec{F}_1 \times \vec{F}_2$. Se su un punto materiale agiscono tutte e tre le forze $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ed $\vec{F}_3$, si calcoli quanto deve valere una quarta forza $\vec{F}_4$, affinché la risultante sia nulla.

2. Supponete di essere ad una distanza $d = 10\,m$ da un muro che ha davanti a voi un foro ad un'altezza $h = 5\,m$. Dovete lanciare una pallina nel foro, ma per entrarvi la pallina deve arrivare nel foro con velocità orizzontale (ossia parallela al suolo). Ipotizzando che la pallina non abbia attriti con l'aria, calcolate la velocità e l'angolo di lancio per infilare la pallina nel foro. Nel caso, invece, che sia presente un vento verso il muro e ad esso ortogonale di velocità $w = 5\,m/s$, quali dovrebbero la velocità e l'angolo di lancio?

3. Una massa di $300\,g$ è legata a due molle di costante elastica $k = 10\,N/m$ e lunghezza a riposo ℓ_0. Le molle a loro volta sono attaccate a due supporti posizionati alla stessa altezza e distanti tra di loro $2\,\ell_0$. La massa è inizialmente mantenuta nella posizione al centro del segmento che passa per i due supporti: quando viene lasciata andare, compie delle oscillazioni e alla fine si ferma in una posizione tale che le molle formano un angolo $\theta = 30^o$ con la verticale. Calcolare di quanto è scesa la massa rispetto alla sua posizione iniziale, il valore di ℓ_0 e il lavoro fatto dalle forze d'attrito.

4. Si consideri un circuito RC formato da un generatore di fem $f = 100\,V$, una resistore con resistenza $R = 3\,k\Omega$ ed un condensatore con capacità $C = 10\,\mu F$ inizialmente scarico. Se al tempo $t = 0$ il circuito viene chiuso, si scriva l'equazione che descrive l'intensità della corrente in funzione del tempo. Si calcoli, dopo un tempo molto lungo (formalmente infinito), quanta energia è stata fornita dal generatore di fem. Dove è finita questa energia? Si supporti la risposta, calcolando quanta energia è finita in ognuna delle forme a cui avete fatto riferimento nella risposta.

5. Si consideri un circuito di forma quadrata, che ha su due lati opposti due resistori di resistenza $R = 5\,k\Omega$ e sugli altri due lati due generatori di f.e.m. $f = 12\,V$ disposti in un verso tale che nel circuito non scorra corrente. Si supponga ora di aggiungere un cavo lungo la diagonale a connettere due vertici opposti: che intensità ha la corrente che scorre per questo cavo appena aggiunto? Se questo cavo venisse sostituito al tempo $t = 0$ con un condensatore di capacità $C = 20\,\mu F$ e inizialmente scarico, si calcoli la corrente che scorrerebbe attraverso uno dei due resistori.

6. Si considerino tre lamine piane, infinitamente estese, con densità di carica costante. La distanza tra due lamine successive è pari a $d = 50\,cm$. La lamina di sinistra ha densità di carica pari a $\sigma = 6\,\mu C/m^2$, mentre le restanti due hanno densità di carica pari a $\sigma' = -3\,\mu C/m^2$. Si calcoli il potenziale elettrico lungo una qualsiasi retta ortogonale alle lamine. Se un elettrone ($q = -1.6 \cdot 10^{-19}\,C$, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$) viene lanciato verso la lamina carica positivamente da una distanza di $10\,m$ con velocità $v_0 = 10^8\,m/s$, riesce a raggiungere la lamina? E con quale energia cinetica? (Non si consideri ovviamente nessun effetto relativistico!)

7. Si consideri un filo infinitamente lungo nel quale scorre una corrente $i_0 = 3\,A$. Intorno a questo filo "centrale" ci sono altri tre fili "esterni", anch'essi infinitamente lunghi e disposti a distanza $d = 1\,cm$ da quello centrale ed equidistanti tra di essi (come se fossero gli spigoli di un prisma regolare). In questi tre fili scorrono correnti di intensità $i_1 = i_2 = 1\,A$ e $i_3 = 2\,A$ e tutte di verso opposto a quella del filo centrale. Si calcoli il campo magnetico sentito dal filo centrale e quanta forza viene applicata su un metro del filo centrale da parte di questo campo magnetico. Si consideri infine un cilindro di raggio $5\,cm$ ed altezza $h = 1\,m$ il cui asse corrisponde al filo centrale e si calcoli il flusso del campo magnetico uscente dal cilindro.

8. Un elettrone ($q = -1.6 \cdot 10^{-19}\,C$, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$) si muove a velocità $v_0 = 10^8\,m/s$ lungo l'asse delle ascisse provenendo dal semipiano $x < 0$. Nel momento in cui passa per l'origine degli assi viene acceso un campo magnetico di intensità $B = 6 \cdot 10^{-3}\,T$ per un tempo di $1\,ns$ nella direzione positiva dell'asse delle z e subito dopo un campo magnetico in verso opposto per un tempo di $1\,ns$; quindi il campo magnetico viene spento definitivamente. Quale traiettoria segue l'elettrone, dove si trova al tempo $2\,ns$ e al tempo $4\,ns$? (Non si consideri ovviamente nessun effetto relativistico!)

Soluzioni

1. $F_3 = (0, 0, 6)$ e $F_4 = (-7, -2, -6)$.

2. Prendendo come origine degli assi il punto da cui si lancia, chiamiamo v il modulo della velocità iniziale e θ l'angolo di lancio, da cui le velocità iniziali orizzontali e verticali sono date rispettivamente da $v_x(0) = v\cos(\theta)$ e $v_y(0) = v\sin(\theta)$. L'unica forza agente sulla pallina è quella di gravità, per cui in assenza di vento le velocità in funzione del tempo sono date da

$$v_x(t) = v_x(0) \qquad v_y(t) = v_y(0) - g\,t\ ,$$

e le leggi orarie sono

$$x(t) = v_x(0)t \qquad y(t) = v_y(0)t - \frac{1}{2}gt^2\ .$$

Dalle equazioni per le velocità si deduce che la condizione di velocità orizzontale si ottiene per un tempo t^* tale che $v_y(t^*) = 0$ ossia $t^* = v_y(0)/g$. A quel tempo la pallina si trova in una posizione le cui coordinate devono soddisfare

$$x(t^*) = v_x(0)v_y(0)/g = d \qquad y(t^*) = v_y(0)^2/(2g) = h\ ,$$

da cui si ottiene

$$\tan(\theta) = 2h/d \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}\,rad = 45^o \qquad v = \sqrt{\frac{g(d^2+4h^2)}{2h}} = 14\,m/s$$

In presenza di vento orizzontale, l'unica legge oraria che cambia è quella per la coordinata orizzontale

$$x(t) = (v'_x(0) + w)t \qquad y(t) = v'_y(0)t - \frac{1}{2}gt^2\ ,$$

per cui valgono le stesse equazioni di prima con la sostituzione $v_x(0) \to v'_x(0) + w = v'\cos(\theta') + w$ e $v_y(0) \to v'_y(0) = v'\sin(\theta')$. La soluzione è $v' = 11\,m/s$ e $\theta' = 1.1\,rad = \simeq 64^o$.

3. Quando la massa raggiunge la posizione di equilibrio possiamo calcolare la lunghezza di ogni molla come $\ell_0/\sin(30^o) = 2\ell_0$ e la distanza scesa dalla massa rispetto al punto iniziale come $h = 2\ell_0\cos(30^o) = \sqrt{3}\ell_0$. Ognuna delle due molle esercita sulla massa una forza di intensità pari a $F = k(2\ell_0 - \ell_0) = k\ell_0$. La condizione di risultante delle forze nulla sulla massa si scrive (per la componente verticale)

$$mg = 2F\cos(30^o) = \sqrt{3}k\ell_0 \Rightarrow \ell_0 = \frac{mg}{\sqrt{3}k} = 17\,cm \Rightarrow h = \frac{mg}{k} = 29.4\,cm$$

Il lavoro delle forze di attrito si può ottenere come differenza tra l'energia potenziale nello stato finale (ossia quella elastica delle due molle allungate) e l'energia potenziale dello stato iniziale (ossia quella gravitazionale, prendendo come origine la posizione finale):

$$L_{attr} = 2\frac{1}{2}k\ell_0^2 - mgh = -\frac{2(mg)^2}{3k} = -0.576\,J$$

4. Si tratta di un normale circuito RC per cui la corrente elettrica è descritta dalla legge

$$i(t) = \frac{f}{R}e^{-t/(RC)} \ .$$

L'energia fornita dal generatore di f.e.m. è pari all'integrale nel tempo della potenza erogata

$$L_{fem} = \int_0^\infty f\,i(t)\,dt = Cf^2 \ ,$$

e questa energia è finita in parte nel condensatore e in parte è stata dissipata nel resistore. L'energia accumulata nel condensatore si può calcolare notando che all'equilibrio (per un tempo molto lungo) la differenza di potenziale tra le armature del condensatore è proprio pari ad f, per cui

$$U_{cond} = \frac{1}{2}Cf^2 \ .$$

L'energia dissipata nella resistenza è pari all'integrale della potenza dissipata

$$E_{diss} = \int_0^\infty R\,i(t)^2\,dt = \frac{1}{2}Cf^2 \ .$$

Un valido controllo è che $L_{fem} = U_{cond} + E_{diss}$.

5. Per la simmetria del circuito (o per le leggi di Kirchhoff) si deduce che la corrente che passa per il cavo lungo la diagonale i_2 è la somma delle due correnti i_1 (uguali) che passano per i resistori

$$i_2 = 2i_1 = 2\frac{f}{R} = 4.8 \cdot 10^{-3} A \ .$$

Inserendo un condensatore lungo la diagonale al tempo $t = 0$, la corrente che passa per un resistore $i_1(t)$ può essere calcolata con la legge di Kirchhoff per una delle due maglie

$$f - \frac{Q(t)}{C} = R\,i_1(t)$$

dove $Q(t)$ è la carica sul condensatore al tempo t ed è legata alla corrente che scorre nel circuito da

$$\frac{dQ(t)}{dt} = i_2(t) = 2i_1(t)$$

Quindi l'equazione che ne risulta è

$$f = \frac{Q(t)}{C} + \frac{R}{2}\frac{dQ(t)}{dt}$$

che è esattamente l'equazione del circuito RC con l'unico cambio $R \to R/2$. La sua soluzione è quindi

$$\begin{aligned} Q(t) &= fC(1 - e^{-t/\tau}) \, , \\ i_2(t) &= \frac{2f}{R} e^{-t/\tau} \, , \\ i_1(t) &= \frac{f}{R} e^{-t/\tau} \, , \end{aligned}$$

con $\tau = RC/2 = 0.05\,s$.

6. Il campo elettrico in ogni punto dello spazio si può calcolare come la somma dei campi elettrici prodotti da ognuna delle 3 lamine (principio di sovrapposizione). Scegliendo l'origine degli assi sulla lamina di sinistra ed esprimendo tutte le distanze in metri, le posizioni delle tre lamine sono $x_S = 0$, $x_C = 0.5$ e $x_D = 1$. Il campo elettrico è parallelo all'asse delle x e d'intensità e verso pari a (valori positivi indicano verso delle x positive)

$$E(x) = \begin{cases} (-\sigma - 2\sigma')/(2\varepsilon_0) = 0\,V/m & x < x_S \\ (\sigma - 2\sigma')/(2\varepsilon_0) = 6.8 \cdot 10^5\,V/m & x_S < x < x_C \\ \sigma/(2\varepsilon_0) = 3.4 \cdot 10^5\,V/m & x_C < x < x_D \\ (\sigma + 2\sigma')/(2\varepsilon_0) = 0\,V/m & x_D < x \end{cases}$$

In ogni punto dello spazio il campo elettrico è pari a meno la derivata del potenziale elettrico e quindi quest'ultimo è univocamente determinato a meno di una costante, che fissiamo imponendo che sia nullo sulla lamina di sinistra, $V(x_S) = 0$:

$$V(x) = -\begin{cases} 0\,V & x < 0 \\ (\sigma - 2\sigma')/(2\varepsilon_0)x = 6.8 \cdot 10^5 x\,V & 0 < x < 0.5 \\ (\sigma - 2\sigma')/(4\varepsilon_0) + \sigma/(2\varepsilon_0)(x - 0.5) = 3.4 \cdot 10^5(x + 0.5)\,V & 0.5 < x < 1 \\ (\sigma - 2\sigma')/(4\varepsilon_0) + \sigma/(4\varepsilon_0) = 5.1 \cdot 10^5\,V & x > 1 \end{cases}$$

Esternamente alle lamine non vi è campo elettrico, quindi l'elettrone non sente alcuna forza e mantiene la sua energia cinetica pari a $K = m_e v_0^2/2 = 4.5 \cdot 10^{-15}\,J$ con cui arriva sulla lamina di sinistra (se anche si fosse considerata l'attrazione gravitazionale il tempo di volo dell'elettrone è talmente corto, $\Delta t = 10^{-7}\,s$, che la variazione di energia cinetica è dell'ordine di 10^{-28} volte K e quindi completamente irrilevante).

7. Il campo magnetico che agisce sul filo centrale è la somma dei tre campi magnetici, $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ e $\vec{B}_3$, prodotti dai fili laterali, che a loro volta sono dati dalla legge di Biot-Savart. Tuttavia, invece

di fare la somma dei tre vettori di campo magnetico, notiamo che grazie alla configurazione particolarmente simmetrica dei fili se tutti e tre fossero attraversati dalla stessa corrente (in verso e intensità) la somma dei vettori di campo magnetico sarebbe nulla. Quindi, per quanto riguarda la somma vettoriale dei campi, il risultato non cambia se si aumenta o diminuisce la corrente che scorre nei tre fili della stessa quantità. Quindi il campo magnetico totale e la relativa forza magnetica possono essere calcolate usando $i_1 = i_2 = 0$ e $i_3 = 1\,A$, ossia una sola coppia di fili infinitamente lunghi percorsi da correnti opposte di intensità $i_0 = 3\,A$ e $i_3 = 1\,A$. Il campo magnetico è diretto ortogonalmente al piano che passa per questi due fili ed è di intensità pari a $B = 2 \cdot 10^{-5}\,T$. La forza agente su un metro di filo si può dedurre direttamente dalla definizione di Ampere, moltiplicandola per la corrente i_0 e dividendola per d e risulta pari a $6 \cdot 10^{-5}\,N$.

Il flusso del campo magnetico uscente dal cilindro è nullo perché il flusso del campo magnetico attraverso qualsiasi superficie chiusa è nullo.

8. L'elettrone segue una traiettoria nel piano xy composta da un arco di circonferenza con curvatura verso l'alto, seguito da un arco di circonferenza con curvatura verso il basso. Grazie al fatto che questi due archi hanno pari lunghezza, quando il campo magnetico si spegne l'elettrone ha nuovamente una velocità parallela all'asse delle x e cosí rimane per tutti i tempi maggiori di $2\,ns$. Il raggio di curvatura dei due archi è pari a

$$R = \frac{mv_0}{|q|B} = 9.5\,cm$$

L'elettrone percorre questi due archi con velocità angolare costante e pari a

$$\omega = \frac{v_0}{R} = 1.05 \cdot 10^9\,s^{-1}$$

quindi in un tempo di $1\,ns$ percorre un arco $\theta = 1.05\,rad \simeq 60^o$, che corrisponde ai seguenti spostamenti nelle due coordinate

$$\Delta x = R\sin(\theta) = 8.25\,cm \qquad \Delta y = R(1 - \cos(\theta)) = 4.8\,cm$$

Quindi al tempo di $2\,ns$ l'elettrone si trova esattamente alla fine del secondo arco in un punto di coordinate $(2\Delta x, 2\Delta y) = (16.5, 9.6)\,cm$, mentre al tempo $4\,ns$ si trova nel punto di coordinate $(36.5, 9.6)\,cm$, perché ha percorso altri $v_0 \cdot 2\,ns = 20\,cm$ nella direzione dell'asse delle x.