

Annichilazione elettrone-positrone

Nicola Cabibbo

23 Novembre 1999

1 Il processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Vogliamo prendere in considerazione la annichilazione $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ per illustrare una serie di aspetti interessanti della fenomenologia delle particelle.

Nel limite estremo relativistico, $E \gg m_\mu$, la sezione d'urto differenziale è data da

$$(1) \quad \frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} = \frac{\alpha^2}{16E^2}(1 + \cos^2\theta)$$

e la sezione d'urto totale da

$$(2) \quad \sigma = \frac{\pi\alpha^2}{3E^2}$$

Ricordiamo che questa è l'espressione della sezione d'urto nel centro di

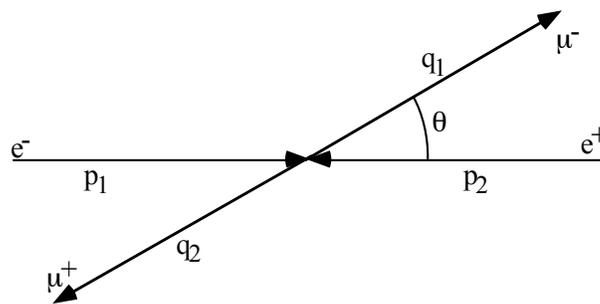


Figura 1: La cinematica del processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

massa, e che E è l'energia dell'elettrone o del positrone, e quindi anche l'energia dei due μ nello stato finale, mentre θ è l'angolo tra l'elettrone entrante e il μ^- uscente.

Seguiremo una serie di argomenti:

- Analisi dimensionale
- Corrente conservata
- Momento angolare
- Elicità

Questi ci permetteranno di comprendere l'origine del fattore $1/E^2$ e della dipendenza angolare $(1 + \cos^2 \theta)$. Allo stesso tempo ci permetteranno di introdurre concetti importanti per la fenomenologia delle particelle.

1.1 Analisi dimensionale

La sezione d'urto ha le dimensioni di una area, $[\sigma] = [L^2] = [E^{-2}]$ nelle unità in cui $\hbar = c = 1$. La costante di struttura fine, $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137$ è un numero puro. Ci possiamo aspettare che nel limite estremo relativistico le masse possano essere trascurate, di modo che E sia l'unico parametro dimensionale che caratterizza il processo, e quindi $\sigma \propto 1/E^2$.

Questa attesa è confermata all'ordine più basso della teoria delle perturbazioni (eq. (1)), ma non nel caso di correzioni di ordine superiore, in cui appaiono termini proporzionali a $\log(\frac{m_e}{E}), \log(\frac{m_\mu}{E})$.

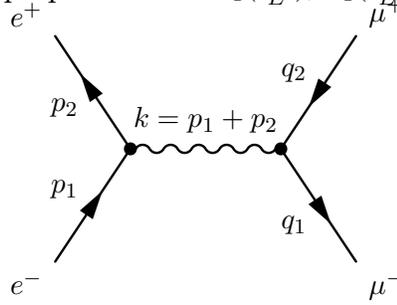


Figura 2: Diagramma al secondo ordine perturbativo

1.2 Corrente conservata

L'elemento di matrice invariante per il diagramma all'ordine più basso, fig. 2, è dato da

$$(3) \quad \mathcal{M} = \frac{i}{(k)^2} (\bar{v}(p_2) \gamma_\lambda u(p_1)) (\bar{u}(q_1) \gamma^\lambda v(q_2))$$

Ciascuno dei due fattori è un elemento di matrice della corrente elettromagnetica; si verifica facilmente che, se trascuriamo fattori cinematici $\sqrt{m/E}$,

$$(4) \quad (\bar{u}(q_1) \gamma^\lambda v(q_2)) e^{-i(kx)} \propto \langle \mu^- \mu^+ | j^\lambda(x) | 0 \rangle$$

ed analogamente per la corrente al primo vertice, relativo agli elettroni. Dalla conservazione della corrente elettromagnetica abbiamo allora

$$(5) \quad k_\lambda \langle \mu^- \mu^+ | j^\lambda(x) | 0 \rangle = i \langle \mu^- \mu^+ | \partial_\lambda j^\lambda(x) | 0 \rangle = 0$$

Nel sistema del centro di massa abbiamo $k = p_1 + p_2 = q_1 + q_2 = \{2E, 0\}$, quindi la conservazione della corrente si riduce alla condizione

$$(6) \quad \langle \mu^- \mu^+ | j^0(x) | 0 \rangle = 0 \quad \text{nel centro di massa}$$

da cui segue che solo la parte vettoriale della corrente, \vec{j} , contribuisce all'ampiezza di transizione. Quindi

$$(7) \quad \mathcal{M} \propto \langle \mu^- \mu^+ | \vec{j} | 0 \rangle \langle 0 | \vec{j} | e^- e^+ \rangle$$

1.3 Momento angolare

Lo stato finale $\mu^- \mu^+$ è creato dall'operatore \vec{j} che agisce sul vuoto. Dato che \vec{j} è in operatore vettoriale, lo stato finale ha momento angolare totale eguale ad 1.¹ La dimostrazione, semplice e diretta, discende dalle regole di commutazione tra il momento angolare totale J ed un qualsiasi operatore che si trasforma come un vettore², ad esempio la corrente j ,

$$(8) \quad [J^l, j_m] = \epsilon_{lmn} j_n$$

Verifichiamo che gli stati $\mu^- \mu^+$ creati dalle tre componenti della corrente,

$$\begin{aligned} |A^0\rangle &= j_3 |0\rangle \\ |A^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(j_1 \pm ij_2) |0\rangle \end{aligned}$$

corrispondono ad autovalori $m = 0, \pm 1$ di J^3

$$\begin{aligned} J^3 |A^0\rangle &= 0 & m &= 0 \\ J^3 |A^\pm\rangle &= \pm |A^\pm\rangle & m &= \pm 1 \end{aligned}$$

Infatti, dato che $J^3 |0\rangle = 0$, la seconda di queste equazioni deriva da

$$J^3 \frac{1}{\sqrt{2}}(j_1 \pm ij_2) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [J^3, (j_1 \pm ij_2)] |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (ij_2 \pm j_1) |0\rangle$$

¹Notiamo che normalmente non misuriamo il momento angolare \vec{J} dello stato finale, ma le quantità di moto \vec{q}_1, \vec{q}_2 , il che equivale a proiettare lo stato finale su stati di impulso definito.

²Da queste regole di commutazione otteniamo infatti:

$$(1 + i\vec{\alpha}\vec{J})\vec{j}(1 - i\vec{\alpha}\vec{J}) = \vec{j} + \vec{\alpha} \wedge \vec{j} + O(\vec{\alpha}^2)$$

il che esprime la trasformazione del vettore \vec{j} sotto una rotazione infinitesima $\vec{\alpha}$.

e analogamente si dimostra la prima. Inoltre con la stessa tecnica si dimostra che, con la usuale definizione degli operatori di innalzamento e abbassamento, $J^\pm = J^1 \pm i J^2$,

$$\begin{aligned} J^\pm |A^0\rangle &= \mp\sqrt{2} |A^\pm\rangle \\ J^+ |A^+\rangle &= J^- |A^-\rangle = 0 \\ J^- |A^+\rangle &= -\sqrt{2} |A^0\rangle \\ J^+ |A^-\rangle &= \sqrt{2} |A^0\rangle \end{aligned}$$

e dall'insieme di questi risultati,

$$(\vec{J})^2 |A^i\rangle = \left((J^3)^2 + \frac{1}{2}(J^+ J^- + J^- J^+) \right) |A^i\rangle = 2 |A^i\rangle$$

Dato che gli autovalori di $(\vec{J})^2$ hanno la forma $j(j+1)$, concludiamo che gli stati creati dalle tre componenti di \vec{j} formano un tripletto con $j = 1$.

Abbiamo già dato un argomento, basato sulla analisi dimensionale, che spiega la dipendenza $1/E^2$ della sezione d'urto (eq. (1)). Adesso ne possiamo dare uno differente, basato sulla conservazione del momento angolare. Costruiremo questo argomento in modo qualitativo, ma esso può essere reso preciso, cosa di cui non ci occuperemo in questi appunti. Il momento angolare totale è la somma del momento angolare orbitale $\vec{r} \wedge \vec{P}$ e del momento angolare di spin. Dato che lo spin per una coppia $e^- e^+$ è 0 o 1, e che come abbiamo visto il momento angolare totale è 1, il momento orbitale può al massimo essere 2. Con riferimento alla fig. 3, il momento orbitale della coppia $e^- e^+$ è dato dal prodotto dell'impulso P (eguale nel limite estremo relativistico all'energia E) e del parametro d'impatto, b . Quindi il massimo parametro d'impatto è $b_{\max} \approx 2/P$, il che cor-

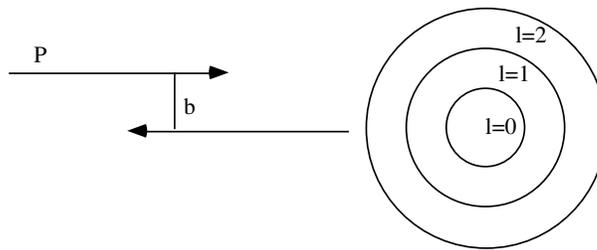


Figura 3: Momento angolare e sezione d'urto

risponde a una sezione d'urto massima data dall'area di un disco di raggio b_{\max} , $\sigma_{\max} \approx 4\pi/E^2$. Questo argomento qualitativo è sostanzialmente corretto, almeno per quanto riguarda la dipendenza dall'energia. Per ottenere

il risultato esatto,

$$(9) \quad \sigma_{\max} = \frac{3\pi}{4} E^2$$

occorre tener conto in modo corretto dello spin.

La grandezza σ_{\max} rappresenta una dimensione naturale per la sezione d'urto del nostro processo. Senza alcun calcolo, ci possiamo quindi aspettare che al secondo ordine perturbativo la sezione d'urto risulti $K\alpha^2\sigma_{\max}$ dove K è un coefficiente numerico $O(1)$, una previsione in ottimo accordo con il risultato della eq. (2).

1.4 Elicità

Una particella di spin $1/2$ ha due stati di spin per ogni valore dell'impulso \vec{p} . Tra le diverse possibili scelte della direzione lungo cui quantizzare lo spin, la più conveniente è quella lungo la direzione del moto, definita dall'operatore $\sigma_p = \vec{\sigma}\hat{p}$, detto *elicità*. Dato che $(\sigma_p)^2 = 1$, gli autovalori della elicità sono ± 1 .

Dato che la componente del momento orbitale lungo \vec{p} è nulla, l'elicità determina la componente lungo \vec{P} del momento angolare *totale* della particella,

$$(10) \quad \vec{J}\hat{p} = \frac{1}{2}\sigma_p$$

Il nome *elicità* deriva dalla immagine dello spin come rotazione intrinseca: il moto di una particella che ruota in modo antiorario intorno alla direzione del moto, quindi con elicità = +1, può essere equiparato a quello di una vite, che si avvita ruotando il cacciavite verso destra.

Possiamo scegliere soluzioni dell'equazione di Dirac che corrispondono a stati di elicità definita, $h = \pm 1$, ponendo

$$(11) \quad \sigma_p u_h(\vec{p}) = h u_h(\vec{p})$$

$$(12) \quad \sigma_p v_h(\vec{p}) = -h v_h(\vec{p})$$

Il cambiamento di segno si comprende bene nel quadro della teoria delle lacune. $v_h(\vec{p})$ rappresenta una particella di energia $-E$, momento $-\vec{p}$, e dalla eq. (12) segue che la sua elicità è $(\vec{\sigma}(-\hat{p})) = h$. Togliendo questa particella dal mare di Dirac ottengo una "lacuna" (antiparticella) di impulso, energia e momento angolare opposti a quelli della particella tolta, quindi ancora di elicità h .

L'elicità è invariante sotto rotazioni ma in generale (vedi l'appendice) non è invariante sotto trasformazioni di Lorentz. Per particelle di massa nulla l'elicità è un invariante relativistico. Infatti, partendo dalla identità

$$\sigma_i = \gamma^5 \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

e tenuto conto che per $m = 0$ si ha $E = |\vec{p}|$, il sistema di equazioni soddisfatto da $u_h(\vec{p})$

$$\begin{aligned} E u_h(\vec{p}) &= \vec{\alpha} \vec{p} u_h(\vec{p}) \\ \sigma_p u_h(\vec{p}) &= h u_h(\vec{p}) \end{aligned}$$

può essere riscritto come

$$(13) \quad \alpha_p u_h(\vec{p}) = u_h(\vec{p})$$

$$(14) \quad \gamma^5 u_h(\vec{p}) = h u_h(\vec{p})$$

Per gli stati di antiparticella (eq. (12)) troviamo invece

$$(15) \quad \gamma^5 v_h(\vec{p}) = -h v_h(\vec{p})$$

Quindi per particelle di massa zero l'elicità è rappresentata dall'operatore γ^5 , ed è un invariante relativistico.

Registriamo le corrispondenti equazioni per gli spinori aggiunti sempre per $m = 0$ (ricordiamo che γ^5 è hermitiana e anticommuta con γ^0)

$$(16) \quad \bar{u}_h(\vec{p}) \gamma^5 = -h \bar{u}_h(\vec{p})$$

$$(17) \quad \bar{v}_h(\vec{p}) = h \bar{v}_h(\vec{p})$$

1.5 Particelle ultrarelativistiche

Nel caso di particelle di massa differente da zero, ma ultrarelativistiche, l'operatore "elicità" è bene approssimato da γ^5 . Infatti posso riscrivere le equazioni per $u_h(\vec{p})$ nella forma

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \hat{p} u_h(\vec{p}) &= \frac{E - \beta m}{|p|} u_h(\vec{p}) \\ \sigma_p u_h(\vec{p}) &= \gamma^5 \alpha_p u_h(\vec{p}) = h u_h(\vec{p}) \end{aligned}$$

da cui ricaviamo, per $|p| \gg m$, e quindi $E - |p| = \frac{m^2}{E+|p|} \approx 0$,

$$\gamma^5 u_h(\vec{p}) = h \frac{E - \beta m}{|p|} u_h(\vec{p}) \approx h u_h(\vec{p})$$

2 La coniugazione di carica

In questa sezione discutiamo la simmetria di coniugazione di carica, C . A livello classico è evidente che se in un sistema di particelle cariche che interagiscono tramite campi elettromagnetici cambiamo segno a tutte le cariche il campo elettromagnetico in ogni punto cambia anch'esso di segno, ma le forze, e quindi le traiettorie delle particelle, resteranno invariate.

Cominceremo col definire l'azione di \mathbf{C} su particelle di spin 1/2 e sui relativi campi. Segue la derivazione del comportamento sotto \mathbf{C} dei cinque invarianti bilineari. Con l'aiuto del processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, arriviamo alla conclusione che il campo elettromagnetico deve cambiare segno per effetto della coniugazione di carica

2.1 Coniugazione di carica e i campi di Dirac

La coniugazione di carica è un operatore unitario \mathbf{C} che trasforma una particella con dato impulso ed elicità nella corrispondente particella con lo stesso impulso ed elicità, ad esempio

$$(18) \quad \mathbf{C} |e^-; \vec{p}, h\rangle = |e^+; \vec{p}, h\rangle, \quad \mathbf{C} |e^+; \vec{p}, h\rangle = |e^-; \vec{p}, h\rangle, \quad \text{cioé } \mathbf{C}^2 = 1, \quad \mathbf{C}^\dagger = \mathbf{C}$$

Dato che posso assumere che $\mathbf{C} |0\rangle = |0\rangle$ posso definire \mathbf{C} tramite la sua azione sugli operatori di creazione e distruzione,

$$(19) \quad \mathbf{C} c_h(\vec{p}) \mathbf{C} = d_h(\vec{p}), \quad \mathbf{C} c_h^\dagger(\vec{p}) \mathbf{C} = d_h^\dagger(\vec{p})$$

e, dato che $\mathbf{C}^2 = 1$,

$$(20) \quad \mathbf{C} d_h(\vec{p}) \mathbf{C} = c_h(\vec{p}), \quad \mathbf{C} d_h^\dagger(\vec{p}) \mathbf{C} = c_h^\dagger(\vec{p})$$

Vogliamo ora derivare l'effetto di \mathbf{C} sul campo $\psi(x)$,

$$(21) \quad \psi(x) = \sum_{h, \vec{p}} \left(c_h(\vec{p}) u_h(\vec{p}) e^{-ipx} + d_h^\dagger(\vec{p}) v_h(\vec{p}) e^{ipx} \right)$$

e sul suo hermitiano coniugato,

$$(22) \quad \psi(x)^\dagger = \sum_{h, \vec{p}} \left(d_h(\vec{p}) v_h^*(\vec{p}) e^{-ipx} + c_h^\dagger(\vec{p}) u_h^*(\vec{p}) e^{ipx} \right)$$

Per fare questo ricordiamo le equazioni che definiscono le u e le v ,

$$(23) \quad (\not{p} - m)u_h(\vec{p}) = 0 \quad (\vec{\sigma}\hat{p} - h)u_h(\vec{p}) = 0$$

$$(24) \quad (\not{p} + m)v_h(\vec{p}) = 0 \quad (\vec{\sigma}\hat{p} + h)v_h(\vec{p}) = 0$$

prendendo il complesso coniugato della eq. (23) abbiamo

$$(25) \quad (\gamma^{\mu*} p_\mu - m)u_h^*(\vec{p}) = 0 \quad (\vec{\sigma}^* \hat{p} - h)u_h^*(\vec{p}) = 0$$

dove "*" indica l'operazione di coniugazione complessa (ad esempio $\gamma^* = \gamma^{\dagger T}$). Nella usuale rappresentazione per le matrici γ , γ^2 ha componenti complesse, mentre le altre, $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^3$, sono reali. Quindi, se definiamo

$$(26) \quad \mathcal{C} = i\gamma^2; \quad \mathcal{C}^2 = 1, \quad \mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^* = \mathcal{C}^T = \mathcal{C}$$

possiamo scrivere (si verifica facilmente esaminando le singole componenti)

$$(27) \quad \gamma^{\mu*} = -\mathcal{C}\gamma^\mu\mathcal{C}, \quad \vec{\sigma}^* = -\mathcal{C}\vec{\sigma}\mathcal{C}$$

Se adesso sostituiamo questi risultati nella eq. (25), otteniamo che

$$(28) \quad (\not{p} + m)\mathcal{C}u_h^*(\vec{p}) = 0 \quad (\vec{\sigma}\hat{p} + h)\mathcal{C}u_h^*(\vec{p}) = 0$$

Quindi, paragonando con la eq. (24), vediamo che $\mathcal{C}u_h^*(\vec{p})$ obbedisce allo stesso sistema di equazioni che definisce la $v_h(\vec{p})$. Questo sistema di equazioni definisce la $v_h(\vec{p})$ a meno di un fattore di fase³. Possiamo quindi scegliere la fase delle $v_h(\vec{p})$ di in modo tale che sia

$$(29) \quad v_h(\vec{p}) = \mathcal{C}u_h^*(\vec{p})$$

e da questa, usando la (26),

$$(30) \quad \mathcal{C}v_h^*(\vec{p}) = \mathcal{C}\mathcal{C}^*u_h(\vec{p}) = u_h(\vec{p})$$

Infine, raccogliendo le (19), (20), (21), (22), (29), (30), otteniamo l'azione dell'operatore di coniugazione di carica, \mathbf{C} sull'operatore di campo:

$$(31) \quad \mathbf{C}\psi(x)\mathbf{C} = \mathcal{C}\psi^\dagger(x), \quad \text{e quindi} \quad \mathbf{C}\psi^\dagger(x)\mathbf{C} = \mathcal{C}\psi(x)$$

2.2 Coniugazione di carica degli invarianti bilineari

Possiamo adesso veder come si trasformano gli invarianti bilineari, cioè operatori del tipo⁴ $N(\bar{\psi}O\psi)$, dove O rappresenta una delle 16 matrici $1, \gamma^\mu \dots \gamma^5$.

In alcuni dei passaggi che seguono esplicitiamo gli indici spinoriali, e utilizziamo il fatto che \mathcal{C} è simmetrica, $\mathcal{C}_{st} = \mathcal{C}_{ts}$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}N(\psi^\dagger\beta O\psi)\mathbf{C} &= N\left((\mathcal{C}\psi)(\beta O\mathcal{C}\psi^\dagger)\right) = \left(\psi_r(\mathcal{C}\beta O\mathcal{C})_{rt}\psi_t^\dagger\right) \\ &= -N\left(\psi^\dagger(\mathcal{C}\beta O\mathcal{C})^T\psi\right) \quad [\psi, \psi^\dagger \text{ anticommuto}] \\ &= -N\left(\bar{\psi}\beta(\mathcal{C}\beta O\mathcal{C})^T\psi\right) = -\left(\bar{\psi}\beta\mathcal{C}O^T\beta\mathcal{C}\psi\right) \\ &= N\left(\bar{\psi}\beta\mathcal{C}O^T\mathcal{C}\beta\psi\right) \quad [\beta, \mathcal{C} \text{ anticommuto}] \end{aligned}$$

Per ciascuno dei cinque invarianti bilineari, usando la eq. (27) e la relazione $\beta\gamma^{\mu\dagger}\beta = \gamma^\mu$ troviamo

$$(32) \quad \beta\mathcal{C}O^T\mathcal{C}\beta = \eta O$$

³La normalizzazione delle u, v è fissata dalle relazioni $(\bar{u}u) = 1, (\bar{v}v) = 1$.

⁴Consideriamo il caso di operatori in ordinamento normale, cioè quelli che appaiono nella teoria dei campi. Dato che stiamo cambiando particelle in antiparticelle, sotto coniugazione di carica il "mare di Dirac" diventerebbe un mare di antiparticelle, ad esempio di positroni; al contrario della teoria delle lacune, la teoria dei campi tratta in modo simmetrico particelle e antiparticelle.

con $\eta = \pm 1$, da cui risulta infine

$$(33) \quad \mathbf{C}N(\bar{\psi}O\psi)\mathbf{C} = \eta N(\bar{\psi}O\psi)$$

I valori di η sono riportati nella tabella 1. Riportiamo ad esempio i passi

Nome	O	η
S	1	1
V	γ^μ	-1
T	$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$	-1
A	$\gamma^\mu \gamma^5$	1
P	γ^5	1

Tabella 1: Comportamento degli invarianti bilineari sotto coniugazione di carica

relativi al tensore $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Cominciamo con notare che

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]^T &= [\gamma^{\nu T}, \gamma^{\mu T}] \\ [\gamma^\mu, \gamma^\nu]^\dagger &= [\gamma^{\nu\dagger}, \gamma^{\mu\dagger}] \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]^T \mathcal{C} &= [\gamma^{\nu T*}, \gamma^{\mu T*}] = [\gamma^\mu, \gamma^\nu]^\dagger \\ \beta[\gamma^\mu, \gamma^\nu]^\dagger \beta &= \beta[\gamma^{\nu\dagger}, \gamma^{\mu\dagger}] \beta = [\gamma^\nu, \gamma^\mu] = -[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \end{aligned}$$

Quindi $\eta = -1$. Il risultato per A, P si ottiene semplicemente a partire da

$$\beta \mathcal{C}(\gamma^5)^T \mathcal{C} \beta = \beta i \gamma^2 \gamma^5 i \gamma^2 \beta = \gamma^5$$

Sotto coniugazione di carica, la corrente $j^\mu = N(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)$ cambia segno, esattamente quanto ci aspettiamo dallo scambio tra particelle negative e particelle positive.

2.3 Alcune considerazioni su \mathbf{C} e i campi di spin 1/2

Concludiamo questa discussione sulla coniugazione di carica per i campi di spin 1/2 con alcune considerazioni:

Diverse rappresentazioni delle matrici di Dirac Ci possiamo facilmente convincere che i valori di η , definiti nelle eq. (32) e (33), e riportati per ciascun bilineare nella tabella 1, non dipendono dalla particolare rappresentazione utilizzata per le matrici di Dirac. Infatti si può dimostrare che diverse rappresentazioni delle matrici di Dirac, γ^μ , che

obbediscano alle stesse regole di anticommutazione, sono connesse da una trasformazione unitaria⁵ U .

Avremo quindi (eq. (32)) $\beta' C' O'^T C' \beta' = U^\dagger \beta C O^T C \beta U = \eta U^\dagger O U = O'$.

Diverse definizioni della Coniugazione di Carica Possiamo modificare la definizione dell'operatore C introducendo nella eq. (18) un fattore di fase $\xi = e^{+i\phi}$:

$$C |e^-; \vec{p}, h\rangle = \xi |e^+; \vec{p}, h\rangle, \quad C |e^+; \vec{p}, h\rangle = \xi^* |e^-; \vec{p}, h\rangle,$$

Con questa definizione abbiamo ancora $C^2 = 1$. Questa modifica si riflette in una modifica delle eq. (19), (20) e della (31), che diventa

$$C\psi(x)C = \xi^* C\psi^\dagger(x), \quad C\psi^\dagger(x)C = \xi C\psi(x)$$

Si verifica facilmente che il comportamento degli invarianti bilineari, eq. (33) resta immutato. Se tuttavia abbiamo più campi di spin 1/2, $\psi_i, i = 1 \dots n$, possiamo associare una fase diversa, ξ_i a ciascuno di questi, di modo che

$$C\psi_i(x)C = \xi_i^* C\psi_i^\dagger(x)$$

Queste fasi possono allora avere una rilevanza fisica, dato che la legge di trasformazione dei bilineari misti, potenzialmente osservabili, diviene

$$CN(\bar{\psi}_i O \psi_k)C = \xi_i \xi_k^* \eta N(\bar{\psi} O \psi)$$

con gli stessi η definiti nella tabella 1.

2.4 Coniugazione di carica del fotone

Nel processo $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ lo stato finale è generato dalla corrente elettromagnetica che opera sul vuoto, vedi eq. (4). Dato che C si trasforma in se stesso sotto l'azione della coniugazione di carica, quindi è un autostato di $C j^\lambda(x) |0\rangle = C j^\lambda(x) C C |0\rangle = -j^\lambda(x) |0\rangle$, vediamo che questo stato finale deve essere autostato della coniugazione di carica con autovalore -1 . Si arriva a questo stato finale attraverso uno stato intermedio di un fotone virtuale (fig. 2). Questo suggerisce che agli stati di un fotone, che coincidono con la propria antiparticella, si attribuisca un autovalore -1 di C ,

$$(34) \quad C |\gamma; \vec{k}, r\rangle = \xi |\gamma; \vec{k}, r\rangle$$

⁵Un esempio di rappresentazione alternativa delle matrici di Dirac è quella di Majorana, in cui le tutte le γ^μ hanno sono immaginarie, $\gamma^{\mu*} = -\gamma^\mu$. In questo caso, vedi eq. (26), ho semplicemente $C = 1$. Per una discussione della rappresentazione di Majorana, e della trasformazione unitaria che la lega alla rappresentazione usuale, vedere il libro di Mandl e Shaw, [1].

In termini di operatori di creazione avremo quindi

$$(35) \quad \mathbf{C}a_r(\vec{k})\mathbf{C} = -a_r(\vec{k}); \quad \mathbf{C}a_r^\dagger(\vec{k})\mathbf{C} = -a_r^\dagger(\vec{k})$$

, e per il campo A^μ ,

$$(36) \quad \mathbf{C}A^\mu(x)\mathbf{C} = -A^\mu(x)$$

2.5 La simmetria di coniugazione di carica

Abbiamo definito l'operatore \mathbf{C} dando esplicitamente la sua azione sui campi di spin $1/2$ e sul campo del fotone, ma si tratta di una vera simmetria? Per dimostrarlo dobbiamo mostrare che \mathbf{C} commuta con l'hamiltoniano totale ovvero con il lagrangiano. La densità di lagrangiano di perturbazione, $\mathcal{L}_I = -eA_\mu(x) (\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x))$ è invariante dato che sia la corrente che il campo $A_\mu(x)$ cambiano segno.

L'invarianza del lagrangiano imperturbato è evidente dato che \mathbf{C} (vedi eq. (18), (34)) non modifica impulso ed energia degli stati di singola particella. Possiamo verificare direttamente che \mathbf{C} lascia invariante \mathcal{L}_0 . Il termine $-1/4F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ resta immutata dato che i due fattori F cambiano segno. Per i campi di spin $1/2$ troviamo, procedendo come abbiamo già fatto per i bilineari,

$$\begin{aligned} \mathbf{C} i (\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)) \mathbf{C} &= -i ((\partial_\mu\bar{\psi}(x))\gamma^\mu\psi(x)) \\ &= -i \partial_\mu (\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)) + i (\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)) \end{aligned}$$

ed eliminando la derivata totale,

$$= i (\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x))$$

Notiamo una interessante conseguenza della invarianza della QED sotto coniugazione di carica, detta "teorema di Furry": le ampiezze di transizione tra un numero pari di fotoni e un numero dispari di fotoni sono nulle. Dato che l'hamiltoniano di interazione è invariante sotto \mathbf{C} , questo risultato è vero a ciascun ordine dello sviluppo perturbativo. Una conseguenza di questo teorema è che a ciascun ordine perturbativo la somma dei grafici con tre linee fotoniche esterne (ma senza linee fermioniche esterne) si annulla esattamente. Questo risultato elimina una delle possibili divergenze primitive della QED.

3 Distribuzione angolare in $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Consideriamo ora l'elemento di matrice nella eq. (3) nel limite ultrarelativistico. Come vedremo si può dedurre la forma $1 + \cos^2\theta$ della distribuzione angolare utilizzando argomenti elementari basati sulla conservazione del momento angolare e della coniugazione di carica.

Cominciamo con l'osservare che ciascuno dei fattori relativi ai due vertici si annulla se l'elicità della particella e della antiparticella non sono opposte; infatti, ad esempio

$$(\bar{v}_{h'}(p_2)\gamma^\mu u_h(p_1)) = -(\bar{v}_{h'}(p_2)\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5 u_h(p_1)) = -hh'(\bar{v}_{h'}(p_2)\gamma^\mu u_h(p_1))$$

Dato che elettrone e positrone iniziali hanno impulso opposto e, come abbiamo visto, elicità opposta (la condizione $E \gg m_e$ è sempre soddisfatta in questo processo), la componente del momento angolare lungo la direzione di volo dell'elettrone può essere ± 1 .

Conviene a questo punto scegliere la direzione in cui si muove l'elettrone come asse z . Gli stati iniziali possibili sono quindi $|p, J^3 = 1\rangle$, $|p, J^3 = -1\rangle$, dove p rappresenta il valore (positivo nella configurazione scelta) dell'impulso dell'elettrone lungo l'asse z . Gli altri due stati, con $h = h' = \pm 1$ non partecipano alla reazione. Siamo ora in grado di calcolare, a meno di una costante moltiplicativa, gli elementi di matrice

$$V_\pm^\mu = \langle 0|j^\mu|p, J^3 = \pm 1\rangle$$

Infatti dalla conservazione della corrente abbiamo $V_\pm^0 = 0$, mentre dalle regole di commutazione del momento angolare con le componenti di \vec{j} troviamo:

$$V_\pm^2 = \pm \langle 0|[j^2, J^3]|p, J^3 = \pm 1\rangle = \pm i \langle 0|j^1|p, J^3 = \pm 1\rangle = \pm i V_\pm^1$$

In modo analogo si mostra che $V_\pm^3 = 0$.

Quindi, se indichiamo con X una costante moltiplicativa, avremo

$$V_+^\mu = X\{0, 1, i, 0\}$$

Possiamo calcolare V_-^μ direttamente a partire da V_+^μ utilizzando la coni-

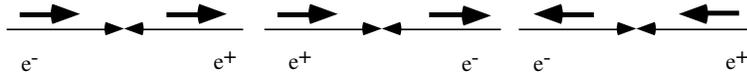


Figura 4: Relazione tra i due stati iniziali con $J^3 = \pm 1$.

ugazione di carica, come spiegato nella figura 4. Nel primo passo partendo da sinistra, applichiamo la coniugazione di carica, che scambia elicità e impulso di e^- , e^+ , quindi p cambia segno, mentre nel secondo passo eseguiamo una rotazione di 180° intorno all'asse y , il che cambia l'impulso dell'elettrone da $-p \rightarrow p$:

$$e^{i\pi J^2} \mathbf{C} |p, J^3 = 1\rangle = e^{i\pi J^2} |-p, J^3 = 1\rangle = |p, J^3 = -1\rangle$$

Dato che il vuoto è invariante sotto le varie trasformazioni, possiamo scrivere

$$\vec{V}_- = \langle 0 | \vec{j} | p, J^3 = -1 \rangle = \langle 0 | \mathbf{C} e^{-i\pi J^2} \vec{j} e^{i\pi J^2} \mathbf{C} | p, J^3 = +1 \rangle = X \{0, 1, -i, 0\}$$

infatti

$$e^{-i\pi J^2} \vec{j} e^{i\pi J^2} = \{-j^1, j^2 - j^3\}$$

$$\mathbf{C} \{-j^1, j^2 - j^3\} \mathbf{C} = \{j^1, -j^2 - j^3\}$$

Nel limite ultrarelativistico, $E \gg m_\mu$, posso applicare questi argomenti allo stato finale. Nel caso in cui $\theta = 0$, l'elemento di matrice

$$W_\pm^\mu = \langle p', J_{p'} = \pm 1 | j^\mu | 0 \rangle$$

è semplicemente il complesso coniugato di V_\pm^μ . Per $\theta \neq 0$, dobbiamo anche applicare una rotazione di un angolo θ intorno all'asse y , ottenendo

$$W_+^\mu = X^* \{0, \cos \theta, -i, \sin \theta\}$$

$$W_-^\mu = X^* \{0, \cos \theta, i, \sin \theta\}$$

e quindi, infine

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \propto (W_+ V_+)^2 + (W_- V_-)^2 + (W_+ V_-)^2 + (W_- V_+)^2 \propto (1 + \cos^2 \theta)$$

A Appendice - Invertire l'elicità

Dimostriamo che, per una particella di massa non nulla la elicità può essere cambiata di segno con una trasformazione di Lorentz.

Assumiamo per semplicità una particella con impulso \vec{p} lungo l'asse z , $p^\mu = (E, 0, 0, p)$. Se eseguo una trasformazione di Lorentz lungo l'asse z posso mettere la particella nello stato di riposo, $(m, 0, 0, 0)$. Si verifica facilmente che la matrice

$$(37) \quad \Lambda = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

definisce una trasformazione di Lorentz, $\Lambda^T g \Lambda = g$, e che

$$\Lambda(E, 0, 0, p) = (m, 0, 0, 0)$$

mentre la trasformazione Λ^2 cambia segno all'impulso,

$$\Lambda^2(E, 0, 0, p) = \Lambda(m, 0, 0, 0) = (E, 0, 0, -p)$$

Alla trasformazione Λ corrisponde una trasformazione degli spinori data da una matrice $S(\Lambda)$,

$$S(\Lambda) = \frac{1}{\sqrt{m}}(\sqrt{E} - \sqrt{\vec{p}} \alpha_3)$$

Infatti si verifica che

$$S(\Lambda)^{-1} = \gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{\sqrt{m}}(\sqrt{E} + \sqrt{\vec{p}} \alpha_3)$$

$$S(\Lambda)^{-1} \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

Naturalmente avremo $S(\Lambda^2) = S(\Lambda)^2$.

Se $u_h(\vec{p})$ è una soluzione dell'equazione di Dirac corrispondente all'impulso \vec{p} , $S(\Lambda)^2 u_h(\vec{p})$ corrisponde all'impulso $-\vec{p}$. L'operatore $\sigma_3 = \sigma_p$ commuta con $S(\Lambda)$, quindi l'elicità dello stato trasformato è data da

$$\sigma(-\hat{p}) S(\Lambda)^2 u_h(\vec{p}) = -h S(\Lambda)^2 u_h(\vec{p})$$

Quindi la trasformazione di Lorentz Λ^2 cambia segno sia all'impulso che all'elicità.

Notiamo che questa costruzione, vedi l'eq. (37), non riesce per particelle di massa nulla. Il fatto non sorprende dato che, come abbiamo visto, in questo caso l'elicità è rappresentata esattamente dall'operatore γ^5 , ed è quindi un invariante relativistico.

Riferimenti bibliografici

- [1] F. Mandl e G. Shaw. *Quantum Field Theory*. Wiley, 1984.
- [2] N. Cabibbo e R. Gatto. Electron-positron colliding beam experiments. *The Physical Review*, 124:1577, 1961.