

Elettrodinamica Quantistica

Nicola Cabibbo

23 febbraio 2006

Indice

1	Introduzione	5
1.1	Unità di misura, Rappresentazione di Heisenberg e di Schroedinger, ecc.	7
2	Integrali di Feynmann	9
2.1	L'ampiezza di transizione	9
2.2	L'approssimazione reticolare	11
2.3	Il limite classico	12
2.4	Il tempo come variabile complessa	12
2.5	La meccanica statistica	13
2.6	Le funzioni di Green	14
2.7	Più gradi di libertà, teoria dei campi	17
2.8	Il funzionale generatore	19
2.9	L'oscillatore armonico	20
2.10	Campi scalari liberi	25
2.11	Campi scalari liberi — Stati a una particella	27
3	Teoria delle perturbazioni	29
3.1	Lo sviluppo perturbativo	30
3.2	Parti connesse e diagrammi vuoto-vuoto	33
3.3	La funzione di Green a due punti.	34
3.4	La matrice S	36
3.5	Un esempio: l'urto tra due particelle	40
3.6	Diagrammi di Feynman nello spazio degli impulsi	41
4	Campi Fermionici	45
4.1	L'oscillatore armonico e l'oscillatore di Fermi	45
4.1.1	Variabili anticommutanti	47
4.1.2	Somma sui cammini per i due oscillatori	48
4.2	Quantizzazione del campo di Dirac	51
4.2.1	Il teorema di spin e statistica	53
4.2.2	Stati ad una particella del campo di Dirac	55
5	Il campo elettromagnetico	57
5.1	La scelta di gauge	57
5.2	Il funzionale generatore e il propagatore	61
5.3	Gli stati a un fotone	62

6 Elettrodinamica quantistica	65
6.1 La formula di riduzione	66
6.2 Grafici di Feynman per il funzionale generatore	68
6.3 Grafici di Feynman per la matrice S	71
6.4 Combinatoria.	73
A Ampiezza di Transizione in assenza di Potenziale	75
B Funzionale generatore dei grafici connessi	77
C Invarianza di Lorentz e stati a una particella.	81

Capitolo 1

Introduzione

In questo corso ci occuperemo di elettrodinamica quantistica, la teoria di campo che descrive l'interazione di particelle cariche con il campo elettromagnetico. L'elettrodinamica quantistica o QED (Quantum Electro Dynamics) è una teoria incompleta, dato che tutte le particelle elementari sono anche sottoposte all'azione delle interazioni deboli, e nel caso dei quark alla azione delle interazioni forti.

FERMIONS			matter constituents spin = 1/2, 3/2, 5/2, ...		
Leptons spin = 1/2			Quarks spin = 1/2		
Flavor	Mass GeV/c ²	Electric charge	Flavor	Approx. Mass GeV/c ²	Electric charge
ν_e electron neutrino	$<1 \times 10^{-8}$	0	u up	0.003	2/3
e electron	0.000511	-1	d down	0.006	-1/3
ν_μ muon neutrino	<0.0002	0	c charm	1.3	2/3
μ muon	0.106	-1	s strange	0.1	-1/3
ν_τ tau neutrino	<0.02	0	t top	175	2/3
τ tau	1.7771	-1	b bottom	4.3	-1/3

Figura 1.1: Fermioni Elementari (<http://particleadventure.org/>)

Una teoria più completa, che tiene conto sia delle interazioni elettromagnetiche che di quelle deboli e forti, è offerta dal cosiddetto Modello Standard. Anche il Modello Standard è incompleto, dato che non tiene conto delle interazioni gravitazionali¹. Malgrado queste limitazioni la QED è molto interessante per varie ragioni:

- La QED ha un'ampio campo di applicazioni di interesse fisico, che vanno dalla

¹Mentre a livello di fisica classica (non quantistica) le interazioni gravitazionali sono descritte con grande successo dalla teoria della relatività generale di Einstein, e in molti casi la teoria di Newton si dimostra del tutto sufficiente, non esiste ancora una versione quantistica universalmente accettata di questa teoria. L'opinione più diffusa è che sia necessario passare da una teoria di campo a una teoria di stringhe, argomento al di fuori dai limiti di questo corso.

interazione dei fotoni ed elettroni con la materia alla struttura fine dei livelli atomici.

- La QED è stata la prima teoria di campo ad essere stata studiata in dettaglio, in particolare per quanto riguarda il metodo dei diagrammi di Feynman, il fenomeno delle divergenze infrarosse e ultraviolette, e l'uso della rinormalizzazione.
- La QED è una teoria di gauge, ed è quindi il prototipo del Modello Standard. Uno studio della QED è un'utile premessa allo studio del Modello Standard.
- Alcune delle predizioni della QED sono, tra le predizioni del Modello Standard, quelle verificate con maggiore accuratezza.

La più precisa verifica della QED è attualmente data dal valore sperimentale della anomalia magnetica dell'elettrone. L'equazione di Dirac assegna all'elettrone un momento magnetico pari a un magnetone di Bohr, $e/2m$, ma questo risultato va corretto a causa dell'interazione con il campo di radiazione per un fattore $(1+a_e)$, dove a_e è appunto la *anomalia magnetica*, che può essere espressa come una serie di potenze di α , la costante di struttura fine:

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} + \dots$$

Il risultato sperimentale per elettrone e positrone

$$a_{e^-}^{\text{Exp}} = (1159652.1884 \pm 0.0043) \times 10^{-9} \quad (4 \text{ parti per miliardo})$$

$$a_{e^+}^{\text{Exp}} = (1159652.1879 \pm 0.0043) \times 10^{-9}$$

è da paragonare alla previsione teorica

$$a_{e^-}^{\text{Th}} = (1159652.1535 \pm 0.0240) \times 10^{-9} \quad (21 \text{ parti per miliardo})$$

L'errore citato per la previsione teorica è in massima parte dovuto all'incertezza sul valore di α , ottenuto da una misura dell'effetto Hall quantistico. La previsione teorica si basa sul calcolo di a_e sino a termini in α^4 .

In questo corso tratteremo della elettrodinamica quantistica usando il metodo degli integrali di Feynman. Seguendo questa strada ci possiamo attrezzare per poter discutere in un prossimo corso del Modello Standard. Il metodo degli integrali di Feynman si è infatti rivelato il migliore per trattare teorie quantistiche caratterizzate da simmetrie di gauge. Ricordiamo che l'elettromagnetismo è caratterizzato dall'invarianza di tutte le grandezze osservabili, ad esempio i campi elettrico e magnetico \vec{E}, \vec{H} rispetto a trasformazioni dei potenziali vettori

$$(1.1) \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$$

dove f è una funzione arbitraria. Possiamo considerare questa trasformazione come dovuta ad un operatore di trasformazione U_f , e scrivere

$$U_f A_\mu U_f^{-1} = A_\mu + \partial_\mu f$$

Se eseguiamo due trasformazioni in successione, U_f, U_g , avremo

$$U_g U_f A_\mu U_f^{-1} U_g^{-1} = A_\mu + \partial_\mu f + \partial_\mu g$$

1.1. UNITÀ DI MISURA, RAPPRESENTAZIONE DI HEISENBERG E DI SCHROEDINGER, ECC.7

e possiamo facilmente verificare che l'insieme delle U_f forma un gruppo abeliano, cioè commutativo:

$$U_g U_f = U_f U_g = U_{g+f}$$

Nel caso dell'elettromagnetismo ci troviamo quindi di fronte a un tipo di invarianza di gauge particolarmente semplice, mentre nel Modello Standard avremo a che fare con simmetrie di gauge non abeliane (non commutative). Il metodo degli integrali di Feynman non è essenziale per la descrizione quantistica dell'elettromagnetismo, ma è quello preferito nel caso del Modello Standard.

1.1 Unità di misura, Rappresentazione di Heisenberg e di Schroedinger, ecc.

Nel seguito useremo principalmente la rappresentazione di Heisenberg, dove gli operatori hanno una dipendenza dal tempo:

$$(1.2) \quad O(t) = e^{itH} O e^{-itH}, \quad O = O(0)$$

Noteremo i passaggi in cui sia conveniente passare alla rappresentazione di Schroedinger. In ogni caso operatori e stati per cui non sia indicata una dipendenza esplicita dal tempo, ad esempio $O, |m\rangle$, si intendono essere operatori e stati fissi, equivalenti a $O(t=0), |m\rangle$ nella rappresentazione di Heisenberg e a $O, |m, t=0\rangle$ nella rappresentazione di Schroedinger.

Useremo unità di misura in cui $\hbar = 1$ e $c = 1$.

Useremo le convenzioni del [8] per quanto riguarda i quadrivettori e le matrici di Dirac. In particolare il prodotto scalare tra due quadrivettori $p = \{p^0, \vec{p}\}$ e $q = \{q^0, \vec{q}\}$ sarà indicato con $pq \equiv p^\mu q_\mu = p^0 q^0 - \vec{p} \vec{q}$.

Capitolo 2

La meccanica quantistica con gli integrali di Feynman

In questo capitolo vogliamo derivare la somma sui cammini dalla formulazione usuale della meccanica quantistica. Lo faremo nel caso particolarmente semplice di un sistema quantistico con un solo grado di libertà. Dopo avere ricavato l'espressione delle ampiezze di transizione mediante la somma sui cammini, faremo vedere come questo metodo permetta anche di calcolare le funzioni di Green in meccanica quantistica. Concluderemo il capitolo indicando come questi risultati vadano estesi al caso di sistemi con più gradi di libertà e alle teoria di campo.

Come ulteriore dimostrazione della equivalenza tra le differenti formulazioni della meccanica quantistica, in un successivo capitolo useremo la formulazione con la somma sui cammini per dedurre le regole di commutazione canoniche,

$$\left[p^m(t_0), q^k(t_0) \right] = -i\hbar \delta^{mk}$$

2.1 L'ampiezza di transizione

Per introdurre il metodo degli integrali di Feynmann, consideriamo il caso più semplice, quello di un sistema quantistico unidimensionale descritto da una variabile dinamica q e l'impulso coniugato p , con un hamiltoniano

$$(2.1) \quad H = K + V(q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

dove indichiamo con K l'energia cinetica e V l'energia potenziale.

Vogliamo calcolare l'ampiezza di transizione da uno stato $|q_1\rangle$ al tempo $t = t_1$ ad uno stato $|q_2\rangle$ al tempo $t = t_2 = t_1 + T$. Usando unità di misura in cui $\hbar = 1$ troviamo¹

$$\begin{array}{ll} \text{Stato per } t = t_1 & |q_1\rangle \\ \text{Stato per } t = t_1 + T & e^{-iTH} |q_1\rangle \\ \text{Ampiezza di transizione a } |q_2\rangle: & \langle q_2 | e^{-iTH} |q_1\rangle \end{array}$$

¹In questo passaggio stiamo usando la rappresentazione di Schroedinger.

Conoscere l'ampiezza di transizione in funzione di q_1, q_2, T è equivalente ad avere una descrizione completa del nostro sistema quantistico. Vedremo qualche esempio di questa affermazione, rimandando però al testo di Feynman e Hibbs [2] per maggiori dettagli. Ricordiamo sin d'ora che nella fisica delle particelle elementari siamo interessati proprio al calcolo delle ampiezze di transizione e in particolare agli elementi di matrice S . Consideriamo anzitutto il caso in cui $V(q) = 0$. Si ottiene allora direttamente (vedi appendice A):

$$(2.2) \quad \langle q_2 | e^{-iTK} | q_1 \rangle = \langle q_2 | e^{-i\frac{Tp^2}{2m}} | q_1 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i T}} e^{i\frac{m(q_2 - q_1)^2}{2T}} \quad \text{Se } V(q) = 0$$

Notiamo anche che il risultato può essere riscritto in termini della velocità media v ,

$$\langle q_2 | e^{-i\frac{Tp^2}{2m}} | q_1 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i T}} e^{iT\frac{mv^2}{2}} \quad v = (q_2 - q_1)/T$$

Questo risultato ha una interpretazione molto semplice: nel limite classico il sistema si muoverebbe a velocità costante v . La fase della ampiezza di transizione è quindi nel caso $V(q) = 0$ data dalla *azione lungo la traiettoria classica*

$$S_{cl} = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m\dot{q}^2}{2} = T \frac{mv^2}{2} \quad \langle q_2 | e^{-i\frac{Tp^2}{2m}} | q_1 \rangle \propto e^{iS_{cl}}$$

La corrispondenza tra ampiezza di transizione e l'azione classica è stata per la prima volta messa in evidenza da Dirac [1].

Nel caso generale, con un potenziale $V(q)$ arbitrario, possiamo calcolare la ampiezza di transizione mediante un processo di limite che ci porterà a definire l'integrale di Feynman o integrale sui cammini. Suddividendo l'intervallo di tempo T in N intervalli $\epsilon = T/N$ possiamo scrivere

$$(2.3) \quad \begin{aligned} & \langle q_2 | e^{-iTH} | q_1 \rangle \\ &= \int dq^1 \dots dq^{N-1} \langle q_2 | e^{-i\epsilon H} | q^{N-1} \rangle \langle q^{N-1} | e^{-i\epsilon H} | q^{N-2} \rangle \dots \langle q^1 | e^{-i\epsilon H} | q_1 \rangle \end{aligned}$$

Notiamo che, dato che K e V non commutano,

$$(2.4) \quad \begin{aligned} e^{-i\epsilon(K+V)} &= 1 + \epsilon(K+V) + \frac{\epsilon^2}{2}(K^2 + V^2 + KV + VK) && \text{mentre} \\ e^{-i\epsilon V} e^{-i\epsilon K} &= 1 + \epsilon(K+V) + \frac{\epsilon^2}{2}(K^2 + V^2 + 2VK) && \text{quindi possiamo scrivere} \\ e^{-i\epsilon H} &= e^{-i\epsilon V} e^{-i\epsilon K} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

e notiamo che un errore $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ ripetuto N volte equivale ad un errore globale $\mathcal{O}(\epsilon)$, che diventerà trascurabile nel limite $\epsilon \rightarrow 0$. Ciascuno dei fattori nella (2.3) può quindi essere approssimato come

$$\begin{aligned} \langle q^k | e^{-i\epsilon H} | q^{k-1} \rangle &\approx \langle q^k | e^{-i\epsilon V} e^{-i\epsilon K} | q^{k-1} \rangle \\ &= e^{-i\epsilon V(q^k)} \langle q^k | e^{-i\epsilon K} | q^{k-1} \rangle && \text{e, usando la (2.2),} \\ &= \sqrt{\frac{k}{2\pi i \epsilon}} e^{i\epsilon \left(\frac{m(q^k - q^{k-1})^2}{2\epsilon^2} - V(q^k) \right)} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \epsilon}} e^{i\epsilon \left(\frac{m(v^k)^2}{2} - V(q^k) \right)} \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo definito la velocità nell'intervallo k -mo come

$$v^k = \frac{(q^k - q^{k-1})}{\epsilon}$$

di modo che possiamo riconoscere nel fattore di fase il lagrangiano $L = mv^2/2 - V(q)$. Se adesso sostituiamo nella (2.3) otteniamo

$$(2.5) \quad \langle q_2 | e^{-iTH} | q_1 \rangle \approx \int \prod_k \left[\sqrt{\frac{m}{2\pi i \epsilon}} dq^k \right] \exp \left(i \sum_k \epsilon \left[\frac{m(v^k)^2}{2} - V(q^k) \right] \right) + \mathcal{O}(\epsilon)$$

Nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ l'insieme di punti $\{q^N = q_2, q^{N-1}, \dots, q^1, q^0 = q_1\}$ formano una traiettoria $q(t)$ dal punto iniziale q_1 al punto finale q_2 . Il fattore di fase nella (2.5) diviene semplicemente l'azione classica lungo questa traiettoria,

$$\sum_k \epsilon \left[\frac{m(v^k)^2}{2} - V(q^k) \right] \rightarrow \int dt L(q(t), \dot{q}(t)) = S(q(t))$$

mentre l'integrale della (2.5) definisce, nel limite $\epsilon \rightarrow 0$, un integrale sulle possibili traiettorie e la relativa misura,

$$\int \prod_k \left[\sqrt{\frac{m}{2\pi i \epsilon}} dq^k \right] \rightarrow \int D[q(t)]$$

ed otteniamo infine, passando al limite $\epsilon \rightarrow 0$,

$$(2.6) \quad \langle q_2 | e^{-iTH} | q_1 \rangle = \int D[q(t)] e^{iS(q(t))}$$

L'integrale è esteso su tutte le traiettorie $q(t)$ tali che $q(t_1) = q_1$, e $q(t_2) = q_2$.

2.2 L'approssimazione reticolare

L'integrale di Feynman è un *integrale funzionale*, cioè un integrale che si estende su tutte le funzioni $q(t)$ definite nell'intervallo t_1, t_2 . È interessante considerare la (2.5) come una espressione approssimata che in linea di principio si può prestare a un calcolo esplicito. Questo tipo di approssimazione è largamente utilizzata nella teoria dei campi, in quanto si presta alla esecuzione di calcoli numerici in situazioni in cui non è possibile ottenere risultati esatti, e dove falliscono i metodi perturbativi che illustreremo nel caso della elettrodinamica quantistica. Questo tipo di approssimazione numerica si è rivelata di particolare utilità nella Quantum Chromo Dynamics (QCD), la teoria dei quark e delle loro interazioni forti, che non si presta a calcoli perturbativi se non in casi particolari. Si parla allora di "approssimazione reticolare": nella (2.5), ad esempio, il tempo t è rappresentato tramite un reticolo di punti, $t^k = t_1 + k\epsilon$, e la funzione $q(t)$ tramite il valore che essa assume ai tempi t^i , $q^i = q(t^i)$.

La approssimazione alla ampiezza di transizione della (2.5) ha errori $\mathcal{O}(\epsilon)$, e tanto bastava nella discussione precedente per indicare una convergenza al risultato della (2.6). Se l'interesse è centrato su metodi di calcolo numerico, diviene di grande importanza pratica la velocità con cui il risultato approssimato converge a quello esatto. Ad esempio, come il lettore potrà facilmente dimostrare, una semplice modifica della eq. (2.4),

$$(2.7) \quad e^{-i\epsilon H} = e^{-i\epsilon V/2} e^{-i\epsilon K} e^{-i\epsilon V/2} + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

permette di costruire uno schema di calcolo che converge molto più rapidamente al risultato esatto.

2.3 Il limite classico

La formulazione della meccanica quantistica mediante la somma sui cammini, eq. (2.6) si presta particolarmente alla discussione del limite classico di una teoria quantistica. Teniamo presente che in ogni caso la teoria “vera” è quella quantistica e che la teoria classica non è che un particolare limite di questa. Il limite classico si ottiene quando $\hbar \rightarrow 0$, quindi conviene riscrivere la (2.6) esplicitando la presenza di \hbar ,

$$(2.6') \quad \langle q_2 | e^{-iTH/\hbar} | q_1 \rangle = \int D[q(t)] e^{iS(q(t))/\hbar}$$

La situazione diviene approssimativamente classica se il valore dell'azione è molto grande rispetto ad \hbar . Supponiamo che esista una traiettoria $q_c(t)$, tale che $q_c(t_1) = q_1$, e $q_c(t_2) = q_c(t_1 + T) = q_2$ che renda estrema l'azione. La condizione $\delta S = 0$ implica che traiettorie vicine alla $q_c(t)$ contribuiscano all'integrale (2.6') con la stessa fase (o fasi vicine), e quindi interferiscono in modo costruttivo. Al contrario, vicino ad ogni traiettoria che *non* estremizza l'azione ve ne sono altre con fase differente e che interferiscono distruttivamente. Quindi l'integrale sarà dominato dal contributo di un fascetto di traiettorie vicine a $q_c(t)$, traiettorie la cui azione differisce da $S(q_c(t))$ per meno di \hbar . Quindi, nel limite $\hbar \rightarrow 0$ il moto del sistema quantistico sarà ben descritto dalla traiettoria “classica” $q_c(t)$.

È certo interessante notare che questo argomento permetta di spiegare un fatto altrimenti piuttosto misterioso. Il principio d'azione $\delta S = 0$ viene normalmente dimostrato partendo dalle equazioni del moto di Newton, ma questa derivazione non spiega la ragione della sua esistenza. L'origine del principio d'azione invece è chiara se ricordiamo che la meccanica classica altro non è che un particolare limite della meccanica quantistica.

2.4 Il tempo come variabile complessa

Sinora abbiamo discusso della somma sui cammini senza preoccuparci eccessivamente della convergenza degli integrali, ad esempio quello che appare nella eq. (2.6). In realtà, guardando la (2.6) si vede subito che c'è un problema: l'integrando $e^{iS(q(t))}$ è di modulo = 1, quindi la definizione dell'integrale richiede qualche cura. In realtà avevamo già incontrato lo stesso problema nel calcolare (vedi appendice A) l'ampiezza di transizione in assenza di forze, eq. (2.2). In quel caso abbiamo visto che occorre definire l'ampiezza di transizione relativa ad un tempo T come limite, per $\eta \rightarrow 0^+$, dell'ampiezza relativa ad un intervallo di tempo $T - i\eta$. Applicheremo lo stesso metodo per definire l'integrale sui cammini della (2.6), che riscriviamo ancora una volta in forma più esplicita,

$$(2.8) \quad \langle q_2 | e^{-iTH} | q_1 \rangle = \int D[q(t)] \exp(iS) = \int D[q(t)] \exp\left(i \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q) \right]\right)$$

Per dare al tempo una parte immaginaria negativa poniamo $t = (1 - i\chi)\tau$, con χ costante e piccola, di modo da poter approssimare $(1 - i\chi)^{-1}$ con $(1 + i\chi)$,

$$(2.9) \quad t = (1 - i\chi)\tau, \quad \text{di modo che} \quad \begin{cases} dt = (1 - i\chi)\tau \\ \dot{q} = \frac{dq}{dt} = (1 + i\chi)\frac{dq}{d\tau} \end{cases}$$

e l'integrando della (2.8) diviene

$$\exp(iS_\chi) = \quad (S_\chi \text{ è l'azione calcolata con il tempo modificato}) \\ \exp\left(i \int d\tau \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 - V(q) \right]\right) \cdot \exp\left(-\chi \int d\tau \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q) \right]\right)$$

A questo punto l'integrando $\exp(iS_\chi)$ ha modulo eguale a $\exp(-\chi I)$ dove I è l'integrale

$$I = \int d\tau \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q) \right] = \int d\tau \mathcal{H}(q, \dot{q})$$

Notiamo anzitutto che $\mathcal{H}(q, \dot{q})$ l'energia della particella². Per quanto riguarda la convergenza dell'integrale funzionale nella eq. (2.8) possiamo distinguere vari casi a seconda del comportamento della energia potenziale $V(q)$:

V(q) = 0 Questo è il caso della particella libera, dove si può esplicitamente calcolare l'integrale funzionale con il processo di limite delineato nella sezione 2.1 e i metodi elementari sviluppati nella Appendice A; l'integrale funzionale risulta convergente

V(q) definito positivo In questo caso $I > I_0$, dove I_0 è il valore di I calcolato a parità di traiettoria per $V(q) = 0$. Quindi si ha almeno la stessa convergenza del caso precedente.

V(q) limitato inferiormente In questo caso, se $V(q) > V_0$, $I > I_0 + V_0 T$. L'aggiunta di una costante $V_0 T$ non muta la convergenza rispetto ai due casi precedenti.

V(q) non limitato inferiormente Bisogna valutare caso per caso. Se ad esempio $V(q) = -q^n$ la convergenza dell'integrale funzionale dipende dal valore dell'esponente n . Si può dimostrare che l'integrale funzionale converge se $0 \geq n \geq -1$, e non converge se $n > 0$ o $n < -1$. Notiamo che il potenziale coulombiano è un caso limite.

Notiamo che i casi esclusi sono quelli in cui falliscono anche le formulazioni alternative della meccanica quantistica, ad esempio quella basata sulla meccanica ondulatoria.

2.5 La meccanica statistica

Dato che abbiamo considerato valori complessi del tempo, possiamo spingeri al caso estremo in cui $\chi = \pi/2$. Troviamo allora la seguente espressione per l'ampiezza di

²Notiamo per chiarezza che, dato che $q(t)$ è una traiettoria arbitraria, in generale $\mathcal{H}(q, \dot{q})$ non è indipendente dal tempo.

transizione tra tempi immaginari (!) $t_1 = 0, t_2 = -i\beta$

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \langle q_2 | e^{-\beta H} | q_1 \rangle &= \int D[q(\tau)] \exp \left(- \int_0^\beta d\tau \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q) \right] \right) \\ &= \int D[q(\tau)] \exp \left(- \int_0^\beta d\tau \mathcal{H}(q, \dot{q}) \right) \end{aligned}$$

dove l'integrale è sui cammini che vanno da q_1 per $\tau = 0$ a q_2 per $\tau = \beta$. Questo assomiglia stranamente ad una funzione di partizione in meccanica statistica, ed è proprio così. Assumiamo che gli autostati della nostra particella quantistica siano $|m\rangle$ con energia E_m . Con l'aiuto della (2.10) la funzione di partizione della particella in equilibrio termico ad una temperatura inversa³ β si può esprimere come integrale sui cammini,

$$(2.11) \quad \begin{aligned} Z(\beta) &= \sum_m e^{-\beta E_m} = \sum_m \langle m | e^{-\beta H} | m \rangle && \text{(cioè una traccia...)} \\ &= \text{Tr} e^{-\beta H} = \int dq \langle q | e^{-\beta H} | q \rangle && \text{(... che nella base } q \text{ diventa ...)} \\ &= \int D[q(\tau)] \exp \left(- \int_0^\beta d\tau \mathcal{H}(q, \dot{q}) \right) && \text{(... un integrale sui cammini)} \end{aligned}$$

dove l'integrale è su tutti i cammini ciclici, che partono da un arbitrario valore di q a $t = 0$ e tornano allo stesso punto per $t = -i\beta$. Così definito l'integrale sui cammini assorbe l'integrazione che proviene dalla traccia (penultimo passo della eq. 2.11).

Notiamo anche che nel limite $\beta \rightarrow \infty$ la funzione di partizione è dominata dallo stato fondamentale:

$$(2.12) \quad Z(\beta) \xrightarrow{(\beta \rightarrow \infty)} \exp(-\beta E_0) (1 + \text{termini esponenzialmente piccoli in } \beta)$$

2.6 Le funzioni di Green

Definiamo come funzioni di Green i valori di aspettazione nello stato fondamentale del prodotto di operatori, ad esempio nel caso della particella in moto unidimensionale, prodotti della variabile $q(t)$ presa a tempi diversi, t_1, t_2, \dots, t_N in ordine decrescente,

$$\langle 0 | q(t_1) q(t_2) \dots q(t_N) | 0 \rangle \quad (t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_N)$$

Abbiamo qui adottato la rappresentazione di Heisenberg, di modo che

$$q(t_1) = e^{it_1 H} q e^{-it_1 H}$$

Come vedremo una espressione di questo tipo può essere semplicemente scritta come somma sui cammini. Volendo però estendere la definizione anche al caso in cui i tempi t_1, t_2, \dots, t_N non siano necessariamente ordinati, introduciamo il concetto di prodotto ordinato nel tempo, $T(q(t_1) q(t_2) \dots q(t_N))$, che è semplicemente il prodotto degli stessi operatori ordinati in ordine di tempo decrescente. Per due operatori, ad esempio,

$$(2.13) \quad T(q(t_1) q(t_2)) = \begin{cases} q(t_1) q(t_2) & \text{se } t_1 \geq t_2 \\ q(t_2) q(t_1) & \text{se } t_2 \geq t_1 \end{cases}$$

³Ricordiamo che $\beta = 1/kT$, con T la temperatura assoluta e k la costante di Boltzman. Per non fare confusione con il tempo nel testo usiamo β e non la temperatura.

Possiamo allora definire la funzione di Green ad N tempi come

$$(2.14) \quad G_N(t_1, t_2, \dots, t_N) = \langle 0|T(q(t_1)q(t_2)\dots q(t_N))|0\rangle$$

Questa definizione va in qualche modo motivata: perché dare particolare importanza al valore di aspettazione nello stato fondamentale $|0\rangle$? Perché l'ordinamento temporale? La risposta a queste domande si troverà nella teoria dei campi a cui ci stiamo preparando. In termini semplici lo stato fondamentale della teoria dei campi è lo stato "vuoto", cioè privo di particelle. Il vuoto ha varie caratteristiche che lo rendono unicamente degno di interesse: dal vuoto si possono creare tutti gli altri stati mediante operatori di creazione; il vuoto è l'unico stato di una teoria di campo che sia invariante sotto traslazioni nello spazio e nel tempo e sotto trasformazioni di Lorentz e rotazioni, e si potrebbe continuare. Per quanto riguarda l'ordinamento temporale vedremo che esiste un rapporto diretto tra le funzioni di Green così definite e gli elementi della matrice S , e che l'ordinamento temporale assume particolare rilevanza nella teoria delle perturbazioni.

Dimostreremo che la (2.14) può essere trasformata nella seguente somma sui cammini

$$(2.15) \quad G_N(t_1, t_2, \dots, t_N) = \frac{\int D[q(t)] \exp(iS) q(t_1) q(t_2) \dots q(t_N)}{\int D[q(t)] \exp(iS)}$$

Dove sia nel numeratore che nel denominatore l'integrale è esteso su tutti cammini tra $t = -\infty$ e $t = \infty$, tali che $q(+\infty) = q(-\infty)$. Si deve intendere che tutti i tempi vanno interpretati come tempi complessi come abbiamo discusso nella sezione 2.4, cioè che, più precisamente,

$$(2.16) \quad G_N(t_1, t_2, \dots, t_N) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{\int D[q(t')] \exp(iS) (q(t'_1) q(t'_2) \dots q(t'_N))}{\int D[q(t')] \exp(iS)} \right]$$

dove nella parentesi quadra gli integrali sono estesi su tutti i cammini *periodici* tra $t = -T' = -T(1 - i\chi)$ e $t = T' = T(1 - i\chi)$, tali cioè che $q(T') = q(-T')$, e $t'_{1,2} = (1 - i\chi) t_{1,2}$.

Per dimostrare l'equivalenza tra (2.16) e (2.14) consideriamo per semplicità il caso di due operatori, ed esplicitiamo la dipendenza dal tempo degli operatori in (2.14). Consideriamo il caso in cui $t_1 \geq t_2$

$$(2.17) \quad \begin{aligned} G_2(t_1, t_2) &= \langle 0|q(t_1)q(t_2)|0\rangle = \langle 0|e^{it_1H} q e^{-i(t_1-t_2)H} q e^{-it_2H}|0\rangle \quad (t_1 \geq t_2) \\ &= \frac{\langle 0|e^{-i(T-t_1)H} q e^{-i(t_1-t_2)H} q e^{-i(t_2+T)H}|0\rangle}{\langle 0|e^{-2iTH}|0\rangle} \end{aligned}$$

Nel secondo passo T è un tempo arbitrario, ma tale che $T > t_1, t_2 > -T$. Il termine a denominatore, $\langle 0|e^{-2iTH}|0\rangle = \exp(-2iTE_0)$ compensa l'introduzione di due fattori e^{-iTH} nel numeratore, di modo che il risultato non dipende da T . A questo punto introduciamo i tempi complessi, e scriviamo:

$$G_2(t_1, t_2) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{\langle 0|e^{-i(T-t'_1)H} q e^{-i(t'_1-t'_2)H} q e^{-i(t'_2+T)H}|0\rangle}{\langle 0|e^{-2iT'H}|0\rangle} \right]$$

dove $T' = (1 - i\chi)T$, $t'_{1,2} = (1 - i\chi) t_{1,2}$. Il limite $T \rightarrow \infty$ è in apparenza inutile, dato che come abbiamo osservato il termine in parentesi quadra è indipendente da T .

Tuttavia esso ci permette di passare dal valore di aspettazione in $|0\rangle$ alla traccia degli operatori sia a numeratore che a denominatore:

$$G_2(t_1, t_2) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{\sum_m \langle m | e^{-i(T'-t'_1)H} q e^{-i(t'_1-t'_2)H} q e^{-i(t'_2+T')H} | m \rangle}{\sum_m \langle m | e^{-2iT'H} | m \rangle} \right]$$

Infatti per ogni $\chi > 0$ e per T “grande” il contributo degli stati eccitati $|m\rangle \neq |0\rangle$ è depresso sia a numeratore che a denominatore per un fattore $\exp(-2\chi T(E_m - E_0))$ rispetto a quello dello stato fondamentale, e svanisce nel limite $T \rightarrow \infty$, che è eseguito *prima* di quello $\chi \rightarrow 0^+$ — l'ordine dei limiti è importante!

Dato che la traccia è indipendente dalla base scelta per descrivere gli stati, possiamo usare la base degli autostati della posizione, $|q\rangle$,

$$G_2(t_1, t_2) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q} | e^{-i(T'-t'_1)H} q e^{-i(t'_1-t'_2)H} q e^{-i(t'_2+T')H} | \tilde{q} \rangle}{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q} | e^{-2iT'H} | \tilde{q} \rangle} \right]$$

Per completare la dimostrazione basta mostrare che l'espressione tra parentesi quadre è identica a quella che otterremo dalla (2.16) nel caso di due operatori,

$$(2.18) \quad \frac{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q} | e^{-i(T'-t'_1)H} q e^{-i(t'_1-t'_2)H} q e^{-i(t'_2+T')H} | \tilde{q} \rangle}{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q} | e^{-2iT'H} | \tilde{q} \rangle} = \frac{\int D[q(t')] \exp(iS) q(t'_1) q(t'_2)}{\int D[q(t')] \exp(iS)}$$

In effetti il numeratore e il denominatore nelle due espressioni sono separatamente eguali. Per quanto riguarda il denominatore, $\langle \tilde{q} | e^{-2iT'H} | \tilde{q} \rangle$ è una ampiezza di transizione, che possiamo esprimere come $\int D[q(t')] \exp(iS)$, dove l'integrazione è su tutti i cammini che partono da \tilde{q} a $t = -T'$ e tornano allo stesso punto per $t = T'$. Per eseguire l'integrazione su \tilde{q} basta estendere l'integrale sui cammini a tutti quelli che, partendo da *qualsiasi* punto per $t = -T'$, tornano al punto di partenza per $t = T'$. I due denominatori sono quindi eguali.

Per il numeratore, assumiamo che sia $T > t_1$, $t_2 > -T$, e introduciamo accanto ai due operatori q somme sul sistema completo di stati, $\int dq |q\rangle \langle q| = 1$:

$$\begin{aligned} & \int d\tilde{q} \langle \tilde{q} | e^{-i(T'-t'_1)H} q e^{-i(t'_1-t'_2)H} q e^{-i(t'_2+T')H} | \tilde{q} \rangle \\ &= \iiint d\tilde{q} dq_1 dq_2 \langle \tilde{q} | e^{-i(T'-t'_1)H} | q_1 \rangle \langle q_1 | q e^{-i(t'_1-t'_2)H} | q_2 \rangle \langle q_2 | q e^{-i(t'_2+T')H} | \tilde{q} \rangle \\ &= \iiint d\tilde{q} dq_1 dq_2 q_1 q_2 \langle \tilde{q} | e^{-i(T'-t'_1)H} | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-i(t'_1-t'_2)H} | q_2 \rangle \langle q_2 | e^{-i(t'_2+T')H} | \tilde{q} \rangle \end{aligned}$$

L'ultima espressione contiene il prodotto di tre ampiezze di transizione, che possiamo scrivere come una singola somma sui cammini che passano rispettivamente per q_1 al tempo t'_1 e per q_2 a t'_2 :

$$[q(-T') = \tilde{q}] \rightarrow [q(t'_2) = q_2] \rightarrow [q(t'_1) = q_1] \rightarrow [q(T') = \tilde{q}]$$

l'integrazione su \tilde{q} , q_1 , q_2 significa estendere l'integrale funzionale su tutti i cammini periodici tali cioè che $[q(T') = q(-T')]$, sostituendo il fattore $q_1 q_2$ con $q(t'_1) q(t'_2)$, e si ottiene così il numeratore del secondo membro della eguaglianza (2.18). Lasciamo come esercizio la dimostrazione che il risultato è corretto anche per l'altro possibile ordinamento dei tempi, $t_2 > t_1$. La dimostrazione si estende facilmente, seguendo gli stessi passi, al caso in cui siano presenti più di due operatori.

2.7 Più gradi di libertà, teoria dei campi

Quello che abbiamo fatto per un grado di libertà si estende facilmente al caso di più gradi di libertà. Tutti i risultati ottenuti valgono direttamente per un sistema con n gradi di libertà, purché si intenda che il simbolo q venga interpretato come un vettore ad n componenti, $q = \{q_1 \dots q_n\}$. Ad esempio una funzione di Green può essere definita come

$$(2.19) \quad G_{k_1, k_2, \dots, k_N}(t_1, t_2, \dots, t_N) = \langle 0 | T(q_{k_1}(t_1) q_{k_2}(t_2) \dots q_{k_N}(t_N)) | 0 \rangle$$

Per “cammino” si intende la traiettoria del vettore $q_k(t)$ tra il tempo iniziale t_1 e il tempo finale t_2 , cioè l’insieme delle funzioni $q_k(t)$ nell’intervallo $t_1 \geq t \geq t_2$.

Queste idee si estendono facilmente a una teoria di campo. Consideriamo il caso di un campo scalare reale $\phi(\vec{x}, t)$. Possiamo definire il lagrangiano L come integrale di una densità di Lagrangiano

$$(2.20) \quad \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad S = \int d^4x \mathcal{L}$$

Possiamo pensare questo sistema come limite di un campo definito su un reticolo di punti \vec{x}_k a distanza a , il *passo reticolare*, che coprono un cubo di lato L . Si tratta di un doppio limite $a \rightarrow 0$, $L \rightarrow \infty$. Per ogni valore di a , L abbiamo un numero finito $n = (L/a)^3$ di punti, e il campo risulta descritto dalle n variabili dinamiche $\phi_k(t) = \phi(\vec{x}_k, t)$. Naturalmente scriveremo l’azione come

$$S = \int dt \sum_k a^3 \mathcal{L}_k$$

Dove \mathcal{L}_k è la densità di lagrangiano nel punto \vec{x}_k , calcolata approssimando le derivate del campo con differenze, ad esempio

$$\frac{\partial \phi(\vec{x}_k, t)}{\partial x} \approx \frac{\phi(x_k + a, y_k, z_k, t) - \phi(x_k, y_k, z_k, t)}{a}$$

La descrizione di un campo mediante un reticolo di punti, e un passaggio al limite del continuo, può essere usata per definire formalmente una teoria di campo, ma anche per eseguire calcoli numerici di grandezze interessanti, ad esempio le funzioni di Green. In questo secondo caso conviene di solito rappresentare anche il tempo come variabile discreta, come avevamo accennato nella sezione 2.2.

In conclusione una teoria di campo può essere considerata come caso limite di un sistema a molti gradi di libertà, e la corrispondente teoria quantistica può essere definita mediante la somma sui cammini. Per “cammino”, con dati valori di a , L si intende l’insieme delle funzioni $\phi_k(t)$ nel dato intervallo temporale. Nel limite $a \rightarrow 0$, $L \rightarrow \infty$ questo diviene il valore della funzione $\phi(\vec{x}, t)$ per tutti i valori di \vec{x} e per t nell’intervallo dato. Rimane da dimostrare la convergenza del processo di limite, cosa che non si sa fare in generale, se non nel caso più semplice, quello di campi liberi, e in pochi altri casi. Per campi in interazione si può ricorrere alla teoria delle perturbazioni, che discuteremo nel seguito. Vedremo allora che un passo essenziale è costituito dalla procedura di rinormalizzazione, necessaria per eliminare (o meglio interpretare) le divergenze che emergono nel limite di piccole distanze, $a \rightarrow 0$.

Supponendo di avere risolto i problemi relativi al passaggio al limite, quello che abbiamo detto nelle sezioni precedenti si applica direttamente a una teoria di campo. Ad esempio la funzione di Green ad N punti, che possiamo definire come

$$(2.21) \quad G(x_1, x_2, \dots, x_N) = \langle 0 | T(\phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_N)) | 0 \rangle$$

dove $|0\rangle$ indica lo stato vuoto, e x_k il quadrivettore \vec{x}_k , t_k , può essere espressa come

$$(2.22) \quad G(x_1, \dots, x_N) = \frac{\int D[\phi(x)] \exp(iS) \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_N)}{\int D[\phi(x)] \exp(iS)}$$

dove $D[\phi(x)]$ rappresenta la misura sullo spazio delle funzioni, e anche in questo caso, come nella sezione 2.6, questa espressione va intesa come limite,

$$(2.23) \quad G(x_1, \dots, x_N) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ L \rightarrow \infty}} \left[\frac{\int D[\phi(\vec{x}, t')] \exp(iS) \phi(\vec{x}_1, t'_1) \phi(\vec{x}_2, t'_2) \dots \phi(\vec{x}_N, t'_N)}{\int D[\phi(\vec{x}, t')] \exp(iS)} \right]$$

dove in parentesi quadra l'integrale si estende su tutte le funzioni $\phi(\vec{x}, t')$ in cui $t' = (1 - i\chi)t$ si estende tra $\pm(1 - i\chi)T$, e periodiche sia nel tempo che nello spazio:

$$(2.24) \quad \begin{aligned} \phi(\vec{x}, (1 - i\chi)T) &= \phi(\vec{x}, -(1 - i\chi)T) \\ \phi(x, y, z, t) &= \phi(x + L, y, z, t) = \phi(x, y + L, z, t) = \phi(x, y, z + L, t). \end{aligned}$$

La periodicità sia nella direzione temporale che nella direzione spaziale permette di eseguire liberamente integrazioni per parti, ad esempio

$$(2.25) \quad \int d^4x (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) = - \int d^4x (\phi \partial_\mu \partial^\mu \phi)$$

Queste espressioni si generalizzano al caso di più campi, $\phi_k(x)$, ($k = 1 \dots n$) ad esempio

$$(2.26) \quad \begin{aligned} G_{k_1 \dots, k_N}(x_1, \dots, x_N) &= \langle 0|T(\phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_N}(x_N))|0\rangle \\ &= \frac{\int \prod_{k=1}^n D[\phi_k(x)] \exp(iS) \phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_N}(x_N)}{\int \prod_{k=1}^n D[\phi_k(x)] \exp(iS)} \end{aligned}$$

Il caso di un campo complesso si può ricondurre a quello di due campi reali⁴,

$$(2.27) \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2); \quad \phi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$$

Il fattore $1/\sqrt{2}$ è scelto in modo che $D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)] = D[\phi_1(x)]D[\phi_2(x)]$ come si verifica dallo Jacobiano. Usando questa relazione il calcolo delle funzione di Green si riconduce alla (2.26), e si ottiene in generale ad esempio

$$(2.28) \quad \begin{aligned} &\langle 0|T(\phi(x_1) \dots \phi(x_N) \phi^\dagger(y_1) \dots \phi^\dagger(y_M))|0\rangle \\ &= \frac{\int D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)] \exp(iS) \phi(x_1) \dots \phi(x_N) \phi^\dagger(y_1) \dots \phi^\dagger(y_M)}{\int D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)] \exp(iS)} \end{aligned}$$

e nel caso semplice di una funzione a due punti,

$$(2.29) \quad \begin{aligned} &\langle 0|T(\phi(x) \phi^\dagger(y))|0\rangle \\ &= \frac{\int D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)] \exp(iS) \phi(x) \phi^\dagger(y)}{\int D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)] \exp(iS)} \end{aligned}$$

⁴Useremo il simbolo \dagger sia per indicare la coniugazione hermitiana nel caso di operatori, che la coniugazione complessa delle funzioni numeriche che rappresentano le traiettorie delle stesse grandezze.

La dimostrazione è elementare, basta notare che le funzioni di Green definite tramite i valori di aspettazione sono lineari nei campi in ciascun punto, e che questo è ovviamente vero per la loro definizione in termini di somma sui cammini, per cui

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\cdots(\phi_1(x) \pm i\phi_2(x))\cdots)|0\rangle &= \langle 0|T(\cdots\phi_1(x)\cdots)|0\rangle \pm i\langle 0|T(\cdots\phi_2(x)\cdots)|0\rangle \\ &= \frac{\int D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)] \exp(iS) \cdots (\phi_1(x) \pm i\phi_2(x)) \cdots}{\int D[\phi(x)]D[\phi^\dagger(x)] \exp(iS)} \end{aligned}$$

2.8 Il funzionale generatore

In questa sezione introduciamo il funzionale generatore, una tecnica che permette di esprimere in modo compatto l'insieme delle funzioni di Green. Consideriamo il caso di un sistema con n gradi di libertà $q_k(t)$, ($k = 1 \dots n$). Definiamo il funzionale generatore Z come

$$(2.30) \quad Z[J] \equiv Z[J_1(t), \dots, J_n(t)] = \int D[q(t)] \exp\left(iS(q(t)) - i \int dt \sum_k q_k(t) J_k(t)\right)$$

dove le $J_k(t)$ sono n funzioni del tempo, e l'integrale funzionale va definito come limite

$$(2.31) \quad Z[J] \equiv Z[J_1(t), \dots, J_n(t)] = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \lim_{T \rightarrow \infty} \int D[q(t')] \exp\left(iS(q(t')) - i \int dt \sum_k q_k(t') J_k(t')\right)$$

dove, seguendo la discussione nelle sezioni precedenti, gli integrali nella parentesi quadra sono estesi su tutti i cammini *periodici* tra $t = -T' = -T(1 - i\chi)$ e $t = T' = T(1 - i\chi)$, tali cioè che $q(T') = q(-T')$, e $t'_{1,2} = (1 - i\chi) t_{1,2}$.

Le funzioni di Green si ottengono allora come derivate funzionali di $Z[J]$. Per chi non lo avesse ancora incontrato, il concetto di "derivata funzionale" è molto semplice. Consideriamo una funzione $f(x)$, e un funzionale $X[f(x)]$. Consideriamo poi una variazione $f(x) \rightarrow f(x) + \epsilon(x)$. Il valore di $X[f + \epsilon]$ può essere sviluppato in potenze di ϵ , e questo sviluppo ci permette di definire implicitamente, in analogia con lo sviluppo di Taylor, le derivate funzionali di X rispetto ad f :

$$(2.32) \quad \begin{aligned} X[f + \epsilon] &= X[f] + \int dx \frac{\delta X}{\delta \epsilon(x)} \epsilon(x) + \frac{1}{2} \iint dx_1 dx_2 \frac{\delta^2 X}{\delta \epsilon(x_1) \delta \epsilon(x_2)} \epsilon(x_1) \epsilon(x_2) \\ &\dots + \frac{1}{N!} \int \cdots \int dx_1 \cdots dx_N \frac{\delta^N X}{\delta \epsilon(x_1) \cdots \delta \epsilon(x_N)} \epsilon(x_1) \cdots \epsilon(x_N) + \dots \end{aligned}$$

Se analogamente eseguiamo uno sviluppo di Taylor della $Z[J]$ in potenze di J ,

$$(2.33) \quad Z[J] = \sum_{N=0}^{\infty} \left[\frac{(-i)^N}{N!} \right] \int D[q(t)] \exp(iS) \left(\int dt \sum_k q_k(t) J_k(t) \right)^N,$$

e in particolare

$$Z[0] = \int D[q(t)] \exp(iS),$$

paragonando la (2.33) con la (2.32) e la (2.15) otteniamo

$$(2.34) \quad G_{k_1, \dots, k_N}(t_1, \dots, t_N) = (i)^N \frac{1}{Z[0]} \left[\frac{\delta^N Z[J]}{\delta J_{k_1}(t_1) \cdots \delta J_{k_N}(t_N)} \right]_{J=0}$$

Questi concetti si applicano direttamente alle teorie di campo. Assumiamo che ci siano N campi $\phi_1(x) \dots \phi_N(x)$, dove $x = \{\vec{x}, t\}$. Definiremo il funzionale generatore in termini di N funzioni di x , $J_k(x)$, ($k = 1 \dots N$),

$$(2.35) \quad Z[J] = \int D[\phi(x)] \exp \left(iS(\phi(x)) - i \int d^4x \sum_k \phi_k(x) J_k(x) \right)$$

La definizione di questo integrale segue le prescrizioni di limite e periodicità specificate nella sezione precedente, eqs. (2.23), (2.24). Le funzioni di Green a N punti risultano allora:

$$(2.36) \quad \begin{aligned} G_{k_1, \dots, k_N}(x_1, \dots, x_N) &= \langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_N)) | 0 \rangle \\ &= (i)^N \frac{1}{Z[0]} \left[\frac{\delta^N Z[J]}{\delta J_1(x_1) \dots \delta J_N(x_N)} \right]_{J=0} \end{aligned}$$

Una corrispondenza notevole: la (2.36) si ottiene con la semplice regola di sostituzione

$$(2.37) \quad \phi_k(x) \rightarrow i \frac{\delta}{\delta J_k(x)},$$

che possiamo ad esempio utilizzare nel modo seguente: se $F[\phi]$ è un arbitrario funzionale dei campi, otteniamo che

$$(2.38) \quad \int D[q(t)] \exp(iS) F[\phi] = \left[F \left[i \frac{\delta}{\delta J} \right] Z[J] \right]_{J=0},$$

un risultato che utilizzeremo per ricavare lo sviluppo perturbativo di una teoria di campo.

Per un campo complesso possiamo definire un funzionale generatore mediante due funzioni reali J_1, J_2 o, meglio, in termini di una funzione complessa J e della sua coniugata J^\dagger ,

$$(2.39) \quad Z(J, J^\dagger) = \int D[\phi(x)] D[\phi^\dagger(x)] \exp \left(iS(\phi(x), \phi^\dagger(x)) - i \int d^4x (\phi^\dagger(x) J(x) + J^\dagger(x) \phi(x)) \right)$$

Le funzioni di Green si ottengono allora dalla regola di sostituzione (vedi eq. 2.37)

$$(2.40) \quad \phi(x) \rightarrow i \frac{\delta}{\delta J^\dagger(x)}, \quad \phi^\dagger(x) \rightarrow i \frac{\delta}{\delta J(x)}$$

che si estende in modo ovvio al caso di più campi reali o complessi.

2.9 L'oscillatore armonico

In questa sezione applicheremo i concetti che abbiamo illustrati a un caso particolarmente semplice, quello di un oscillatore armonico di massa $m = 1$, con un hamiltoniano e lagrangiano rispettivamente dati da

$$(2.41) \quad H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2); \quad L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$$

Vogliamo usare la tecnica del funzionale Z per calcolare le funzioni di Green. Seguiremo i calcoli in qualche dettaglio, dato che essi si applicano direttamente a situazioni interessanti, ad esempio alla teoria dei campi. Prima di procedere con il funzionale Z , calcoliamo la funzione di Green a due punti partendo dalla normale formulazione della meccanica quantistica in modo da poter verificare la equivalenza delle due formulazioni.

Ricordiamo che, in termini degli operatori di creazione e distruzione (vedi ad esempio [3]), abbiamo

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger); \quad a^\dagger|0\rangle = |1\rangle, \quad a|1\rangle = |0\rangle; \quad H|0\rangle = \frac{\omega}{2}|0\rangle, \quad H|1\rangle = \frac{3\omega}{2}|1\rangle$$

$$\text{e quindi,} \quad q|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}|1\rangle; \quad q|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}|0\rangle$$

Considerando prima il caso in cui $t_1 > t_2$ abbiamo

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2) &= \langle 0|q(t_1)q(t_2)|0\rangle = \langle 0|e^{iHt_1}q e^{-iH(t_1-t_2)}q e^{-iHt_2}|0\rangle \\ &= \frac{1}{2\omega}e^{-i\omega(t_1-t_2)}; \quad (t_1 > t_2) \end{aligned}$$

e, mettendo assieme il risultato per $t_2 > t_1$,

$$(2.42) \quad G(t_1, t_2) = \frac{1}{2\omega} \left(e^{-i\omega(t_1-t_2)}\theta(t_1-t_2) + e^{-i\omega(t_2-t_1)}\theta(t_2-t_1) \right)$$

Per quanto riguarda il metodo della somma sui cammini, notiamo anzitutto che con una integrazione per parti

$$(2.43) \quad S = \frac{1}{2} \int dt (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) = -\frac{1}{2} \int dt (q\ddot{q} - \omega^2 q^2) = -\frac{1}{2} \int dt (q\mathcal{O}q)$$

dove \mathcal{O} è l'operatore differenziale

$$(2.44) \quad \mathcal{O} = \partial_t^2 + \omega^2$$

Il funzionale generatore sarà quindi

$$(2.45) \quad Z[J] = \int D[q(t)] \exp \left[\frac{-i}{2} \int dt (q\mathcal{O}q + 2qJ) \right]$$

La strategia per eseguire l'integrale è quella standard per integrare funzioni del tipo $\exp(-ax^2 + bx)$, usata ad esempio nella Appendice A, e consiste nel riscrivere l'esponente come quadrato perfetto, per ottenere un integrale gaussiano. Procediamo formalmente, riscrivendo la (2.45) come⁵

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int D[q(t)] \exp \frac{-i}{2} \int dt ((q + \mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(q + \mathcal{O}^{-1}J) - (\mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J)) \\ &= \exp \left[\frac{i}{2} \int dt (\mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J) \right] \int D[q(t)] \exp \left[\frac{-i}{2} \int dt (q + \mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(q + \mathcal{O}^{-1}J) \right] \end{aligned}$$

⁵Per verificare questo risultato, notare che, con due integrazioni per parti,

$$\int dt (\mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}\phi = \int dt (\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J))\phi = \int dt J\phi$$

L'integrale funzionale nell'ultima espressione è in realtà una costante indipendente da J , come si vede con un cambiamento di variabili⁶ $q \rightarrow q' = q + \mathcal{O}^{-1}J$, e in conclusione

$$Z[J] = K \exp \left[\frac{i}{2} \int dt (\mathcal{O}^{-1}J) \mathcal{O} (\mathcal{O}^{-1}J) \right]$$

Una costante moltiplicativa non ha alcun effetto sul valore delle funzioni di Green (vedi ad esempio la eq. (2.34)). per cui possiamo semplicemente scrivere

$$(2.46) \quad Z[J] = \exp \left[\frac{i}{2} \int dt J \mathcal{O}^{-1}J \right]$$

L'inverso di \mathcal{O} sarà un operatore integrale:

$$(2.47) \quad (\mathcal{O}^{-1}J)(t) = - \int dt' G(t-t') J(t')$$

La funzione G è detta "propagatore". Il segno è stato scelto in vista di quanto faremo poi sulla teoria dei campi e delle convenzioni esistenti, e deve essere:

$$\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J)(t) = J(t)$$

quindi la funzione $G(t)$ deve obbedire l'equazione differenziale

$$(2.48) \quad \mathcal{O}G(t) = -\delta(t)$$

Dobbiamo però ricordare che la $Z[J]$ è definita (eq. 2.31) come limite partendo da valori del tempo con una piccola⁷ parte immaginaria negativa, $t' = (1 - i\chi)t$. Per χ piccolo ma non nullo, l'operatore differenziale \mathcal{O} diventa

$$(2.49) \quad \mathcal{O} = \partial_t^2 + \omega^2 = (1 + 2i\chi)\partial_t^2 + \omega^2$$

e il propagatore $G(t)$ sarà il limite per $\chi \rightarrow 0$ di una funzione $G(t, \chi)$ che obbedisce l'equazione⁸, vedi la eq. (2.9),

$$(2.50) \quad ((1 + 2i\chi)\partial_t^2 + \omega^2)G(t, \chi) = -\delta(t)$$

La soluzione generale di questa equazione è la somma di una soluzione particolare e della soluzione generale della equazione omogenea, che possiamo scrivere, sempre trascurando termini $\mathcal{O}(\chi^2)$,

$$\partial^2 G = -(1 - i\chi)\omega^2 G; \quad \rightarrow \quad G = a e^{-it\omega(1-i\chi)} + b e^{it\omega(1-i\chi)}$$

Per trovare una soluzione della (2.50) passiamo alle trasformate di Fourier,

$$(2.51) \quad G(t, \chi) = \frac{1}{2\pi} \int dE G(E, \chi) e^{-iEt} \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int dE e^{-iEt}$$

⁶Ricordiamo che l'integrale funzionale si estende su tutte le orbite periodiche, $q(+\infty) = q(-\infty)$, quindi vogliamo che anche q' sia periodico. Occorre quindi imporre qualche restrizione su $J(t)$, ad esempio che le funzioni $J(t)$ ammissibili tendano abbastanza rapidamente a zero per $t \rightarrow \pm\infty$. Una analoga restrizione si dovrà applicare nel caso della teoria dei campi.

⁷Nelle seguenti manipolazioni trascureremo termini $\propto \chi^2$.

⁸Stiamo trascurando fattori moltiplicativi che tendono ad uno quando $\chi \rightarrow 0$. Ad esempio avremmo dovuto scrivere $\delta(t') = \delta(t)/(1 - i\chi)$, ma questo fattore è irrilevante nel limite.

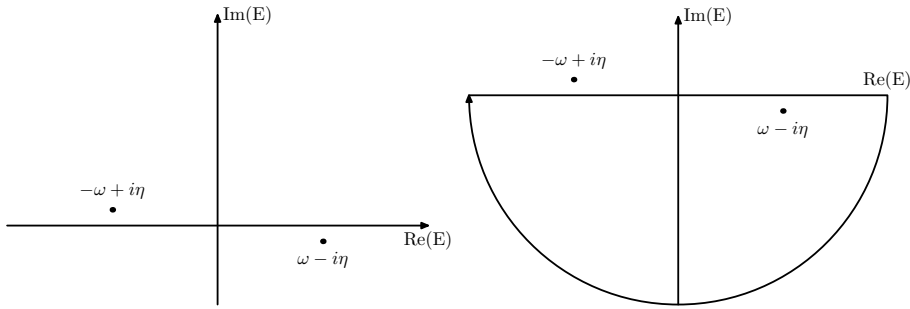


Figura 2.1: Posizione dei poli nella funzione $G(x, \chi)$ e cammino di integrazione per tempi positivi

Quindi

$$(2.52) \quad G(E, \chi) = \frac{-1}{\omega^2 - E^2(1 + 2i\chi)} = \frac{(1 - 2i\chi)}{E^2 - \omega^2(1 - 2i\chi)}$$

e trascurando il fattore moltiplicativo $(1 - 2i\chi)$,

$$(2.53) \quad G(E, \chi) = \frac{1}{E^2 - \omega^2 + i\epsilon} \quad \text{oppure} \quad = \frac{1}{E^2 - (\omega - i\eta)^2}$$

dove $\epsilon = 2\chi\omega^2$, $\eta = \chi\omega$ Possiamo adesso calcolare $G(t, \chi)$,

$$(2.54) \quad G(t, \chi) = \frac{1}{2\pi} \int dE \frac{e^{-iEt}}{E^2 - (\omega - i\eta)^2}$$

per $t > 0$ il cammino di integrazione può essere completato sul semipiano inferiore — figura 2.9 — e comprende il polo di destra, mentre per $t < 0$ il cammino di integrazione va chiuso nel semipiano superiore e comprende il polo di sinistra. Notiamo che la presenza di una parte immaginaria del tempo risulta in una selezione del polo che contribuisce all'integrazione. Applicando il teorema dei residui in ciascuno dei due casi, $t > 0$ e $t < 0$, otteniamo quindi una soluzione particolare della (2.50),

$$(2.55) \quad G(t, \chi) = \frac{-i}{2\omega} \left(e^{-i\omega(1-i\chi)t} \theta(t) + e^{i\omega(1-i\chi)t} \theta(-t) \right)$$

mentre la soluzione generale sarà

$$(2.56) \quad G(t, \chi) = \frac{-i}{2\omega} \left(e^{-i\omega(1-i\chi)t} \theta(t) + e^{i\omega(1-i\chi)t} \theta(-t) \right) + a e^{-i\omega(1-i\chi)t} + b e^{i\omega(1-i\chi)t}$$

Per determinare le costanti a, b ricordiamo che, per eseguire il calcolo che porta alla (2.46) abbiamo eseguito un cambiamento di variabili nella integrazione sui cammini,

$$q(t) \rightarrow q'(t) = q(t) - \delta q(t); \quad \delta q(t) = \int dt' G(t-t') J(t') = q(t)$$

Dato che l'integrale è esteso su tutti i cammini periodici tra $t = \pm\infty$, anche i cammini trasformati devono essere periodici, qualunque sia la funzione $J(t)$. Quindi $\delta q(t)$

deve essere periodica. La soluzione particolare soddisfa questa condizione, dato che tende a zero sia per $x \rightarrow \infty$ che per $x \rightarrow -\infty$ (ricordiamo che questo limite va preso prima di mandare $\chi \rightarrow 0$) grazie alla presenza delle funzioni $\theta(\pm t)$. Quindi dobbiamo considerare l'effetto dei termini aggiuntivi. Se prendiamo $J(t) = \delta(t - t_1)$, con t_1 un tempo arbitrario dai termini aggiuntivi a, b della (2.56) otteniamo

$$\delta q(t) = a e^{-i(t-t_1)\omega(1-i\chi)} + b e^{i(t-t_1)\omega(1-i\chi)}$$

Il primo termine diverge per $t \rightarrow -\infty$, il secondo per $t \rightarrow \infty$, quindi la sola soluzione accettabile per la (2.50) è quella in cui $a = b = 0$, cioè la soluzione (2.55) che passando al limite $\chi \rightarrow 0$ diviene

$$(2.57) \quad G(t) = \frac{-i}{2\omega} \left(e^{-i\omega t} \theta(t) + e^{i\omega t} \theta(-t) \right)$$

Il funzionale generatore — eq. (2.46), (2.47) — può essere scritto

$$(2.58) \quad Z[J] = \exp \left[\frac{-i}{2} \iint dt dt' J(t) G(t-t') J(t') \right]$$

Quindi — vedi eq. (2.34), ma qui abbiamo solo un grado di libertà —

$$(2.59) \quad G(t, t') = \langle 0 | T(q(t) q(t')) | 0 \rangle = -\frac{1}{Z(0)} \left[\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(t) \delta J(t')} \right]_{J=0} = i G(t-t')$$

e sostituendo la (2.57) si ottiene il risultato della (2.42).

Abbiamo apparentemente fatto molto più lavoro che nella formulazione usuale — ma in quel caso avevamo dato per conosciute le proprietà degli operatori di creazione e distruzione, quindi il paragone non è interamente calzante — ma abbiamo ottenuto di più, dato che nel funzionale generatore della eq. (2.58) sono racchiuse tutte le possibili funzioni di Green dell'oscillatore armonico. Ad esempio potremmo calcolare in due righe — lo lasciamo come esercizio — il valore della funzione di Green a quattro punti, $\langle 0 | T(q(t_1) q(t_2) q(t_3) q(t_4)) | 0 \rangle$.

E' interessante a questo punto fingere di non sapere nulla sulla struttura degli stati eccitati dell'oscillatore armonico e vedere cosa possiamo direttamente imparare dalla conoscenza delle funzioni di Green, cioè dalla (2.42), che riscriviamo per comodità, nel caso $t_1 > t_2$

$$(2.60) \quad \langle 0 | q(t_1) q(t_2) | 0 \rangle = \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega(t_1-t_2)}; \quad (t_1 > t_2)$$

D'altra parte, introducendo un insieme completo di stati,

$$(2.61) \quad \langle 0 | q(t_1) q(t_2) | 0 \rangle = \sum_X \langle 0 | q(t_1) | X \rangle \langle X | q(t_2) | 0 \rangle; \quad (t_1 > t_2)$$

e paragonando con il risultato precedente concludiamo che deve esistere uno stato $|1\rangle$ tale che

$$(2.62) \quad \langle 0 | q(t_1) | X \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t_1}$$

e quindi $E_1 = E_0 + \omega$. Dalla funzione di Green a quattro punti possiamo imparare qualcosa del secondo stato eccitato, e così via. Il funzionale ZJ contiene informazioni sull'intero spettro degli stati.

2.10 Campi scalari liberi — Propagatore e funzionale generatore

Il lavoro svolto nella precedente sezione permetta di saltare direttamente alla teoria dei campi, senza comportare novità concettuali. Consideriamo qui il caso più semplice, quello di un campo scalare reale $\phi(\vec{x}, t)$ che scriveremo anche $\phi(x)$ dove x denota il quadrivettore $\{\vec{x}, t\}$. Ricordiamo naturalmente che nelle nostre unità di misura la velocità della luce è $c = 1$. La densità di lagrangiano è, per un campo senza interazioni,

$$(2.63) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^2]$$

In analogia con quanto fatto per l'oscillatore armonico vogliamo calcolare il valore di aspettazione nel vuoto del prodotto ordinato nel tempo di due operatori di campo, $\langle 0 | T(\phi(x) \phi(y)) | 0 \rangle$. Seguendo i passi eseguiti nel caso dell'oscillatore armonico, calcoliamo il funzionale generatore (eq. 2.35). Con una integrazione per parti⁹ possiamo scrivere la azione come

$$(2.64) \quad \begin{aligned} S &= \int d^4x \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^2] \\ &= - \int d^4x \frac{1}{2} [\phi(x) \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) + m^2 \phi^2] = - \int d^4x \frac{1}{2} (\phi K \phi) \end{aligned}$$

dove K è l'operatore differenziale di Klein Gordon,

$$(2.65) \quad K = \partial_\mu \partial^\mu + m^2 = \square + m^2$$

Possiamo allora calcolare il funzionale generatore (2.35) — notiamo l'analogia passo a passo con il metodo usato nella sezione precedente

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int D[\phi(x)] \exp\left(iS(\phi(x)) - \int d^4x \phi(x) J(x)\right) \\ &= \int D[\phi(x)] \exp\left(-\frac{i}{2} \int d^4x [\phi K \phi + 2\phi(x) J(x)]\right) \\ &= \int D[\phi(x)] \exp\left(-\frac{i}{2} \int d^4x [(\phi + K^{-1} J) K (\phi + K^{-1} J) - (J K^{-1} J)]\right) \\ &= \exp\left(\frac{i}{2} \int d^4x (J K^{-1} J)\right) \int D[\phi(x)] \exp\left(-\frac{i}{2} \int d^4x [(\phi + K^{-1} J) K (\phi + K^{-1} J)]\right) \end{aligned}$$

Il residuo integrale funzionale può essere eseguito con un cambiamento di variabili, $\phi \rightarrow \phi' = \phi + K^{-1} J$ ed è una costante che può essere omessa, e possiamo semplicemente scrivere

$$Z[J] = \exp\left(\frac{i}{2} \int d^4x (J K^{-1} J)\right)$$

L'inverso dell'operatore differenziale K sarà un operatore integrale, che (per riprodurre l'usuale convenzione di segno sulla funzione Δ_F) possiamo scrivere

$$(2.66) \quad K^{-1} J(x) = - \int dy \Delta_F(x-y) J(y)$$

⁹Nel fare integrazioni per parti assumiamo una periodicità di $\phi(x)$ sia nel tempo che nello spazio, come descritto in dettaglio nella sezione 2.7.

Δ_F deve obbedire l'equazione

$$(2.67) \quad (\square + m^2)\Delta_F(x) = -\delta^4(x)$$

Anche questa volta, come nel caso dell'oscillatore armonico, dobbiamo stare attenti al limite da tempi immaginari per cui riscriviamo l'operatore K come (vedi eq. 2.49)

$$(2.68) \quad K = (1 + 2i\chi)\partial_t^2 - (\vec{\nabla})^2 + m^2$$

che passando alle trasformate di Fourier,

$$(2.69) \quad \Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \Delta_F(p) e^{-ipx} \quad \delta^4(t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ipx}$$

con p il quadrivettore $\{E, \vec{p}\}$, porta a (vedi discussione nella sessione precedente)

$$(2.70) \quad \Delta_F(p) = \frac{1}{E^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Il termine $i\epsilon$ specifica il cammino di integrazione come discusso precedentemente. In conclusione il funzionale generatore per un campo scalare reale è

$$(2.71) \quad Z[J] = \exp\left(\frac{-i}{2} \iint d^4 x d^4 y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)\right)$$

da cui possiamo ricavare le differenti funzioni di Green. In particolare quella a due punti è semplicemente

$$(2.72) \quad \langle 0 | T(\phi(x) \phi(y)) | 0 \rangle = i\Delta_F(x-y)$$

La funzione $\Delta_F(x)$ è detta il propagatore del campo ϕ .

Quanto abbiamo fatto in questa sezione si estende semplicemente al caso di un campo complesso privo di interazioni con massa m , equivalente (vedi eq. 2.27) a due campi reali, il cui lagrangiano si può scrivere

$$(2.73) \quad \mathcal{L} = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi_k(x) \partial^\mu \phi_k(x) - m^2 \phi_k^2] = \partial_\mu \phi^\dagger(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^\dagger \phi$$

Anche in questo caso $Z[J]$ (vedi eq. 2.39) si calcola esplicitamente ripetendo i passi sviluppati in precedenza, per arrivare a

$$(2.74) \quad Z[J, J^\dagger] = \exp\left(-i \iint d^4 x d^4 y J^\dagger(x) \Delta_F(x-y) J(y)\right)$$

La funzione a due punti si calcola con le regole di sostituzione (2.40), e si ottiene

$$(2.75) \quad \langle 0 | T(\phi(x) \phi^\dagger(y)) | 0 \rangle = i\Delta_F(x-y)$$

$$(2.76) \quad \langle 0 | T(\phi(x) \phi(y)) | 0 \rangle = \langle 0 | T(\phi^\dagger(x) \phi^\dagger(y)) | 0 \rangle = 0$$

Lasciamo la derivazione di questi ultimi risultati come esercizio.

2.11 Campi scalari liberi — Stati a una particella

Possiamo usare le eq. (2.75), (2.76) per studiare lo spettro degli stati nella teoria scalare, come avevamo fatto precedentemente per l'oscillatore armonico. Troveremo che un campo scalare complesso descrive due particelle della stessa massa, che potremo chiamare la *particella P* e la *antiparticella A*. Ciascuna delle due può esistere in stati caratterizzati da una quantità di moto \vec{p} e energia $\omega_p = \sqrt{(\vec{p}^2 + m^2)}$.

Riscriviamo la (2.75) usando le (2.69), (2.70)

$$\langle 0 | T(\phi(x)\phi^\dagger(y)) | 0 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \left[\frac{1}{(2\pi)} \int dE \frac{e^{-iE(t_x-t_y)}}{E^2 - \omega_p^2 + i\epsilon} \right]$$

L'integrale in parentesi quadre è quello della eq. (2.54), che già conosciamo dalla (2.57), quindi:

$$(2.77) \quad \begin{aligned} \langle 0 | T(\phi(x)\phi^\dagger(y)) | 0 \rangle &= i\Delta_F(x-y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{2\omega_p} \left(e^{-i\omega_p(t_x-t_y)} \theta(t_x-t_y) + e^{-i\omega_p(t_y-t_x)} \theta(t_y-t_x) \right) \end{aligned}$$

Se consideriamo la trasformata di Fourier sulla variabile y , definendo

$$(2.78) \quad \phi(\vec{q}, t_y) = \int d^3 y e^{-i\vec{q}y} \phi(\vec{y}, t_y); \quad \phi^\dagger(\vec{q}, t_y) = \int d^3 y e^{i\vec{q}y} \phi^\dagger(\vec{y}, t_y)$$

otteniamo

$$\langle 0 | T(\phi(\vec{x}, t_x)\phi^\dagger(\vec{q}, t_y)) | 0 \rangle = \frac{e^{i\vec{q}\vec{x}}}{2\omega_q} \left(e^{-i\omega_q(t_x-t_y)} \theta(t_x-t_y) + e^{-i\omega_q(t_y-t_x)} \theta(t_y-t_x) \right)$$

Dobbiamo considerare separatamente i casi $t_x > t_y$ e $t_y > t_x$. Si ottiene

$$(2.79) \quad \langle 0 | \phi(\vec{x}, t_x)\phi^\dagger(\vec{q}, t_y) | 0 \rangle = \frac{e^{i\vec{q}\vec{x}}}{2\omega_q} e^{-i\omega_q(t_x-t_y)} \quad (t_x > t_y)$$

$$(2.80) \quad \langle 0 | \phi^\dagger(\vec{q}, t_y)\phi(\vec{x}, t_x) | 0 \rangle = \frac{e^{i\vec{q}\vec{x}}}{2\omega_q} e^{-i\omega_q(t_y-t_x)} \quad (t_y > t_x)$$

Dalla prima, inserendo la somma su un sistema completo di stati,

$$(2.81) \quad \sum_X \langle 0 | \phi(\vec{x}, t_x) | X \rangle \langle X | \phi^\dagger(\vec{q}, t_y) | 0 \rangle = \frac{e^{i\vec{q}\vec{x}}}{2\omega_q} e^{-i\omega_q(t_x-t_y)}$$

per ogni \vec{q} il contributo alla somma deve venire da uno stato "di particella" $|P; \vec{q}\rangle$ tale che

$$\langle 0 | \phi(\vec{x}, t_x) | P; \vec{q} \rangle = a(\vec{q}) e^{i(\vec{q}\vec{x} - \omega_q t_x)}$$

con $a(\vec{q})$ un fattore da determinare. Questo ci dice già¹⁰ che lo stato $|P; \vec{q}\rangle$ ha impulso \vec{q} ed energia ω_q . Per determinare il valore di $a(\vec{q})$ passiamo alla trasformata di Fourier (eq. 2.78),

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(\vec{k}, t_x) | P; \vec{q} \rangle &= a(\vec{q}) (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{q}) e^{-i\omega_q t_x} && \text{e quindi} \\ \langle P; \vec{q} | \phi^\dagger(\vec{k}, t_x) | 0 \rangle &= a^*(\vec{q}) (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{q}) e^{i\omega_q t_x} \end{aligned}$$

¹⁰Possiamo scrivere $\phi(\vec{x}, t) = e^{i(Ht - \vec{P}\vec{x})} \phi(0,0) e^{-i(Ht - \vec{P}\vec{x})}$ dove H è l'hamiltoniano e \vec{P} l'operatore impulso.

da cui se scriviamo

$$\sum_X |X\rangle \langle X| = \int d^3 k |P; \vec{k}\rangle \langle P; \vec{k}| \quad (+ \text{ stati che non contribuiscono a (2.81)})$$

e sostituiamo nella (2.81) otteniamo $|a(\vec{q})|^2 (2\pi)^3 = 1/(2\omega_q)$, e con una scelta opportuna della fase di $|P; \vec{k}\rangle$ otteniamo

$$(2.82) \quad \langle 0 | \phi(\vec{x}, t_x) | P; \vec{q} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_q}} e^{i(\vec{q}\vec{x} - \omega_q t_x)}$$

$$(2.83) \quad \langle P; \vec{q} | \phi^\dagger(\vec{x}, t_x) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_q}} e^{-i(\vec{q}\vec{x} - \omega_q t_x)}$$

Passiamo ora al caso $t_y > t_x$, eq. (2.80) che si traduce in

$$(2.84) \quad \sum_X \langle 0 | \phi^\dagger(\vec{q}, t_y) | X \rangle \langle X | \phi(\vec{x}, t_x) | 0 \rangle = \frac{e^{i\vec{q}\vec{x}}}{2\omega_q} e^{-i\omega_q(t_y - t_x)}$$

quindi alla somma contribuirà uno stato $|A_{\vec{q}}\rangle$ tale che

$$\langle A_{\vec{q}} | \phi(\vec{x}, t_x) | 0 \rangle = b(\vec{q}) e^{i(\vec{q}\vec{x} + t_x \omega_q)}$$

questo stato avrà energia ω_q e impulso $-\vec{q}$, e possiamo quindi usare la notazione $|A_{\vec{q}}\rangle = |A, -\vec{q}\rangle$. Procedendo come nel caso precedente possiamo usare la (2.84) per determinare il fattore $b(\vec{q})$ e otteniamo (cambiando segno a \vec{q})

$$(2.85) \quad \langle A; \vec{q} | \phi(\vec{x}, t_x) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_q}} e^{-i(\vec{q}\vec{x} - \omega_q t_x)}$$

$$(2.86) \quad \langle 0 | \phi^\dagger(\vec{x}, t_x) | A; \vec{q} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_q}} e^{i(\vec{q}\vec{x} - \omega_q t_x)}$$

Abbiamo dedotto l'esistenza di due insiemi di stati di impulso \vec{q} e energia ω_q : $|P, -\vec{q}\rangle$, $|A, -\vec{q}\rangle$. Sorge naturale la domanda: sono veramente stati diversi? Sì, sono necessariamente diversi, e la ragione si trova nella (2.76). Se gli stati $|A, -\vec{q}\rangle$ coincidessero con gli $|P, -\vec{q}\rangle$ troveremmo (usando le (2.82), (2.83), (2.85), (2.86)), un valore di aspettazione non nullo di due ϕ o due ϕ^\dagger . In effetti in questo caso ($A = P$) ϕ e ϕ^\dagger avrebbero *gli stessi elementi di matrice* (paragonare (2.82) e (2.85) con (2.83) e (2.86)) e sarebbero quindi *lo stesso operatore*. Si tratterebbe quindi di un campo scalare reale (hermitiano). Che i due tipi di particella siano in rapporto particella-antiparticella non si vede in una teoria così semplice, che descrive particelle prive di interazione. Introducendo però l'interazione con un campo elettromagnetico potremmo facilmente dimostrare che le due particelle hanno carica elettrica opposta. Quale chiamare particella e quale antiparticella rimane una scelta arbitraria.

Nel caso di un campo scalare reale la trattazione è naturalmente più semplice, e abbiamo un solo tipo di particella.

Capitolo 3

Teoria delle perturbazioni

Nel precedente capitolo abbiamo applicato il metodo della somma sui cammini a teorie di campo molto semplici, in particolare a campi scalari reali o complessi *liberi*, che corrispondono a particelle di spin zero. Come vedremo, questi metodi si applicano egualmente ai campi di particelle di spin 1/2, ad esempio l'elettrone e di spin 1, ad esempio il fotone. Nel primo caso dovremo imparare come trattare la quantizzazione di campi fermionici, nel secondo dovremo affrontare il problema della invarianza di gauge. In ogni caso è solamente nel caso di campi liberi che si può portare a conclusione il calcolo delle varie grandezze che caratterizzano la teoria, in particolare le funzioni di Green e il funzionale generatore. Per campi *liberi* si intende parlare di campi che descrivono particelle che non interagiscono tra loro. Questo si traduce nella richiesta che il Lagrangiano non contenga termini che sono il prodotto di più di due campi, e a questo tipo di lagrangiano corrispondono equazioni del moto lineari nei campi. Ad esempio per i campi scalari l'equazione di Klein Gordon,

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0,$$

per campi liberi di spin 1/2 l'equazione di Dirac, per il fotone le equazioni di Maxwell. In tutti questi casi la soluzione generale delle eq. del moto è data da una sovrapposizione di onde piane, che corrispondono ai diversi possibili stati di impulso definito delle particelle. In tutti i casi interessanti la situazione è molto più complessa: il lagrangiano contiene termini del terzo o quarto ordine (o di ordine ancora superiore) e le equazioni del moto non sono lineari, e si ottengono teorie non risolubili esattamente. Si ricorre allora a metodi approssimati, tra cui in primo luogo la teoria delle perturbazioni.

Anche se in questo corso vogliamo soprattutto occuparci di elettrodinamica quantistica, cominciamo con il considerare il caso semplice di un campo scalare reale con una interazione $\lambda\phi^4$, e cioè con un lagrangiano

$$(3.1) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \phi^4$$

cui corrisponde una equazione del moto non lineare,

$$(\square + m^2)\phi(x) = -\frac{1}{3!} \lambda \phi^3$$

di cui non si conosce una soluzione generale nemmeno a livello classico.

3.1 Lo sviluppo perturbativo del funzionale generatore e i diagrammi di Feynman

Anche se non sappiamo risolvere la teoria corrispondente al lagrangiano (3.1) possiamo esprimere, almeno formalmente, le grandezze di interesse fisico come serie di potenze nella *costante d'accoppiamento* λ , la cosiddetta *serie perturbativa*. In particolare possiamo esprimere le funzioni di Green come serie di potenze in λ . Se λ è piccolo, i primi termini di questa serie potranno dare una buona approssimazione della grandezza di interesse fisico.

Supponiamo di poter suddividere il lagrangiano in due termini,

$$(3.2) \quad \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \mathcal{L}^0(\phi, \partial_\mu \phi) + \mathcal{L}^1(\phi)$$

dove \mathcal{L}^0 è un lagrangiano libero, ad esempio quello studiato nella sezione 2.10, \mathcal{L}^1 un termine di interazione¹. Il funzionale generatore sarà allora (eq. 2.35)

$$Z[J] = \int D[\phi(x)] \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}^1(\phi)\right) \exp\left(i \int d^4x (\mathcal{L}^0(\phi, \partial_\mu \phi) - \phi(x)J(x))\right),$$

che possiamo riscrivere (vedi eq. 2.38) come

$$(3.3) \quad Z[J] = \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}^1\left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right) Z^0[J],$$

dove $Z^0[J]$ è il funzionale d'azione ottenuto dal lagrangiano imperturbato \mathcal{L}^0 . Nel caso della teoria $\lambda\phi^4$, eq. (3.1), $Z^0[J]$ è quello dalla (2.71), che riportiamo per convenienza,

$$(3.4) \quad Z^0[J] = \exp\left(\frac{-i}{2} \iint d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)\right)$$

mentre uno sviluppo formale del funzionale generatore in potenze di λ è dato da

$$(3.5) \quad \begin{aligned} Z[J] &= \exp\left(\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right) Z^0[J] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^n}{(4!)^n n!} \left(\int d^4x \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right)^n Z^0[J] \\ &= Z^0[J] - i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 Z^0[J] \\ &\quad - \frac{\lambda^2}{2(4!)^2} \iint d^4x d^4y \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 \left(i \frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^4 Z^0[J] + \dots \end{aligned}$$

Per procedere col calcolo, ordine per ordine, dobbiamo eseguire materialmente le derivate funzionali. Notiamo che (eq. 3.4)

$$(3.6) \quad i \frac{\delta}{\delta J(x)} Z^0[J] = \int d^4y \Delta_F(x-y) J(y) Z^0[J] = \int d^4y \Delta_F(x-y) J(y) Z^0[J]$$

¹Abbiamo supposto che \mathcal{L}^1 dipenda dai campi e non dalle loro derivate, una limitazione che semplifica i seguenti sviluppi formali ma che può essere superata senza particolari difficoltà. Pure per semplicità considereremo qui il caso di un singolo campo



Figura 3.1: Rappresentazione grafica dei due termini della eq. (3.7)

La prima derivata che si esegue “cala” un fattore $\Delta_F J$ dall’esponenziale, mentre quelle successive possono “calare” ulteriori fattori, o “catturare” la J da un fattore $\Delta_F J$ “calato” da una derivata precedente, ad esempio per la derivata seconda

$$(3.7) \quad i \frac{\delta}{\delta J(x')} \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} Z^0[J] \right) = \left(\int d^4 y' \Delta_F(x' - y') J(y') \right) \left(\int d^4 y \Delta_F(x - y) J(y) \right) Z^0[J] \\ i \Delta_F(x - x') Z^0[J]$$

Per dominare meglio la complicazione di questi calcoli, che cresce rapidamente di derivata in derivata, si ricorre ad una rappresentazione grafica. Ad ogni fattore $(i\delta/\delta J(x))^4$ corrisponde un punto, detto “vertice” da cui escono quattro linee. Ogni linea può finire in un altro vertice di cui ha “catturato” una J (o nello stesso vertice se cattura una J prodotta da una precedente derivata), oppure in un pallino, che rappresenta una J non catturata da altre derivate. Nel primo caso la linea (che diremo “linea interna”) corrisponde a un propagatore $i\Delta_F$, nel secondo (linea “esterna”) a un fattore $\Delta_F J$. Ad esempio i due termini della derivata seconda possono essere rappresentati dai due diagrammi della figura 3.1. Naturalmente in questo caso da ciascuno dei due punti x, x' esce una sola linea. Per unificare la descrizione dei due tipi di linee ci conviene riscrivere il termine che corrisponde a una linea che termina in un pallino come $\Delta_F J = (i\Delta_F)(-iJ)$ di modo che ad ogni linea, interna o esterna, corrisponda un fattore $i\Delta_F$.

Al termine di ordine λ della $Z[J]$ (eq. 3.5) corrisponderanno diagrammi con un singolo vertice, e ci si convince facilmente che le sole possibilità sono i diagrammi (a,b,c) della figura 3.2. Il diagramma (a), dove tutte le J sono state “catturate”, e che è privo di linee esterne, viene detto un diagramma *vuoto-vuoto*.

Il diagramma (b) rappresenta una modificazione al propagatore di una singola particella, che all’ordine λ^0 è quello che abbiamo calcolato in precedenza (sezione 2.10), e che potremmo rappresentare come diagramma senza vertici, come in (d). Anche su questo tema torneremo nel seguito. Intanto però diamo una occhiata ai diagrammi dello stesso tipo che si incontrano al secondo ordine perturbativo, nella figura 3.3. Sorge il sospetto che il diagramma (a) di questa figura sia, assieme a (d) e (b) della figura precedente, l’inizio di una serie interessante. Sospetto come vedremo del tutto giustificato.

Il diagramma (c) della figura 3.2, infine, rappresenta lo scattering di due particelle. Come vedremo questo è direttamente connesso all’elemento della matrice S che descrive questo processo, o meglio alla approssimazione al primo ordine λ a questo processo. Anche in questo caso esistono correzioni di ordine superiore, al secondo ordine quelli della figura 3.4

La corrispondenza tra diagrammi della teoria $\lambda\phi^4$ e termini in $Z[J]$ si ottiene con

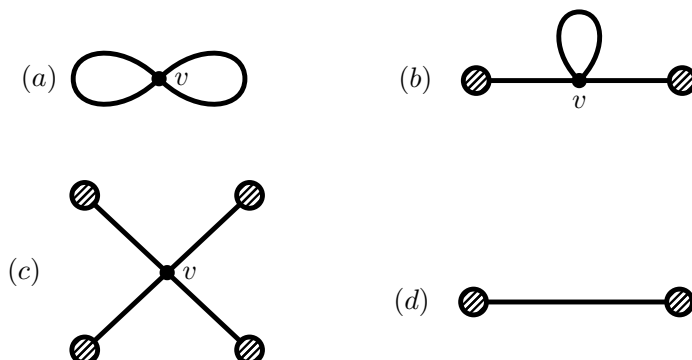


Figura 3.2: I diagrammi al primo ordine perturbativo

alcune semplici regole:

	pallino	$-i \int d^4 x J(x)$
(3.8)	vertice	$\frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 v$
	linea da x a y	$i\Delta_F(x-y)$

a queste si deve aggiungere una regola per calcolare il fattore combinatorio da applicare al contributo di ciascun diagramma. Nel caso della teoria $\lambda\phi^4$ quest'ultima regola è parecchio più complicata che nel caso della elettrodinamica quantistica. Nel nostro contesto, in cui la $\lambda\phi^4$ ci serve come modello semplice per la QED, conviene soprassedere a questa discussione. È sempre possibile, una volta identificata — con le regole che abbiamo dato — la forma di un particolare contributo alla $Z[J]$, tornare alla (3.5) per ottenere il fattore combinatorio corretto.

A ogni vertice o pallino si associa un punto nello spazio-tempo (x, v) , su cui viene eseguita una integrazione, e l'argomento delle Δ_F è la differenza tra le posizioni degli estremi, siano essi vertici o pallino. Quindi al diagramma (c) della figura 3.2 corrisponde un termine in $Z[J]$ che possiamo chiamare D_1 (è il primo diagramma che calcoliamo!)

$$(3.9) \quad D_1[J] = (-i)^4 \int d^4 x_1 J(x_1) \int d^4 x_2 J(x_2) \int d^4 x_3 J(x_3) \int d^4 x_4 J(x_4) \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4 v (i)^4 \Delta_F(x_1 - v) \Delta_F(x_2 - v) \Delta_F(x_3 - v) \Delta_F(x_4 - v)$$

che rappresenta il primo ordine in λ del termine in $Z[J]$ proporzionale a J^4 . Le correzioni di ordine λ^2 sono date dai diagrammi della fig. 3.4; (a) corrisponde a

$$D_2[J] = (-i)^4 (6^2) \int d^4 x_1 J(x_1) \int d^4 x_2 J(x_2) \int d^4 x_3 J(x_3) \int d^4 x_4 J(x_4) \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)^2 \iint d^4 v_1 d^4 v_2 (i)^6 \Delta_F(x_1 - v_1) \Delta_F(x_2 - v_1) \Delta_F(x_3 - v_2) \Delta_F(x_4 - v_2) \Delta_F(v_1 - v_2) \Delta_F(v_1 - v_2)$$

dove (6^2) è un fattore combinatorio. Avremmo potuto direttamente ottenere questi risultati, incluso il fattore (6^2) , isolando i termini J^4 nella eq. (3.5). Lasciamo questo compito ai lettori come esercizio. Del diagramma (b) della figura 3.4 discuteremo a parte: si tratta di una correzione sulle linee esterne.

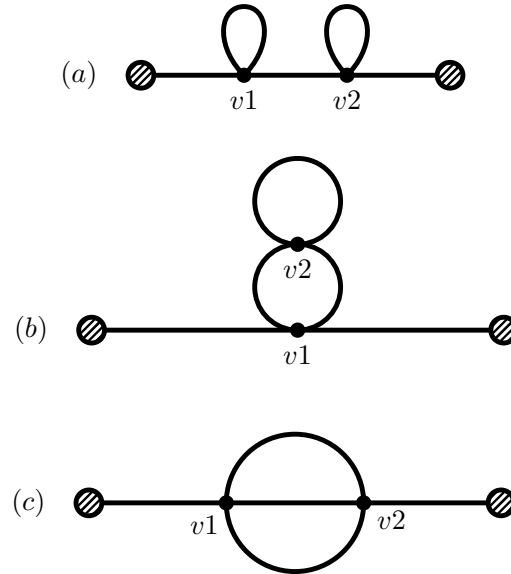


Figura 3.3: Correzioni al propagatore al secondo ordine perturbativo

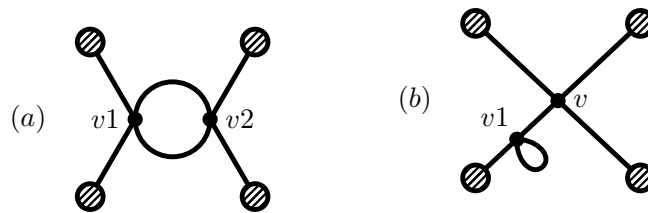


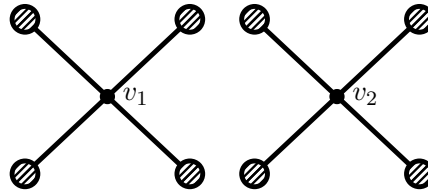
Figura 3.4: Correzioni al vertice al secondo ordine perturbativo

3.2 Parti connesse e diagrammi vuoto-vuoto

I diagrammi che abbiamo mostrato nelle figure 3.2 – 3.4 sono tutti topologicamente connessi. In ciascuno di essi ci si può spostare da qualsiasi vertice o pallino a qualsiasi altro muovendosi lungo le linee del diagramma. Esistono anche diagrammi non connessi. Ad esempio tra i termini del secondo ordine in λ nella eq. (3.5) ne esiste uno in cui ciascuna delle otto derivate “cala” un fattore $\Delta_F J$, il che risulta semplicemente nel quadrato del termine della eq. (3.9). Questo termine è rappresentato dalla figura 3.5, un diagramma composto da due parti topologicamente separate centrate sui due vertici v_1, v_2 . A un diagramma non connesso corrisponde ad un termine (un funzionale di J) che si fattorizza nel prodotto di due o più funzionali di J , e nel caso della figura 3.5 si ottiene² $(D_1[J])^2/2$.

Dal punto di vista fisico ciascuna delle due parti del diagramma nella fig. 3.5

²La giustificazione di questo risultato si troverà nella appendice B, eq. (B.14).

Figura 3.5: Un diagramma sconnesso al secondo ordine in λ .

rappresenta un processo di scattering tra due particelle. La combinazione delle due parti rappresenta due processi di scattering indipendenti tra loro: possiamo immaginare che uno avvenga al CERN, il secondo a Frascati. L'ampiezza di probabilità per la combinazione di più processi indipendenti è semplicemente il prodotto delle ampiezze di ciascuno di essi, e la probabilità che tutti avvengano è il prodotto delle singole probabilità. Non c'è altro da imparare dallo studio di processi indipendenti, quindi conviene concentrarci sui singoli processi, che corrispondono a diagrammi connessi.

Abbiamo visto che tramite la teoria delle perturbazioni il funzionale $Z[J]$ può essere espresso come una somma di diagrammi, di cui alcuni connessi, altri non connessi. È possibile definire un funzionale $W[J]$ che corrisponde alla somma dei soli diagrammi connessi,

$$(3.10) \quad W[J] = \sum_{(\text{diag. connessi})} D_i[J]$$

Il rapporto tra $W[J]$ e $Z[J]$ è semplicemente dato da:

$$(3.11) \quad Z[J] = \exp(W[J])$$

La dimostrazione di questo risultato è riportata nella appendice B.

Notiamo ancora che per $J = 0$ otteniamo

$$(3.12) \quad Z[0] = \exp(W[0])$$

dove $W[0]$ corrisponde alla somma dei diagrammi connessi vuoto-vuoto, quelli che non hanno "pallino", gli unici che non si annullano per $J = 0$. Possiamo quindi scrivere

$$(3.13) \quad Z[J] = Z[0] \exp(W'[J])$$

dove $W'[J]$ è la somma dei diagrammi connessi che non siano del tipo vuoto-vuoto, quindi dei diagrammi provvisti di gambe esterne. L'effetto dei diagrammi vuoto-vuoto sul funzionale generatore $Z[J]$ consiste quindi in una costante moltiplicativa $Z[0]$. Come si vede dalla (2.36) il fattore $Z[0]$ non contribuisce al calcolo delle funzioni di Green, e possiamo semplicemente tralasciarlo.

3.3 La funzione di Green a due punti.

In questa sezione studiamo la forma esatta della funzione di Green a due punti per un campo scalare reale. In una teoria di campo con interazioni non è possibile cal-

colare esattamente le funzioni di Green, ma la sola richiesta di invarianza rispetto a trasformazioni di Lorentz e una ragionevole ipotesi sulla struttura degli stati ad una e più particelle permette di stabilire una *rappresentazione spettrale* della funzione a due punti. Useremo questa rappresentazione per stabilire una relazione tra funzioni di Green a più punti e gli elementi della matrice S che descrivono l'ampiezza di transizione negli urti tra particelle.

L'idea della rappresentazione spettrale è molto semplice: scriviamo, per $t_x > t_y$

$$(3.14) \quad \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle = \sum_{\alpha} \langle 0 | \phi(x) | \alpha \rangle \langle \alpha | \phi(y) | 0 \rangle$$

Alla somma sugli stati intermedi possono contribuire stati ad una particella $|\vec{p}\rangle$ e stati con due o più particelle. quindi dividiamo la somma (e il risultato) in due parti:

$$(3.15) \quad \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle_1 + \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle_{(2+)}$$

Il contributo degli stati a una particella può essere scritto esplicitamente usando un risultato, eq. (C.2) ricavato nell'appendice C, e otteniamo

$$(3.16) \quad \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle_1 = \frac{Z}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2\omega_p}} e^{-ip(x-y)}$$

dove Z è la costante di rinormalizzazione. Se ripetiamo questi passi nel caso $t_2 > t_1$ otteniamo, per il contributo degli stati a una particella,

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle_1 = \\ \frac{Z}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{2\omega_p} \left(e^{-i\omega_p(t_x-t_y)} \theta(t_x-t_y) + e^{-i\omega_p(t_y-t_x)} \theta(t_y-t_x) \right) \end{aligned}$$

e, paragonando con la (2.77) otteniamo

$$(3.17) \quad \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle_1 = iZ\Delta_F(x-y; m)$$

dove abbiamo introdotto la notazione $\Delta_F(x-y; m)$ per indicare il propagatore di Feynman relativo a particelle di massa m .

Gli stati a due o più particelle possono essere caratterizzati sulla base del loro impulso \vec{p} , della loro massa invariante, M , e della loro energia $E = \sqrt{M^2 + \vec{p}^2}$. Al contrario degli stati di singola particella, che corrispondono a un valore preciso di m , gli stati a due o più particelle presentano uno spettro continuo di valori di M a partire da una certa soglia M_s . Ad esempio gli stati a due particelle di impulso totale nullo, per i quali $E = M$, saranno composti da due particelle di impulso opposto, $\pm \vec{p}$, e quindi $M = E = 2\sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \geq M_s = 2m$. Nella teoria $\lambda\phi^4$ non sono possibili transizioni tra stati con un numero pari e un numero dispari di particelle³ e la soglia effettiva è $M_s = 3m$. Gli stati che contribuiscono alla somma (3.14) sono creati da ϕ che opera sul vuoto, e avranno momento angolare intrinseco nullo. Quindi anche a questi stati si applicano le considerazioni fatte sugli stati di singola particella, e il contributo degli stati di massa M risulterà proporzionale a $i\Delta_F(x-y; M)$. Possiamo quindi dare l'espressione generale per la funzione a due punti in una teoria scalare:

$$(3.18) \quad \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle = iZ\Delta_F(x-y; m) + i \int_{M^2=M_s^2}^{\infty} dM^2 \sigma(M^2) \Delta_F(x-y; M)$$

³Il lagrangiano di questa teoria, eq. (3.1), è simmetrico sotto l'operazione $\phi \rightarrow -\phi$. Deve quindi esistere un operatore unitario \mathbf{P} sullo spazio degli stati, tale che $\mathbf{P}\phi\mathbf{P} = -\phi$. Nel linguaggio degli operatori di creazione e distruzione si verifica facilmente che se $|n\rangle$ è un stato ad n particelle, $\mathbf{P}|n\rangle = (-1)^n |n\rangle$. Dato che il vuoto ($n=0$) è pari, ne segue che $\langle n|\phi|0\rangle = 0$ se n è pari.

che dipende da due sole grandezze incognite: la costante di rinormalizzazione Z e la funzione $\sigma(M^2)$ che prende il nome di *funzione spettrale*.

Notiamo che in teoria delle perturbazioni possiamo sviluppare la funzione a due punti in potenze della costante di accoppiamento (λ nella teoria scalare che adottiamo come modello in questo capitolo). Quindi sia la costante di rinormalizzazione Z che la funzione spettrale $\sigma(M^2)$ devono essere considerate come serie di potenze nella costante di accoppiamento. All'ordine zero ci si riduce ai risultati della teoria libera (vedi ad esempio la eq. 2.72), cioè

$$(3.19) \quad Z = 1; \quad \sigma(M^2) = 0 \quad (\text{ordine zero in teoria delle perturbazioni})$$

Nella teoria $\lambda\phi^4$ le prime correzioni a Z e $\sigma(M^2)$ provengono dal diagramma (c) nella figura 3.3, e sono $\propto \lambda^2$.

3.4 La matrice S .

Nella fisica delle particelle il punto di contatto tra teoria e esperimento è dato dagli elementi della matrice S che definiscono la ampiezza di transizione tra stati composti da una o più particelle. Nella direzione dell'esperimento gli elementi della matrice S si traducono in sezioni d'urto, probabilità di decadimento, e in generale tutte le grandezze misurabili nei processi d'urto. Dal punto di vista della teoria esiste, come vedremo, una precisa relazione tra elementi della matrice S e funzioni di Green, per cui la conoscenza sperimentale di tali elementi di matrice permette di esplorare la struttura della teoria di campo sottostante.

Alla base della teoria della matrice S è la cosiddetta ipotesi asintotica: qualsiasi stato fisico di energia finita evolve nel tempo verso uno stato composto da particelle che non interagiscono tra loro. La giustificazione è che tutte le interazioni tra particelle sono a corto raggio d'azione⁴. Trascurando le interazioni coulombiane o gravitazionali, un'idea rozza del raggio d'azione delle interazioni tra particelle è data dalla lunghezza d'onda Compton. Nel caso delle interazioni adroniche, la lunghezza d'onda Compton del pione, $1.4 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$. Dato che nel mondo delle particelle le velocità tipiche sono dell'ordine della velocità della luce, la separazione tra particelle adroniche avviene in un tempo dell'ordine di $T_s = 10^{-21} \text{ s}$. Per altri tipi di interazione la lunghezza caratteristica può essere più piccola o più grande, ad esempio la lunghezza d'onda Compton dell'elettrone è $3.86 \cdot 10^{-11} \text{ cm}$, ma sempre molto piccola rispetto a qualsiasi dimensione macroscopica. L'ipotesi asintotica si applica al futuro, ma anche al passato: ripercorrendo all'indietro la storia di qualsiasi stato troveremo che esso consisteva nel lontano passato da particelle ben separate tra loro.

La separazione delle particelle è garantita per stati fisici normalizzati $\langle A|A \rangle = 1$, che sono più o meno localizzati, ma non per autostati dell'impulso — onde piane — che si estendono su tutto lo spazio. Malgrado ciò useremo l'ipotesi asintotica anche per autostati dell'impulso intendendo che i risultati ottenuti sono validi se applicati a pacchetti d'onda. Con queste premesse, se consideriamo uno stato composto da particelle separate tra loro, dopo un certo tempo T abbastanza lungo (in termini rigorosi, nel limite $T \rightarrow \infty$) lo stato sarà ancora composto da particelle separate tra loro, che possono essere le stesse particelle nei loro stati iniziali o, se è intercorsa

⁴Le interazioni elettromagnetiche danno luogo ad interazioni a grande distanza, ad esempio la forza di Coulomb, un caso che va trattato con cura, ad esempio con un appropriato procedimento di limite. Le stesse considerazioni si applicano alle interazioni gravitazionali.

una interazione, le stesse particelle in stati diversi (processi di diffusione) o anche particelle diverse da quelle iniziali (creazione o annichilazione di particelle). Questa immagine corrisponde bene alla disposizione di un esperimento in cui fasci di particelle vengono scagliati l'uno contro l'altro e si osservano le particelle presenti nello stato finale. Le distanze percorse dalle particelle in esperimenti di questo tipo si misurano in metri, che corrispondono a tempi di circa 10^{-8} s, molti ordini di grandezza maggiori del tipico tempo di separazione, a tutti gli effetti infiniti.

Dato uno stato iniziale $|i\rangle$ e uno stato finale $|f\rangle$ composti da particelle separate, definiamo S_{if} come l'ampiezza di probabilità della transizione $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$,

$$(3.20) \quad S_{if} = \langle f|S|i\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle f|e^{-iHT}|i\rangle$$

Per la derivazione che segue consideriamo il caso più semplice, una teoria con un singolo campo scalare reale $\phi(\vec{x}, t)$. Assumeremo che questa teoria descriva un solo tipo di particelle⁵, con spin 0 e massa m . È facile convincerci che una relazione tra funzioni di Green e elementi della matrice S esiste veramente: consideriamo una funzione di Green a n punti

$$(3.21) \quad \langle 0|T(\phi(\vec{x}_1, t_1) \dots \phi(\vec{x}_n, t_n))|0\rangle$$

e supponiamo che i tempi siano in ordine decrescente $t_1 > t_2 \dots > t_n$. Supponiamo anche tra i primi r tempi $t_1 \dots t_r$ e i restanti $t_{r+1} \dots t_n$ intercorra un tempo $T = t_r - t_{r+1}$ molto lungo rispetto al tempo di separazione. Possiamo allora scrivere, esplicitando la dipendenza dal tempo, e introducendo somme su stati intermedi,

$$(3.22) \quad \begin{aligned} & \langle 0|\phi(\vec{x}_1, t_1) \dots \phi(\vec{x}_r, t_r) \phi(\vec{x}_{r+1}, t_{r+1}) \dots \phi(\vec{x}_n, t_n)|0\rangle \\ &= \langle 0|e^{iHt_1} \phi(\vec{x}_1, 0) e^{-iHt_1} \dots e^{iHt_r} \phi(\vec{x}_r, 0) \underbrace{e^{-iHt_r} e^{iHt_{r+1}}}_{t_r - t_{r+1} = T} \phi(\vec{x}_{r+1}, 0) \dots |0\rangle \\ &= \sum_{i,f} \langle 0|e^{iHt_1} \phi(\vec{x}_1, 0) e^{-iHt_1} \dots e^{iHt_r} |f\rangle \langle f|e^{-iHT}|i\rangle \langle i|\phi(\vec{x}_{r+1}, 0) \dots |0\rangle \\ &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} \sum_{i,f} \langle 0|e^{iHt_1} \phi(\vec{x}_1, 0) e^{-iHt_1} \dots e^{iHt_r} |f\rangle \langle f|S|i\rangle \langle i|\phi(\vec{x}_{r+1}, 0) \dots |0\rangle \end{aligned}$$

Quindi per opportune scelte dei tempi si può esprimere questa funzione di Green come combinazione di elementi della matrice S. L'ultima espressione descrive un susseguirsi di eventi: i campi del gruppo $(r+1) \dots n$ creano dal vuoto uno stato $|i\rangle$; nel lungo intervallo di tempo T le componenti di $|i\rangle$ possono interagire, e $|i\rangle$ si trasforma in $|f\rangle$, dopo di che il gruppo di operatori del gruppo $1 \dots r$ distruggono le componenti di $|f\rangle$ e si torna allo stato vuoto. Questa espressione è suggestiva, ma non direttamente utilizzabile: quello che serve è un modo per estrarre un particolare elemento di matrice S relativo ad un preciso stato iniziale, con particelle di impulso determinato sia nello stato iniziale che nello stato finale, che dia direttamente

$$\langle \vec{p}_{r+1}, \dots, \vec{p}_n | S | \vec{p}_1 \dots \vec{p}_r \rangle$$

Per selezionare particelle con impulso definito possiamo ricorrere a una trasformata di Fourier dei campi. Infatti dalla (C.2) otteniamo:

$$(3.23) \quad \langle 0| \int d^3x \phi(\vec{x}, t) e^{-i\vec{q}\vec{x}} | \vec{p} \rangle = \frac{(2\pi)^{3/2} \sqrt{Z}}{\sqrt{2\omega_q}} \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) e^{-i\omega_q t}$$

⁵Stiamo facendo una ipotesi sullo spettro degli stati della teoria, essenzialmente la stessa ipotesi della sezione precedente.

e prendendo il complesso coniugato

$$(3.24) \quad \langle \vec{p} | \int d^3x \phi(\vec{x}, t) e^{i\vec{q}\vec{x}} | 0 \rangle = \frac{(2\pi)^{3/2} \sqrt{Z}}{\sqrt{2\omega_q}} \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) e^{i\omega_q t}$$

quindi eseguendo una trasformata di Fourier su ciascuno dei campi che compaiono nella (3.21) possiamo selezionare gli impulsi degli stati intermedi. Rimane un problema: l'operatore di un campo in interazione può creare dal vuoto non solamente stati ad una particella, ma come abbiamo visto nella sezione precedente, anche stati con due o più particelle. Riferendoci alla eq. (3.21), il primo campo che agisce sul vuoto a destra può creare una particella (eq. C.2) o più particelle. Per distinguere i due casi dobbiamo eseguire una trasformata di Fourier nella variabile temporale della (3.24),

$$(3.25) \quad \langle \vec{p} | \int_{-\infty}^t dt' \int d^3x \phi(\vec{x}, t') e^{i\vec{q}\vec{x} - iEt'} | 0 \rangle = \frac{i}{E - \omega_q} \frac{(2\pi)^{3/2} \sqrt{Z}}{\sqrt{2\omega_q}} \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) e^{-i(E - \omega_q)t}$$

notiamo una singolarità quando $E = \omega_q$. Questa singolarità è caratteristica dello stato ad una particella. Per stati di due o più particelle con massa invariante $M > 2m$ il calcolo analogo alla (3.25) porterebbe a una singolarità per $E = \sqrt{\vec{q}^2 + M^2}$, ma il risultato sarebbe del tutto regolare per $E = \omega_q = \sqrt{\vec{q}^2 + m^2}$. Quindi possiamo selezionare il contributo dello stato a una particella isolando il coefficiente della singolarità in $E = \omega_q$. Isolare la singolarità significa moltiplicare per $E - \omega_q$ e passare al limite $E \rightarrow \omega_q$. Per ottenere una ricetta più elegante conviene moltiplicare per $(E - \omega_q)(E + \omega_q) = E^2 - \omega_q^2 = q^2 - m^2$, dove $q^2 = (E^2 - \vec{q}^2)$ e passare al limite:

$$(3.26) \quad \lim_{E \rightarrow \omega_q} \left[(q^2 - m^2) \int_{-\infty}^t dt' \int d^3x e^{-i(Et' - \vec{q}\vec{x})} \langle \vec{p} | \phi(\vec{x}, t') | 0 \rangle \right] = \begin{cases} i\sqrt{2\omega_q} (2\pi)^{3/2} \sqrt{Z} \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) & (1 \text{ particella}) \\ = 0 & (2+ \text{ particelle}) \end{cases}$$

Notiamo un aspetto importante per l'uso che faremo di questa ricetta: *il risultato non dipende dal limite superiore di integrazione, t .*

Consideriamo adesso il secondo campo che agisce secondo l'ordinamento temporale, e l'effetto di farne la trasformata di Fourier sia nello spazio — per isolare un valore dell'impulso — che nel tempo. Anche in questo caso isolare la singolarità in $E = \omega_q$ esclude il contributo in cui questo secondo campo crea più di una particella, ma allo stesso tempo esclude il contributo in cui esso distrugge la particella creata precedentemente dal primo operatore di campo, infatti facendo la trasformata di Fourier della (3.23) otteniamo

$$\langle 0 | \int_{-\infty}^t dt' e^{-iEt'} \int d^3x \phi(\vec{x}, t') e^{-i\vec{q}\vec{x}} | \vec{p} \rangle = \frac{i}{E + \omega_q} \frac{(2\pi)^{3/2} \sqrt{Z}}{\sqrt{2\omega_q}} \delta^3(\vec{q} + \vec{p}) e^{-i(E + \omega_q)t}$$

che *non* è singolare per $E = \omega_q$.

La ricetta per particelle uscenti — quelle distrutte dal campo ϕ — si ottiene in maniera analoga dalla (3.23):

$$(3.27) \quad \lim_{E \rightarrow \omega_q} \left[(q^2 - m^2) \int_t^{\infty} dt' \int d^3x e^{i(Et' - \vec{q}\vec{x})} \langle 0 | \phi(\vec{x}, t') | \vec{p} \rangle \right] = \begin{cases} i\sqrt{2\omega_q} (2\pi)^{3/2} \sqrt{Z} \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) & (1 \text{ particella}) \\ = 0 & (2+ \text{ particelle}) \end{cases}$$

anche in questo caso il risultato non dipende dall'estremo di integrazione t .

Applicare le nostre ricette a ciascuno dei campi che appaiono nella funzione di Green (3.21), e precisamente la (3.26) ai campi destinati a creare particelle iniziali, e la (3.27) a quelli destinati a distruggere le particelle finali ha due importanti vantaggi:

1. Le singolarità in $E = \omega_q$ hanno origine dalla integrazione estesa sino ad infinito, e il loro coefficiente è solamente sensibile a quanto accade per tempi infiniti $t \rightarrow \pm\infty$. Quindi questa procedura garantisce che stiamo prendendo il limite richiesto dalla eq. (3.22).
2. Nell'applicare le nostre ricette direttamente alla funzione di Green (3.21) possiamo estendere i limiti di integrazione temporale da $\pm\infty$.

Il secondo punto merita una piccola discussione: consideriamo la dipendenza da t della espressione

$$\langle 0|T(\cdots\phi(\vec{x}, t)\cdots)|0\rangle$$

dove i puntini indicano altri operatori di campo (ϕ potrebbe essere uno qualsiasi dei campi nella (3.21)). Se $t \rightarrow +\infty$, ϕ sarà spinto in prima posizione dall'ordinamento temporale, e quindi può solo agire da operatore di distruzione, e la sua dipendenza da t sarà del tipo $e^{-i\omega t}$. Viceversa per $t \rightarrow -\infty$ ϕ finirà in ultima posizione, e la dipendenza da t sarà del tipo $e^{i\omega t}$. Quindi

$$(3.28) \quad \langle 0|T(\cdots\phi(\vec{x}, t)\cdots)|0\rangle \propto \begin{cases} e^{-i\omega t} & (t \rightarrow +\infty) \\ e^{+i\omega t} & (t \rightarrow -\infty) \end{cases}$$

Si usa esprimere questo fatto dicendo che per $t \rightarrow +\infty$ la dipendenza da t contiene energie positive, per $t \rightarrow -\infty$ solamente energie negative. Ne segue che estendere l'integrazione della ricetta (3.26) fino a $t = +\infty$ non cambia il coefficiente della singolarità che emerge solo da quella parte dell'asse t in cui il comportamento è $\propto e^{+i\omega t}$ e lo stesso vale per la ricetta (3.27) se si estende l'integrazione a $t = -\infty$.

Siamo quindi pronti al passo finale: consideriamo l'espressione

$$\lim_{E_i \rightarrow \omega_i} \prod_{k=1}^{k=n} (q_k^2 - m^2) \int \prod_{k=1}^{k=n} d^4 x_k \prod_{k=1}^{k=r} e^{iq_k x_k} \prod_{k=r+1}^{k=n} e^{-iq_k x_k} \langle 0|T(\phi(x_1)\cdots\phi(x_n))|0\rangle$$

dove abbiamo adottato la notazione quadridimensionale. Stiamo chiaramente applicando simultaneamente le due ricette: la (3.26) ai campi $\phi(x_{r+1})\cdots\phi(x_n)$, e la (3.27) ai campi $\phi(x_1)\cdots\phi(x_r)$. Per quanto abbiamo detto il risultato del limite è determinato dal comportamento della funzione di Green quando $t_1\cdots t_r \rightarrow +\infty$, $t_{r+1}\cdots t_n \rightarrow -\infty$: i primi r operatori sono allora in nelle prime posizioni a sinistra, gli altri a destra. Siamo quindi nella situazione della eq. (3.22). Gli stati $|i\rangle$ e $|f\rangle$ che contribuiscono nel limite sono necessariamente stati con $n-r$ e r particelle, e possiamo porre

$$\sum |i\rangle\langle i| = \int \prod_{k=r+1}^{k=n} d^3 p_k |\vec{p}_{r+1}\cdots\vec{p}_n\rangle\langle\vec{p}_{r+1}\cdots\vec{p}_n|$$

e analogamente per la somma sugli stati $|f\rangle$,

$$\sum |f\rangle\langle f| = \int \prod_{k=1}^{k=r} d^3 p_k |\vec{p}_1\cdots\vec{p}_r\rangle\langle\vec{p}_1\cdots\vec{p}_r|$$

Raccogliendo tutti i pezzi otteniamo

$$(3.29) \quad \begin{aligned} & \lim_{E_i \rightarrow \omega_i} \prod_{k=1}^{k=n} (q_k^2 - m^2) \int \prod_{k=1}^{k=n} d^4 x_k \prod_{k=1}^{k=r} e^{i q_k x_k} \prod_{k=r+1}^{k=n} e^{-i q_k x_k} \langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) | 0 \rangle \\ & = \prod_{k=1}^{k=n} \left(i \sqrt{2\omega_q(2\pi)^{3/2} \sqrt{Z}} \right) \langle \vec{q}_1 \dots \vec{q}_r | S | \vec{q}_{r+1} \dots \vec{q}_n \rangle \end{aligned}$$

Questa notevole relazione prende il nome di formula di riduzione, ed è dovuta a Lehman, Symanzig e Zimmermann, [6].

Prima di concludere, un'ultimo chiarimento. Abbiamo visto che il termine singolare isolato nella (3.29) proviene da quella parte dell'integrazione in cui il gruppo degli operatori associati allo stato iniziale si trova a destra del gruppo associato allo stato finale, ma cosa succede dell'ordinamento relativo degli operatori in ciascuno dei due gruppi? La risposta è che nello stato iniziale le particelle devono essere considerate come ben separate, e dato che ciascuna è creata da uno degli operatori ϕ , questi agiscono indipendentemente l'uno dall'altro, quindi il risultato della loro azione è indipendente dall'ordine in cui questo accade. Lo stesso vale per lo stato finale e gli operatori del secondo gruppo.

3.5 Un esempio: l'urto tra due particelle

A conclusione della discussione sulla matrice S , diamo un esempio, ancora tratto dalla teoria $\lambda\phi^2$: l'urto tra due particelle iniziali che porta a due particelle finali. Ci limiteremo a considerare il primo ordine perturbativo. Se indichiamo con q_1, q_2 gli impulsi delle particelle iniziali, q_3, q_4 quelli delle particelle finali, la (3.29) diviene

$$(3.30) \quad \begin{aligned} \langle \vec{q}_3 \vec{q}_4 | S | \vec{q}_1 \vec{q}_2 \rangle &= (-i)^4 \prod_{k=1}^{k=4} \frac{i}{\sqrt{2\omega_q(2\pi)^{3/2} \sqrt{Z}}} \lim_{E_i \rightarrow \omega_i} \prod_{k=1}^{k=4} (q_k^2 - m^2) \\ & \int \prod_{k=1}^{k=4} d^4 x_k e^{-i q_1 x_1} e^{-i q_2 x_2} e^{i q_3 x_3} e^{i q_4 x_4} \langle 0 | T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)) | 0 \rangle \end{aligned}$$

dove $q_k = \{\vec{q}_k, E_k\}$ e $\omega_k = \sqrt{\vec{q}_k^2 + m^2}$. La funzione a quattro punti si ottiene dal funzionale generatore (eq. 2.36)

$$(3.31) \quad \langle 0 | T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)) | 0 \rangle = (i)^4 \frac{1}{Z[0]} \left[\frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_4)} \right]_{J=0}$$

Il diagramma (c) della fig. 3.2 è l'unico di ordine λ . La sua espressione esplicita è nella eq. (3.9) da cui otteniamo

$$(3.32) \quad \begin{aligned} & \langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_4)) | 0 \rangle = \\ & -i\lambda \int d^4 v \Delta_F(x_1 - v) \Delta_F(x_2 - v) \Delta_F(x_3 - v) \Delta_F(x_4 - v) + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned}$$

Notiamo che il fattore $1/4!$ è stato eliminato dalle quattro derivate. Nella (3.30) appare la trasformata di Fourier in ciascuna delle coordinate x_k . Paragonando con la

(3.32) vediamo che questa trasformata si applica a ciascuna delle Δ_F associate alle gambe esterne, per la quale (vedi eq. (2.69), (2.69)) si ottiene

$$(3.33) \quad \int d^4 x_k e^{-i q_1 x_1} \Delta_F(x_1 - v) = \frac{e^{i q_1 v}}{E_1^2 - \vec{q}_1^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{e^{i q_1 v}}{E_1^2 - \omega_1^2 + i\epsilon}, \quad \text{ecc.}$$

I fattori $(E_k^2 - \omega_k^2)$ nella (3.30) si semplificano con quelli che provengono dalla trasformata dei propagatori, e si ottiene:

$$(3.34) \quad \langle \vec{q}_3 \vec{q}_4 | S | \vec{q}_1 \vec{q}_2 \rangle = -i\lambda \prod_{k=1}^{k=4} \frac{1}{\sqrt{2\omega_q} (2\pi)^{3/2} \sqrt{Z}} \int d^4 v e^{i(q_1 + q_2 - q_3 - q_4)v} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Rimane ancora da determinare il valore della costante di rinormalizzazione Z . Ricordiamo che nella teoria libera avremmo semplicemente $Z = 1$. Dato che stiamo facendo un calcolo perturbativo all'ordine più basso, possiamo senz'altro porre $Z = 1$. Non ha senso tenere gli ordini successivi nello sviluppo di Z in potenze di λ senza allo stesso tempo includere i contributi di ordine superiore nella funzione a quattro punti.

L'integrazione nella posizione del vertice, v , si traduce in una funzione δ che garantisce la conservazione dell'impulso e dell'energia, e il risultato finale è

$$(3.35) \quad \langle \vec{q}_3 \vec{q}_4 | S | \vec{q}_1 \vec{q}_2 \rangle = (-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - q_3 - q_4) \prod_{k=1}^{k=4} \frac{1}{\sqrt{2\omega_q} (2\pi)^{3/2}} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Le prossime correzioni, di ordine λ^2 , derivano dai diagrammi della figura 3.4. Come vedremo nella prossima sezione è possibile formulare regole per i diagrammi Feynman che si applicano direttamente agli elementi di matrice S , senza passare ogni volta per il tramite del funzionale generatore. Già si intravede qualche regola generale: la scomparsa dei propagatori sulle gambe esterne, e la comparsa di una funzione δ per la conservazione dell'energia e dell'impulso in ciascun processo. Per i curiosi, al processo di scattering che abbiamo considerato in questa sezione corrisponde il semplice diagramma di Feynman della figura 3.6.

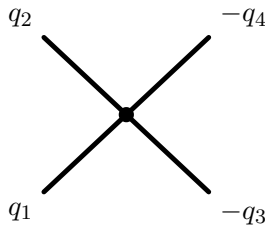


Figura 3.6: Urto tra due particelle al primo ordine perturbativo

3.6 Diagrammi di Feynman nello spazio degli impulsi

Nella sezione 3.4 abbiamo visto che gli elementi di matrice S sono direttamente connessi alla trasformata di Fourier delle funzioni di Green. Questo suggerisce di

lavorare direttamente nello spazio degli impulsi, ovvero dei quadrivettori impulso-energia. Dal punto di vista funzionale una trasformata di Fourier è semplicemente un cambiamento di variabili. Definiamo la trasformata della funzione J ,

$$(3.36) \quad J(p) = \int d^4x J(x) e^{ipx}; \quad J(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p J(p) e^{-ipx}$$

per trasformare le derivate funzionali possiamo applicare la regola della derivata di un funzione di funzione:

$$(3.37) \quad \frac{\delta F}{\delta J(x)} = \int d^4p \frac{\delta J(p)}{\delta J(x)} \frac{\delta F}{\delta J(p)} = \int d^4p e^{ipx} \frac{\delta F}{\delta J(p)}$$

e analogamente si ottiene

$$(3.38) \quad \frac{\delta F}{\delta J(p)} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{-ipx} \frac{\delta F}{\delta J(x)}$$

Consideriamo ora la trasformata di Fourier che appare nella formula di riduzione per la matrice S , eq. (3.29). Per semplificare la notazione consideriamo tutte le particelle come appartenessero allo stato iniziale; per una particella nello stato finale basta cambiare segno all'impulso e all'energia. Con questa convenzione la trasformata da calcolare è

$$\int \prod_{k=1}^{k=n} d^4x_k \prod_{k=1}^{k=n} e^{-ip_k x_k} \langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) | 0 \rangle$$

e per ottenere quella della (3.29) basterà porre $p = q$ per le particelle nello stato iniziale, e $p = -q$ per quelle nello stato finale. In termini del funzionale generatore questo diviene

$$\int \prod_{k=1}^{k=n} \left(d^4x_k e^{-ip_k x_k} i \frac{\delta}{\delta J(x_k)} \right) Z[J] \Big|_{(J=0)} = \prod_{k=1}^{k=n} \left((2\pi)^4 i \frac{\delta}{\delta J(p_k)} \right) Z[J] \Big|_{(J=0)}$$

Nello scrivere questa relazione abbiamo ommesso di dividere per $Z[0]$, assumendo che $Z[J]$ rappresenti il funzionale generatore depurato del contributo dei diagrammi vuoto-vuoto, e cioè (vedi sezione 3.3) $Z[0]=1$. La formula di riduzione per la matrice S , eq. (3.29) si può riscrivere come (nel secondo passaggio semplifichiamo i fattori i)

$$(3.39) \quad \begin{aligned} & \langle \vec{q}_1 \dots \vec{q}_r | S | \vec{q}_{r+1} \dots \vec{q}_n \rangle \\ &= \lim_{E_i \rightarrow \omega_i} \prod_{k=1}^{k=n} \frac{(2\pi)^4 (q_k^2 - m^2)}{i \sqrt{2\omega_q} (2\pi)^{3/2} \sqrt{Z}} \left[\prod_{k=1}^{k=r} i \frac{\delta}{\delta J(-q_k)} \prod_{k=r+1}^{k=n} i \frac{\delta}{\delta J(q_k)} Z[J] \right] \Big|_{(J=0)} \\ &= \lim_{E_i \rightarrow \omega_i} \prod_{k=1}^{k=n} \frac{(2\pi)^4 (q_k^2 - m^2)}{\sqrt{2\omega_q} (2\pi)^{3/2} \sqrt{Z}} \left[\prod_{k=1}^{k=r} \frac{\delta}{\delta J(-q_k)} \prod_{k=r+1}^{k=n} \frac{\delta}{\delta J(q_k)} Z[J] \right] \Big|_{(J=0)} \end{aligned}$$

E' a questo punto conveniente riesprimere lo sviluppo perturbativo in termini della $J[p]$ anziché della $J[x]$, e questo si può far diagramma per diagramma. Per far questo consideriamo le regole nella (3.8). A una linea, interna o esterna, corrisponde un fattore (vedi anche eq. 2.69, 2.70)

$$(3.40) \quad i\Delta_F(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ipx} e^{ipy}}{E^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Le estremità x, y di ogni linea possono finire su un “pallino” J o su un vertice. Possiamo associare i fattori $\exp(-ipx), \exp(i py)$ alle rispettive terminazioni. Per una terminazione di tipo J abbiamo allora (vedi eq. 3.8)

$$(3.41) \quad -i \int d^4 x e^{-ipx} J(x) = -i J(p)$$

mentre ad ogni vertice vanno associati i fattori $\exp(\pm i p x)$ delle linee che vi confluiscono. La integrazione nella coordinata del vertice risulta allora in una funzione δ che garantisce la conservazione dell'energia e dell'impulso tra tutte le linee che confluiscono nel vertice,

$$(3.42) \quad \int d^4 x e^{ix \Sigma(\pm p_i)} = (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma(\pm p_i))$$

Possiamo quindi ridefinire le regole per i diagrammi di Feynman della teoria $\lambda\phi^4$ nello spazio degli impulsi nel modo seguente: Prima di tutto associare ad ogni linea, interna o esterna, un impulso. Per le linee esterne, l'impulso è associato al “pallino” che rappresenta una $J(p)$. Per le linee interne che connettono due vertici l'impulso sarà uscente da un vertice ed entrante nell'altro. Potremmo ad esempio convenire che l'impulso si muova lungo la linea nella direzione in cui è scritto (da destra a sinistra nella fig. 3.7 che riporta due dei diagrammi visti in precedenza con l'annotazione degli impulsi), oppure nei casi ambigui accompagnare al nome assegnato all'impulso una freccetta che ne indica la direzione.

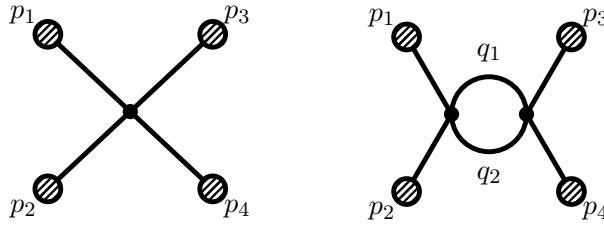


Figura 3.7: Due diagrammi in $\lambda\phi^4$ con le annotazioni degli impulsi.

Una volta annotate le linee il contributo del diagramma al funzionale generatore si ottiene nella teoria $\lambda\phi^4$ con le regole seguenti:

Vertice	$\frac{-i\lambda}{4!} (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_{\text{in}} - \sum p_{\text{out}})$
Linea interna	$\frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
Linea esterna	$\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p J(p)}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)}$

A questo punto possiamo direttamente passare alle regole di Feynman per gli elementi di matrice S . Se consideriamo la regola di riduzione nella eq. (3.39), le derivate funzionali $\delta/\delta J(p)$ eliminano i fattori $J(p)$ presenti nel contributo del diagramma al funzionale generatore, mentre i fattori

$$\frac{(2\pi)^4 (q_k^2 - m^2)}{\sqrt{2\omega_q} (2\pi)^{3/2} \sqrt{Z}}$$

eliminano da ogni linea esterna il denominatore $(2\pi)^4(q_k^2 - m^2 + i\epsilon)$ sostituendolo con $\sqrt{2\omega_q}(2\pi)^{3/2}\sqrt{Z}$, col che scompare la singolarità e il limite consiste semplicemente nell'associare ad ogni linea esterna l'impulso "fisico", con $E = \omega_p$. Le regole per i diagrammi che rappresentano elementi di matrice S sono quindi:

$$(3.43) \quad \begin{array}{ll} \text{Vertice} & \frac{-i\lambda}{4!}(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_{\text{in}} - \sum p_{\text{out}}) \\ \text{Linea interna} & \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ \text{Linea esterna} & \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}(2\pi)^{3/2}\sqrt{Z}} \end{array}$$

Rimane da definire il coefficiente combinatorio da assegnare a ciascun diagramma, ma non discuteremo questo problema nel caso della teoria $\lambda\phi^4$. I diagrammi per la matrice S si disegnano come quelli per il funzionale generatore, ma senza il "pallino" delle $J(p)$, come ad esempio nella figura 3.8. Il valore del secondo diagramma della

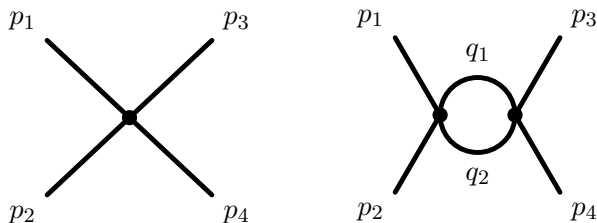


Figura 3.8: Due diagrammi per la matrice S in $\lambda\phi^4$.

fig. 3.8 risulta ad esempio

$$D_2 = C(-i\lambda)^2 \left[\prod \sqrt{2\omega_{q_i}}(2\pi)^{3/2}\sqrt{Z} \right]^{-1} \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{i}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \\ (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p_3 - p_4)$$

dove C rappresenta un fattore combinatorio (in cui abbiamo incorporato gli $1/4!$), e abbiamo trattato p_1, p_2 come particelle entranti (stato iniziale) e p_3, p_4 come particelle uscenti. Le due δ si possono combinare in una che garantisce la conservazione dell'impulso e dell'energia tra particelle entranti e particelle uscenti, presente in qualunque diagramma per la matrice S . La seconda δ elimina una delle integrazioni, fissando $q_2 = p_1 + p_2 - q_1$, e si ottiene

$$D_2 = C(-i\lambda)^2 \left[\prod \sqrt{2\omega_{q_i}}(2\pi)^{3/2}\sqrt{Z} \right]^{-1} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{i}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 + p_2 - q_1)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Notiamo che l'integrale residuo è divergente: per grandi valori di q_1 si comporta come $\int d^4 q/q^4$, una divergenza logaritmica. Delle divergenze in teoria delle perturbazioni, e di come curarle, parleremo nel caso dell'elettrodinamica.

Capitolo 4

Campi Fermionici

4.1 L'oscillatore armonico e l'oscillatore di Fermi

In questo capitolo passiamo dalla trattazione di campi scalari a quella di campi di Dirac che descrivono particelle di spin $1/2$. Il problema che si pone è come trattare campi che devono obbedire leggi di anticommutazione e al principio di Pauli. Nelle trattazioni elementari della teoria dei campi abbiamo visto che un campo libero, che descrive particelle bosoniche non interagenti, il campo è equivalente a un insieme di oscillatori armonici, uno per ciascun stato in cui si può trovare una particella. Concentrandoci su un singolo oscillatore possiamo definire gli operatori di creazione e distruzione, a^\dagger , a che obbediscono a regole di commutazione

$$(4.1) \quad [a, a^\dagger] = 1$$

Se indichiamo con $|n\rangle$ lo stato in cui l'oscillatore contiene n particelle, avremo

$$(4.2) \quad a|n\rangle = \sqrt{n-1}|n-1\rangle; \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle; \quad (\text{bosoni})$$

Anche un campo spinoriale può essere sviluppato in "oscillatori", ma oscillatori di tipo diverso, che potremmo chiamare "oscillatori di Fermi". Ciascuno di questi oscillatori può contenere al massimo una particella, e l'azione dei corrispondenti operatori di creazione e distruzione su stati a 0,1 particelle è

$$(4.3) \quad a^\dagger|0\rangle = |1\rangle; \quad a^\dagger|1\rangle = 0; \quad a|1\rangle = |0\rangle; \quad a|0\rangle = 0; \quad (\text{fermioni})$$

e questo dà luogo a regole di anticommutazione,

$$(4.4) \quad \{a, a^\dagger\} = 1$$

In ambedue i casi l'hamiltoniano diviene¹

$$(4.5) \quad H = \hbar\omega a^\dagger a$$

con ω l'energia della particella. Possiamo ricavare formalmente questo hamiltoniano da un lagrangiano

$$(4.6) \quad L = i\hbar a^\dagger \dot{a} - \hbar\omega a^\dagger a$$

¹Come diverrà chiaro fra poco conviene in questa fase esplicitare la dipendenza dalla costante di Planck.

dal quale si ottiene l'hamiltoniano corretto

$$(4.7) \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = i\hbar a^\dagger; \quad H = p\dot{a} - L = \hbar\omega a^\dagger a$$

Notiamo che, dato che L non dipende da \dot{a}^\dagger , $\partial L / \partial \dot{a}^\dagger = 0$. In realtà la relazione tra a ed a^\dagger è simmetrica, dato che con una integrazione per parti possiamo esprimere l'azione in due modi equivalenti in cui i ruoli di a , e a^\dagger sono scambiati,

$$S = \hbar \int dt (i a^\dagger \dot{a} - \omega a^\dagger a) = \hbar \int dt (-i \dot{a}^\dagger a - \omega a^\dagger a)$$

Se applichiamo le regole di commutazione canoniche otteniamo il risultato "bosonico",

$$(4.8) \quad [a, a^\dagger] = \frac{1}{i\hbar} [a, p] = \frac{1}{i\hbar} \cdot i\hbar = 1$$

Sappiamo già come derivare tutte le proprietà dell'oscillatore armonico bosonico mediante la somma sui cammini della variabile $q(t)$. Come vedremo fra poco, possiamo direttamente usare cammini nelle variabili $a(t)$ e $a^\dagger(t)$. Come modificare la somma sui cammini per ottenere risultati fermionici? L'idea giusta nasce considerando, invece di a, a^\dagger , le variabili $\tilde{a} = \sqrt{\hbar} a$, $\tilde{a}^\dagger = \sqrt{\hbar} a^\dagger$, che non dipendono dalla costante di Planck, e sono quindi variabili classiche:

$$(4.9) \quad \tilde{a} = \frac{m\omega}{2} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right), \quad \tilde{a}^\dagger = \frac{m\omega}{2} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right)$$

In termini di queste il lagrangiano diviene

$$(4.10) \quad L = i\tilde{a}^\dagger \dot{\tilde{a}} - \omega \tilde{a}^\dagger \tilde{a}$$

e le regole di commutazione

$$(4.11) \quad [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = \hbar$$

Nella somma sui cammini $\tilde{a}(t)$, $\tilde{a}^\dagger(t)$ sono trattate come funzioni a valore numerico, cioè come grandezze che commutano. Quindi è come se si prendesse un limite classico, $\hbar \rightarrow 0$, nel quale $\tilde{a}(t)$, $\tilde{a}^\dagger(t)$ divengono grandezze commutanti,

$$(4.12) \quad [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 0$$

Nel caso fermionico si parte da regole di anticommutazione che nel limite $\hbar \rightarrow 0$ divengono semplicemente

$$(4.13) \quad \{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\} = 0$$

quindi i cammini nel caso fermionico devono essere descritti da una funzione il cui valore non è un normale numero, ma una quantità che anticommuta, una variabile di Grassman.

Nel seguito torniamo ad usare unità di misura in cui $\hbar = 0$.

4.1.1 Variabili anticommutanti

Le regole di calcolo con grandezze anticommutanti sono molto semplici, e la pagina che segue contiene un intero manuale di calcolo differenziale e integrale con variabili di Grassmann. Supponiamo di avere n variabili di questo tipo, $a_1 \cdots a_n$, tali quindi che

$$(4.14) \quad \{a_h, a_k\} = 0$$

il che in particolare implica che $(a_i)^2 = 0$. Valgono allora le seguenti regole:

Coefficienti numerici, combinazioni lineari Una variabile anticommutante può essere moltiplicata per un numero ordinario c , con cui commuta, $ca = ac$. Si possono fare combinazioni lineari: $c^1 a_1 + c^2 a_2 + \cdots$.

Funzioni Dato che $a_k^2 = 0$, la più generale funzione è un polinomio di ordine n

$$(4.15) \quad F = C_0 + \sum_k C_1(k) a_k + \sum_{h>k} C_2(h, k) a_h a_k \cdots + C_n a_1 a_2 \cdots a_n$$

dove le C sono coefficienti numerici.

Differenziali e derivate Il differenziale da di una grandezza anticommutante a è esso stesso anticommutante: dato che $a_1 a_2 = -a_2 a_1$, deve essere $a_1 da_2 = -da_2 a_1$. La derivata rispetto a una variabile anticommutante d/da_k è definita dalle seguenti regole:

- $\frac{d}{da_k} 1 = 0$; $\frac{d}{da_k} a_h = \delta_{hk}$
- L'operazione d/da_k anticommuta con altre variabili grassmaniane. Questo si può capire considerando un prodotto di grandezze anticommutanti $cd \cdots a \cdots$: d/da "sfila" a dal prodotto e per far questo deve portare a in prima posizione. Quindi $d/da (b \cdot a) = d/da (-a \cdot b) = -b$ ovvero $d/da b \cdot a = -b \cdot d/da a$, e così via.
- Le derivate anticommutano tra loro, ad esempio $d/da d/db(ba) = 1$ mentre $d/db d/da(ba) = -d/db(-b) = -1$

Integrali Gli integrali di variabili anticommutanti è definito con le seguenti regole:

$$(4.16) \quad \int da = 0; \quad \int da a = 1$$

ne segue che per variabili anticommutanti l'integrale e la derivata sono alla stessa operazione.

$$(4.17) \quad \int da F = \frac{d}{da} F$$

Questa definizione è motivata nel modo seguente: gli integrali $\int da$ e $\int da a$ devono essere definiti come costanti che non dipendono da nessuna grandezza anticommutante, quindi come numeri ordinari. Allo stesso tempo, dato che da è anticommutante $\int da$ dovrebbe essere anticommutante, quindi l'unica possibilità è che sia $= 0$, l'unico numero ordinario che sia anche anticommutante, $0x = -x0$. Il secondo integrale, $\int da a$, può essere un numero qualsiasi: porre $\int da a = 1$ equivale a definire la normalizzazione delle a . Se ad esempio avessimo $\int da a = X$, potremmo definire una nuova variabile, $a = a' X^{1/2}$ tale che $\int da' a' = 1$.

Notiamo che se P_i indica prodotti di un numero pari di grandezze anticommutanti e A_k prodotti di un numero dispari, si ha

$$(4.18) \quad P_i P_k = P_k P_i; \quad P_i A_k = A_k P_i; \quad A_i A_k = -A_k A_i$$

ad esempio, se a, b, c, d sono anticommutanti, $(ab)(cd) = (cd)(ab)$, $(ab)c = c(ab)$, mentre $(abc)d = -d(abc)$. Quindi il prodotto di un numero pari di grandezze anticommutanti si comporta come una grandezza commutante.

4.1.2 Somma sui cammini per i due oscillatori

In questa sezione sviluppiamo le regole di calcolo della somma sui cammini di grandezze anticommutanti applicandole a un caso concreto: l'oscillatore di Fermi definito nella sezione 4.1. Come vedremo la somma sui cammini porta a risultati che sono in pieno accordo con quelli ottenuti in modo tradizionale.

Nella sezione 2.9 abbiamo calcolato il funzionale generatore dell'oscillatore armonico nel linguaggio delle $q(t)$. Vogliamo adesso rifarlo nel linguaggio delle $a(t)$, $a^\dagger(t)$, stando attenti a fare operazioni che siano egualmente valide sia nel caso che queste variabili commutino (caso bosonico) che anticommutino (caso fermionico) e notando via via le differenze tra i due casi. Definiamo quindi $Z(J, J^\dagger)$ come

$$(4.19) \quad Z(J, J^\dagger) = \int \mathcal{D}a(t) \mathcal{D}a^\dagger(t) \exp \left[i \int dt (a^\dagger(t) D a(t) - J^\dagger(t) a(t) - a^\dagger(t) J(t)) \right]$$

dove (vedi eq. 4.10) l'operatore differenziale² D è dato da

$$(4.20) \quad D = i \frac{d}{dt} - \omega$$

Dato che l'azione deve in ogni caso essere una grandezza commutante, nel caso fermionico sia J che J^\dagger devono essere anticommutanti. Come abbiamo fatto nella sezione 2.9 introduciamo una funzione $S(t)$ tale che

$$(4.21) \quad DS(t) = \delta(t); \quad \rightarrow \quad \dot{S}(t) = -i\omega S(t) - i\delta(t)$$

Possiamo riscrivere il termine in $(a^\dagger J)$ della (4.19) come

$$\int dt a^\dagger(t) J(t) = \int dt a^\dagger(t) D \left(\int dt' S(t-t') J(t') \right)$$

mentre il termine in $(J^\dagger a)$ può essere scritto come

$$\int dt J^\dagger(t) a(t) = \int dt \left(\int dt' J^\dagger(t') S(t'-t) \right) D a(t)$$

come si verifica con una integrazione per parti,

$$\begin{aligned} & \int dt \left(\int dt' J^\dagger(t') S(t'-t) \right) \left(i \frac{d}{dt} - \omega \right) a(t) \\ &= \int dt \left(-i \frac{d}{dt} - \omega \right) \int dt' J^\dagger(t') S(t'-t) a(t) \end{aligned}$$

²Questo non è altro che l'operatore di Dirac ($i\gamma^\mu \partial_\mu - m$), ma in uno spazio ad una sola dimensione.

e notando che

$$\left(-i \frac{d}{dt} - \omega\right) S(t' - t) = \left(i \frac{d}{d(t' - t)} - \omega\right) S(t' - t) = \delta(t' - t).$$

Possiamo allora riscrivere il funzionale generatore come

$$\begin{aligned} Z(J, J^\dagger) = & \exp \left[-i \int dt' dt J^\dagger(t') S(t' - t) J(t) \right] \int \mathcal{D}a(t) \mathcal{D}a^\dagger(t) \\ & \exp \left[i \int dt \left(a^\dagger(t) - \int dt' J^\dagger(t') S(t' - t) \right) D \left(a(t) - \int dt' S(t - t') J(t') \right) \right] \end{aligned}$$

L'integrale funzionale residuo viene eseguito con un cambiamento di variabile

$$a(t) \rightarrow a'(t) = a(t) - \int dt' S(t - t') J(t')$$

e analogamente per a^\dagger , e si riduce a una costante moltiplicativa che coincide con il valore di $Z[0]$ e può essere omessa. Questi cambiamenti di variabile sono però legittimi solo se (vedi la sezione 2.9)

$$(4.22) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} S(t(1 - i\chi)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} S(t(1 - i\chi)) = 0$$

La soluzione generale della (4.21) è $S(t) = A e^{-i\omega t} - i\theta(t) e^{-i\omega t}$, ma la (4.22) impone $A = 0$, quindi

$$(4.23) \quad S(t) = -i\theta(t) e^{-i\omega t}$$

e il funzionale generatore diviene

$$(4.24) \quad Z(J, J^\dagger) = \exp \left[-i \int dt' dt J^\dagger(t') S(t' - t) J(t) \right]$$

Dato che siamo stati attenti a non cambiare l'ordinamento delle grandezze che nel caso fermionico anticommutano tra loro, quanto fatto sinora vale sia per il caso bosonico che per quello fermionico. Delle differenze appaiono nel calcolo delle funzioni di Green, dove bisogna tenere conto del carattere anticommutante degli operatori. Ad esempio, se a è una grandezza anticommutante, la (2.13) va ridefinita come

$$(4.25) \quad T(a(t_1) a(t_2)) = \begin{cases} a(t_1) a(t_2) & \text{se } t_1 \geq t_2 \\ -a(t_2) a(t_1) & \text{se } t_2 \geq t_1 \end{cases} \quad \text{Fermioni}$$

e quindi anche

$$(4.26) \quad T(a(t_1) a(t_2)) = -T(a(t_2) a(t_1))$$

e queste proprietà si estendono al prodotto ordinato nel tempo di più operatori e quindi anche alle funzioni di Green.

Le regole per l'uso del funzionale generatore sono anche leggermente diverse nei due casi. Infatti, mentre la regola di corrispondenza

$$(4.27) \quad a(t) \rightarrow i \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t)} \quad \text{Bosoni o Fermioni}$$

è la stessa nei due casi, si ha

$$(4.28) \quad a^\dagger(t) \rightarrow \begin{cases} i \frac{\delta}{\delta J(t)} & \text{Bosoni} \\ -i \frac{\delta}{\delta J(t)} & \text{Fermioni} \end{cases}$$

come si vede dalla (4.19) notando che nel caso fermionico $\frac{\delta}{\delta J(t)}$ anticommuta con $a^\dagger(t)$. Calcoliamo alcune funzioni di Green: Per la funzione a due punti otteniamo, sia nel caso fermionico che nel caso bosonico (lasciamo la derivazione ai lettori),

$$(4.29) \quad \begin{aligned} \langle 0|T(a(t)a^\dagger(\tau))|0\rangle &= \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t)} \frac{\delta}{\delta J(\tau)} Z[J, J^\dagger] \Big|_{J=J^\dagger=0} \\ &= iS(t-\tau) = \theta(t-\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} \end{aligned}$$

Consideriamo anzitutto il caso $t > \tau$, per cui otteniamo, assegnando una energia $E_0 = 0$ allo stato $|0\rangle$,

$$\langle 0|a(t)a^\dagger(\tau)|0\rangle \equiv \langle 0|a e^{-iH(t-\tau)} a^\dagger|0\rangle = e^{-i\omega(t-\tau)}$$

Questo risultato ci dice che³ esiste uno stato $|1\rangle$ con energia $E_1 = \omega$, e che $|\langle 1|a^\dagger|0\rangle|^2 = 1$. Quindi possiamo definire la fase dello stato $|1\rangle$ in modo che $a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$. Al contrario, se $\tau > t$ otteniamo

$$\langle 0|a^\dagger(\tau)a(t)|0\rangle = 0$$

e introducendo un insieme completo di stati $|A\rangle$ con energia E_A ,

$$\sum_A |\langle A|a|0\rangle|^2 e^{iE_A(\tau-t)} = 0$$

da cui si ottiene (considerando il caso $\tau = t$) $a|0\rangle = 0$.

Per la funzione a quattro punti c'è una differenza tra il caso bosonico e quello fermionico. Nei passaggi che seguono, dove appare il simbolo \pm si intende che il segno $+$ si applica al caso bosonico, il $-$ al caso fermionico, e dove non appare il risultato è lo stesso nei due casi.

$$\begin{aligned} &\langle 0|T(a(t_1)a(t_2)a^\dagger(\tau_1)a^\dagger(\tau_2))|0\rangle \\ &= \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_1)} \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_2)} \frac{\delta}{\delta J(\tau_1)} \frac{\delta}{\delta J(\tau_2)} \frac{1}{2} \left[-i \int dt' dt J^\dagger(t') S(t'-t) J(t) \right]^2 \\ &= -\frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_1)} \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_2)} \left[\int dt' J^\dagger(t') S(t'-\tau_1) \right] \left[\int dt'' J^\dagger(t'') S(t''-\tau_2) \right] \\ &= -[S(t_2-\tau_1)S(t_1-\tau_2) \pm S(t_1-\tau_1)S(t_2-\tau_2)] \\ &= e^{i\omega(t_1+t_2-\tau_1-\tau_2)} [\theta(t_2-\tau_1)\theta(t_1-\tau_2) \pm \theta(t_1-\tau_1)\theta(t_2-\tau_2)] \end{aligned}$$

Il segno $-$ che appare nel caso fermionico riflette il principio di Pauli. Ad esempio, nel caso $t_1 > t_2 > \tau_1 > \tau_2$ si ottiene

$$(4.30) \quad \langle 0|(a(t_1)a(t_2)a^\dagger(\tau_1)a^\dagger(\tau_2))|0\rangle = \begin{cases} 2 e^{-i\omega(t_1+t_2-\tau_1-\tau_2)} & \text{Bosone} \\ 0 & \text{Fermione} \end{cases}$$

Se in questa espressione passiamo al limite $t_1 \rightarrow t_2$ e $\tau_1 \rightarrow \tau_2$, nel caso bosonico otteniamo

$$(4.31) \quad \langle 0|[a(t_2)]^2 [a^\dagger(\tau_2)]^2|0\rangle = 2e^{-i2\omega(t_2-\tau_2)}$$

³Vedi la discussione alla fine della sezione 2.9.

e da questo impariamo che esiste uno stato $|2\rangle$ con energia $E_2 = 2\omega$, e che $[a^\dagger]^2 |0\rangle = \sqrt{2}|2\rangle$. Dato che $a^\dagger |0\rangle = |1\rangle$, deve essere $a^\dagger |1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle$. Analogamente deduciamo che $a^2 |2\rangle = \sqrt{2}|0\rangle$. Nel caso fermionico impariamo invece che, come segue dal principio di Pauli, $[a^\dagger]^2 |0\rangle = 0$ — non esiste un secondo stato eccitato dell'oscillatore di Fermi.

4.2 Quantizzazione del campo di Dirac

In questa sezione calcoliamo esplicitamente il funzionale generatore per un campo di Dirac libero e la funzione a due punti. Daremo per nota la descrizione standard di questo sistema, basata sulle regole di quantizzazione canonica, e le proprietà delle matrici γ e delle soluzioni ad onda piana della equazione di Dirac. Adotteremo le notazioni e convenzioni del Mandl e Shaw [8] in particolare la Appendice A di quel testo.

Ricordiamo che esistono due tipi di quadrispinori: il tipo “normale”, rappresentato dal campo di Dirac $\psi(x)$ e il tipo “aggiunto” rappresentato dal campo $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger \gamma^0$. In genere ometteremo gli indici spinoriali intendendo in particolare che due indici contigui, uno “normale” ed uno “aggiunto” siano sommati. Nelle matrici di Dirac il primo indice va considerato “normale” e il secondo “aggiunto”.

La equazione di Dirac per una particella di massa m sarà scritta come

$$(4.32) \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

e può essere derivata da una densità di lagrangiano:

$$(4.33) \quad \mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x)$$

La (4.33) sarà il nostro punto di partenza. In analogia a quanto abbiamo fatto per l'oscillatore, definiamo il funzionale generatore introducendo due funzioni ausiliarie $J_\rho(x)$, $\bar{J}_\rho(x)$.

$$(4.34) \quad Z(J, \bar{J}) = \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \exp \left[i \int d^4x (\bar{\psi}(x) D\psi(x) - \bar{J}(x)\psi(x) - \bar{\psi}(x)J(x)) \right]$$

dove D è l'operatore di Dirac

$$D = i\gamma^\mu \partial_\mu - m$$

e considereremo ψ , $\bar{\psi}$, J , \bar{J} come grandezze *anticommutanti*. Per eseguire l'integrale seguiamo i passi della sezione precedente. Introduciamo quindi una funzione $S_F(x)$, il propagatore, tale che

$$(4.35) \quad DS_F(x) = \delta^4(x)$$

di modo che possiamo scrivere:

$$Z(J, \bar{J}) = \exp \left[-i \int d^4x' d^4x \bar{J}(x') S_F(x' - x) J(x) \right] \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \exp \left[i \int d^4x \left(\bar{\psi}(x) - \int d^4x' \bar{J}(x') S_F(x' - x) \right) D \left(\psi(x) - \int d^4x' S_F(x - x') J(x') \right) \right]$$

Per dimostrare questa trasformazione cominciamo con

$$\int d^4x \bar{\psi}(x) J(x) = \int d^4x \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m) \int d^4x' S_F(x-x') J(x')$$

che si verifica direttamente dalla (4.35). Inoltre

$$\begin{aligned} & \int d^4x' d^4x \bar{J}(x') S_F(x'-x) (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m) \psi(x) \\ &= \int d^4x' d^4x \bar{J}(x') S_F(x'-x) (-i\gamma^\mu \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x_\mu}} - m) \psi(x) \\ &= \int d^4x' d^4x \bar{J}(x') \delta^4(x'-x) \psi(x) = \int d^4x \bar{J}(x) \psi(x) \end{aligned}$$

dove nel primo passaggio abbiamo eseguito una integrazione per parti, e nel secondo abbiamo utilizzato la (4.39) che dimostreremo fra poco. La freccia indica che la derivata va eseguita sulla funzione alla sinistra.

L'integrale funzionale si calcola con un cambiamento di variabili

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = \psi(x) - \int d^4x' S_F(x-x') J(x') \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) - \int d^4x' \bar{J}(x') S_F(x'-x) \end{aligned}$$

e risulta in una costante moltiplicativa (il valore di $Z[0]$) che può essere omessa, e si ottiene semplicemente

$$(4.36) \quad Z(J, \bar{J}) = \exp \left[-i \int d^4x' d^4x \bar{J}(x') S_F(x'-x) J(x) \right]$$

Come visto in precedenza, questa procedura è legittima solo se

$$(4.37) \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} S_F(t(1-i\chi), \vec{x}) = 0$$

Una soluzione della (4.35) con le qualità desiderate si ottiene ponendo

$$(4.38) \quad S_F(x) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \frac{\not{p} + m}{E^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Infatti, sostituendo nella (4.35) si ottiene⁴

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta_F(x) = -(\square + m^2) \Delta_F(x) = \delta^4(x)$$

Dalla espressione (4.38) segue una relazione che abbiamo usato in precedenza,

$$(4.39) \quad S_F(y-x) (i\gamma^\mu \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x_\mu}} + m) = -\delta^4(x-y)$$

sostituendo infatti nel primo membro la (4.38) otteniamo $(\partial/\partial x = -\partial/\partial y)$

$$\begin{aligned} S_F(y-x) (i\gamma^\mu \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x_\mu}} + m) &= (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} + m) (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m) \Delta_F(y-x) \\ &= (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} + m) (-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} + m) \Delta_F(y-x) = -\delta^4(x-y) \end{aligned}$$

⁴Vedi la sezione 2.10. Ricordiamo che $(\gamma^\mu \partial_\mu)^2 = \partial^\mu \partial_\mu = \square$. Si verifica facilmente che questa è l'unica soluzione accettabile, dato che l'equazione omogenea che corrisponde alla (4.35) non è altro che l'equazione di Dirac, le cui soluzioni sono sovrapposizioni di onde piane che falliscono la condizione (4.37), per $t \rightarrow -\infty$ se del tipo a frequenza positiva $e^{-i\omega t}$, e per $t \rightarrow \infty$ per le frequenze negative, $e^{i\omega t}$.

Le regole di corrispondenza per passare dal funzionale generatore alle funzioni di Green sono dedotte dalla (4.34),

$$(4.40) \quad \psi_\alpha(x) \rightarrow i \frac{\delta}{\delta \bar{J}_\alpha(x)}; \quad \bar{\psi}_\beta(x) \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta J_\alpha(x)}$$

e la funzione di Green a due punti diviene

$$(4.41) \quad \langle 0|T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y))\rangle = iS_{\alpha\beta}(x-y)$$

Come abbiamo visto nel caso dell'oscillatore, il segno “-” nella seconda delle regole di corrispondenza si compensa con un secondo segno “-” che proviene dal carattere anticommutante delle derivate funzionali. Avremmo quindi ottenuto esattamente lo stesso risultato se avessimo trattato il campo di Dirac come grandezza commutante.

Notiamo anche che le funzioni di Green con due ψ o due $\bar{\psi}$ sono eguali a zero

$$(4.42) \quad \langle 0|T(\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y))\rangle = \langle 0|T(\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y))\rangle = 0$$

4.2.1 Il teorema di spin e statistica

Il teorema di spin e statistica, secondo cui particelle di spin intero sono descritte da campi commutanti, mentre particelle di spin semintero da campi anticommutanti, è uno dei pochi risultati esatti della teoria dei campi. In questa sezione verifichiamo che la teoria quantistica di un campo di Dirac libero necessariamente richiede che ψ , $\bar{\psi}$ siano grandezze anticommutanti, e che al contrario nella teoria del campo scalare libero ϕ è necessariamente una grandezza commutante. Chiaramente questa verifica non è una dimostrazione generale del teorema, che si applica anche al caso di campi in interazione con spin arbitrario.

Nel caso della teoria di Dirac scriviamo in forma più esplicita il secondo membro della (4.41) utilizzando la (2.77).

$$\begin{aligned} & \langle 0|T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y))|0\rangle \\ &= \frac{(i\partial + m)_{\alpha\beta}}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{2\omega_p} \left(e^{-i\omega_p(t_x-t_y)}\theta(t) + e^{i\omega_p(t_x-t_y)}\theta(-t) \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{e^{-ip(x-y)}(\not{p}+m)_{\alpha\beta}}{2\omega_p} & (t_x > t_y) \\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{e^{ip(x-y)}(-\not{p}+m)_{\alpha\beta}}{2\omega_p} & (t_x < t_y) \end{cases} \end{aligned}$$

Nel termine con frequenze negative $e^{i\omega_p(t_x-t_y)}$ abbiamo cambiato segno alla variabile di integrazione \vec{p} .

Nei passi che seguono useremo le proprietà degli operatori di proiezione (vedi [8], app. A),

$$(4.43) \quad \frac{(\not{p}+m)_{\alpha\beta}}{2m} = \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(\vec{p})\bar{u}_{r\beta}(\vec{p}); \quad \frac{(-\not{p}+m)_{\alpha\beta}}{2m} = -\sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}(\vec{p})\bar{v}_{r\beta}(\vec{p})$$

e le proprietà di ortogonalità

$$(4.44) \quad (u_r^\dagger(\vec{q})u_s(\vec{q})) = (v_r^\dagger(\vec{q})v_s(\vec{q})) = \frac{\omega_q}{m}\delta_{rs}; \quad (u_r^\dagger(\vec{q})v_s(-\vec{q})) = 0$$

quindi, per $t_x > t_y$ otteniamo

$$(4.45) \quad \langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{-ip(x-y)} \frac{m}{\omega_p} \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{u}_{r\beta}(\vec{p}),$$

e, per $t_x < t_y$,

$$(4.46) \quad -\langle 0 | \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{ip(x-y)} \frac{m}{\omega_p} \sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{v}_{r\beta}(\vec{p})$$

dove il segno “-” a secondo membro deriva dall’operatore di proiezione per energie negative, mentre quello a primo membro deriva dalla anticommutatività dei campi.

Moltiplicando primo e secondo membro per γ^0 , trasformiamo $\bar{\psi} \rightarrow \psi^\dagger$, $\bar{u} \rightarrow u^\dagger$ e $\bar{v} \rightarrow v^\dagger$, e le due equazioni divengono

$$(4.47) \quad \langle 0 | \psi_\alpha(x) \psi_\beta^\dagger(y) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{-ip(x-y)} \frac{m}{\omega_p} \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(\vec{p}) u_{r\beta}^\dagger(\vec{p})$$

$$(4.48) \quad \langle 0 | \psi_\beta^\dagger(y) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{-ip(y-x)} \frac{m}{\omega_p} \sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}(\vec{p}) v_{r\beta}^\dagger(\vec{p})$$

È facile vedere che la anticommutatività è indispensabile. Consideriamo infatti la equazione (4.48), passando al limite $y \rightarrow x$, e con $\alpha = \beta$. Riesprimiamo anche il primo membro introducendo un sistema completo di stati $|X\rangle \langle X|$,

$$\langle 0 | \psi_\alpha^\dagger(x) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle = \sum_X |\langle X | \psi_\alpha(x) | 0 \rangle|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{m}{\omega_p} \sum_{r=1}^2 |v_{r\alpha}(\vec{p})|^2$$

Sia il primo membro che il secondo membro sono grandezze definite positive. Se avessimo considerato $\psi, \bar{\psi}$ come grandezze *commutanti* il secondo membro di questa equazione avrebbe un segno negativo (verrebbe a mancare il segno “-” a primo membro della eq. 4.46) e avremmo ottenuto un risultato assurdo. I campi di Dirac devono essere *anticommutanti*.

Alla conclusione opposta si arriva nel caso di un campo scalare. Consideriamo il caso di un campo scalare complesso (vedi sez. 2.11). E’ facile verificare che sia nel caso commutante che nel caso anticommutante la funzione a due punti sarebbe data dalla equazione (2.77); nelle manipolazioni che hanno portato a quel risultato partendo dalla (2.39) abbiamo infatti sempre rispettato l’ordinamento delle varie grandezze. Se nella (2.77) consideriamo il caso $t_x < t_y$, otteniamo, nel caso di grandezze commutanti,

$$\langle 0 | \phi^\dagger(y) \phi(x) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{e^{-ip(x-y)}}{2\omega_p}$$

e nel limite $y \rightarrow x$,

$$\langle 0 | \phi^\dagger(x) \phi(x) | 0 \rangle = \sum_X |\langle X | \psi(x) | 0 \rangle|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{1}{2\omega_p},$$

una eguaglianza tra grandezze definite positive. Nel caso *anticommutante* il cambiamento di segno a primo membro avrebbe portato a un risultato assurdo.

4.2.2 Stati ad una particella del campo di Dirac

Vogliamo adesso dimostrare che il campo di Dirac descrive due tipi di particelle — particella e antiparticella — ciascuna con due stati di polarizzazione. Per fare questo definiamo i seguenti operatori ottenuti dalle ψ , $\bar{\psi}$ con trasformate di Fourier spaziali proiettate sugli spinori u , v :

$$(4.49) \quad c_r(\vec{q}; t) = \left(\frac{\omega_q}{(2\pi)^3 m} \right)^{1/2} \sum_{\alpha} \int d^3x e^{-i\vec{q}\vec{x}} u_{r\alpha}^{\dagger}(\vec{q}) \psi_{\alpha}(\vec{x}, t);$$

$$(4.50) \quad c_r^{\dagger}(\vec{q}; t) = \left(\frac{\omega_q}{(2\pi)^3 m} \right)^{1/2} \sum_{\alpha} \int d^3y e^{i\vec{q}\vec{y}} \psi_{\beta}^{\dagger}(\vec{y}, t) u_{r\beta}(\vec{q});$$

$$(4.51) \quad d_r(\vec{q}; t) = \left(\frac{\omega_q}{(2\pi)^3 m} \right)^{1/2} \sum_{\alpha} \int d^3y e^{-i\vec{q}\vec{y}} \psi_{\beta}^{\dagger}(\vec{y}, t) v_{r\beta}(\vec{q})$$

$$(4.52) \quad d_r^{\dagger}(\vec{q}; t) = \left(\frac{\omega_q}{(2\pi)^3 m} \right)^{1/2} \sum_{\alpha} \int d^3x e^{i\vec{q}\vec{x}} v_{r\alpha}^{\dagger}(\vec{q}) \psi_{\alpha}(\vec{x}, t)$$

Naturalmente, come adesso dimostreremo, questi sono gli usuali operatori di creazione e distruzione per le particelle e le antiparticelle.

Dalle (4.47), (4.48) otteniamo

$$(4.53) \quad \langle 0 | c_r(\vec{q}; t_x) \psi_{\beta}^{\dagger}(y) | 0 \rangle = \left(\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_q} \right)^{1/2} e^{-i\omega_q t} e^{iqy} u_{r\beta}^{\dagger}(\vec{q});$$

$$(4.54) \quad \langle 0 | \psi_{\beta}^{\dagger}(y) d_r^{\dagger}(\vec{q}; t_x) | 0 \rangle = \left(\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_q} \right)^{1/2} e^{i\omega_q t} e^{-iqy} v_{r\beta}^{\dagger}(\vec{q});$$

come si verifica facilmente sostituendo a c , d^{\dagger} le espressioni (4.49), (4.52), mentre

$$(4.55) \quad \langle 0 | \psi_{\beta}^{\dagger}(y) c_r(\vec{q}; t_x) | 0 \rangle = \langle 0 | d_r^{\dagger}(\vec{q}; t_x) \psi_{\beta}^{\dagger}(y) | 0 \rangle = 0;$$

Con passaggi analoghi, dalle (4.53), (4.54) otteniamo

$$(4.56) \quad \langle 0 | c_r(\vec{q}; t_x) c_s^{\dagger}(\vec{p}; t_y) | 0 \rangle = \langle 0 | d_s(\vec{p}; t_y) d_r^{\dagger}(\vec{q}; t_x) | 0 \rangle = \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) \delta_{rs} e^{-i\omega_q(t_x - t_y)}$$

inoltre dalla (4.55),

$$\langle 0 | c_s^{\dagger}(\vec{p}; t_y) c_r(\vec{q}; t_x) | 0 \rangle = \langle 0 | d_r^{\dagger}(\vec{q}; t_x) d_s(\vec{p}; t_y) | 0 \rangle = 0,$$

da cui, con $s = r$, $\vec{p} = \vec{q}$, $t_y = t_x = 0$, e introducendo un insieme completo di stati,

$$\sum_X |\langle X | c_r(\vec{q}) | 0 \rangle|^2 = \sum_X |\langle X | d_r(\vec{q}) | 0 \rangle|^2 = 0$$

dove $c_r(\vec{q}) = c_r(\vec{q}; t = 0)$, $d_r(\vec{q}) = d_r(\vec{q}; t = 0)$. Quindi

$$(4.57) \quad c_r(\vec{q}) | 0 \rangle = d_r(\vec{q}) | 0 \rangle = 0$$

Se adesso definiamo

$$(4.58) \quad |P; \vec{p}, r\rangle = c_r^{\dagger}(\vec{p}) | 0 \rangle; \quad |A; \vec{p}, r\rangle = d_r^{\dagger}(\vec{p}) | 0 \rangle$$

sostituendo nella (4.53) (di cui prendiamo il complesso coniugato) e nella (4.54), in ambedue i casi con $t_x = 0$, otteniamo

$$(4.59) \quad \langle 0 | \psi_\beta(y) | P; \vec{p}, r \rangle = \left(\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_q} \right)^{1/2} e^{-ip_y} u_{r\beta}(\vec{p});$$

$$(4.60) \quad \langle 0 | \psi_\beta^\dagger(y) | A; \vec{p}, r \rangle = \left(\frac{m}{(2\pi)^3 \omega_q} \right)^{1/2} e^{-ip_y} v_{r\beta}^\dagger(\vec{p});$$

Queste ci dicono che $|P; \vec{p}, r\rangle$, $|A; \vec{p}, r\rangle$ sono stati di impulso \vec{p} e di energia $\omega_p = (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}$, quindi stati a una particella. I due stati di polarizzazione associati alla variabile $r = 1, 2$ possono essere scelti come stati di elicità definita. La equazione (4.56), con $t_x = t_y = 0$ fissa la normalizzazione degli stati:

$$(4.61) \quad \langle P; \vec{p}, r | P; \vec{q}, s \rangle = \langle A; \vec{p}, r | A; \vec{q}, s \rangle = \delta_{rs} \delta(\vec{p} - \vec{q})$$

Gli stati $|P\rangle$ e $|A\rangle$ sono necessariamente differenti: infatti la funzione a due punti $\langle 0 | T(\psi \psi) \rangle$ si annulla (eq 4.42), e da questo possiamo ottenere, con un lavoro analogo a quello svolto sinora, che

$$(4.62) \quad \langle 0 | c_s(\vec{p}; t_y) d_r^\dagger(\vec{q}; t_x) | 0 \rangle = \langle P; \vec{p}, s | A; \vec{q}, r \rangle = 0$$

Gli stati di particella $|P\rangle$ e di antiparticella $|A\rangle$ sono quindi ortogonali e necessariamente differenti.

In conclusione abbiamo visto che il formalismo funzionale permette di ricostruire lo spettro degli stati a una particella della teoria e il ruolo, già ben noto, degli operatori di creazione e distruzione.

Capitolo 5

Il campo elettromagnetico

$$(5.1) \quad \mathcal{L} = 0$$

In questo capitolo ci occuperemo della quantizzazione del campo elettromagnetico con il metodo dei cammini di Feynman. Anche in questo caso adotteremo le convenzioni del Mandl e Shaw, [8]. In particolare il tensore di campo $F^{\mu\nu}$ può essere espresso in termini dei potenziali A^μ tramite la

$$(5.2) \quad F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$$

Le equazioni di Maxwell per il campo libero

$$(5.3) \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = \square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = 0$$

possono essere derivate da una densità di Lagrangiano

$$(5.4) \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

5.1 La scelta di gauge

Per descrivere la teoria quantistica del campo elettromagnetico mediante la somma sui cammini dobbiamo superare un problema legato alla invarianza di gauge: Una trasformazione dei potenziali

$$(5.5) \quad A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f,$$

dove $f(x)$ è una funzione arbitraria, lascia invariante sia il tensore di campo $F^{\mu\nu}$ che la densità di lagrangiano \mathcal{L} , e quindi l'integrale d'azione. Più in generale una trasformazione di gauge non deve avere alcun effetto su qualsiasi processo fisico, e in particolare sui risultati di qualunque misura. Un corollario di questa affermazione è che i potenziali elettromagnetici A^μ non sono essi stessi misurabili.

L'invarianza di gauge è centrale nella teoria del campo elettromagnetico e delle sue interazioni. La richiesta che anche in presenza di interazioni la teoria sia invariante rispetto alla trasformazione di gauge determina il tipo di interazione possibile

con altri campi. La teoria del campo elettromagnetico è il prototipo delle moderne teorie delle interazioni fondamentali, tutte basate sulla esistenza di particolari invarianze di gauge.

Dove è il problema? I lettori ricorderanno che per definire una teoria quantistica abbiamo dovuto garantire la convergenza degli integrali funzionali che definiscono la somma sui cammini. Per ottenere questo risultato abbiamo considerato una continuazione analitica nel piano complesso della variabile tempo, tramite la ricetta $t \rightarrow t(1 - i\chi)$. Nel caso del campo elettromagnetico la invarianza di gauge introduce un nuovo tipo di divergenza che è immune a questo rimedio. Consideriamo infatti un integrale funzionale del tipo

$$(5.6) \quad I = \int \mathcal{D}[A^\mu] e^{iS[A^\mu]} O[A^\mu]$$

dove $O[A^\mu]$ è un funzionale delle A^μ che sia invariante di gauge e che quindi può rappresentare una qualche grandezza fisica. Come al solito l'integrale funzionale è esteso sugli A^μ periodici tra $t = \pm\infty$. Dato che $S[A^\mu]$ è anche invariante di gauge, per ogni cammino $A^\mu(t, \vec{x})$ ne esistono infiniti altri, ottenuti con una trasformazione di gauge, per cui l'integrando ha lo stesso valore. Dato che lo spazio delle possibili trasformazioni di gauge, lo spazio delle funzioni $f(x)$, è infinito, l'integrale è necessariamente divergente. Per dominare questa divergenza occorre trovare il modo di metterla a fattore di ogni integrale del tipo (5.6). L'insieme dei cammini $A^\mu(x)$ connessi da trasformazioni di gauge è detto una *traiettoria di gauge*. Quello che vorremmo fare è stabilire un sistema di coordinate nello spazio dei cammini tali che un sottoinsieme di tali coordinate (le linee orizzontali nella figura 5.1) corrispondano alle traiettorie di gauge e le rimanenti coordinate (la linea verticale) servano a distinguere cammini non equivalenti sotto trasformazioni di gauge, quindi fisicamente distinti.

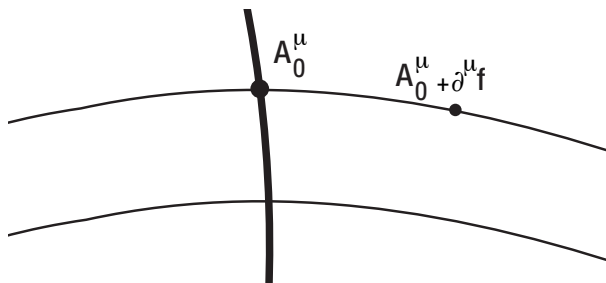


Figura 5.1: Lo spazio delle funzioni $A^\mu(x)$ può essere affettato secondo traiettorie (linee orizzontali) composte da cammini connessi da trasformazioni di gauge. Lungo le coordinate ortogonali alle traiettorie di gauge (linea verticale) troviamo cammini fisicamente distinti.

Se questo fosse possibile, potremmo riesprimere l'integrale (5.6) come

$$\int \mathcal{D}[f] \int \mathcal{D}[A_0^\mu] e^{iS[A_0^\mu]} O[A_0^\mu],$$

ma dato che l'integrando è per ipotesi invariante di gauge, questo potrebbe essere riscritto come

$$\left[\int \mathcal{D}[f] \right] \int \mathcal{D}[A_0^\mu] e^{iS[A_0^\mu]} O[A_0^\mu]$$

e l'integrale sulle trasformazioni di gauge, sia pure divergente, diverrebbe un fattore moltiplicativo comune in tutti gli integrali del tipo (5.6) e potrebbe essere ome-so nel calcolo delle funzioni di Green che sono (vedi (2.15)) *rapporti* di integrali di questo tipo. Naturalmente le cose non sarebbero così semplici dato che, trattan-dosi di un cambiamento di variabili, dovremmo anche includere lo jacobiano della trasformazione da A^μ a $\{A_0^\mu, f\}$.

Quello che abbiamo appena detto (con abbondanza di espressioni condizionali) non si sa fare, ma si può fare qualcosa di molto simile, imporre una “condizione di gauge” che trattabile l'integrale funzionale. Una tale condizione viene anche detta una “scelta di gauge”, “gauge fixing” in inglese.

Un esempio di condizione di gauge che è stata discussa in corsi precedenti è quella che porta alla cosiddetta “gauge di Coulomb”, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Dato che siamo in-teressati a mantenere in evidenza l'invarianza relativistica, consideriamo invece la “gauge di Lorentz”, caratterizzata dalla condizione

$$(5.7) \quad \partial_\nu A^\nu = 0$$

Nella gauge di Lorentz le equazioni di Maxwell si riducono alla equazione delle onde per ciascuna componente di k ,

$$(5.8) \quad \square A^\mu = 0$$

Vorremmo quindi modificare la densità di lagrangiano (ovvero l'azione) in maniera che le equazioni del moto divengano appunto quelle della (5.8). L'azione originale si può scrivere come

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) = -\frac{1}{2} \int d^4x ((\partial^\nu A^\mu)(\partial_\nu A_\mu) - (\partial_\nu A^\nu)^2),$$

come si verifica facilmente¹. Se potessimo sopprimere il secondo termine avremmo l'azione proposta da E. Fermi,

$$(5.9) \quad S_F = -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial^\nu A^\mu)(\partial_\nu A_\mu),$$

che porta alle equazioni del moto della (5.8). Dobbiamo naturalmente dimostrare che il cambiamento della azione non modifica in alcun modo il valore di integrali funzionali del tipo della (5.6). La trasformazione si basa sulla seguente osservazio-ne: dato un qualsiasi “storia” dei potenziali, $A^\mu(x)$, indichiamo con $A_f^\mu(x)$ gli stessi potenziali dopo una trasformazione di gauge $f(x)$,

$$(5.10) \quad A_f^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu f(x),$$

si verifica facilmente che il seguente integrale funzionale sulle funzioni di gauge $f(x)$ è una costante K indipendente dai potenziali $A^\mu(x)$

$$(5.11) \quad \int \mathcal{D}[f] \exp\left(\frac{-i}{\xi} \int d^4x (\partial_\mu A_f^\mu)^2\right) = K$$

¹Il secondo termine richiede due integrazione per parti:

$$\int dx (\partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu) = - \int dx (\partial_\mu \partial^\nu A^\mu)(A_\nu) = \int dx (\partial_\mu A^\mu)(\partial^\nu A_\nu)$$

dove ξ è un numero arbitrario. L'integrale è come al solito esteso alle funzione $f(x)$ periodiche tra $t = \pm\infty$. Rimandiamo la dimostrazione e diamo uno sguardo all'uso di questa identità: possiamo riscrivere l'integrale (5.6) come

$$I = \left[K^{-1} \int \mathcal{D}[f(x)] \right] \int \mathcal{D}[A^\mu] e^{iS[A^\mu]} O[A^\mu] \exp\left(\frac{-i}{\xi} \int d^4x (\partial_\mu A_f^\mu)^2\right),$$

e notiamo che la grandezza moltiplicativa tra parentesi quadre è irrilevante per il calcolo di grandezze fisiche, e può essere omessa. Dato che sia $S[A^\mu]$ che $O[A^\mu]$ sono invarianti di gauge, possiamo sostituire $S[A^\mu]$ con $S[A_f^\mu]$ e $O[A]$ con $O[A_f]$. Lo stesso si può fare per la misura funzionale $\mathcal{D}[A^\mu]$: dato che la differenza tra A^μ e A_f^μ è una semplice traslazione nello spazio funzionale, $\mathcal{D}[A^\mu] = \mathcal{D}[A_f^\mu]$. Con queste sostituzioni, e omettendo la costante moltiplicativa,

$$I = \int \mathcal{D}[A_f^\mu] e^{iS[A_f^\mu]} O[A_f^\mu] \exp\left(\frac{-i}{\xi} \int d^4x (\partial_\mu A_f^\mu)^2\right)$$

Infine, cambiando nome alla variabile di integrazione, $A_f \rightarrow A$, troviamo

$$(5.12) \quad I = \int \mathcal{D}[A^\mu] e^{iS_\xi[A^\mu]} O[A^\mu]$$

dove S_ξ è l'azione modificata

$$(5.13) \quad S_\xi = -\frac{1}{2} \int dx \left((\partial^\nu A^\mu)(\partial_\nu A_\mu) - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) (\partial_\nu A^\nu)^2 \right)$$

La scelta di ξ è arbitraria. Noi sceglieremo il valore $\xi = 1$ in corrispondenza del quale ottiene l'azione di Fermi S_F , eq. (5.9). In conclusione la identità (5.11) permette di usare, nel calcolo di grandezze invarianti di gauge, la azione di Fermi (5.9), che d'ora in poi chiameremo semplicemente S . Questa scelta di gauge prende anche il nome di "gauge di Feynman".

Per dimostrare la identità (5.11), fissato il valore di $A^\mu(x)$ definiamo $\tilde{f}(x)$ come

$$\tilde{f}(x) = - \int d^4y \Delta_F(x-y; 0) \partial_\mu A^\mu(y)$$

dove $\Delta_F(x-y; 0)$ è la funzione di propagazione per particelle di massa $m = 0$, in altre parole (vedi la eq. 2.67) la soluzione della equazione

$$(5.14) \quad \square \Delta_F(x; 0) = -\delta^4(x)$$

Abbiamo quindi

$$\partial_\mu A^\mu(x) = \square \tilde{f}(x); \quad \partial_\mu A_f^\mu(x) = \square [f(x) + \tilde{f}(x)]$$

L'integrale della (5.11) si scrive allora

$$\int \mathcal{D}[f] \exp\left(\frac{-i}{\xi} \int d^4x (\square [f(x) + \tilde{f}(x)])^2\right)$$

Notiamo adesso che, gli $A^\mu(x)$ che interessano sono quelli che compaiono nell'integrale funzionale (5.6), e sono periodici tra $t = \pm\infty$, e quindi anche $\tilde{f}(x)$ sarà periodica, in conseguenza della buona convergenza di Δ_F per $t = \pm\infty$ (vedi la discussione nella sezione 2.9). Quindi con un cambiamento di variabile di integrazione $f \rightarrow f + \tilde{f}$, l'integrale diviene semplicemente

$$\int \mathcal{D}[f] \exp\left(\frac{-i}{\xi} \int d^4x (\square f(x))^2\right),$$

e risulta indipendente da $A^\mu(x)$. Notiamo che il risultato dipende in modo essenziale dal fatto che il cambiamento di variabile $f \rightarrow f + \tilde{f}$ è una semplice traslazione. Nel caso di teorie di gauge basate su gruppi non abeliani, in questo punto si incontra una complicazione dovuta alla non-linearità delle trasformazioni di gauge, e diviene necessario, per eseguire il cambiamento di variabili, introdurre un jacobiano che richiede particolari attenzioni che in questo caso possiamo evitare.

5.2 Il funzionale generatore e il propagatore

Le funzioni di Green del campo elettromagnetico,

$$\langle 0|T(A^{\mu_1}(x_1) \cdots A^{\mu_n}(x_n))|0\rangle$$

possono essere dedotte da un funzionale generatore dipendente da una funzione ausiliaria $J_\mu(x)$,

$$(5.15) \quad Z[J_\mu] = \int \mathcal{D}[A^\mu] \exp\left[\frac{-i}{2} \int d^4x (\partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu + 2J_\mu A^\mu)\right]$$

tramite la regola di corrispondenza

$$(5.16) \quad A^\mu(x) \rightarrow i \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}$$

Se riscriviamo $Z[J]$ con una integrazione per parti come

$$Z[J_\mu] = \int \mathcal{D}[A^\mu] \exp\left[\frac{i}{2} \int d^4x (A^\mu \square A_\mu - 2A^\mu J_\mu)\right]$$

possiamo completare un quadrato perfetto all'esponente definendo (vedi (5.14))

$$\square^{-1} J_\mu(x) = - \int d^4x \Delta_F(x-y;0) J_\mu(y)$$

di modo che

$$Z[J_\mu] = \exp\left[\frac{-i}{2} \int d^4x (J^\mu \square^{-1} J_\mu)\right] \int \mathcal{D}[A^\mu] \exp\left[\frac{i}{2} \int d^4x (A^\mu - \square^{-1} J^\mu) \square (A_\mu - \square^{-1} J_\mu)\right]$$

Anche in questo caso l'integrale funzionale residuo è un fattore costante che può essere omissso, e otteniamo

$$(5.17) \quad Z[J_\mu] = \exp\left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^\mu(x) \Delta_F(x-y;0) J_\mu(y)\right]$$

e la funzione a due punti, nella gauge di Feynman, diviene

$$(5.18) \quad \langle 0|T(A^\mu(x) A^\nu(y))|0\rangle = i \Delta_F^{\mu\nu}(x-y) = -i g^{\mu\nu} \Delta_F(x-y;0)$$

5.3 Gli stati a un fotone

Se consideriamo il campo elettromagnetico libero (in assenza di cariche e correnti) nella gauge di Coulomb² la condizione $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$ implica che $\Delta\phi = 0$ e quindi possiamo porre $\phi = 0$. Allo stesso tempo per un fotone di impulso \vec{k} dalla condizione $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$ segue che il vettore di polarizzazione $\vec{\epsilon}$ deve essere ortogonale a \vec{k} . Un fotone di impulso \vec{k} può quindi avere due stati di polarizzazione che corrispondono a due vettori $\vec{\epsilon}_r$ tali che $\vec{\epsilon}_r \vec{k} = 0$ e $\vec{\epsilon}_r \vec{\epsilon}_s = \delta_{rs}$.

Queste conclusioni, che sono di chiaro significato fisico, devono essere indipendenti da qualsiasi scelta di gauge, e dal metodo di quantizzazione, e devono quindi essere valide anche se procediamo con una quantizzazione nella gauge di Feynman, come abbiamo fatto nelle sezioni precedenti. Su questo punto sorge un problema piuttosto sottile. La azione di Fermi (5.9) tratta in modo simmetrico le quattro componenti del campo A^μ , e sebbene il lagrangiano di Fermi sia equivalente a quello gauge-invariante della (5.4) purché $\partial_\mu A^\mu = 0$, questa condizione non segue direttamente dal lagrangiano di Fermi, o dalle equazioni del moto (5.8). In effetti nella gauge di Feynman sono apparentemente presenti quattro stati di polarizzazione, e una sorpresa! Vediamo quale.

La funzione a due punti nel caso $t_x > t_y$ può essere calcolata direttamente dalla espressione di Δ_F (vedi 2.77),

$$\langle 0|A^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle = \frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{2\omega_p} e^{-i\omega_p(t_x-t_y)}$$

Se adesso definiamo le trasformate di Fourier spaziali (tenendo presente che $A^\nu(x)$ è reale)

$$A^\mu(\vec{k}, t_x) = \frac{\sqrt{2\omega_k}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\vec{k}\vec{x}} A^\mu(\vec{x}, t_x)$$

$$A^{\nu\dagger}(\vec{q}, t_y) = \frac{\sqrt{2\omega_q}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3y e^{i\vec{q}\vec{y}} A^\nu(\vec{y}, t_y) = A^\nu(-\vec{q}, t_y)$$

otteniamo da una trasformata di Fourier in \vec{y}

$$(5.19) \quad \langle 0|A^\mu(x)A^{\nu\dagger}(\vec{q}, t_y)|0\rangle = \frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_q}} e^{i\vec{q}\vec{x}} e^{-i\omega_q(t_x-t_y)},$$

da cui, ponendo $\mu = \nu$, impariamo che lo stato

$$|\mu; \vec{q}\rangle = A^{\nu\dagger}(\vec{q}, 0)|0\rangle$$

ha impulso \vec{q} e energia $\omega_q = \sqrt{\vec{q}^2}$. Questo stato descrive quindi una particella di massa nulla. Una seconda trasformata in \vec{x} , e nel limite $t_x = t_y = 0$ porta a

$$(5.20) \quad \langle \mu; \vec{k}|\nu; \vec{q}\rangle = \langle 0|A^\mu(\vec{k}, 0)A^{\nu\dagger}(\vec{q}, 0)|0\rangle = -g^{\mu\nu}\delta^3(\vec{k}-\vec{q})$$

Ecco quindi la sorpresa: non solo per ogni valore di \vec{q} ci sono quattro stati, e non i due che ci aspettiamo, ma mentre gli stati con $\mu = 1, 2, 3$ sono di modulo quadro positivo, dato che $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$,

$$\langle \mu; \vec{k}|\nu; \vec{q}\rangle = \langle 0|A^\mu(\vec{k}, 0)A^{\nu\dagger}(\vec{q}, 0)|0\rangle = \delta_{\mu\nu}\delta^3(\vec{k}-\vec{q}) \quad (\mu, \nu = 1.2.3)$$

²Per una discussione della gauge di Coulomb rimandiamo al Mandl e Shaw [8], in particolare il primo capitolo.

lo stato $|\mu = 0; \vec{q}\rangle$ ha modulo quadro negativo,

$$\langle 0; \vec{k}|0; \vec{q}\rangle = \langle 0|A^0(\vec{k}, 0)A^{0\dagger}(\vec{q}, 0)|0\rangle = -\delta^3(\vec{k} - \vec{q})$$

Una situazione che sembra in aperto contrasto con i dettami della meccanica quantistica: si tratta di uno stato di probabilità negativa.

La soluzione di questo problema deriva dalla invarianza di gauge dell'elettromagnetismo, che non è del tutto obliterata dalla scelta della gauge di Feynman. Infatti l'azione di Fermi è invariante sotto una classe ristretta di trasformazioni di gauge, caratterizzate da funzioni $f(x)$ tali che $\square f(x) = 0$: Infatti (vedi 5.9)

$$\begin{aligned} \int d^4x \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu f) \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu f) &= \int d^4x (\partial^\nu A^\mu) (\partial_\nu A_\mu) \\ &+ \int d^4x (\partial^\nu \partial^\mu f) \partial_\nu A_\mu + \int d^4x (\partial^\nu A^\mu) (\partial_\nu \partial_\mu f) + \int d^4x (\partial^\nu \partial^\mu f) (\partial_\nu \partial_\mu f) \end{aligned}$$

e con una integrazione per parti si verifica che tutti i termini della seconda riga si annullano se $\square f(x) = 0$.

Nel seguito daremo una discussione un poco sommaria di come la presenza di questa invarianza risolva il problema degli stati addizionali che appaiono nella gauge di Feynman. Una discussione più approfondita e citazioni della letteratura originale, in particolare il lavoro di Gupta e Bleuler si trovano nel capitolo 5 del Mandl e Shaw [8]. Per ogni valore di \vec{q} possiamo scegliere quattro vettori di polarizzazione:

ϵ_1, ϵ_2 Le due polarizzazioni *trasverse*: $\epsilon_{1,2}^\mu = \{0, \vec{\epsilon}_{1,2}\}$, con $(\vec{\epsilon}_{1,2} \vec{k}) = 0$.

ϵ_L La polarizzazione *longitudinale*: un vettore spaziale parallelo a \vec{q} :
 $\epsilon_L^\mu = \{0, \hat{q}\}$.

ϵ_T La polarizzazione *temporale*: un vettore di tipo tempo, $\epsilon_T^\mu = \{1, 0\}$

In corrispondenza dei quattro vettori parleremo di fotoni trasversi, longitudinali o temporali. Se ad esempio \vec{q} è nella direzione 3, possiamo scegliere i quattro vettori come

$$\epsilon_1 = \{0, 1, 0, 0\}, \quad \epsilon_2 = \{0, 0, 1, 0\} \quad \epsilon_L = \{0, 0, 0, 1\} \quad \epsilon_T = \{1, 0, 0, 0\}$$

Il succo dell'argomento di Gupta e Bleuler consiste nel mostrare che sebbene i fotoni "temporali" siano emessi con probabilità negativa, la probabilità (positiva) di emettere un fotone longitudinale cancella esattamente quella (negativa) di emetterne uno temporale. Quindi i due tipi aggiuntivi di fotoni presenti nella gauge di Feynman non portano ad alcuna conseguenza fisica, e l'insieme delle grandezze misurabili è in questa gauge identica a quanto si sarebbe ottenuto in qualsiasi altra.

Alla stessa conclusione si arriva con un argomento diverso³ che si appoggia alla teoria delle perturbazioni: il propagatore del fotone nella gauge di Feynman (5.18) si può esprimere come somma di tre termini, di cui il primo descrive la propagazione di fotoni trasversi, il secondo corrisponde alla interazione coulombiana tra le cariche, e il terzo contiene nello spazio degli impulsi termini proporzionali a k^μ o k^ν . I primi due termini ricostruiscono esattamente quanto si otterrebbe nella gauge di Coulomb, mentre il terzo è privo di effetti. Infatti, come vedremo più in dettaglio nel seguito, il propagatore del fotone appare sempre "attaccato" a due correnti,

$$s_\mu \Delta_F^{\mu\nu} s_\nu$$

³Vedi Mandl e Shaw [8], paragrafo 5.3, cui rimandiamo per i dettagli.

e la conservazione della corrente, $\partial^\mu s_\mu = 0$ (essa stessa conseguenza della invarianza di gauge) che nello spazio degli impulsi diviene $k^\mu s_\mu = 0$ fa sì che il terzo termine del propagatore dia sempre contributo nullo. In conclusione la quantizzazione nella gauge di Feynman porta alle stesse conseguenze osservabili di quella eseguita nella gauge di Coulomb: al campo A^μ corrispondono due stati per ciascun valore dell'impulso, descritti da vettori di polarizzazione trasversi. I due stati extra che appaiono in questa gauge sono privi di significato fisico.

Per gli stati trasversi possiamo, per ogni valore di \vec{q} scegliere due vettori di polarizzazione $\epsilon_r^\nu(\vec{q})$ ($r = 1, 2$) puramente spaziali ($\epsilon_{1,2}^0 = 0$), tali che

$$\vec{q}\vec{\epsilon}_r = 0; \quad \vec{\epsilon}_r\vec{\epsilon}_s = \delta_{rs}$$

Se quindi definiamo gli stati a un fotone come

$$|\gamma; \vec{q}, r\rangle = \epsilon_r^\nu(\vec{q}) A_\nu^\dagger(\vec{q}, 0) |0\rangle$$

dalla (5.20) otteniamo

$$(5.21) \quad \langle \gamma; \vec{k}, s | \gamma; \vec{q}, r \rangle = \delta_{rs} \delta^3(\vec{k} - \vec{q})$$

e, dalla (5.19),

$$(5.22) \quad \langle 0 | A^\mu(x) | \gamma; \vec{q}, r \rangle = \frac{\epsilon_r^\mu(\vec{q})}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_q}} e^{i\vec{q}\vec{x}} e^{-i\omega_q(t_x - t_y)},$$

Quest'ultima risulterà utile per stabilire le regole di calcolo per la matrice S . Nel presente testo consideriamo i vettori ϵ_r^ν come vettori a componenti *reali*, che descrivono fotoni a polarizzazione lineare. Ricordiamo però che per descrivere stati con polarizzazione circolare, in particolare fotoni di elicità definita si devono usare vettori ϵ_r^ν a componenti *complesse*.

Capitolo 6

Elettrodinamica quantistica

In questo capitolo applicheremo i metodi sviluppati nei capitoli precedenti alla costruzione della teoria delle perturbazioni applicata alla elettrodinamica quantistica, la teoria delle interazioni tra elettroni, descritti dal campo di Dirac, e il campo elettromagnetico. Questo sistema sarà descritto da un lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m_0)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

Una caratteristica saliente di questo lagrangiano è la invarianza sotto trasformazioni di gauge, che sono trasformazioni simultanee sia del campo elettromagnetico che del campo dell'elettrone,

$$(6.1) \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x)$$

$$(6.2) \quad \psi(x) \rightarrow e^{ief(x)}\psi(x)$$

L'invarianza di gauge istituisce uno stretto legame tra il campo dell'elettrone e il campo del fotone. Una invarianza sotto trasformazioni del campo dell'elettrone per un fattore di fase che dipende arbitrariamente dal punto — eq. (6.2) — non sarebbe possibile senza il campo elettromagnetico. L'invarianza di gauge non è quindi una caratteristica secondaria del campo elettromagnetico, ma la sua ragione d'essere. Una conseguenza della invarianza di gauge è l'esistenza di una simmetria sotto una trasformazione del campo dell'elettrone con un fattore di fase costante,

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x)$$

Questa è una simmetria “globale” (in contrasto alla simmetria “locale” — la simmetria di gauge completa) da cui, tramite il teorema di Noether, discende la conservazione della corrente,

$$(6.3) \quad \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0$$

che è quindi una conseguenza della invarianza di gauge.

In questo capitolo adotteremo la gauge di Feynman, nella quale il lagrangiano si scrive

$$(6.4) \quad \mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m_0)\psi - \frac{1}{2}\partial_\nu A_\nu\partial^\nu A^\mu$$

Per costruire una teoria delle perturbazioni possiamo dividere il lagrangiano in due parti:

$$(6.5) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$$

dove \mathcal{L}_0 descrive campi liberi, ed è quindi totalmente risolvibile, mentre \mathcal{L}_1 è un termine di interazione. Potremmo ad esempio porre

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0)\psi - \frac{1}{2}\partial_\nu A_\nu\partial^\nu A^\mu \\ \mathcal{L}_1 &= e(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu \end{aligned}$$

Come vedremo nel seguito del corso (ma per questo argomento faremo riferimento ad altri testi, e in particolare al Mandl e Shaw [8]) m_0 non è la massa fisica dell'elettrone, ma il valore che questa massa assumerebbe in assenza di interazioni, cioè per $e = 0$. La vera massa fisica, m , può essere scritta come

$$(6.6) \quad m = m_0 + \delta m$$

Il termine δm può essere visto come l'energia del campo elettrico (e magnetico) prodotto dalla carica (e momento magnetico) dell'elettrone. Dato che useremo la teoria delle perturbazioni per calcolare le ampiezze di transizione associate a processi d'urto, gli elementi della matrice S , conviene una separazione diversa tra \mathcal{L}_0 e \mathcal{L}_1 , tale che \mathcal{L}_0 descriva elettroni di massa m , cioè la stessa massa delle particelle descritte dal lagrangiano completo \mathcal{L} , e quindi

$$(6.7) \quad \mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}\partial_\nu A_\nu\partial^\nu A^\mu$$

$$(6.8) \quad \mathcal{L}_1 = e(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu + \delta m(\bar{\psi}\psi)$$

Il termine $\delta m(\bar{\psi}\psi)$ in \mathcal{L}_1 è detto un *controtermine*. Mentre la massa dell'elettrone viene modificata dalle interazioni, la massa del fotone, come vedremo nel seguito, è protetta dalla invarianza di gauge e resta eguale a zero.

La costruzione della serie perturbativa per la matrice S segue i passi illustrati nel caso del campo scalare:

1. Stabilire le formule di riduzione che legano gli elementi di matrice S alle funzioni di Green.
2. Costruire la serie perturbativa per il funzionale generatore delle funzioni di Green in termini di diagrammi di Feynman.
3. Costruire la serie perturbativa per la matrice S .

Per ulteriori argomenti, in particolare per il calcolo della sezione d'urto di alcuni processi significativi, o per la discussione della rinormalizzazione della carica e rimanderemo ai testi standard, in particolare il Mandl e Shaw [8].

6.1 La formula di riduzione

Gli argomenti che hanno portato alla formula di riduzione (3.29) si applicano direttamente all'elettrodinamica, con l'unica complicazione che proviene dallo spin

dell'elettrone e del fotone. La trasformata di Fourier dei campi rispetto alle coordinate spaziali serve a proiettare uno specifico valore della quantità di moto, ma per particelle con spin dobbiamo aggiungere una proiezione su un adatto spinore u , v , o vettore di polarizzazione ϵ nel caso dei fotoni. Per gli elettroni possiamo partire dalle (4.59), (4.60). Naturalmente anche in questo caso in presenza di interazione dobbiamo introdurre una costante di rinormalizzazione, Z_2 per l'elettrone, Z_3 per il fotone¹. Ad esempio dalla (4.59) otteniamo

$$(6.9) \quad \bar{u}_{s\beta}(\vec{p}) \langle 0 | \psi_\beta(y) | P; \vec{p}, r \rangle = \left(\frac{mZ_2}{(2\pi)^3 \omega_q} \right)^{1/2} \delta_{rs} e^{-ipy}$$

Otteniamo quindi, seguendo la procedura della sezione 3.4, la seguente espressione per la distruzione o creazione di una particella

$$(6.10) \quad \begin{aligned} & \lim_{E \rightarrow \omega_q} \left[(q^2 - m^2) \int_t^\infty dt' \int d^3x e^{i(Et' - \vec{q}\vec{x})} \bar{u}_{s\beta}(\vec{p}) \langle 0 | \psi_\beta(\vec{x}, t') | P; \vec{p}, r \rangle \right] \\ &= \lim_{E \rightarrow \omega_q} \left[(q^2 - m^2) \int_{-\infty}^t dt' \int d^3x e^{-i(Et' - \vec{q}\vec{x})} \langle P; \vec{p}, r | \bar{\psi}_\beta(\vec{x}, t') | 0 \rangle u_{s\beta}(\vec{p}) \right] \\ &= 2i \sqrt{m\omega_q} (2\pi)^{3/2} \sqrt{Z_2} \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) \delta_{rs} \end{aligned}$$

Anche in questo caso (vedi eq. 3.27) il processo di limite porta a un risultato nullo per stati non di singola particella. Analogamente per la distruzione o la creazione di una antiparticella²

$$(6.11) \quad \begin{aligned} & \lim_{E \rightarrow \omega_q} \left[(q^2 - m^2) \int_t^\infty dt' \int d^3x e^{i(Et' - \vec{q}\vec{x})} \langle 0 | \bar{\psi}_\beta(\vec{x}, t') | A; \vec{p}, r \rangle v_{s\beta}(\vec{p}) \right] \\ &= \lim_{E \rightarrow \omega_q} \left[(q^2 - m^2) \int_{-\infty}^t dt' \int d^3x e^{-i(Et' - \vec{q}\vec{x})} \bar{v}_{s\beta}(\vec{p}) \langle A; \vec{p}, r | \psi_\beta(\vec{x}, t') | 0 \rangle \right] \\ &= -2i \sqrt{m\omega_q} (2\pi)^{3/2} \sqrt{Z_2} \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) \delta_{rs} \end{aligned}$$

Relazioni analoghe si ottengono per gli stati a un fotone partendo dalla (5.22), e precisamente sia per fotoni uscenti (distrutti) che entranti (creati)

$$(6.12) \quad \begin{aligned} & \lim_{E \rightarrow \omega_q} \left[(q^2) \int_t^\infty dt' \int d^3x e^{i(Et' - \vec{q}\vec{x})} \epsilon_s^\mu(\vec{q}) \langle 0 | A_\mu(x) | \gamma; \vec{q}, r \rangle \right] \\ &= \lim_{E \rightarrow \omega_q} \left[(q^2) \int_{-\infty}^t dt' \int d^3x e^{-i(Et' - \vec{q}\vec{x})} \epsilon_s^\mu(\vec{q}) \langle \gamma; \vec{q}, r | A_\mu(x) | 0 \rangle \right] \\ &= i \sqrt{2\omega_q} (2\pi)^{3/2} \sqrt{Z} \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) \delta_{rs} \end{aligned}$$

Paragonando queste relazioni a quelle che valgono per un campo scalare vediamo che le differenze nel caso dell'elettrodinamica saranno minime, oltre quelle dovute alla presenza degli spinori o vettori di polarizzazione dobbiamo solo tener conto della differenza nei fattori moltiplicativi nel caso dei fermioni, (6.10), (6.11), e in quello dei bosoni, (3.26), (6.12). Possiamo scrivere la formula di riduzione in forma

¹Questi sono simboli standard; Z_1 è la costante di rinormalizzazione del vertice.

²La differenza di segno tra particella e antiparticella deriva dal fatto che $(\bar{u}_s(\vec{p}) \bar{u}_r(\vec{p})) = -(\bar{v}_s(\vec{p}) \bar{v}_r(\vec{p})) = \delta_{rs}$.

molto schematica come

$$(6.13) \quad \lim_{E_i \rightarrow \omega_i} \left[\prod_{\text{Fermioni}} (q_k^2 - m^2) \prod_{\text{Fotoni}} (q_h^2) \right] \int \prod_{\text{Tutte}} [d^4 x] \prod_{\text{Finali}} e^{iq_k x_k} \prod_{\text{Iniziali}} e^{-iq_k x_k} \langle 0 | T((\bar{u}\psi) \dots (\bar{\psi}u) \dots (\bar{\psi}v) \dots (\bar{v}\psi) \dots (\epsilon A)) | 0 \rangle$$

$$= \left(\prod_{\text{Tutte}} i\sqrt{2\omega_q} (2\pi)^{3/2} \sqrt{Z} \right) \left(\prod_{\text{Fermioni}} \sqrt{2m} \right) \left(\prod_{\text{Antifermioni}} (-1) \right) \langle f | S | i \rangle$$

dove per i vari fattori o manipolazioni è indicato se si applicano ai fermioni (entranti o uscenti, inclusi gli antifermioni), ai soli antifermioni, ai fotoni, alle particelle iniziali o finali, o infine a tutte le particelle. In corrispondenza di ogni particella la funzione di Green dovrà contenere un campo proiettato sull'appropriato spinore o vettore di polarizzazione:

$(\bar{\psi}(x) u_r(\vec{q}))$	fermione iniziale
$(\bar{\psi}(x) v_r(\vec{q}))$	anti-fermione finale
$(\bar{v}_r(\vec{q}) \psi(x))$	anti-fermione iniziale
$(\bar{u}_r(\vec{q}) \psi(x))$	fermione finale
$(\epsilon_r^\mu(\vec{q}) A_\mu(x))$	fotone iniziale o finale

6.2 Grafici di Feynman per il funzionale generatore

Il funzionale generatore per l'elettrodinamica dipenderà da tre funzioni ausiliarie: $J(x)$ e $\bar{J}(x)$ per il campo dell'elettrone, $J_\mu(x)$ per il fotone. Nel limite $e \rightarrow 0$, e cioè in assenza di interazioni³, il funzionale generatore Z è semplicemente il prodotto dei funzionali generatori per gli elettroni e i fotoni,

$$(6.14) \quad Z^0[J, \bar{J}, J_\mu] = Z^0[J, \bar{J}] Z^0[J_\mu];$$

$$Z^0[J, \bar{J}] = \exp \left(-i \int d^4 x d^4 y \bar{J}(x) S_F(x-y) J(y) \right)$$

$$Z^0[J_\mu] = \exp \left(\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J^\mu(x) \Delta_F(x-y) J_\mu(y) \right)$$

Dove intendiamo che $\Delta_F(x-y)$ sia la funzione di Feynman per $m=0$, $\Delta_F(x-y; 0)$. In presenza del lagrangiano di interazione (6.8) possiamo esprimere il funzionale generatore come (vedi la sezione 3.1),

$$(6.15) \quad Z[J, \bar{J}, J_\mu] = e^V Z^0[J, \bar{J}, J_\mu] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^n}{n!} Z^0[J, \bar{J}, J_\mu]$$

dove l'operatore vertice, V , è semplicemente $i \int d^4 x \mathcal{L}_1$, tradotto con le regole di corrispondenza (4.40), (5.16),

$$(6.16) \quad i\mathcal{L}_1(x) = ie \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \gamma^\mu \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)} \right) \left(i \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right) + i\delta m \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)} \right)$$

Questo sembra più complicato del caso scalare, ma in realtà è più semplice, almeno per un aspetto, infatti ciascuno dei due termini in \mathcal{L}_1 ha una sola derivata di ciascun tipo, e questo semplifica drasticamente l'aspetto combinatorio.

³In questo caso si ha anche $\delta m = 0$.

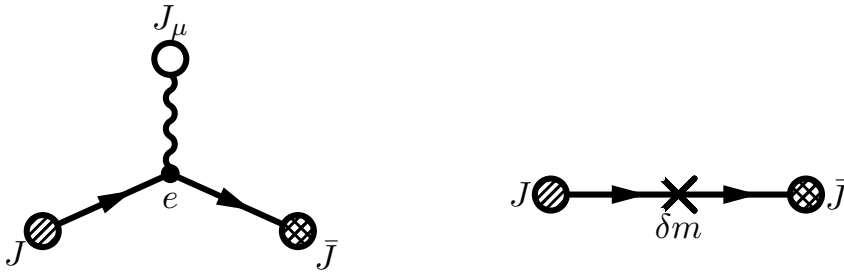


Figura 6.1: I due diagrammi con un singolo vertice

Il termine V^n nello sviluppo di Z può essere calcolato direttamente, e risulta in una serie di termini che corrispondono a diagrammi di Feynman. Come nel caso scalare l'azione di ciascuna derivata può esercitarsi su Z^0 , e in questo caso viene calata una “linea con pallino”, cioè un termine $\Delta_F J_\mu$, o $S_F J$, o $\bar{J} S_F$, oppure si esercita su una “linea” prodotta da una derivata precedente, e in questo caso la “linea con pallino” diviene una linea interna. Se il pallino non viene catturato da una derivata successiva, quello che rimane è una linea esterna. Tutto questo si può esprimere in termini di diagrammi. Al primo ordine in V abbiamo i due diagrammi della figura 6.1. Notiamo alcune regole per interpretare questi grafici:

- I fotoni sono rappresentati da linee ondulate, e un pallino vuoto rappresenta un J_μ .
- Un pallino tratteggiato rappresenta una J e uno grigliato rappresenta una \bar{J} .
- Le linee fermioniche hanno un verso indicato sul diagramma, e si muovono da una J a una \bar{J} . Questa definizione del verso è arbitraria — avremmo potuto scegliere il verso da \bar{J} a J — ma è quella standard.
- Ci sono due tipi di vertice, uno associato alla interazione elettrone-fotone, l'altro al controtermine di massa, rappresentato con una croce.

Osserviamo più in dettaglio la corrispondenza tra vari elementi del diagramma ed elementi del risultato:

Linee fermioniche esterne Una derivata produce una linea esterna,

$$(6.17) \quad \begin{aligned} \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) Z^0 &= - \int d^4 y \bar{J}(y) S(y-x) Z^0 \\ \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)} \right) Z^0 &= - \int d^4 x S(y-x) J(x) Z^0 \end{aligned}$$

Linee fermioniche interne Applicando una seconda derivata il risultato dipende

dall'ordine (come ci aspettiamo dato che le derivate anticommutano),

$$(6.18) \quad \overbrace{\left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)}\right) \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} Z^0 = i S(y-x) Z^0, \quad \text{ma, scambiando l'ordine,}$$

$$\overbrace{\left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right) \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)}\right)} Z^0 = -i S(y-x) Z^0$$

dove la parentesi grafa indica che la derivata seconda opera sulla linea con pallino prodotta dalla prima derivata. Questo viene detto una *contrazione* tra due derivate.

Linee esterne fotoniche

$$(6.19) \quad \left(i \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}\right) Z^0 = - \int d^4 y \Delta_F(x-y) J_\mu(y) Z^0$$

Linee fotoniche interne Tenendo presente che $(\delta/\delta J^\nu(y))J_\mu(x) = g_{\mu\nu}\delta^4(x-y)$,

$$(6.20) \quad \overbrace{\left(i \frac{\delta}{\delta J^\nu(x)}\right) \left(i \frac{\delta}{\delta J^\mu(y)}\right)} Z^0 = -i g^{\mu\nu} \Delta_F(x-y) Z^0$$

Possiamo direttamente formulare le regole per l'interpretazione dei diagrammi nello spazio degli impulsi. Cominciamo col ricordare l'espressione di Δ_F (3.40) e S_F (4.38), da cui per una linea interna fotonica e fermionica abbiamo rispettivamente

$$(6.21) \quad -i g_{\mu\nu} \Delta_F(x-y) = \frac{-i g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{1}{p^2 + i\epsilon} e^{-ipx} e^{ipy},$$

$$(6.22) \quad i S_F(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ipx} e^{ipy} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Per una linea esterna che finisce in una J (vedi la seconda delle (6.17)) abbiamo:

$$(6.23) \quad - \int d^4 x S(y-x) J(x) = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ipy} \frac{\not{p} + m}{E^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon} J(p)$$

dove $J(p)$ è la trasformata di Fourier della $\bar{J}(x)$,

$$(6.24) \quad J(p) = \int d^4 x e^{-ipx} J(x)$$

Analogamente

$$(6.25) \quad - \int d^4 y \bar{J}(y) S(y-x) = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{ipx} \bar{J}(p) \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

dove $\bar{J}(p)$ è la trasformata di Fourier della $\bar{J}(x)$,

$$(6.26) \quad \bar{J}(p) = (J(p))^\dagger \gamma^0 = \int d^4 y e^{-ipy} \bar{J}(y)$$

e infine per una linea esterna fotonica

$$(6.27) \quad - \int d^4x \Delta_F(x-y) J_\mu(y) = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{1}{p^2 + i\epsilon} e^{-ipx} J_\mu(p)$$

$$J_\mu(p) = \int d^4y e^{ipy} J_\mu(y)$$

I vari fattori $e^{\pm ipx}$ confluiscono nei vertici in cui le linee terminano, e vanno integrati, producendo un fattore $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_i)$ che garantisce la conservazione dell'impulso in ogni singolo vertice.

Dato siamo principalmente interessati alle regole di Feynman per calcolare gli elementi di matrice S , non ci preoccupiamo ulteriormente di formalizzare quelle relative al calcolo perturbativo del funzionale generatore.

6.3 Grafici di Feynman per la matrice S

Abbiamo a questo punto tutto il necessario per stabilire le regole di calcolo degli elementi di matrice S che si otterranno da quelle relative al funzionale generatore mediante la formula di riduzione (6.13). In questa formula compare una trasformata di Fourier della funzione di Green che corrisponde al processo, nel senso che contiene i campi necessari alla creazione delle particelle iniziali e distruzione delle particelle finali. La funzione di Green si calcolerà dal funzionale generatore, espresso come una somma di diagrammi secondo il procedimento delineato nelle sezioni precedenti, tramite le regole di corrispondenza (4.40), (5.16). Siamo interessati, come discusso nella sezione 3.2, alla parte connessa della matrice S , quella che descrive un processo non scomponibile in processi fisicamente indipendenti, e che corrisponde ai diagrammi connessi.

Ad esempio il termine per un fermione uscente nella formula di riduzione si traduce in (vedi eq. 3.38)

$$\int d^4x e^{iqx} (\bar{u}_r(\vec{q}) \psi(x)) = \bar{u}_r(\vec{q}) \int d^4x e^{iqx} \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)} \right) = -i(2\pi)^4 \bar{u}_r(\vec{q}) \left(\frac{\delta}{\delta \bar{J}(q)} \right)$$

che, applicato al fattore relativo a una linea esterna di tipo “ \bar{J} ” nel funzionale Z , eq. (6.25), dà

$$i e^{iqx} \frac{\bar{u}_r(\vec{q})(\not{q} + m)}{q^2 - m^2 + i\epsilon} = i e^{iqx} \frac{2m \bar{u}_r(\vec{q})}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$$

dove abbiamo utilizzato l'equazione di Dirac, $\bar{u}(\vec{q}) \not{q} = m \bar{u}(\vec{q})$. Paragonando con la formula di riduzione vediamo che il fattore “ i ” si semplifica. Se adesso esaminiamo il termine che corrisponde a un anti-fermione entrante, troviamo

$$\int d^4x e^{-iqx} (\bar{v}_r(\vec{q}) \psi(x)) = \bar{v}_r(\vec{q}) \int d^4x e^{-iqx} \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)} \right) = -i(2\pi)^4 \bar{v}_r(\vec{q}) \left(\frac{\delta}{\delta \bar{J}(-q)} \right)$$

che, applicato alla linea esterna di tipo “ \bar{J} ”, porta a

$$i e^{-iqx} \frac{\bar{v}_r(\vec{q})(-\not{q} + m)}{q^2 - m^2 + i\epsilon} = i e^{-iqx} \frac{2m \bar{v}_r(\vec{q})}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Risultati analoghi si ottengono per fermioni entranti, anti-fermioni uscenti e fotoni, entranti o uscenti. Sostituendo nella formula di riduzione i denominatori si semplificano, per cui si può direttamente passare al limite $E_i \rightarrow \omega_i$, e arriviamo alla espressione generale per l'elemento di matrice S ,

$$(6.28) \quad \langle f|S|i\rangle = \left(\prod_{\text{Ferm.}} \sqrt{2m} \right) \left(\prod_{\text{Antif.}} (-1) \right) \left(\prod_{\text{Tutte}} 2\omega_q (2\pi)^3 Z \right)^{-1/2} (2\pi)^4 i \delta^4 \left(\sum_{\text{In}} q_i - \sum_{\text{Fin}} q_i \right) \mathcal{M}_{fi}$$

dove abbiamo messo in evidenza i fattori cinematici e messo in evidenza un fattore $(2\pi)^4 i \delta^4 (\sum_{\text{In}} q_i - \sum_{\text{Fin}} q_i)$ che garantisce la conservazione dell'energia e della quantità di moto. Il fattore "i" segue la convenzione secondo cui la matrice S viene espressa come $1 + iT$, dove T è la matrice di transizione. In termini di diagrammi — ci limitiamo a diagrammi connessi per esprimere la parte connessa della matrice S — avremo:

$$(6.29) \quad (2\pi)^4 i \delta^4 \left(\sum_{\text{In}} q_i - \sum_{\text{Fin}} q_i \right) \mathcal{M}_{fi} = \sum D_i$$

Per definire meglio le regole per il calcolo dei diagrammi dobbiamo dire qualcosa di più sulla loro struttura. Per prima cosa osserviamo che (vedi eq. 6.16) ad ogni vertice afferiscono due linee fermioniche, una di tipo " \bar{J} " prodotta dalla derivata $\delta/\delta J$, che possiamo considerare *uscente* dal vertice, l'altra di tipo " J ", prodotta da $\delta/\delta \bar{J}$, che possiamo considerare *entrante*. Come risulta dalla (6.18) una linea uscente da un primo vertice risulterà entrante in un secondo. Quindi se seguiamo una linea fermionica di vertice in vertice si possono realizzare due situazioni: o arriviamo a una linea uscente dal diagramma (e seguendola all'indietro a una linea entrante nel diagramma), oppure torniamo al punto di partenza. Quindi nei diagrammi ci sono due tipi di linee fermioniche: linee aperte e linee chiuse (in inglese *loops*). Dato che si tratta di fermioni, dobbiamo stare attenti ai segni. Nei due termini del vertice (6.16) la derivata $\delta/\delta \bar{J}$ (linea entrante) è a destra di $\delta/\delta J$ (linea uscente). Per una linea aperta possiamo ordinare gli operatori V che vi contribuiscono in modo che siano contigui e che le contrazioni avvengano sempre tra il fattore $\delta/\delta \bar{J}$ in uno dei vertici e il $\delta/\delta J$ in quello alla sua destra, una situazione che chiameremo *normale*. Ad esempio, per una linea aperta con tre vertici in x, y, z ,

$$\left[\left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \gamma^\mu \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)} \right) \right] \left[\left(i \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) \gamma^\nu \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)} \right) \right] \left[\left(i \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \gamma^\sigma \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(z)} \right) \right]$$

di modo che siamo sempre nel caso della prima delle (6.18). Nel caso di una linea fermionica chiusa troviamo necessariamente un numero dispari di casi in cui vengono contratte due derivate nell'ordinamento inverso, $\delta/\delta \bar{J}$ alla destra di $\delta/\delta J$, e in questi casi si applica la seconda (6.18), che ha il segno opposto alla prima. Ad esempio per una linea chiusa con due vertici,

$$\left[\left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \gamma^\mu \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)} \right) \right] \left[\left(i \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) \gamma^\nu \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)} \right) \right]$$

la contrazione interna è nell'ordine normale, quella esterna nell'ordine opposto. Possiamo quindi usare sempre la prima delle (6.18) aggiungendo un ulteriore fattore (-1) per ciascuna linea chiusa. Abbiamo ommesso l'indicazione degli indici spinoriali, dato che gli indici contigui sono sommati. Nelle linee chiuse abbiamo anche una somma tra il primo e l'ultimo indice, una traccia: l'esempio che abbiamo dato corrisponde, includendo il fattore (-1) , a

$$(-1) \text{Tr} [\gamma^\mu iS_F(x-y) \gamma^\nu iS_F(y-x)]$$

Per quanto riguarda le linee aperte, l'espressione corrispondente si scrive da sinistra a destra *cominciando con la linea uscente*, che può rappresentare un fermione iniziale, o un antifermione finale, e finisce con la linea entrante — un fermione iniziale o un antifermione nello stato finale. Quindi per una linea fermionica aperta la regola è RISALIRE LA LINEA FERMIONICA COMINCIANDO DALLA FINE. Per una linea chiusa si può partire da qualunque vertice, RISALENDOLA LINEA, dato che la traccia è invariante rispetto a permutazioni circolari. Detto questo, gli elementi di un diagramma sono:

	Vertice elettrone-fotone	$ie \delta^4(\sum q_i) \gamma^\mu$
	Vertice controtermine	$i\delta m \delta^4(\sum q_i)$
	Linea interna fermionica	$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
(6.30)	Linea interna fotonica	$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$
	Linea Fermionica entrante	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Fermione iniziale} & u_r(\vec{q}) \\ \text{Antiferm. finale} & v_r(\vec{q}) \end{array} \right.$
	Linea Fermionica uscente	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Fermione finale} & \bar{u}_r(\vec{q}) \\ \text{Antiferm. iniziale} & \bar{v}_r(\vec{q}) \end{array} \right.$
	Linea Fermionica chiusa	Aggiungere un fattore (-1)

Nella espressione dell'ampiezza di transizione, eq. (6.28), appare un fattore (-1) per ciascun antifermione entrante o uscente. Questo può essere tranquillamente trascurato, dato che un fattore di questo tipo non ha conseguenze osservabili — quello che si misura è legato al modulo quadro dell'ampiezza di transizione. Al contrario il segno *relativo* tra diagrammi differenti che contribuiscono allo stesso processo sono fisicamente rilevanti. È questo il caso del fattore (-1) associato alle linee fermioniche chiuse, dato che diversi diagrammi per lo stesso processo possono avere un diverso numero di tali linee.

6.4 Combinatoria.

In poche parole: *non ci sono problemi di combinatoria*. Il fattore $1/n!$ che appare nello sviluppo di Z in potenze dell'operatore differenziale V (eq. 6.15) si compensa esattamente per i diagrammi connessi non di tipo vuoto-vuoto (i soli che ci interessano) dell'elettrodinamica quantistica. La ragione è che in un diagramma connesso ogni vertice ha un suo ruolo unico rispetto a quelli degli altri vertici. Supponiamo di avere dimostrato questo fatto, e di avere assegnato agli n vertici dei "ruoli"

$\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. Il diagramma con n vertici sarà prodotto dal termine $V^n/n!$, ed esistono $n!$ modi di assegnare gli n ruoli alle n copie di V . Questo cancella esattamente il fattore $1/n!$.

Resta da far vedere che in ogni diagramma i ruoli dei vertici sono tutti diversi. Per far questo basta far vedere che esiste un algoritmo per assegnare a ciascun vertice un numero d'ordine progressivo.

Passo (1) Supponiamo che ci siano $a > 0$ linee fermioniche aperte ed $l \geq 0$ linee fermioniche chiuse. Prima di tutto diamo un ordine alle linee aperte, ciascuna delle quali ha una identità definita dagli impulsi entranti e uscenti. Se A_1, A_2, \dots, A_a sono le linee aperte, possiamo aprire la lista dei vertici mettendo prima quelli di A_1 cominciando (per non perdere l'allenamento) dalla fine della linea, poi quelli di A_2 , e così via. Così abbiamo una lista che contiene tutti i vertici sulle linee aperte, ciascuno con il suo numero d'ordine.

Passo (2) Se $l > 0$ la lista deve ancora essere completata con i vertici di l linee chiuse. Almeno qualcuno di questi sarà connesso da un fotone con uno dei vertici già nella lista, altrimenti il diagramma sarebbe sconnesso, e tra questi scegliamo come prossimo nella lista quello connesso al vertice con il numero d'ordine più basso. Partendo dal vertice appena aggiunto alla lista, aggiungiamo alla lista gli altri vertici che si incontrano sulla stessa linea chiusa, risalendo la linea (sempre per l'allenamento).

Se $l-1 > 0$ la lista deve ancora essere completata con i vertici di $l-1$ linee chiuse. Almeno qualcuno di questi sarà connesso da un fotone con uno dei vertici già nella lista, altrimenti il diagramma sarebbe sconnesso, e tra questi scegliamo come prossimo nella lista quello connesso al vertice con il numero d'ordine più basso. Partendo dal vertice appena aggiunto alla lista, aggiungiamo alla lista gli altri vertici che si incontrano sulla stessa linea chiusa, risalendo la linea (sempre per l'allenamento).

... [Continuare fino a che restano vertici fuori dalla lista.]

Se non ci sono linee aperte (ad esempio $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma + \gamma$) diamo un ordine alle particelle entranti (necessariamente fotoni), e apriamo la lista con il vertice su cui arriva la prima di queste. Aggiungiamo i vertici che si trovano sulla stessa linea chiusa del primo (dobbiamo dire in che ordine?). Se rimangono $l > 0$ linee chiuse con vertici non catalogati, tornare al passo (2).

A questo punto ogni vertice ha il suo ruolo, ad esempio: "il vertice 7 è il terzo a partire dalla fine della seconda linea aperta" e la dimostrazione è completa.

Appendice A

Ampiezza di Transizione in assenza di Potenziale

Calcoliamo l'elemento di matrice $\langle q_2 | e^{-i \frac{T p^2}{2m}} | q_1 \rangle$. Assumiamo che gli autostati di q e di p siano normalizzati in modo che

$$\langle q' | q \rangle = \delta(q' - q), \quad \int dq |q\rangle \langle q| = \mathbf{1}$$

Se normalizziamo gli stati $|p\rangle$ in modo che

$$\begin{aligned} \langle q | p \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipq} && \text{troviamo che} \\ \langle p' | p \rangle &= \delta(p' - p), && \int dp |p\rangle \langle p| = \mathbf{1} \end{aligned}$$

Avremo quindi

$$\begin{aligned} \langle q_2 | e^{-i \frac{T p^2}{2m}} | q_1 \rangle &= \int dk \langle q_2 | e^{-i \frac{T p^2}{2m}} | k \rangle \langle k | q_1 \rangle \\ &= \int dk e^{-i \frac{T k^2}{2m}} \langle q_2 | k \rangle \langle k | q_1 \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-i \frac{T k^2}{2m}} e^{i(q_2 - q_1)k} \end{aligned}$$

l'integrale si semplifica costruendo un quadrato perfetto all'esponente,

$$= \frac{1}{2\pi} e^{i \frac{m(q_2 - q_1)^2}{2T}} \int dk e^{-i \frac{T(k - k_{cl})^2}{2m}}; \quad k_{cl} = \frac{m(q_2 - q_1)}{T}$$

e converge nel semipiano complesso inferiore di T , $\text{Im } T < 0$. Per valori reali di T possiamo definirlo, con un cambiamento di variabili, $k' = k - k_{cl}$, come

$$\int dk e^{-i \frac{T(k')^2}{2m}} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int dk' e^{-i \frac{(T - i\eta)(k')^2}{2m}} = \sqrt{\frac{2\pi m}{iT}}$$

dove la notazione $\eta \rightarrow 0^+$ indica che il limite va preso partendo da valori positivi di η . La necessità di passare al limite verso valori reali del tempo partendo da valori complessi nel semipiano inferiore, si riflette come vedremo nella famosa “regola dell’ $i\epsilon$ ” nel calcolo dei propagatori e dei diagrammi di Feynman. Sostituendo nella espressione precedente si ottiene il risultato della eq. (2.2).

Appendice B

Funzionale generatore dei grafici connessi

Vogliamo dimostrare che il funzionale generatore $Z[J]$ può essere scritto come

$$(B.1) \quad Z[J] = \exp(W[J]) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} W[J]^k$$

dove $W[J]$ è la somma di tutti i diagrammi connessi. La dimostrazione si applica egualmente allo sviluppo perturbativo di qualsiasi teoria di campo.

Possiamo scrivere la $Z[J]$ in termini dell'operatore "vertice" V ,

$$(B.2) \quad Z[J] = e^V Z^0[J] = \sum \frac{V^k}{k!} Z^0[J]$$

dove l'operatore V si ottiene direttamente dal lagrangiano di interazione,

$$(B.3) \quad V = i \int d^4x \mathcal{L}^1 \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)$$

e dipende dalla teoria. Nella $\lambda\phi^4$ (vedi eq. (3.5)) questo operatore è

$$V = \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4$$

e in teorie diverse può prendere una forma più complessa, eventualmente con più funzioni J in corrispondenza dei diversi campi. $Z^0[J]$, il funzionale generatore della teoria libera, può essere scritto come

$$(B.4) \quad Z^0[J] = \exp W^0[J]$$

dove $W^0[J]$ è la somma dei diagrammi connessi privi di vertici. Nella teoria $\lambda\phi^4$ l'unico diagramma di questo tipo è il diagramma (d) della figura 3.2, e troviamo (vedi eq. 3.4)

$$(B.5) \quad W_0[J] = \frac{-i}{2} \iint d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)$$

Ciascuna derivata funzionale della Z (vedi ad esempio le eq. (3.6), (3.7)) contiene un fattore $Z^0[J]$, quindi possiamo scrivere

$$(B.6) \quad Z[J] = \tilde{Z}[J] Z^0[J] = \tilde{Z}[J] \exp(W^0[J])$$

e notare che la $\tilde{Z}[J]$ si può esprimere mediante la somma di tutti quei diagrammi G , connessi e non connessi, *in cui ciascuna componente connessa ha almeno un vertice*

$$(B.7) \quad \tilde{Z} = 1 + \sum G$$

Per dimostrare la (B.1) occorre quindi dimostrare che

$$(B.8) \quad \tilde{Z} = \exp(\tilde{W}[J]) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{W}[J]^n$$

dove $\tilde{W}[J]$ è la somma di tutti i diagrammi *connessi, con uno o più vertici*, che immaginiamo ordinati in una lista $\{D_1, D_2, \dots\}$:

$$(B.9) \quad \tilde{W}[J] = \sum_{i=1}^{\infty} D_i[J]$$

La lista potrebbe cominciare con i diagrammi con un $v_i = 1$, poi quelli con $v_i = 2$ e via di seguito. Possiamo quindi scrivere

$$(B.10) \quad \exp(\tilde{W}[J]) = e^{D_1} e^{D_2} \dots e^{D_k} \dots = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots} \frac{D_1^{n_1}}{n_1!} \dots \frac{D_k^{n_k}}{n_k!} \dots$$

Per ciascun diagramma D_i indicheremo con v_i il numero dei vertici in esso contenuti. Il termine $V^k/k!$ nella (B.2) produrrà i diagrammi connessi con k vertici (un sottoinsieme della lista $\{D_1, D_2, \dots\}$) oltre a diagrammi non connessi che indicheremo con G

$$(B.11) \quad \frac{V^k}{k!} Z^0[J] = \left[\sum_i D_i \delta_{k v_i} + (\text{diagrammi } G \text{ non connessi}) \right] Z^0[J]$$

Consideriamo ora un diagramma G non connesso che contiene n_1 copie del diagramma connesso D_1 , n_2 copie di D_2 , e così via, quindi

$$(B.12) \quad G = K_G (D_1)^{n_1} (D_2)^{n_2} \dots$$

dove K_G è un coefficiente combinatorio. Per dimostrare la (B.8) dobbiamo dimostrare che K_G è lo stesso coefficiente con cui questo termine compare nella (B.10), cioè

$$(B.13) \quad K_G = \frac{1}{n_1!} \dots \frac{1}{n_k!} \dots$$

Per calcolare K_G dobbiamo partire dalla (B.2). Se $v_i \geq 1$ è il numero dei vertici nel grafico D_i , il numero totale delle componenti e dei vertici in G , n e v , saranno rispettivamente¹

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \quad v = \sum_{i=1}^{\infty} n_i v_i$$

¹Notiamo che anche se le somme sono estese sino ad infinito, stiamo considerando diagrammi con un numero finito di componenti, per cui solo alcune n_k saranno differenti da zero.

quindi G sarà prodotto dal termine $V^\nu/\nu!$ nella (B.2). In questo termine dovremo scegliere i ν_1 fattori V che producono ciascuna delle n_1 copie di D_1 , i ν_2 fattori che producono le copie di D_2 e così via (vedi la B.11). Questa scelta si può fare in

$$\frac{1}{\prod(n_i!)} \frac{\nu!}{\prod(\nu_i!)^{n_i}}$$

modi diversi. Infatti ci sono $\nu!$ permutazioni dei fattori V , ma questo numero va diviso per il numero di permutazioni delle V che contribuiscono a ciascuna componente connessa di G , e quindi dividiamo per $\prod(\nu_i!)^{n_i}$, e per il numero di permutazioni tra gli n_1 gruppi che danno le n_1 copie di D_1 e così via, e quindi dividiamo per $\prod(n_i!)$. Il fattore $\nu!$ si semplifica con il fattore $1/\nu!$ che accompagna il termine V^ν nello sviluppo della $Z[J]$, eq. (B.2). Analogamente ciascuno dei fattori $\nu_i!$ a denominatore si combinano (vedi la eq. B.11) con un V^{ν_i} a generare le componenti D_i .

In conclusione il valore del diagramma G , composto da n_1 copie di D_1 , n_2 copie di D_2 , e così via, è dato da

$$(B.14) \quad G[J] = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(D_i[J])^{n_i}}{n_i!}.$$

Il coefficiente K_G è dunque quello della (B.13), e questo conchiude la dimostrazione.

Appendice C

Invarianza di Lorentz e stati a una particella.

Nella sezione 2.11 abbiamo visto che gli elementi di matrice di un campo scalare tra vuoto e stati ad una particella sono dati, nella teoria senza interazioni, da espressioni del tipo della eq. (2.82) in cui appare un caratteristico fattore $1/\sqrt{2\omega}$. In questa appendice vogliamo dimostrare che questo fattore è determinato dalla invarianza del campo ϕ sotto trasformazioni di Lorentz, e dal fatto che abbiamo scelto per gli stati a una particella la normalizzazione

$$(C.1) \quad \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = \delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$$

Anche in presenza di interazioni la forma dell'elemento di matrice tra vuoto e stati a una particella è interamente determinato a meno di una costante moltiplicativa, detta *costante di rinormalizzazione*. Nel caso di un campo scalare reale, deve essere

$$(C.2) \quad \langle 0 | \phi(\vec{x}, t) | \vec{p} \rangle = \frac{\sqrt{Z}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_p}} e^{i(\vec{p}\vec{x} - \omega_p t)}$$

Questo risultato è utilizzato nella sezione 3.3 per ottenere la forma generale della funzione di Green a due punti e nella sezione 3.4 per stabilire la relazione tra funzioni di Green e elementi di matrice S . Notiamo che la dipendenza da \vec{x}, t è fissata dal valore dell'impulso e dell'energia della particella, quindi basterà verificare la (C.3) per $\vec{x} = t = 0$,

$$(C.3) \quad \langle 0 | \phi(0) | \vec{p} \rangle = \frac{\sqrt{Z}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_p}}$$

Per $\vec{p} = 0$ la (C.3) può essere considerata una definizione della *costante di rinormalizzazione* Z ,

$$(C.4) \quad \langle 0 | \phi(0) | \vec{p} = 0 \rangle = \frac{\sqrt{Z}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2m}}$$

e resta solo da dimostrare che una trasformazione di Lorentz porta dalla (C.4) alla (C.3). Consideriamo una trasformazione di Lorentz di velocità v lungo l'asse x (un *boost*) applicata al quadrivettore $q \equiv \{E, \vec{q}\}$,

$$(C.5) \quad q'_x = (Ev + q_x)/\sqrt{1-v^2}; \quad q'_y = q_y; \quad q'_z = q_z; \quad E' = (E + q_x v)/\sqrt{1-v^2}$$

che sarà rappresentata da una trasformazione unitaria \mathbf{B}_v sullo spazio di Hilbert. L'azione di \mathbf{B}_v sugli stati a una particella deve essere data da

$$(C.6) \quad \mathbf{B}_v |\vec{q}\rangle = h(\vec{q}, \vec{q}') |\vec{q}'\rangle$$

mentre lo stato vuoto $|0\rangle$ deve essere invariante,

$$(C.7) \quad \mathbf{B}_v |0\rangle = |0\rangle$$

Partendo da un impulso nullo si otterrà un impulso $p = \{\omega_p = m/\sqrt{1-v^2}, \vec{p}\}$, e possiamo scrivere

$$(C.8) \quad \mathbf{B}_v |\vec{p}=0\rangle = k(p) |\vec{p}\rangle; \quad (k(p) \equiv h(0, \vec{p}))$$

l'invarianza per rotazioni garantisce che $k(p)$ dipenda solo dal modulo di \vec{p} , e possiamo scegliere la fase dello stato $|\vec{p}\rangle$ in modo che $k(p)$ sia reale e positiva.

Il valore di $k(p)$ si determina nel modo seguente (vedi eq. C.1)

$$\delta^3(\vec{q}) = \langle \vec{q} | \vec{p}=0 \rangle = \langle \vec{q} | \mathbf{B}_v^\dagger \mathbf{B}_v | \vec{p}=0 \rangle = h^*(\vec{q}, \vec{q}') k(p) \langle \vec{q}' | \vec{p} \rangle = k^2(p) \delta^3(\vec{q}' - \vec{p})$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la prima $\delta^3(\vec{q})$, che garantisce che $\vec{q} = 0$, e quindi abbiamo sostituito $h(\vec{q}, \vec{q}')$ con $h(0, \vec{p}) = k(p)$ che è reale. Il \vec{q}' che appare come argomento dell'ultima δ è funzione di \vec{q} tramite la trasformazione di Lorentz, quindi

$$\delta^3(\vec{q}) = k^2(p) \delta^3(\vec{q}'(\vec{q}) - \vec{p}) = k^2(p) \left| \frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \right|_{\vec{q}=0}^{-1} \delta^3(\vec{q})$$

e con un semplice calcolo dello jacobiano della trasformazione di Lorentz,

$$k^2(p) = \left| \frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \right|_{\vec{q}=0} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\omega_p}{m}$$

e la (C.8) si può riscrivere

$$(C.9) \quad \mathbf{B}_v |\vec{p}=0\rangle = \sqrt{\frac{\omega_p}{m}} |\vec{p}\rangle$$

Dato che $\phi(x)$ è un campo scalare deve essere

$$(C.10) \quad \mathbf{B}_v^\dagger \phi(0) \mathbf{B}_v = \phi(0)$$

da cui

$$\langle 0 | \phi(0) | \vec{p}=0 \rangle = \langle 0 | \mathbf{B}_v^\dagger \phi(0) \mathbf{B}_v | \vec{p}=0 \rangle = \sqrt{\frac{\omega_p}{m}} \langle 0 | \phi(0) | \vec{p} \rangle$$

e quindi dalla (C.4) si ottiene la (C.3) e, per valori arbitrari di \vec{x}, t , la (C.2).

Bibliografia

- [1] P. A. M. Dirac, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, Band 3, Heft 1 (1933), Ristampato in *Quantum Electrodynamics*, a cura di J. Schwinger, Dover, 1958.
- [2] R. P. Feynman e A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, 1965.
- [3] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, 1994.
- [4] Michael E. Peskin e Daniel V Schroeder *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books, 1995.
- [5] Claude Itzykson e Jean-Bernard Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1980.
- [6] H. Lehman, K. Symanzig, W. Zimmermann, *Nuovo Cimento* **1**, 1425 (1955).
- [7] P. A. M. Dirac, *Quantum Mechanics*, Cap. VI, Oxford University Press.
- [8] F Mandl e G. Shaw, *Quantum Field Theory*, Wiley, 1984.
- [9] L Landau e E. Lifschitz, *Teoria Quantistica Relativistica*, Editori Riuniti.
- [10] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, primo volume, Cambridge University Press, 1995.