

# Pairing nucleare con forze realistiche

Paolo FINELLI - Stefano MAURIZIO

Scuola Raimondo Anni

Otranto

31 maggio 2013

# Sommario

Studio del pairing

Risultati: gap BCS

$^1S_0$  materia neutronica

$^1S_0$  materia nucleare simmetrica

$^3P_2 - ^3F_2$  materia neutronica

$^3S_1 - ^3D_1$  materia nucleare simmetrica

Risultati: crossover BCS-BEC

## Studio del pairing:

- ▶ sistema infinito (materia nucleare)
- ▶ materia neutronica (n-n) e materia nucleare simmetrica (n-p).

Studio del pairing nucleare tramite studio gap BCS in onde parziali nello spazio dei momenti (mediato sull'angolo sferico)

$$\Delta_L^J(p) = \sum_{L'} \frac{(-1)^{Z(LL')}}{\pi} \int V_{LL'}^J(p, q) \frac{\Delta_{L'}^J(q)}{E(q)} q^2 dq$$

$$E(p)^2 = (\varepsilon(p) - \varepsilon(p_F))^2 + \Delta(p)^2$$

$$Z(L, L') = 1 + (L - L')/2 \quad \Delta(p)^2 = \sum_L \Delta_L^J(p)^2$$

$$\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2M^*} \quad \Delta_F = \Delta(p_F)$$

## Studio del pairing:

- ▶ sistema infinito (materia nucleare)
- ▶ materia neutronica (n-n) e materia nucleare simmetrica (n-p).

Studio del pairing nucleare tramite studio gap BCS in onde parziali nello spazio dei momenti (mediato sull'angolo sferico)

$$\Delta_L^J(p) = \sum_{L'} \frac{(-1)^{Z(LL')}}{\pi} \int V_{LL'}^J(p, q) \frac{\Delta_{L'}^J(q)}{E(q)} q^2 dq$$

$$E(p)^2 = (\varepsilon(p) - \varepsilon(p_F))^2 + \Delta(p)^2$$

$$Z(L, L') = 1 + (L - L')/2 \quad \Delta(p)^2 = \sum_L \Delta_L^J(p)^2$$

$$\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2M^*} \quad \Delta_F = \Delta(p_F)$$

## Studio del pairing:

- ▶ sistema infinito (materia nucleare)
- ▶ materia neutronica (n-n) e materia nucleare simmetrica (n-p).

Studio del pairing nucleare tramite studio gap BCS in onde parziali nello spazio dei momenti (mediato sull'angolo sferico)

$$\Delta_L^J(p) = \sum_{L'} \frac{(-1)^{Z(LL')}}{\pi} \int V_{LL'}^J(p, q) \frac{\Delta_{L'}^J(q)}{E(q)} q^2 dq$$

$$E(p)^2 = (\varepsilon(p) - \varepsilon(p_F))^2 + \Delta(p)^2$$

$$Z(L, L') = 1 + (L - L')/2 \quad \Delta(p)^2 = \sum_L \Delta_L^J(p)^2$$

$$\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2M^*} \quad \Delta_F = \Delta(p_F)$$

## Studio del pairing:

Metodo per risolvere il problema (Khodel):  
decompone l'interazione come

$$V_{LL'}(k, k') = v_{LL'} \Phi_{LL'}(k) \Phi_{LL'}(k') + W_{LL'}(k, k')$$

$$v_{LL'} = V_{LL'}(k_F, k_F)$$

$$\Phi_{LL'}(k) = V_{LL'}(k, k_F) / v_{LL'}$$

$$W_{LL'}(k, k_F) = W_{LL'}(k_F, k) = 0$$

## Studio del pairing:

Se

$$\Delta_L(k) = \sum_{L_1 L_2} D_{L_1 L_2} \chi_L^{L_1 L_2}(k)$$

set di equazioni algebriche non lineari:

$$D_{LL'} = (-1)^{Z_{LL'} \nu_{LL'}} \int \frac{dq}{\pi} q^2 \Phi_{LL'}(q) \frac{\Delta_{L'}(q)}{E(q)}$$

accoppiate ad equazioni integrali quasi lineari  
(debole dipendenza da  $\Delta_F$ ):

$$\chi_L^{L_1 L_2}(k) - \sum_{L'} (-1)^{Z_{LL'}} \int \frac{dq}{\pi} q^2 W_{LL'}(k, q) \frac{\chi_{L'}^{L_1 L_1}(q)}{E(q)} = \delta_{LL_1} \Phi_{L_1 L_2}(k)$$

anche se  $\Delta_F = 0$  equazione non singolare.

# Interazione a due corpi:

$\chi PT$ :

EFT,  $\Lambda_\chi = 500 \text{ MeV}$ ;

equivalente alla QCD;

gdl:  $N, \pi$ ;

perturbativo in  $(Q/\Lambda_\chi)$ .<sup>a</sup>

$$V^{LO}(\vec{q}) = C_S + C_T \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

$$- \frac{g_A^2}{16\pi f_\pi^2} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q})}{q^2 + m_\pi^2}$$

2N Force

3N Force

LO  
 $(Q/\Lambda_\chi)^0$



NLO  
 $(Q/\Lambda_\chi)^2$



NNLO  
 $(Q/\Lambda_\chi)^3$

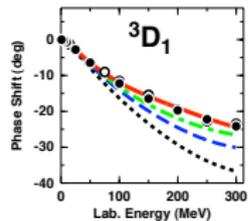
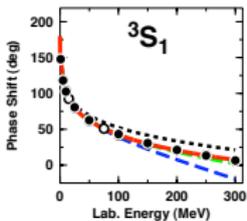
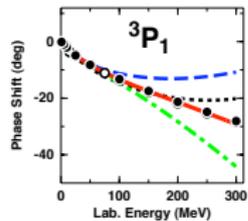
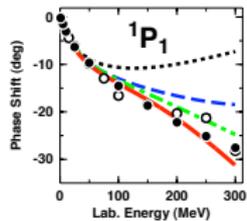
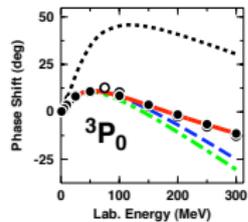
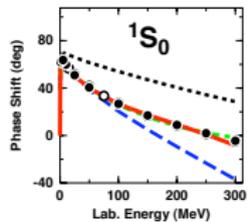


N<sup>3</sup>LO  
 $(Q/\Lambda_\chi)^4$

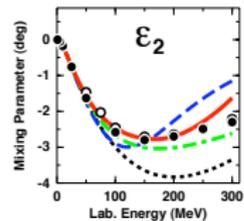
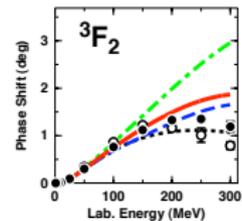
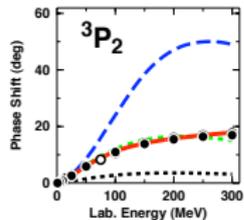
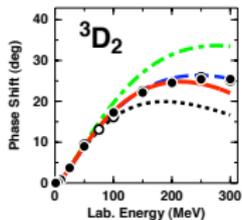
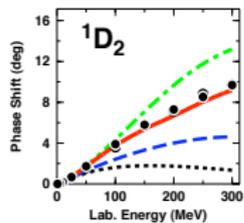
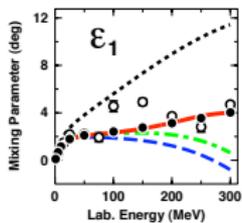


<sup>a</sup>R. Machleidt, D. R. Entem, 2011,  
Phys. Rep. **503**.

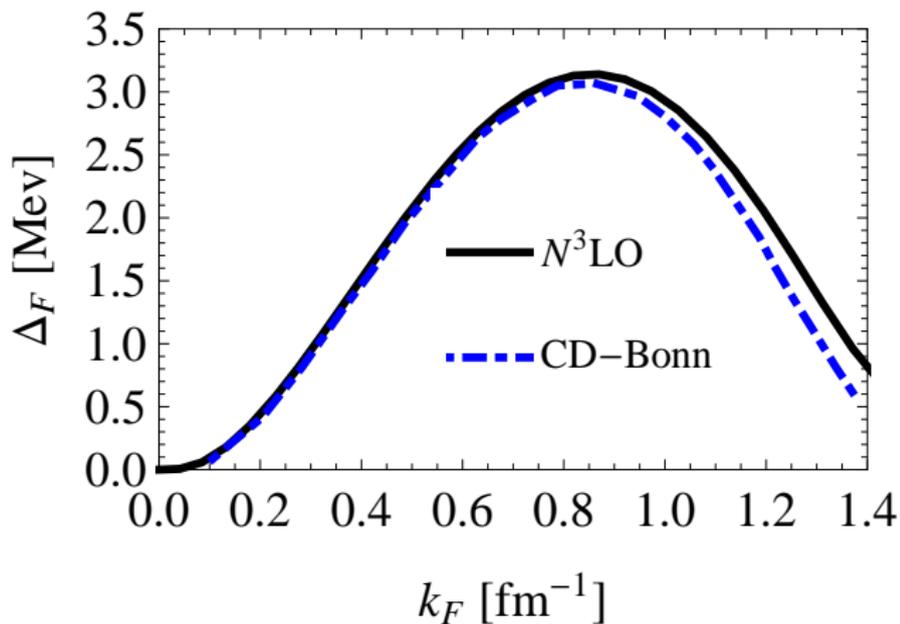
# Interazione a due corpi:



# Interazione a due corpi:

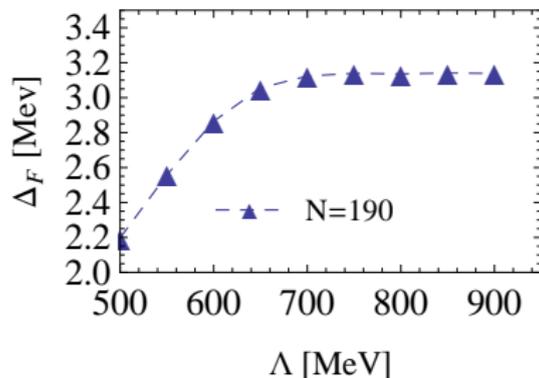


## Interazione a due corpi: $^1S_0$ n-n

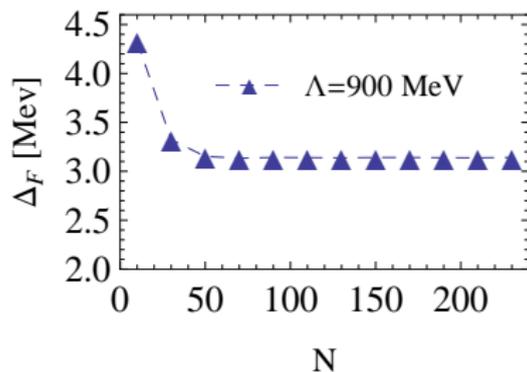


- ▶ Gap molto simile a quello previsto dal CD-Bonn;
- ▶ interazione più attrattiva ad alti  $k$  (dipendenza dall'interazione utilizzata).

## Interazione a due corpi: $^1S_0$ n-n



- ▶ Indipendenza dal taglio sui momenti;



- ▶ indipendenza dal numero di punti.

RG  $V_{low\ k}$ :

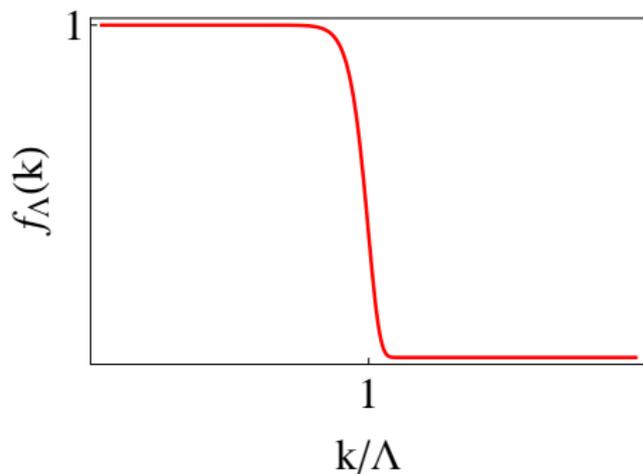
$V_{NN}$  potenziale di partenza

Famiglia di potenziali  $V_\Lambda(p, q)$

$V_\Lambda(p, q) = V_{NN}(p, q)$  se  $\Lambda \rightarrow \infty$

$$\text{se } k \ll \Lambda \quad f_\Lambda(k) = 1$$

$$\text{se } k \gg \Lambda \quad f_\Lambda(k) = 0$$



$$T_\Lambda(p, q; q^2) = V_\Lambda(p, q) + \frac{2}{\pi} \int dk k^2 V_\Lambda(p, k) f_\Lambda^2(k) \frac{1}{q^2 - k^2} T_\Lambda(k, q; q^2)$$

RG  $V_{low\ k}$ :

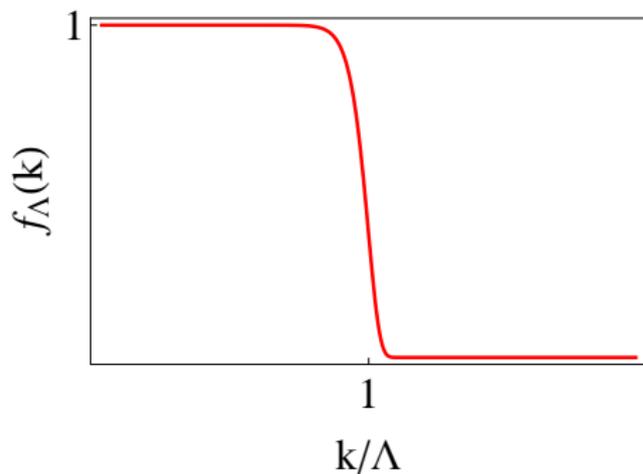
$V_{NN}$  potenziale di partenza

Famiglia di potenziali  $V_\Lambda(p, q)$

$V_\Lambda(p, q) = V_{NN}(p, q)$  se  $\Lambda \rightarrow \infty$

$$\text{se } k \ll \Lambda \quad f_\Lambda(k) = 1$$

$$\text{se } k \gg \Lambda \quad f_\Lambda(k) = 0$$



$$T_\Lambda(p, q; q^2) = V_\Lambda(p, q) + \frac{2}{\pi} \int dk k^2 V_\Lambda(p, k) f_\Lambda^2(k) \frac{1}{q^2 - k^2} T_\Lambda(k, q; q^2)$$

RG  $V_{low\ k}$ :

$$\frac{d}{d\Lambda} T_{\Lambda}(p, q; q^2) = 0$$

$$\frac{d}{d\Lambda} V_{\Lambda}(p, q) = \frac{2}{\pi} \int dk k^2 V_{\Lambda}(p, k) T(k, q; q^2) \frac{d}{d\Lambda} [f^2(k)] \frac{1}{k^2 - q^2}$$

$$V_{Low\ k}(p, q) = f_{\Lambda}(p) V_{\Lambda}(p, q) f_{\Lambda}(q)$$

Vantaggi:

- ▶ maggiore perturbatività;
- ▶ numericamente più agevole;
- ▶ universalità.

RG  $V_{low\ k}$ :

$$\frac{d}{d\Lambda} T_{\Lambda}(p, q; q^2) = 0$$

$$\frac{d}{d\Lambda} V_{\Lambda}(p, q) = \frac{2}{\pi} \int dk k^2 V_{\Lambda}(p, k) T(k, q; q^2) \frac{d}{d\Lambda} [f^2(k)] \frac{1}{k^2 - q^2}$$

$$V_{Low\ k}(p, q) = f_{\Lambda}(p) V_{\Lambda}(p, q) f_{\Lambda}(q)$$

Vantaggi:

- ▶ maggiore perturbatività;
- ▶ numericamente più agevole;
- ▶ universalità.

RG  $V_{low\ k}$ :

$$\frac{d}{d\Lambda} T_{\Lambda}(p, q; q^2) = 0$$

$$\frac{d}{d\Lambda} V_{\Lambda}(p, q) = \frac{2}{\pi} \int dk k^2 V_{\Lambda}(p, k) T(k, q; q^2) \frac{d}{d\Lambda} [f^2(k)] \frac{1}{k^2 - q^2}$$

$$V_{Low\ k}(p, q) = f_{\Lambda}(p) V_{\Lambda}(p, q) f_{\Lambda}(q)$$

Vantaggi:

- ▶ maggiore perturbatività;
- ▶ numericamente più agevole;
- ▶ universalità.

RG  $V_{low\ k}$ :

$$\frac{d}{d\Lambda} T_{\Lambda}(p, q; q^2) = 0$$

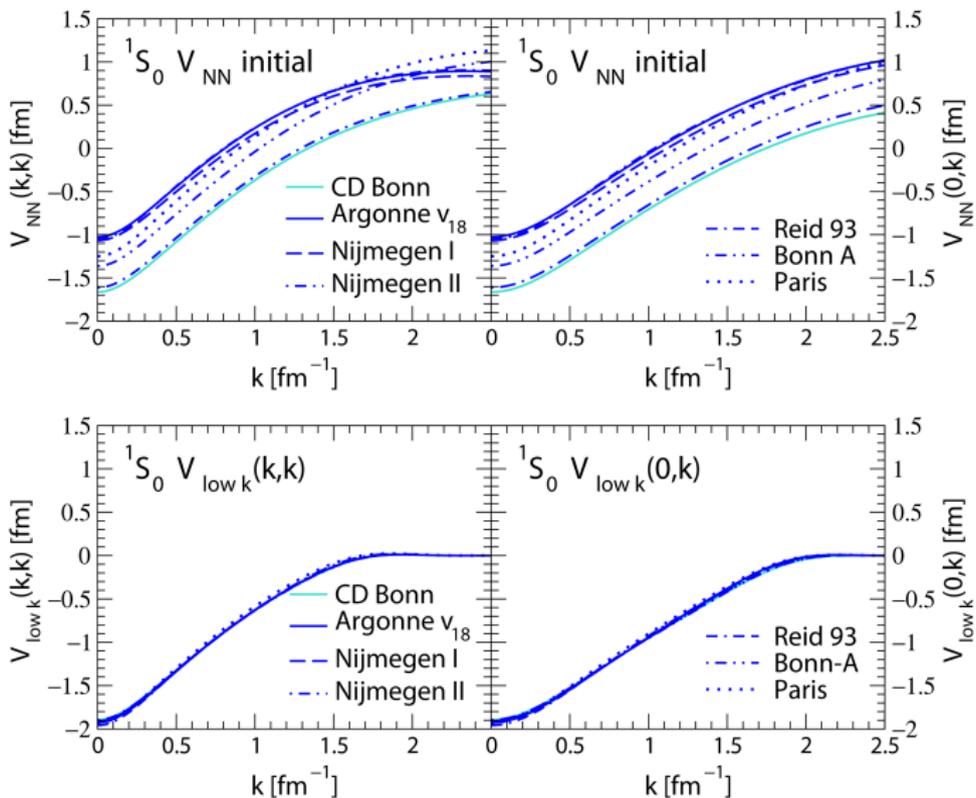
$$\frac{d}{d\Lambda} V_{\Lambda}(p, q) = \frac{2}{\pi} \int dk k^2 V_{\Lambda}(p, k) T(k, q; q^2) \frac{d}{d\Lambda} [f^2(k)] \frac{1}{k^2 - q^2}$$

$$V_{Low\ k}(p, q) = f_{\Lambda}(p) V_{\Lambda}(p, q) f_{\Lambda}(q)$$

Vantaggi:

- ▶ maggiore perturbatività;
- ▶ numericamente più agevole;
- ▶ universalità.

RG  $V_{low k}$ :

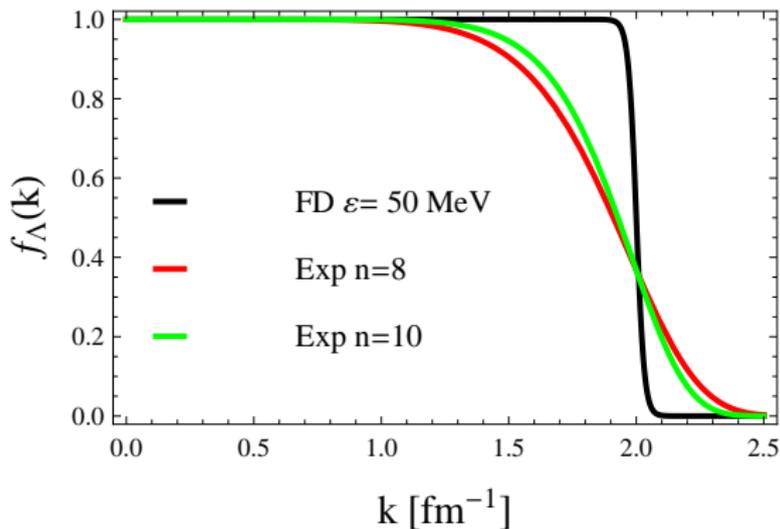


RG  $V_{low k}$ :

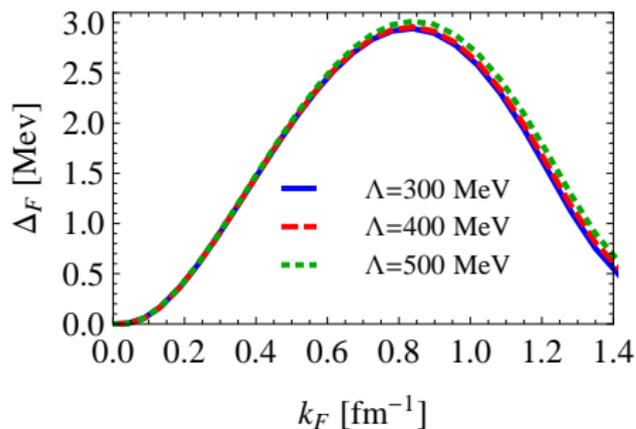
Utilizzate:

▶  $f_{\Lambda}(k) = 1 / \left( 1 + e^{(k^2 - \Lambda^2)/\varepsilon^2} \right)$  [FD]

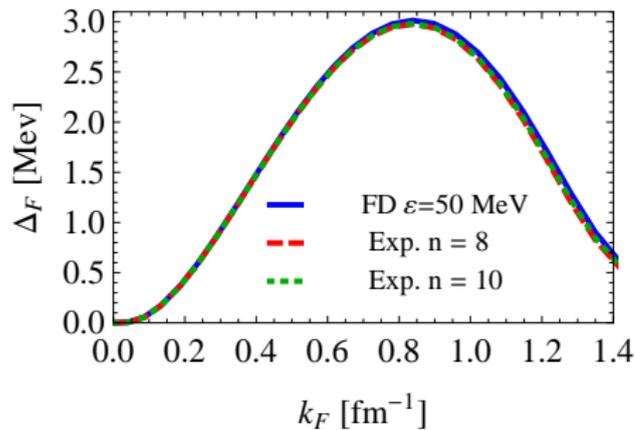
▶  $f_{\Lambda}(k) = e^{-(k/\Lambda)^n}$  [Exp]



RG  $V_{low k}$ :  $^1S_0$  n-n

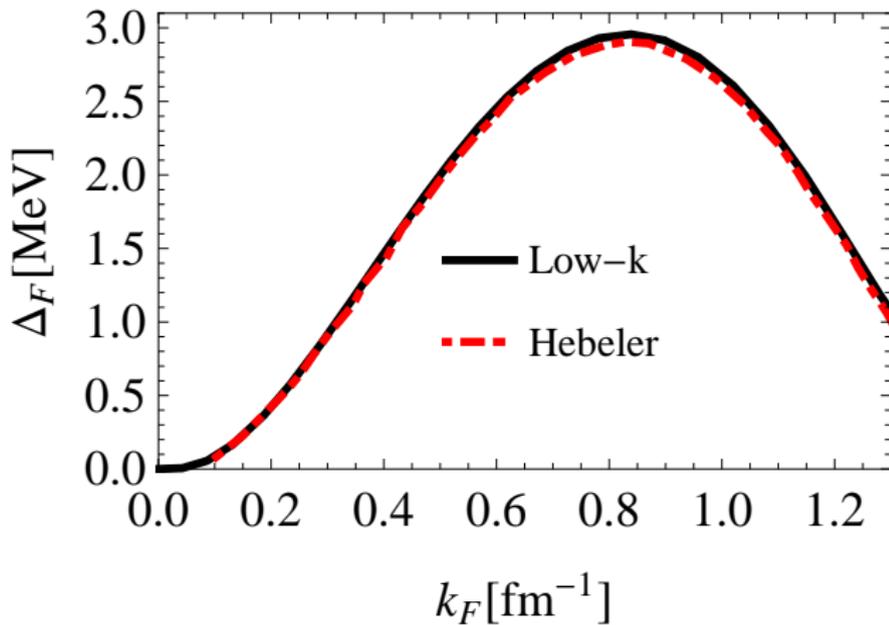


- ▶ Indipendenza dal cutoff;



- ▶ indipendenza dalla funzione regolatrice.

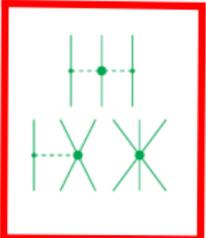
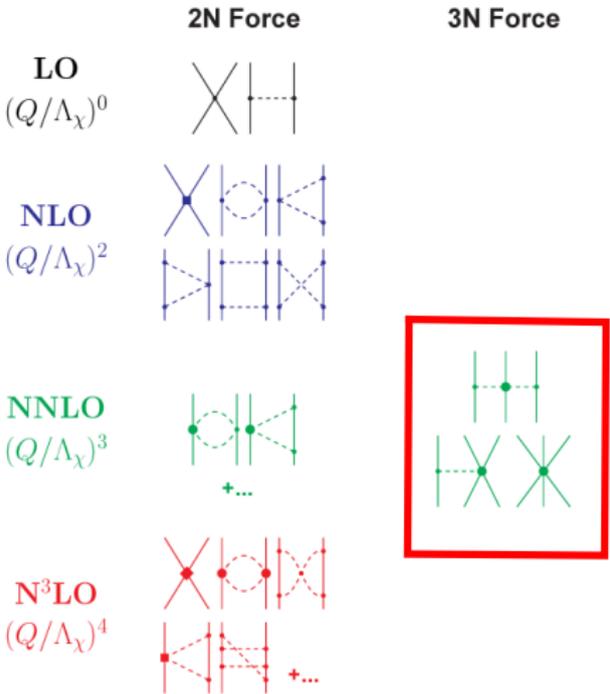
RG  $V_{low\ k}$ :  $^1S_0$  n-n



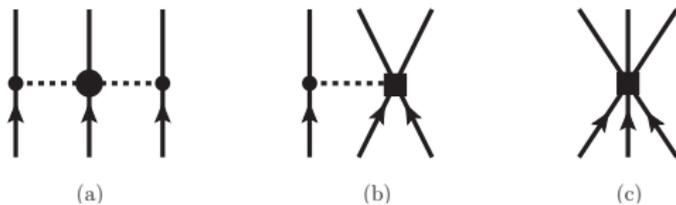
Ottimo accordo con i risultati precedenti.

# Interazione a tre corpi:

- ▶  $\chi PT$  prevede l'esistenza di interazione a tre corpi  $V_{3N}$ , ordine più basso:  $(Q/\Lambda_\chi)^3$ ;
- ▶ difficile da includere nel calcolo.



## Interazione a tre corpi:



$$V_{3N}^{(2\pi)} = \sum_{i \neq j \neq k} \frac{g_A^2}{8f_\pi^4} \frac{\vec{\sigma}_i \cdot \vec{q}_i \vec{\sigma}_j \cdot \vec{q}_j}{(\vec{q}_i^2 + m_\pi^2)(\vec{q}_j^2 + m_\pi^2)} F_{ijk}^{\alpha\beta} \tau_i^\alpha \tau_j^\beta$$

$$V_{3N}^{(1\pi)} = - \sum_{i \neq j \neq k} \frac{g_{ACD}}{8f_\pi^4 \Lambda_\chi} \frac{\vec{\sigma}_j \cdot \vec{q}_j}{\vec{q}_j^2 + m_\pi^2} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{q}_i \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j$$

$$V_{3N}^{(ct)} = \sum_{i \neq j \neq k} \frac{c_E}{2f_\pi^4 \Lambda_\chi} \vec{\tau}_i \cdot \vec{\tau}_j$$

$$F_{ijk}^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} (-4c_1 m_\pi^2 + 2c_3 \vec{q}_i \cdot \vec{q}_j) + c_4 \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \tau_k^\gamma \vec{\sigma}_k \cdot (\vec{q}_i \times \vec{q}_j)$$

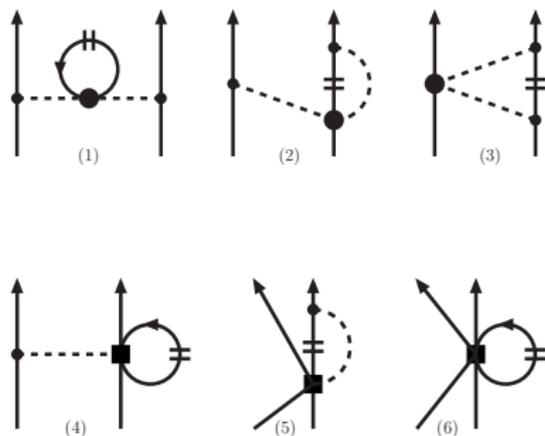
## Interazione efficace a due corpi:

Mediando sul mare di Fermi <sup>a</sup> si ottiene  $\bar{V}(p, q; k_F)$ .

La doppia linea corta rappresenta

$$-2\pi\delta(k_0)\theta(k_F - |\vec{k}|)G^0(k)$$

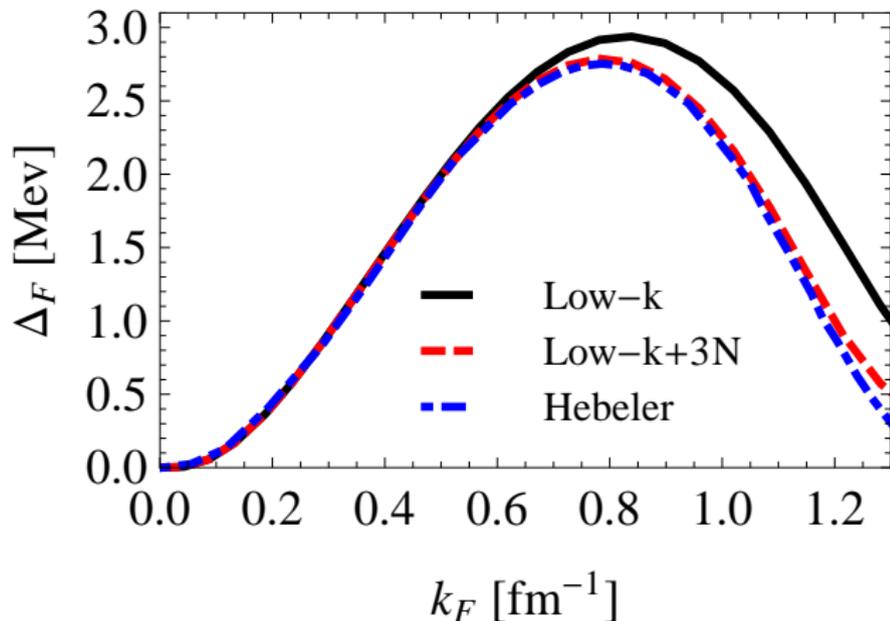
$G^0(k)$  propagatore del nucleone.



---

<sup>a</sup>J. W. Holt, J. W. and Kaiser, N. and Weise, 2010, Phys. Rev. C **81**.

## Interazione efficace a due corpi: $^1S_0$ n-n

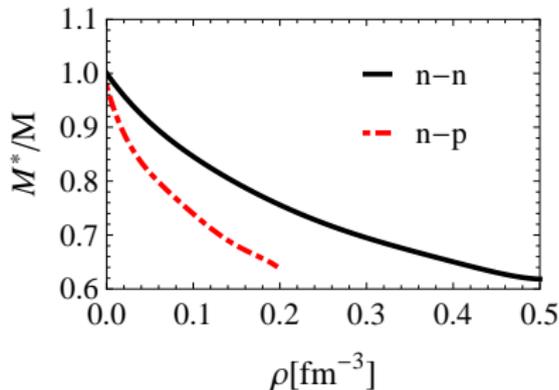
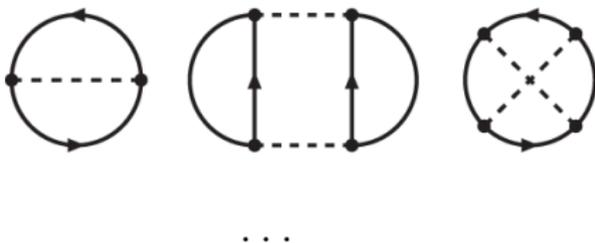


- ▶ Ottimo accordo con i risultati precedenti;
- ▶  $V_{3N}$  non trascurabile.

## Massa efficace:

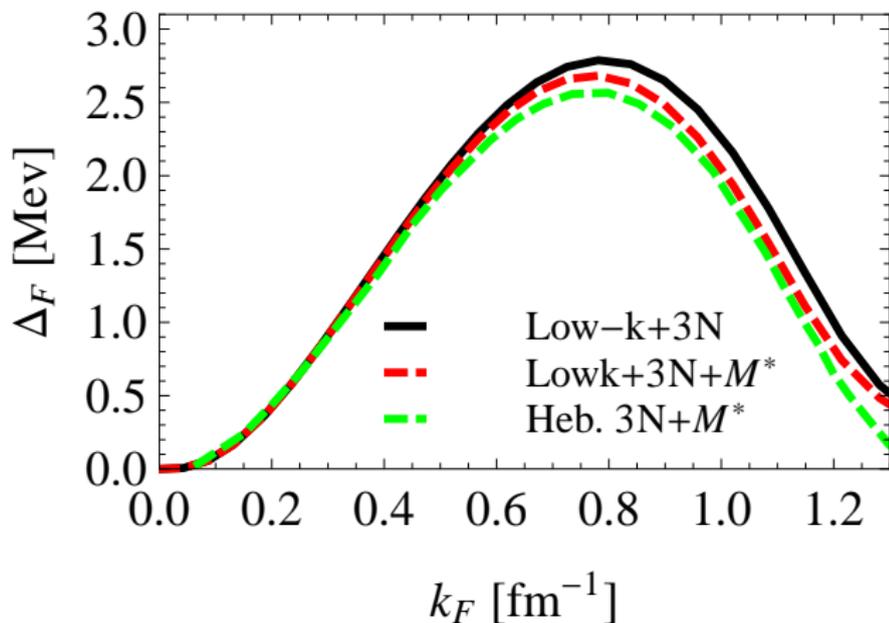
- ▶ Inclusione delle correzioni allo spettro tramite massa efficace  $M^*$  <sup>a</sup>;
- ▶  $M^*$  ottenuta a partire da  $\chi PT$  tramite DME;
- ▶ incluse forze a tre nucleoni

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\vec{r} - \vec{a}/2) \Psi_{\alpha}^{\dagger}(\vec{r} + \vec{a}/2) = & \frac{3\rho}{ak_f} j_1(ak_f) - \\ & \frac{a}{2k_f} j_1(ak_f) \left[ \tau - \frac{3}{5} \rho k_f^2 - \frac{1}{4} \vec{\nabla}^2 \rho \right] \\ & + \frac{3i}{2ak_f} j_1(ak_f) \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{J}) + \dots \end{aligned}$$



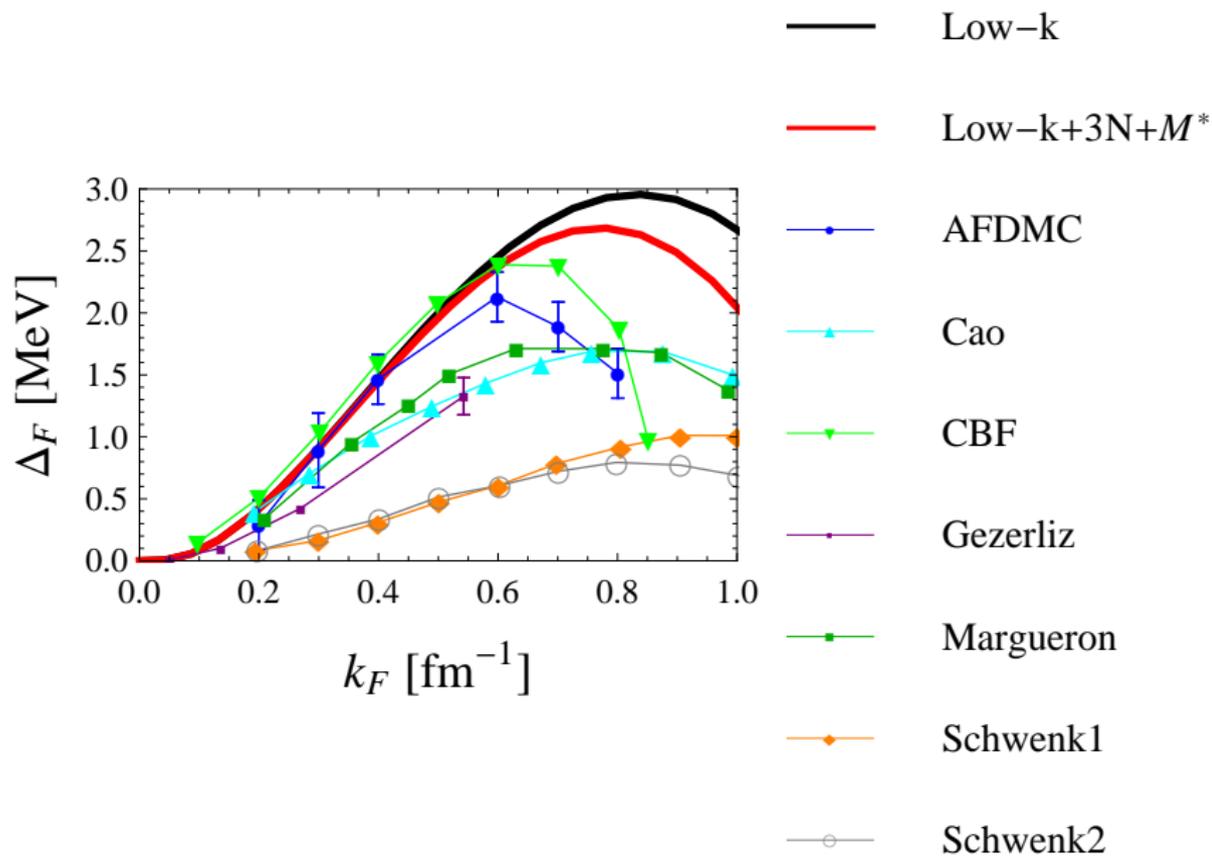
<sup>a</sup>J. W. Holt, N. Kaiser, and W. Weise, 2011, arxiv:nucl-th/11079.5996v1.

Massa efficace:  $^1S_0$  n-n



- ▶ Buon accordo con i risultati precedenti;
- ▶ effetto di  $M^*$  evidente.

# $^1S_0$ n-n: overview



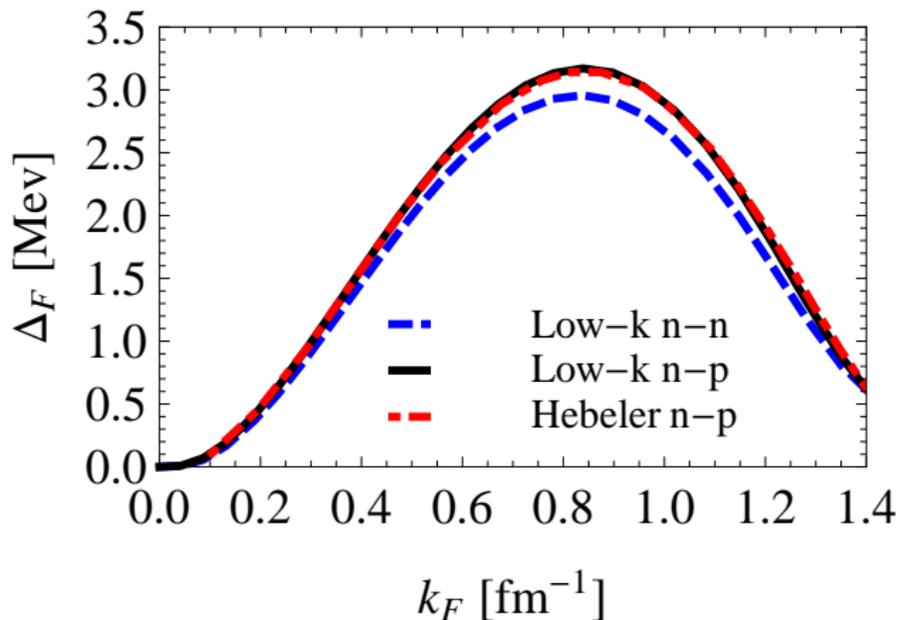
# ALTRI CANALI

$${}^1S_0 \quad n - p$$

$${}^3P_2 - {}^3F_2 \quad n - n$$

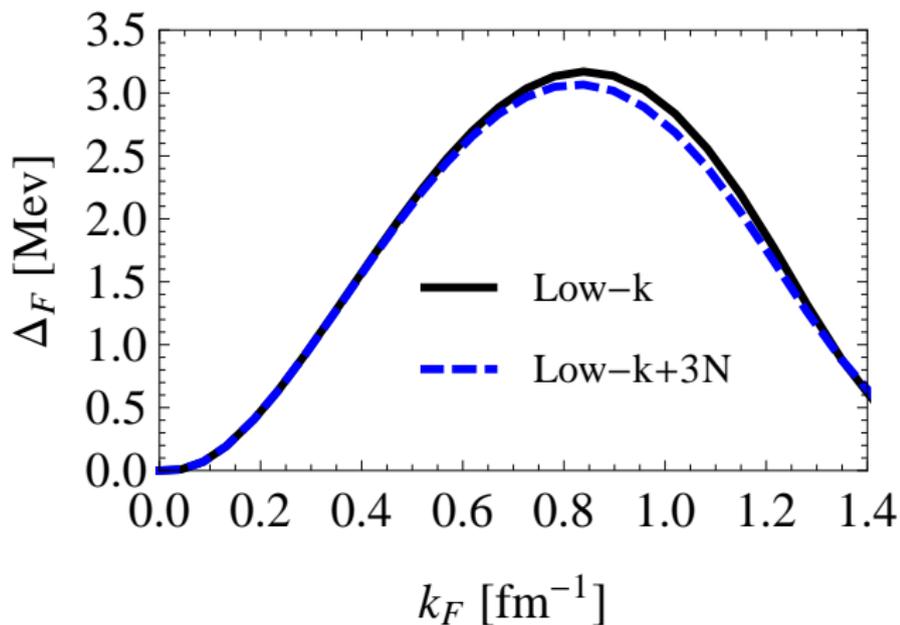
$${}^3S_1 - {}^3D_1 \quad n - p$$

RG  $V_{low k}$ :  $^1S_0$  n-p



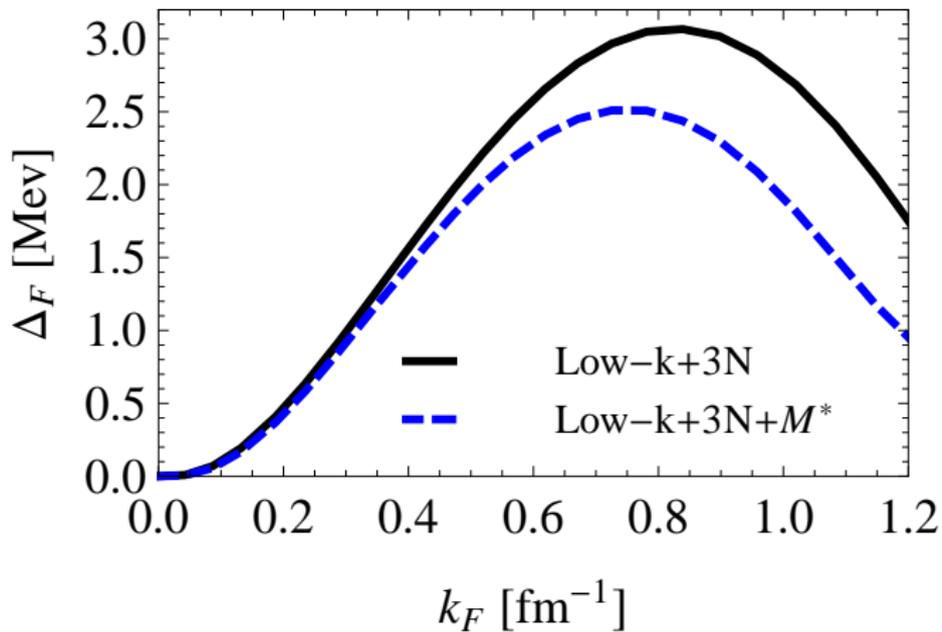
- ▶ Risultato simile a quello della materia neutronica;
- ▶ differenze dovute a C.S.B. e C.I.B.;
- ▶ ottimo accordo con i risultati precedenti.

# Interazione efficace a due corpi: ${}^1S_0$ n-p



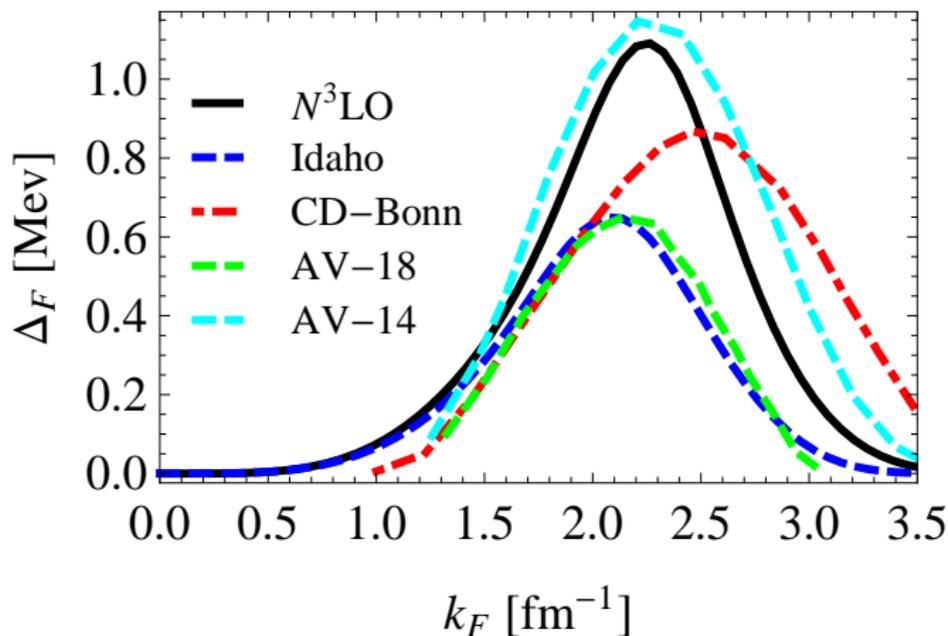
$V_{3N}$  trascurabile.

Massa efficace:  $^1S_0$  n-p



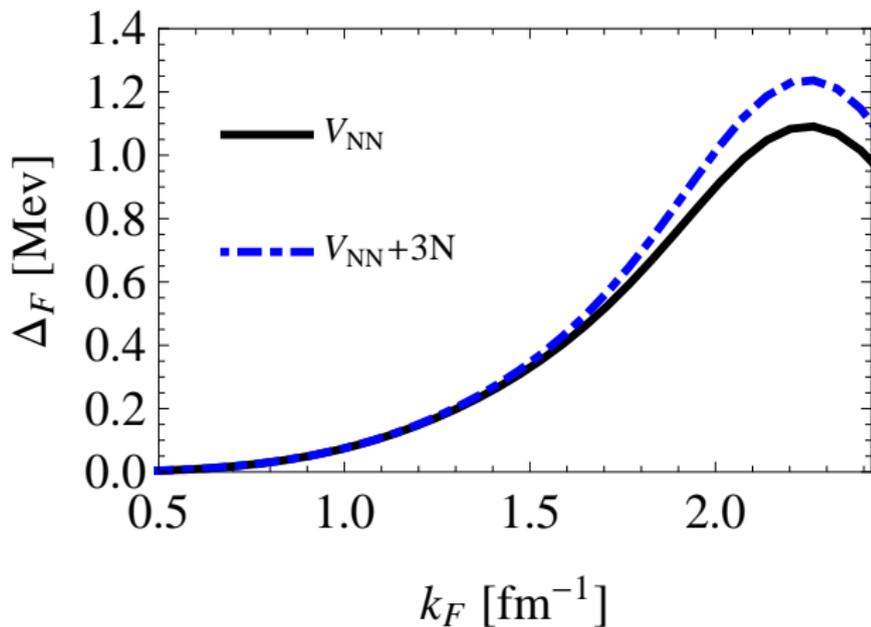
$M^*$  non trascurabile.

## Interazione a due corpi: ${}^3P_2 - {}^3F_2$ n-n



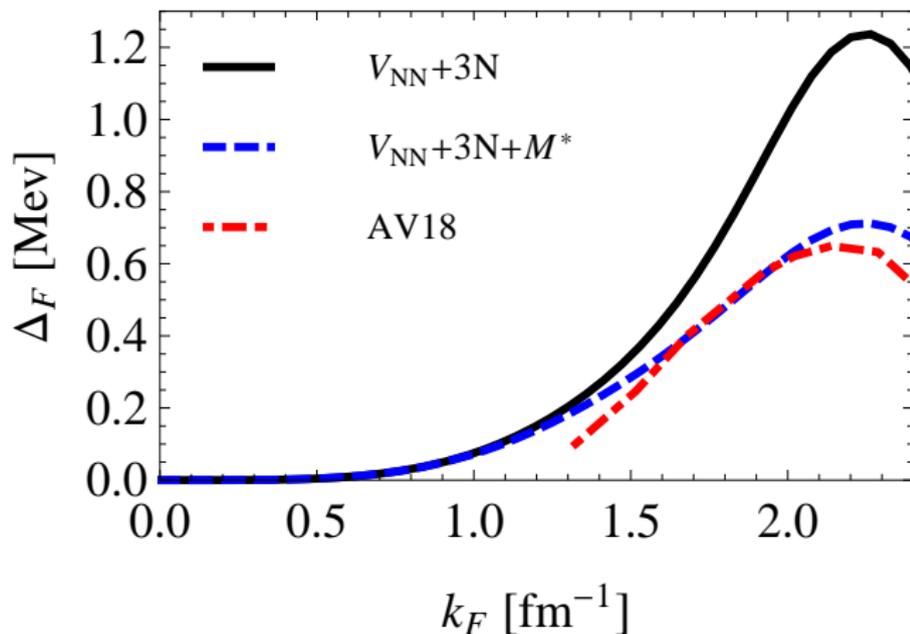
- ▶ Forte dipendenza dall'interazione usata;
- ▶ forte dipendenza dalle L.E.C.

Interazione efficace a due corpi:  ${}^3P_2 - {}^3F_2$  n-n



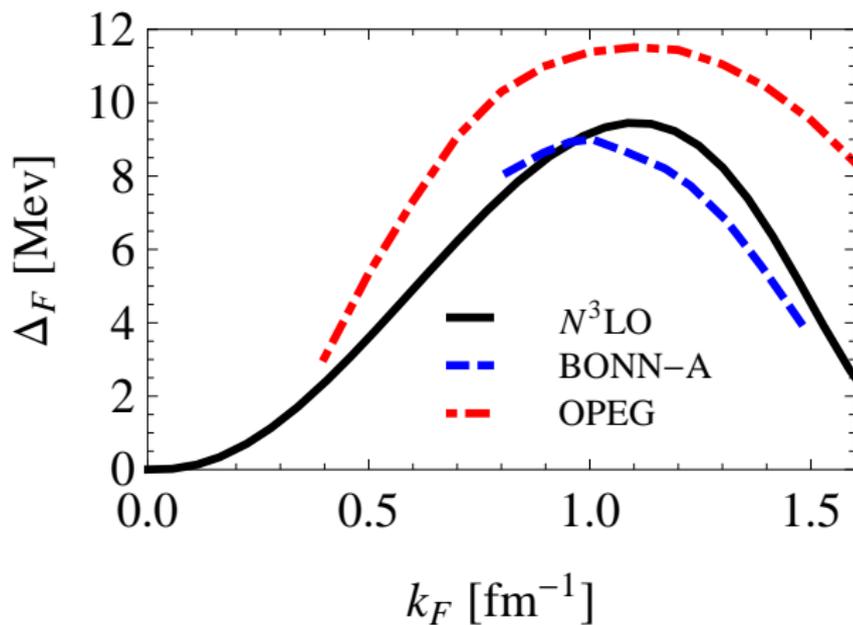
$V_{3N}$  non trascurabile ad alti  $k_F$ .

Massa efficace:  ${}^3P_2 - {}^3F_2$  n-n



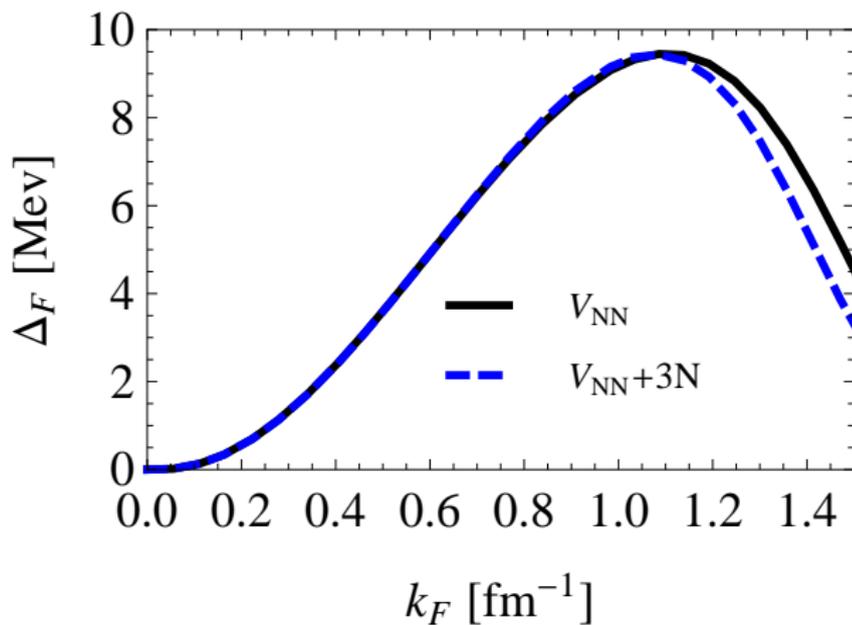
- ▶  $M^*$  importante ad alti  $k_F$ ;
- ▶ risultato compatibile con AV 18.

# Interazione a due corpi: ${}^3S_1 - {}^3D_1$ n-p



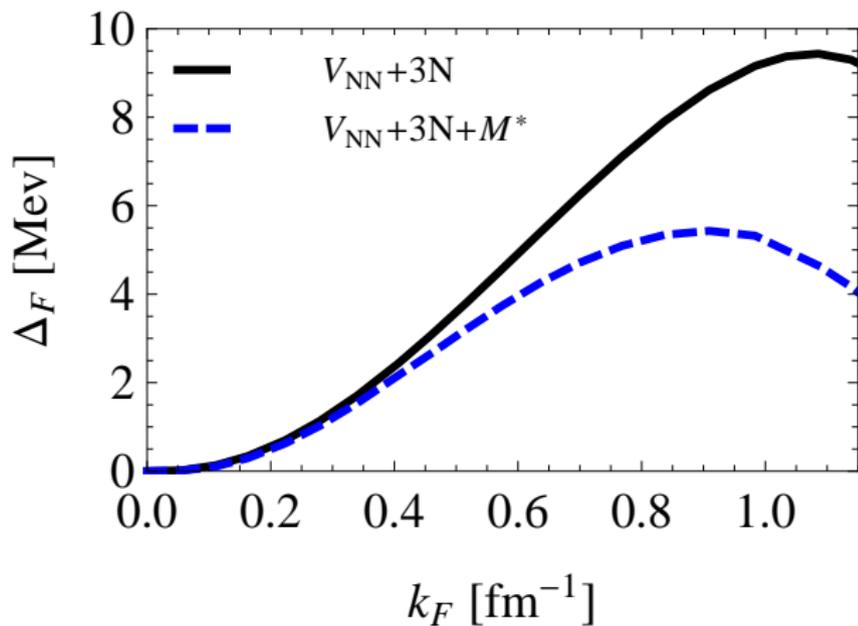
Lieve dipendenza dall'interazione.

Interazione efficace a due corpi:  ${}^3S_1 - {}^3D_1$  n-p



$V_{3N}$  trascurabile.

Massa efficace:  ${}^3S_1 - {}^3D_1$  n-p



$M^*$  non trascurabile.

## gap BCS: riassunto

- ▶ Singoletto: ottimo accordo con i risultati precedenti;
- ▶ tripletto: accordo qualitativo con i risultati precedenti;
- ▶  $V_{3N}$  rilevante nel caso n-n;
- ▶  $V_{3N}$  rilevante ad alte densità;
- ▶  $M^*$  molto rilevante nel caso n-p.

## gap BCS: riassunto

- ▶ Singoletto: ottimo accordo con i risultati precedenti;
- ▶ tripletto: accordo qualitativo con i risultati precedenti;
- ▶  $V_{3N}$  rilevante nel caso n-n;
- ▶  $V_{3N}$  rilevante ad alte densità;
- ▶  $M^*$  molto rilevante nel caso n-p.

## gap BCS: riassunto

- ▶ Singoletto: ottimo accordo con i risultati precedenti;
- ▶ tripletto: accordo qualitativo con i risultati precedenti;
- ▶  $V_{3N}$  rilevante nel caso n-n;
- ▶  $V_{3N}$  rilevante ad alte densità;
- ▶  $M^*$  molto rilevante nel caso n-p.

## gap BCS: riassunto

- ▶ Singoletto: ottimo accordo con i risultati precedenti;
- ▶ tripletto: accordo qualitativo con i risultati precedenti;
- ▶  $V_{3N}$  rilevante nel caso n-n;
- ▶  $V_{3N}$  rilevante ad alte densità;
- ▶  $M^*$  molto rilevante nel caso n-p.

## gap BCS: riassunto

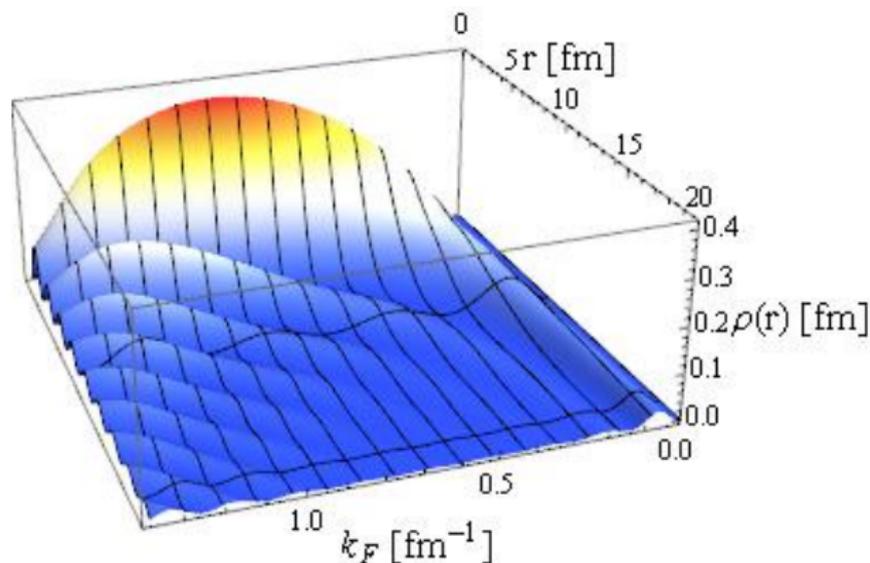
- ▶ Singoletto: ottimo accordo con i risultati precedenti;
- ▶ tripletto: accordo qualitativo con i risultati precedenti;
- ▶  $V_{3N}$  rilevante nel caso n-n;
- ▶  $V_{3N}$  rilevante ad alte densità;
- ▶  $M^*$  molto rilevante nel caso n-p.

## Crossover BCS-BEC:

A basse densità la coppia di Cooper cambia la sua struttura spaziale;

es:  $^1S_0$  nn

$$\rho(r) = |\psi(r)|^2 r^2 \quad \psi(k) \propto u(k)v(k)$$



possibilità crossover BCS-BEC:

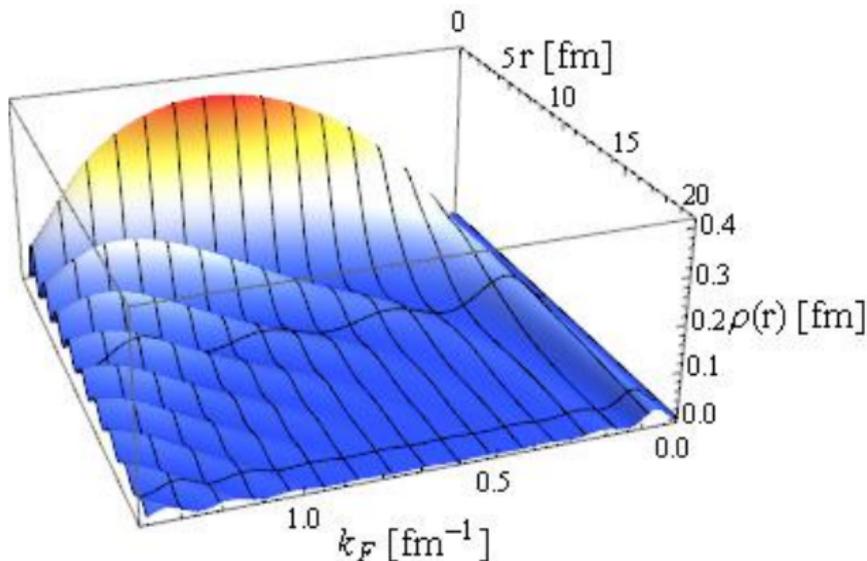
in tal caso coppia **compatta** e **molto legata**.

## Crossover BCS-BEC:

A basse densità la coppia di Cooper cambia la sua struttura spaziale;

es:  $^1S_0$  nn

$$\rho(r) = |\psi(r)|^2 r^2 \quad \psi(k) \propto u(k)v(k)$$



possibilità crossover BCS-BEC:

in tal caso coppia **compatta** e **molto legata**.

## Crossover BCS-BEC:

$d = \rho^{-1/3}$  distanza media fra i neutroni.

Indicatori di crossover <sup>a</sup>:

▶  $\Delta_F/\epsilon_F$  ;

▶  $\xi_{RMS}/d$

$$\xi_{RMS} = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^\infty \rho(r) r^2 dr};$$

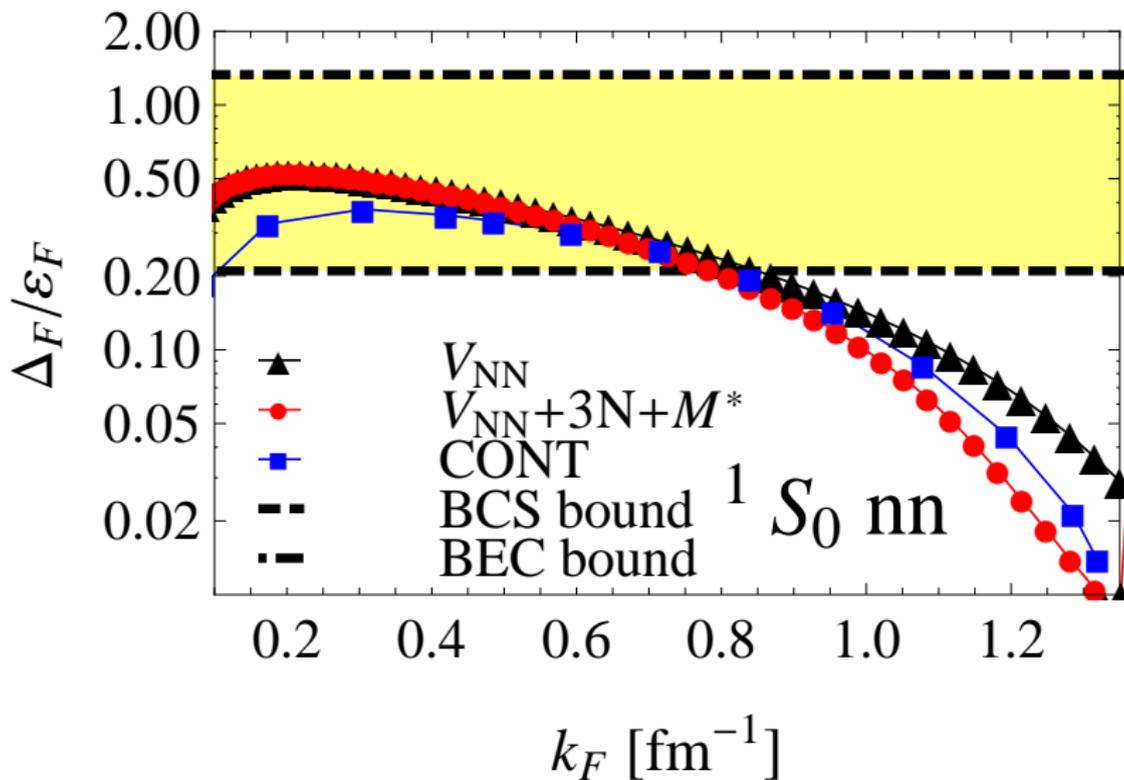
▶  $P(d) = \int_0^d \rho(r) dr.$

	BCS	BEC
$\Delta_F/\epsilon_F$	0.21	1.33
$\xi_{RMS}/d$	1.10	0.19
$P(d)$	0.81	1.00

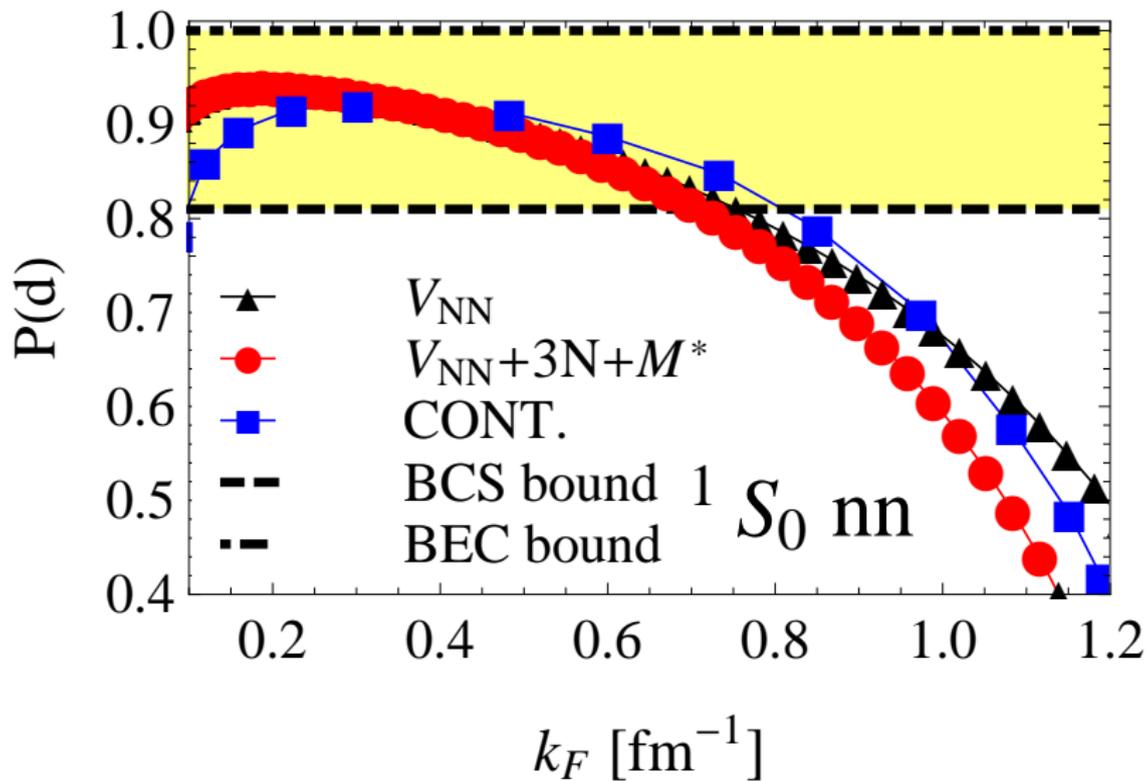
---

<sup>a</sup>M. Matsuo, 2006, Phys. Rev. C **73**.

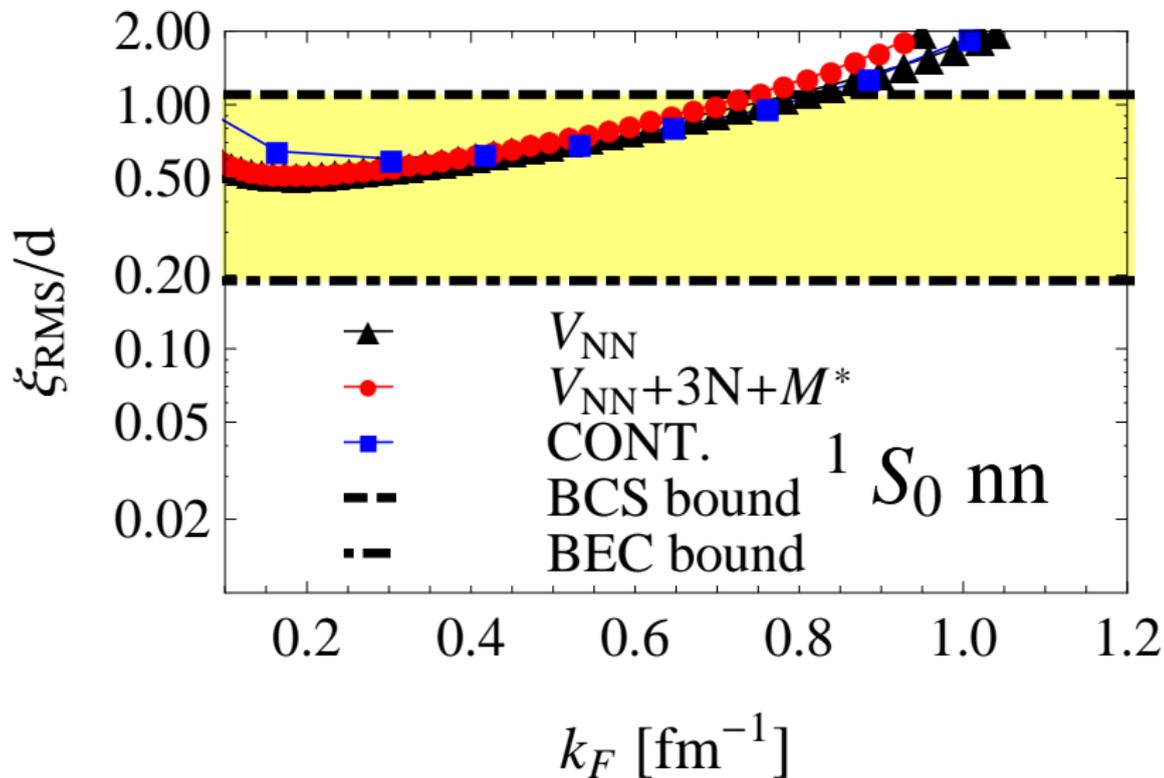
# Crossover BCS-BEC: $^1S_0$ n-n



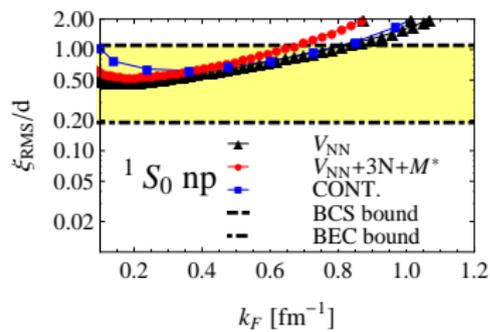
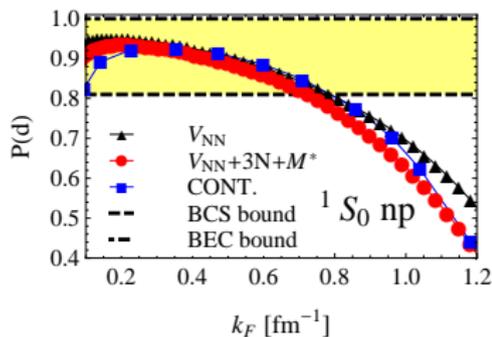
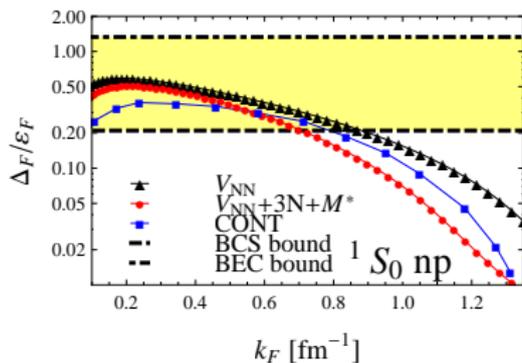
# Crossover BCS-BEC: $^1S_0$ n-n



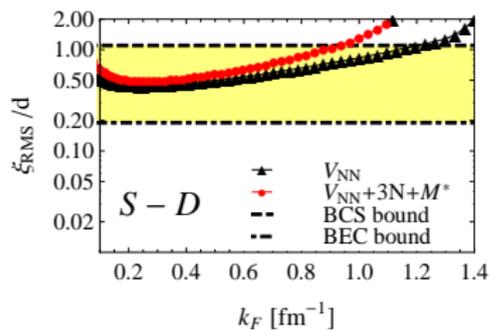
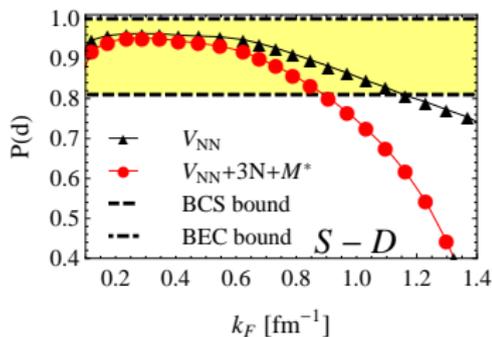
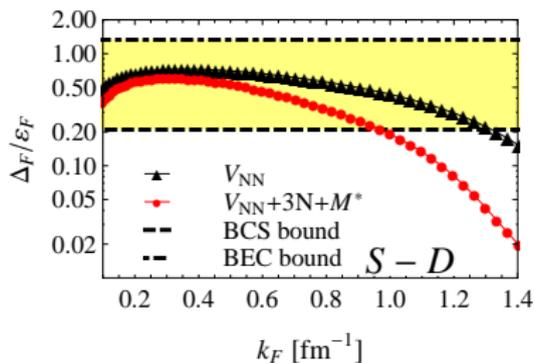
# Crossover BCS-BEC: $^1S_0$ n-n



# Crossover BCS-BEC: $^1S_0$ n-p



# Crossover BCS-BEC: ${}^3S_1 - {}^3D_1$ n-p



## Crossover BCS-BEC: riassunto

- ▶ Accordo con i risultati precedenti;
- ▶ nei canali S a bassa densità regime di crossover;
- ▶ accordo fra gli indicatori utilizzati.

## Crossover BCS-BEC: riassunto

- ▶ Accordo con i risultati precedenti;
- ▶ nei canali S a bassa densità regime di crossover;
- ▶ accordo fra gli indicatori utilizzati.

## Crossover BCS-BEC: riassunto

- ▶ Accordo con i risultati precedenti;
- ▶ nei canali S a bassa densità regime di crossover;
- ▶ accordo fra gli indicatori utilizzati.