



**SAPIENZA**  
UNIVERSITÀ DI ROMA

**“SAPIENZA” UNIVERSITÀ DI ROMA**

**Dipartimento di Fisica**

**Elettrodinamica Quantistica**

**Anno Accademico 2014-2015**

Appunti basati sulle lezioni di

Nicola Cabibbo, Luciano Maiani e Omar Benhar



# Indice

	<b>6</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>7</b>
<b>2 Integrali sui cammini di Feynman</b>	<b>11</b>
2.1 Calcolo dell'ampiezza di transizione . . . . .	11
2.2 L'approssimazione reticolare . . . . .	13
2.3 Il limite classico . . . . .	14
2.4 Il tempo come variabile complessa . . . . .	14
2.5 La meccanica statistica . . . . .	16
2.6 Le funzioni di Green . . . . .	16
<b>3 Passaggio alla teoria dei campi</b>	<b>21</b>
3.1 Il funzionale generatore . . . . .	23
3.2 L'oscillatore armonico . . . . .	26
3.3 Campi scalari liberi . . . . .	30
3.4 Campi scalari liberi: stati a una particella . . . . .	33
3.5 Operatori di creazione e di distruzione, normalizzazione del continuo . . . . .	34
<b>4 Sviluppo perturbativo delle funzioni di Green. Teoria <math>\lambda\phi^4</math></b>	<b>37</b>
4.1 Lo sviluppo perturbativo . . . . .	37
4.2 Diagrammi e regole di Feynman per le funzioni di Green . . . . .	41

4.3	Parti connesse e diagrammi vuoto-vuoto . . . . .	46
4.4	Rappresentazione spettrale della funzione di Green a due punti. . . . .	48
4.5	Funzione di Green a due punti in teoria delle perturbazioni. . . . .	51
<b>5</b>	<b>Processi di diffusione e matrice S</b> . . . . .	<b>57</b>
5.1	Stati asintotici “in” e “out” . . . . .	57
5.2	Ampiezze di diffusione e Matrice S . . . . .	60
5.3	Grandezze conservate . . . . .	61
5.4	Proprietà dei campi “in” e “out” . . . . .	62
5.5	Le formule di riduzione LSZ . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Diagrammi di Feynman per la matrice S. Teoria <math>\lambda\phi^4</math></b> . . . . .	<b>71</b>
6.1	Grafici irriducibili ad una particella . . . . .	71
6.2	Regole di Feynman per gli elementi della Matrice S . . . . .	74
<b>7</b>	<b>Il campo elettromagnetico</b> . . . . .	<b>77</b>
7.1	La scelta di gauge . . . . .	77
7.2	Il metodo di deWitt-Faddeev-Popov . . . . .	80
7.3	Il funzionale generatore e il propagatore . . . . .	81
7.4	Gli stati a un fotone . . . . .	83
7.5	Fotoni virtuali . . . . .	85
<b>8</b>	<b>Campi Fermionici</b> . . . . .	<b>89</b>
8.1	L'oscillatore armonico e l'oscillatore di Fermi . . . . .	89
8.1.1	Variabili anticommutanti . . . . .	91
8.1.2	Somma sui cammini per i due oscillatori . . . . .	92
8.1.3	Integrali gaussiani per variabili anticommutanti . . . . .	95
8.2	Quantizzazione del campo di Dirac . . . . .	97

---

8.2.1	Propagatore del fermione . . . . .	99
8.2.2	Il teorema di spin e statistica . . . . .	100
8.2.3	Stati ad una particella del campo di Dirac . . . . .	101
<b>9</b>	<b>Elettrodinamica quantistica (QED)</b>	<b>105</b>
9.1	Diagrammi di Feynman per il funzionale generatore . . . . .	106
9.2	Funzioni a due punti . . . . .	109
9.3	La formula di riduzione . . . . .	111
9.4	Diagrammi di Feynman per la matrice $S$ . . . . .	112
9.5	Combinatoria . . . . .	116
<b>10</b>	<b>Rinormalizzazione della QED</b>	<b>119</b>
10.1	Il propagatore del fotone . . . . .	121
10.2	La rinormalizzazione della carica . . . . .	124
10.3	Il propagatore dell'elettrone . . . . .	125
10.3.1	Il propagatore a tutti gli ordini . . . . .	127
10.4	Il vertice . . . . .	128
10.5	L'identità di Ward . . . . .	130
<b>11</b>	<b>Applicazioni della QED</b>	<b>133</b>
11.1	Diffusione in un campo esterno . . . . .	133
11.2	Bremsstrahlung e divergenza infrarossa . . . . .	136
11.3	Il Lamb shift . . . . .	139
11.4	Tensore di Polarizzazione del vuoto . . . . .	142
11.4.1	Integrazione in $D$ dimensioni . . . . .	142
11.4.2	Parametrizzazione di Feynman . . . . .	144
11.4.3	Calcolo del tensore $\Pi^{\mu\nu}(k)$ a un loop . . . . .	145
11.5	Il momento magnetico anomalo . . . . .	147

11.5.1 Preliminari . . . . .	148
11.5.2 Il calcolo . . . . .	149
<b>A Ampiezza di transizione in assenza di potenziale</b>	<b>155</b>
<b>B Funzionale generatore dei diagrammi connessi</b>	<b>157</b>
<b>C Cancellazione dei diagrammi vuoto-vuoto</b>	<b>161</b>
<b>D Invarianza di Lorentz e stati a una particella.</b>	<b>163</b>
<b>E Derivazione dell'ampiezza di diffusione Compton dalle formule di riduzione</b>	<b>165</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>168</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

In questo corso ci occuperemo di elettrodinamica quantistica, la teoria di campo che descrive l'interazione di particelle cariche con il campo elettromagnetico. L'elettrodinamica quantistica o QED (Quantum Electro Dynamics) è una teoria incompleta, dato che tutte le particelle elementari sono anche sottoposte all'azione delle interazioni deboli, e nel caso dei quark alla azione delle interazioni forti.

<b>FERMIONS</b>			<b>matter constituents</b> spin = 1/2, 3/2, 5/2, ...		
<b>Leptons</b> spin = 1/2			<b>Quarks</b> spin = 1/2		
Flavor	Mass GeV/c <sup>2</sup>	Electric charge	Flavor	Approx. Mass GeV/c <sup>2</sup>	Electric charge
$\nu_e$ electron neutrino	$<1 \times 10^{-8}$	0	<b>u</b> up	0.003	2/3
<b>e</b> electron	0.000511	-1	<b>d</b> down	0.006	-1/3
$\nu_\mu$ muon neutrino	$<0.0002$	0	<b>C</b> charm	1.3	2/3
<b><math>\mu</math></b> muon	0.106	-1	<b>S</b> strange	0.1	-1/3
$\nu_\tau$ tau neutrino	$<0.02$	0	<b>t</b> top	175	2/3
<b><math>\tau</math></b> tau	1.7771	-1	<b>b</b> bottom	4.3	-1/3

Figura 1.1: Fermioni Elementari (<http://particleadventure.org/>)

Una teoria più completa, che tiene conto sia delle interazioni elettromagnetiche che di quelle deboli e forti, è offerta dalla cosiddetta Teoria (o Modello) Standard. Anche la Teoria Standard è incompleta, dato che non tiene conto delle interazioni gravitazionali<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Mentre a livello di fisica classica (non quantistica) le interazioni gravitazionali sono descritte con grande

Malgrado le sue limitazioni, la QED è molto interessante per varie ragioni:

- La QED ha un'ampio campo di applicazioni di interesse fisico, che vanno dalle interazioni dei fotoni e degli elettroni con la materia alla struttura fine dei livelli atomici.
- La QED è stata la prima teoria di campo ad essere stata studiata in dettaglio, in particolare per quanto riguarda il metodo dei diagrammi di Feynman, il fenomeno delle divergenze infrarosse e ultraviolette, e l'uso della rinormalizzazione.
- La QED è una teoria di gauge, ed è quindi il prototipo della Teoria Standard. Uno studio della QED è un'utile premessa allo studio della Teoria Standard.
- Alcune delle predizioni della QED sono, tra le predizioni della Teoria Standard, quelle verificate con maggiore accuratezza.

La più precisa verifica della QED è attualmente data dal valore sperimentale della anomalia magnetica dell'elettrone. L'equazione di Dirac assegna all'elettrone un momento magnetico pari a un magnetone di Bohr,  $e/2m$ , ma questo risultato va corretto a causa dell'interazione con il campo di radiazione per un fattore  $(1+a_e)$ , dove  $a_e$  è appunto la *anomalia magnetica*, che può essere espressa come una serie di potenze di  $\alpha$ , la costante di struttura fine:

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} + \dots$$

I valori sperimentali per elettrone e positrone sono conosciuti con errori dell'ordine di 0.4 parti per miliardo:

$$\begin{aligned} a_{e^-}^{\text{Exp}} &= (1159652.1884 \pm 0.0043) \times 10^{-9}, \\ a_{e^+}^{\text{Exp}} &= (1159652.1879 \pm 0.0043) \times 10^{-9}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

da paragonare alla previsione teorica:

$$a_{e^-}^{\text{Th}} = (1159652.1535 \pm 0.0240) \times 10^{-9} \quad (2 \text{ parti per miliardo}). \quad (1.2)$$

L'errore citato per la previsione teorica è in massima parte dovuto all'incertezza sul valore di  $\alpha$ , ottenuto da una misura dell'effetto Hall quantistico. La previsione teorica si basa sul calcolo di  $a_e$  sino a termini in  $\alpha^4$ .

In questo corso tratteremo della elettrodinamica quantistica usando il metodo degli integrali di Feynman. Il metodo degli integrali di Feynman si è infatti rivelato decisamente superiore al più tradizionale metodo della Quantizzazione Canonica [1] per trattare teorie quantistiche caratterizzate da simmetrie di gauge. I concetti qui sviluppati forniscono una base utile per discutere la Teoria Standard [2].

Ricordiamo che l'elettromagnetismo è caratterizzato dall'invarianza di tutte le grandezze osservabili, ad esempio i campi elettrico e magnetico  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  rispetto a trasformazioni dei potenziali vettori

---

successo dalla teoria della relatività generale di Einstein, e in molti casi la teoria di Newton si dimostra del tutto sufficiente, non esiste ancora una versione quantistica universalmente accettata della gravità. L'opinione più diffusa è che sia necessario passare da una teoria di campo a una teoria di stringhe, argomento al di fuori dai limiti di questo corso.

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f, \quad (1.3)$$

dove  $f$  è una funzione arbitraria. Possiamo considerare questa trasformazione come dovuta ad un operatore di trasformazione  $U_f$ , e scrivere

$$U_f A_\mu U_f^{-1} = A_\mu + \partial_\mu f. \quad (1.4)$$

Se eseguiamo due trasformazioni in successione,  $U_f, U_g$ , avremo

$$U_g U_f A_\mu U_f^{-1} U_g^{-1} = A_\mu + \partial_\mu f + \partial_\mu g, \quad (1.5)$$

e possiamo facilmente verificare che l'insieme delle  $U_f$  forma un gruppo commutativo (abeliano):

$$U_g U_f = U_f U_g = U_{g+f}. \quad (1.6)$$

Nel caso dell'elettromagnetismo ci troviamo quindi di fronte a un tipo di invarianza di gauge particolarmente semplice, mentre nella Teoria Standard avremo a che fare con simmetrie di gauge non commutative (non abeliane). Anche se metodo degli integrali di Feynman non è indispensabile per la descrizione quantistica dell'elettromagnetismo, è quello preferito nel caso della Teoria Standard.

**Unità di misura, Rappresentazione di Heisenberg e di Schroedinger, ecc.** Nel seguito useremo principalmente la rappresentazione di Heisenberg, dove gli operatori hanno una dipendenza dal tempo:

$$O(t) = e^{itH} O e^{-itH}, \quad O = O(0). \quad (1.7)$$

Noteremo i passaggi in cui sia conveniente passare alla rappresentazione di Schroedinger. In ogni caso operatori e stati per cui non sia indicata una dipendenza esplicita dal tempo, ad esempio  $O|m\rangle$ , si intendono essere operatori e stati fissi, equivalenti a  $O(t=0)|m\rangle$  nella rappresentazione di Heisenberg e a  $O|m, t=0\rangle$  nella rappresentazione di Schroedinger.

Useremo il sistema di unità di misura in cui  $\hbar = 1$  e  $c = 1$ .

Useremo le convenzioni usate in [1, 3] per quanto riguarda i quadrivettori e le matrici di Dirac. In particolare il prodotto scalare tra due quadrivettori  $p = \{p^0, \mathbf{p}\}$  e  $q = \{q^0, \mathbf{q}\}$  sarà indicato con  $pq \equiv p^\mu q_\mu = p^0 q^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ .



## Capitolo 2

### Integrali sui cammini di Feynman

In questo Capitolo deriveremo l'espressione della somma sui cammini dalla formulazione usuale della meccanica quantistica, considerando il caso particolarmente semplice di un sistema quantistico con un solo grado di libertà. Dopo avere ricavato l'espressione delle ampiezze di transizione mediante la somma sui cammini, dimostreremo come questo metodo permetta anche il calcolo delle funzioni di Green in meccanica quantistica. Concluderemo il Capitolo indicando come questi risultati possono essere estesi al caso di sistemi con più gradi di libertà e alla teoria di campo.

Come ulteriore dimostrazione della equivalenza tra le differenti formulazioni della meccanica quantistica, in un successivo Capitolo useremo la formulazione basata sulla somma sui cammini per dedurre le regole di commutazione canoniche,

$$\left[ p^m(t_0), q^k(t_0) \right] = -i\hbar \delta^{mk} .$$

#### 2.1 Calcolo dell'ampiezza di transizione

Per introdurre il metodo degli integrali di Feynmann, consideriamo per primo il caso più semplice: un sistema quantistico unidimensionale descritto dalla variabile dinamica  $q$  e dall'impulso coniugato  $p$ . L'hamiltoniana è quindi

$$H = K(p) + V(q) = \frac{p^2}{2m} + V(q) , \quad (2.1)$$

dove abbiamo indicato con  $K$  l'energia cinetica e  $V$  l'energia potenziale.

Vogliamo calcolare l'ampiezza di transizione da uno stato  $|q_1\rangle$  al tempo  $t = t_1$  ad uno stato  $|q_2\rangle$  al tempo  $t = t_2 = t_1 + T$ . Usando la rappresentazione di Schrödinger [1] e il sistema di unità di misura in cui  $\hbar = 1$  possiamo scrivere

$$\begin{aligned} |q_1\rangle &= \text{stato al tempo } t = t_1 , \\ e^{-iHT} |q_1\rangle &= \text{stato al tempo } t = t_1 + T , \\ \langle q_2 | e^{-iHT} |q_1\rangle &= \text{ampiezza di transizione a } |q_2\rangle . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Conoscere l'ampiezza di transizione in funzione di  $q_1$ ,  $q_2$  e  $T$  è equivalente ad avere una descrizione completa del nostro sistema quantistico. Vedremo qualche esempio di questa affermazione, rimanando però al testo di Feynman e Hibbs [4] per maggiori dettagli. Ricordiamo sin d'ora che nella

fisica delle particelle elementari siamo interessati proprio al calcolo delle ampiezze di transizione e in particolare agli elementi di matrice  $S$ .

Consideriamo anzitutto il caso  $V(q) = 0$ , in cui si ottiene allora direttamente (per i dettagli del calcolo si veda l'Appendice A):

$$\langle q_2 | e^{-iKT} | q_1 \rangle = \langle q_2 | e^{-i\frac{p^2}{2m}T} | q_1 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i T}} e^{i\frac{m(q_2 - q_1)^2}{2T}} \quad , \quad V(q) = 0. \quad (2.3)$$

Notiamo anche che il risultato può essere riscritto in termini della velocità media  $v = (q_2 - q_1)/T$

$$\langle q_2 | e^{-i\frac{p^2}{2m}T} | q_1 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i T}} e^{i\frac{mv^2}{2}T}. \quad (2.4)$$

Questo risultato ha una interpretazione molto semplice: nel limite classico la particella si muove a velocità costante  $v$ . La fase dell'ampiezza di transizione è quindi data dall'*azione lungo la traiettoria classica*:

$$\langle q_2 | e^{-i\frac{p^2}{2m}T} | q_1 \rangle \propto e^{iS_{cl}},$$

con

$$S_{cl} = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m\dot{q}^2}{2} = \frac{mv^2}{2} T.$$

La corrispondenza tra l'ampiezza di transizione quantistica e l'azione classica è stata per la prima volta messa in evidenza da Dirac [5].

Nel caso generale, cioè con un potenziale  $V(q) \neq 0$  arbitrario, possiamo calcolare la ampiezza di transizione mediante un processo di limite che ci porterà a definire l'integrale di Feynman, o integrale sui cammini. Suddividendo l'intervallo di tempo  $T$  in  $N$  intervalli  $\epsilon = T/N$  possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \langle q_N | e^{-iHT} | q_0 \rangle &= \langle q_N | \left( e^{-iH\epsilon} \right)^N | q_0 \rangle \\ &= \int dq_1 \dots dq_{N-1} \langle q_N | e^{-iH\epsilon} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-iH\epsilon} | q_{N-2} \rangle \dots \langle q_1 | e^{-iH\epsilon} | q_0 \rangle \end{aligned} \quad (2.5)$$

Notiamo che, siccome  $K$  e  $V$  non commutano,

$$e^{-i(K+V)\epsilon} = 1 - i(K+V)\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2}(K^2 + V^2 + KV + VK), \quad (2.6)$$

mentre

$$e^{-iV\epsilon} e^{-iK\epsilon} = 1 - i(K+V)\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2}(K^2 + V^2 + 2VK). \quad (2.7)$$

Possiamo quindi scrivere

$$e^{-iH\epsilon} = e^{-iV\epsilon} e^{-iK\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.8)$$

osservando che un errore  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  ripetuto  $N$  volte equivale ad un errore globale  $\mathcal{O}(\epsilon)$ , che diventerà comunque trascurabile nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ciascuno dei fattori nella (2.5) può quindi essere approssimato come

$$\langle q_k | e^{-iH\epsilon} | q_{k-1} \rangle \approx \langle q_k | e^{-iV\epsilon} e^{-iK\epsilon} | q_{k-1} \rangle = e^{-iV(q_k)\epsilon} \langle q_k | e^{-iK\epsilon} | q_{k-1} \rangle, \quad (2.9)$$

e, usando la (2.3), otteniamo

$$\langle q_k | e^{-i\epsilon H} | q_{k-1} \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \epsilon}} e^{i\left(\frac{m(q_k - q_{k-1})^2}{2\epsilon^2} - V(q_k)\right)\epsilon} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \epsilon}} e^{i\left(\frac{mv_k^2}{2} - V(q_k)\right)\epsilon}. \quad (2.10)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo definito la velocità nell'intervallo  $k$ -mo come

$$v_k = \frac{(q_k - q_{k-1})}{\epsilon}, \quad (2.11)$$

di modo che possiamo riconoscere nel fattore di fase la lagrangiana  $L = mv^2/2 - V(q)$ . Se adesso sostituiamo nella (2.5) otteniamo

$$\langle q_N | e^{-iHT} | q_0 \rangle \approx \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \epsilon}} \right)^N \int \prod_{k=1}^{N-1} dq_k \exp \left( i \sum_k \left[ \frac{mv_k^2}{2} - V(q_k) \right] \epsilon \right) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (2.12)$$

Nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$  l'insieme di punti  $\{q_N, q_{N-1}, \dots, q_1, q_0\}$  formano una traiettoria  $q(t)$  dal punto iniziale  $q_0$  al punto finale  $q_N$ . La fase nella (2.12) diviene semplicemente l'azione classica lungo questa traiettoria,

$$\sum_k \left[ \frac{mv_k^2}{2} - V(q_k) \right] \epsilon \rightarrow \int dt L(q(t), \dot{q}(t)) = S(q(t)),$$

mentre l'integrale della (2.12) si può interpretare come una *somma sulle traiettorie*. Nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$  la somma diventa un integrale nello spazio delle traiettorie  $q(t)$ . La misura di integrazione è *definita* dall'equazione

$$\left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \epsilon}} \right)^N \int \prod_{k=1}^{N-1} dq_k \rightarrow \int d[q(t)].$$

Passando al limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , otteniamo infine

$$\langle q_N | e^{-iTH} | q_0 \rangle = \int d[q(t)] e^{iS(q(t))}, \quad (2.13)$$

dove l'integrale è esteso su tutte le traiettorie  $q(t)$  tali che  $q(t_0) = q_0$ , e  $q(t_0 + T) = q_N$ .

## 2.2 L'approssimazione reticolare

L'integrale di Feynman è un *integrale funzionale*, cioè un integrale che si estende su tutte le funzioni  $q(t)$  definite nell'intervallo  $[t_0, t_0 + T]$ . È interessante considerare la (2.12) come una espressione approssimata che, almeno in linea di principio, si può prestare ad un calcolo esplicito. Questo tipo di approssimazione, che chiameremo approssimazione reticolare, è largamente utilizzata nella teoria dei campi, in quanto si presta alla esecuzione di calcoli numerici in situazioni in cui non è possibile ottenere risultati esatti, e dove falliscono i metodi perturbativi che illustreremo nel caso della elettrodinamica quantistica. L'approssimazione reticolare si è rivelata di particolare utilità nello studio della teoria fondamentale delle interazioni forti, la cromodinamica quantistica (Quantum Chromo Dynamics, o QCD), che non si presta a calcoli perturbativi se non in casi particolari. Ad esempio, nella (2.12) il tempo  $t$  è rappresentato tramite un reticolo di punti,  $t_k = t_0 + k\epsilon$ , e la funzione  $q(t)$  tramite il valore che essa assume ai tempi  $t_i$ ,  $q_i = q(t_i)$ .

L'approssimazione all'ampiezza di transizione fornita dalla (2.12) ha errori  $\mathcal{O}(\epsilon)$ , e tanto bastava nella discussione precedente per indicare una convergenza al risultato della (2.13). Se l'interesse è centrato su metodi di calcolo numerico, diviene però di grande importanza pratica la *velocità* con cui il risultato approssimato converge a quello esatto. Ad esempio, come il lettore potrà facilmente dimostrare, la semplice modifica della Eq. (2.8)

$$e^{-iH\epsilon} = e^{-i(V/2)\epsilon} e^{-iK\epsilon} e^{-i(V/2)\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (2.14)$$

permette di costruire uno schema di calcolo che converge molto più rapidamente al risultato esatto.

### 2.3 Il limite classico

La formulazione della meccanica quantistica mediante la somma sui cammini dell'Eq. (2.13) si presta particolarmente alla discussione del limite classico di una teoria quantistica. Teniamo presente che in ogni caso la teoria "vera" è quella quantistica e che la teoria classica non è che un particolare limite di questa. Poichè il limite classico si ottiene quando  $\hbar \rightarrow 0$ , conviene riscrivere la (2.13) esplicitando la presenza di  $\hbar$ ,

$$\langle q_N | e^{-iTH/\hbar} | q_0 \rangle = \int d[q(t)] e^{iS(q(t))/\hbar} \quad (2.15)$$

La situazione diviene approssimativamente classica se il valore dell'azione è molto grande rispetto ad  $\hbar$ . Supponiamo che esista una traiettoria  $q_c(t)$ , tale che  $q_c(t_0) = q_0$ , e  $q_c(t_0 + T) = q_N$  che renda estrema l'azione. La condizione  $\delta S = 0$  implica che traiettorie vicine alla  $q_c(t)$  contribuiscano all'integrale (2.15) con la stessa fase (o fasi vicine), e quindi interferiscono in modo costruttivo. Al contrario, vicino ad ogni traiettoria che *non* estremizza l'azione ve ne sono altre con fase differente e che interferiscono distruttivamente. Quindi l'integrale sarà dominato dal contributo delle traiettorie vicine a  $q_c(t)$ , traiettorie la cui azione differisce da  $S(q_c(t))$  per meno di  $\hbar$ .

Nel limite  $\hbar \rightarrow 0$  il moto del sistema quantistico sarà quindi descritto dalla traiettoria "classica"  $q_c(t)$ .

È certo interessante notare che questo argomento permetta di spiegare un fatto altrimenti piuttosto misterioso. Il principio d'azione  $\delta S = 0$  viene normalmente dimostrato partendo dalle equazioni del moto di Newton, ma questa derivazione non spiega la ragione della sua esistenza. L'origine del principio d'azione invece è chiara se ricordiamo che la meccanica classica altro non è che un particolare limite della meccanica quantistica.

### 2.4 Il tempo come variabile complessa

Sinora abbiamo discusso della somma sui cammini senza preoccuparci eccessivamente della convergenza degli integrali, ad esempio quello che appare nella Eq. (2.13). In realtà, guardando la (2.13) si vede subito che c'è un problema: l'integrando  $\exp[iS(q(t))]$  è di modulo 1, quindi la definizione dell'integrale richiede qualche cura. In realtà avevamo già incontrato lo stesso problema nel calcolare l'ampiezza di transizione in assenza di forze, Eq. (2.3) (si veda l'Appendice A). In quel caso abbiamo visto che occorre definire l'ampiezza di transizione relativa ad un tempo  $T$  come limite, per

$\eta \rightarrow 0^+$ , dell'ampiezza relativa ad un intervallo di tempo  $T - i\eta$ . Applicheremo lo stesso metodo per definire l'integrale sui cammini della (2.13), che riscriviamo ancora una volta in forma più esplicita,

$$\langle q_2 | e^{-iHT} | q_1 \rangle = \int d[q(t)] \exp(iS) = \int d[q(t)] \exp\left(i \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q) \right]\right). \quad (2.16)$$

Per dare al tempo una parte immaginaria negativa scriviamo  $t = (1 - i\chi)\tau$ , con  $\tau$  reale e  $\chi$  costante positiva e piccola, di modo da poter approssimare  $(1 - i\chi)^{-1}$  con  $(1 + i\chi)$ . Abbiamo quindi che

$$t = (1 - i\chi)\tau, \quad \text{di modo che} \quad \begin{cases} dt = (1 - i\chi)\tau \\ \dot{q} = \frac{dq}{dt} = (1 + i\chi) \frac{dq}{d\tau} \end{cases}. \quad (2.17)$$

e l'integrando della (2.16) diviene  $\exp(iS_\chi)$ , dove  $S_\chi$  è l'azione calcolata con il tempo modificato:

$$\exp(iS_\chi) = \exp\left(i \int d\tau \left[ \frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 - V(q) \right]\right) \cdot \exp\left(-\chi \int d\tau \left[ \frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q) \right]\right). \quad (2.18)$$

A questo punto l'integrando  $\exp(iS_\chi)$  ha modulo eguale a  $\exp(-\chi I)$  dove  $I$  è l'integrale

$$I = \int d\tau \left[ \frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q) \right] = \int d\tau \mathcal{H}(q, \dot{q}),$$

dove  $\mathcal{H}(q, \dot{q})$  è l'energia della particella. Per chiarezza notiamo che, dato che  $q(t)$  è una traiettoria arbitraria, in generale  $\mathcal{H}(q, \dot{q})$  non è indipendente dal tempo. Per quanto riguarda la convergenza dell'integrale funzionale nella Eq. (2.16) possiamo distinguere vari casi a seconda del comportamento della energia potenziale  $V(q)$ :

**V(q) = 0** Questo è il caso della particella libera, dove si può esplicitamente calcolare l'integrale funzionale con il processo di limite delineato nella Sezione 2.1 e i metodi elementari sviluppati nella Appendice A. L'integrale funzionale risulta convergente.

**V(q) definito positivo** In questo caso  $I > I_0$ , dove  $I_0$  è il valore di  $I$  calcolato a parità di traiettoria per  $V(q) = 0$ . Quindi si ha almeno la stessa convergenza del caso precedente.

**V(q) limitato inferiormente** In questo caso, se  $V(q) > V_0$ ,  $I > I_0 + V_0 T$ . L'aggiunta di una costante  $V_0 T$  non muta la convergenza rispetto ai due casi precedenti.

**V(q) non limitato inferiormente** Bisogna valutare caso per caso. Se ad esempio  $V(q) = -q^n$  la convergenza dell'integrale funzionale dipende dal valore dell'esponente  $n$ . Si può dimostrare che l'integrale funzionale converge se  $0 \geq n \geq -1$ , e non converge se  $n > 0$  o  $n < -1$ . Quindi il potenziale coulombiano è un caso limite.

Notiamo che i casi esclusi sono quelli in cui falliscono anche le formulazioni alternative della meccanica quantistica, ad esempio quella basata sulla meccanica ondulatoria.

## 2.5 La meccanica statistica

Nelle considerazioni precedenti, abbiamo sostituito l'integrazione sull'asse reale del tempo, con una integrazione nel piano complesso di  $t$ , lungo la retta individuata da:

$$t = (1 - i\chi)\tau \simeq e^{-i\chi}\tau = (\cos\chi - i\sin\chi)\tau. \quad (2.19)$$

Il risultato converge anche per valori di  $\chi$  non infinitesimi e possiamo spingerci al caso estremo in cui  $\chi = \pi/2$ , cioè  $t = -i\tau$ . Troviamo allora la seguente espressione per l'ampiezza di transizione tra tempi immaginari (!)  $t_1 = 0, t_2 = -i\beta$

$$\begin{aligned} \langle q_2 | e^{-\beta H} | q_1 \rangle &= \int d[q(\tau)] \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \left[ \frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + V(q) \right]\right) \\ &= \int d[q(\tau)] \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \mathcal{H}(q, \dot{q})\right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

dove l'integrale è sui cammini che vanno da  $q_1$  per  $\tau = 0$  a  $q_2$  per  $\tau = \beta$ . Questa espressione ricorda stranamente la funzione di partizione in meccanica statistica. Per capire questa relazione restringiamo l'integrale funzionale ai *cammini periodici*, tali cioè che  $q_1 = q(0) = q_2 = q(-i\beta)$ .

Assumiamo che gli autostati dell'hamiltoniana della nostra particella quantistica siano  $|m\rangle$  e i corrispondenti autovalori  $E_m$ . Con l'aiuto della (2.20) la funzione di partizione della particella in equilibrio termico ad una temperatura inversa<sup>1</sup>  $\beta$  si può esprimere come integrale sui cammini,

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \sum_m e^{-\beta E_m} \\ &= \sum_m \langle m | e^{-\beta H} | m \rangle \quad (\text{cioè una traccia...}) \\ &= \text{Tr} e^{-\beta H} = \int dq \langle q | e^{-\beta H} | q \rangle \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$= \int d[q(\tau)] \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \mathcal{H}(q, \dot{q})\right) \quad (\dots \text{un integrale sui cammini}), \quad (2.22)$$

dove l'integrale è su tutti i cammini ciclici, che partono da un arbitrario valore di  $q$  a  $t = 0$  e tornano allo stesso punto per  $t = -i\beta$ . Così definito l'integrale sui cammini assorbe l'integrazione che proviene dalla traccia (penultimo passo della Eq. 2.21).

Notiamo anche che nel limite  $\beta \rightarrow \infty$  la funzione di partizione è dominata dallo stato fondamentale:

$$Z(\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \exp(-\beta E_0) (1 + \text{termini esponenzialmente piccoli in } \beta). \quad (2.23)$$

## 2.6 Le funzioni di Green

Definiamo come funzioni di Green i valori di aspettazione nello stato fondamentale del prodotto di operatori, ad esempio, nel caso della particella in moto unidimensionale, i prodotti della variabile

<sup>1</sup>Ricordiamo che  $\beta = 1/k_B T$ , dove  $T$  è la temperatura assoluta e  $k_B$  è la costante di Boltzman. Per non fare confusione con il tempo, nel testo usiamo  $\beta$  anzichè la temperatura.

$q(t)$  presa a tempi diversi,  $t_1, t_2, \dots, t_N$  in ordine decrescente,

$$\langle 0 | q(t_1) q(t_2) \dots q(t_N) | 0 \rangle \quad (t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_N).$$

Abbiamo adottato la rappresentazione di Heisenberg, cioè

$$q(t) = e^{iHt} q e^{-iHt}.$$

Come vedremo una espressione di questo tipo può essere semplicemente scritta come somma sui cammini.

Per estendere la definizione anche al caso di tempi arbitrari  $t_1, t_2, \dots, t_N$ , introduciamo il concetto di prodotto ordinato nel tempo,  $T(q(t_1) q(t_2) \dots q(t_N))$ , che è semplicemente il prodotto degli stessi operatori ordinati *in ordine di tempo decrescente*. Ad esempio, nel caso di due operatori:

$$T(q(t_1) q(t_2)) = \begin{cases} q(t_1) q(t_2) & \text{se } t_1 \geq t_2 \\ q(t_2) q(t_1) & \text{se } t_2 \geq t_1 \end{cases}. \quad (2.24)$$

Possiamo allora definire la funzione di Green ad  $N$  tempi come

$$G_N(t_1, t_2, \dots, t_N) = \langle 0 | T(q(t_1) q(t_2) \dots q(t_N)) | 0 \rangle. \quad (2.25)$$

Questa definizione va in qualche modo motivata: perchè dare particolare importanza al valore di aspettazione nello stato fondamentale  $|0\rangle$ ? Perchè l'ordinamento temporale? La risposta a queste domande si troverà nella teoria dei campi a cui ci stiamo preparando. In termini semplici lo stato fondamentale della teoria dei campi è lo stato "vuoto", cioè privo di particelle. Il vuoto ha varie caratteristiche che lo rendono unicamente degno di interesse: dal vuoto si possono creare tutti gli altri stati mediante operatori di creazione; il vuoto è l'unico stato di una teoria di campo che sia invariante sotto traslazioni nello spazio e nel tempo e sotto trasformazioni di Lorentz e rotazioni, e si potrebbe continuare. Per quanto riguarda l'ordinamento temporale vedremo che esiste un rapporto diretto tra le funzioni di Green così definite e gli elementi della matrice  $S$ . Peraltro, già sappiamo (cfr. la formula di Dyson, in [1]) che il prodotto T-ordinato assume un ruolo centrale nella teoria delle perturbazioni.

Dimostriamo adesso che la (2.25) può essere trasformata nella seguente somma sui cammini

$$G_N(t_1, t_2, \dots, t_N) = \frac{\int d[q(t)] \exp(iS) q(t_1) q(t_2) \dots q(t_N)}{\int d[q(t)] \exp(iS)}. \quad (2.26)$$

Nel numeratore e nel denominatore, l'integrale è esteso su tutti cammini tra  $t = -\infty$  e  $t = \infty$ , tali che  $q(+\infty) = q(-\infty)$ . Si deve intendere, inoltre, che i tempi si ottengono come limite di tempi complessi, secondo quanto discusso nella Sezione 2.4. Più precisamente:

$$G_N(t_1, t_2, \dots, t_N) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{\int d[q(t')] \exp(iS) q(t'_1) q(t'_2) \dots q(t'_N)}{\int d[q(t')] \exp(iS)} \right], \quad (2.27)$$

e gli integrali sono estesi su tutti i cammini *periodici* tra  $t = -T' = -T(1 - i\chi)$  e  $t = T' = T(1 - i\chi)$ , tali cioè che  $q(T') = q(-T')$ , e  $t'_{1,2,\dots} = (1 - i\chi) t_{1,2,\dots}$ .

Per dimostrare l'equivalenza tra (2.27) e (2.25) consideriamo per semplicità il caso di due operatori, ed esplicitiamo la dipendenza dal tempo degli operatori in (2.25). Consideriamo il caso in cui  $t_1 \geq t_2$

$$\begin{aligned} G_2(t_1, t_2) &= \langle 0|q(t_1)q(t_2)|0\rangle = \langle 0|e^{iHt_1}q e^{-iH(t_1-t_2)}q e^{-iHt_2}|0\rangle \quad (t_1 \geq t_2) \\ &= \frac{\langle 0|e^{-iH(T-t_1)}q e^{-iH(t_1-t_2)}q e^{-iH(t_2+T)}|0\rangle}{\langle 0|e^{-2iHT}|0\rangle}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Nel secondo passo  $T$  è un tempo arbitrario, ma tale che  $T > t_1 > t_2 > -T$ . Il termine a denominatore,  $\langle 0|e^{-2iHT}|0\rangle = \exp(-2iE_0T)$  compensa l'introduzione di due fattori  $e^{-iHT}$  nel numeratore, di modo che il risultato non dipende da  $T$ . A questo punto introduciamo i tempi complessi, e scriviamo:

$$G_2(t_1, t_2) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{\langle 0|e^{-i(T-t'_1)H}q e^{-i(t'_1-t'_2)H}q e^{-i(t'_2+T')H}|0\rangle}{\langle 0|e^{-2iT'H}|0\rangle} \right],$$

dove  $T' = (1 - i\chi)T$ ,  $t'_{1,2} = (1 - i\chi)t_{1,2}$ . Il limite  $T \rightarrow \infty$  è in apparenza inutile, dato che come abbiamo osservato il termine in parentesi quadra è indipendente da  $T$ . Tuttavia esso ci permette di passare dal valore di aspettazione in  $|0\rangle$  alla traccia degli operatori sia a numeratore che a denominatore:

$$G_2(t_1, t_2) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sum_m \langle m|e^{-i(T-t'_1)H}q e^{-i(t'_1-t'_2)H}q e^{-i(t'_2+T')H}|m\rangle}{\sum_m \langle m|e^{-2iT'H}|m\rangle} \right].$$

Infatti per ogni  $\chi > 0$  e per  $T$  "grande" il contributo degli stati eccitati  $|m\rangle \neq |0\rangle$  è depresso sia a numeratore che a denominatore per un fattore  $\exp(-2\chi(E_m - E_0)T)$  rispetto a quello dello stato fondamentale, e svanisce nel limite  $T \rightarrow \infty$ , che è eseguito *prima* di quello  $\chi \rightarrow 0^+$ . Notiamo che l'ordine dei limiti è importante!

Dato che la traccia è indipendente dalla base scelta per descrivere gli stati, possiamo usare la base degli autostati della posizione,  $|q\rangle$ ,

$$G_2(t_1, t_2) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q}|e^{-i(T-t'_1)H}q e^{-i(t'_1-t'_2)H}q e^{-i(t'_2+T')H}|\tilde{q}\rangle}{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q}|e^{-2iT'H}|\tilde{q}\rangle} \right].$$

Per completare la dimostrazione basta mostrare che l'espressione tra parentesi quadre è identica a quella che otterremmo dalla (2.27) nel caso di due operatori,

$$\frac{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q}|e^{-iH(T-t'_1)}q e^{-iH(t'_1-t'_2)}q e^{-iH(t'_2+T')}|\tilde{q}\rangle}{\int d\tilde{q} \langle \tilde{q}|e^{-2iHT'}|\tilde{q}\rangle} = \frac{\int d[q(t')] \exp(iS) q(t'_1) q(t'_2)}{\int d[q(t')] \exp(iS)}. \quad (2.29)$$

In effetti il numeratore e il denominatore nelle due espressioni sono separatamente eguali. Per quanto riguarda il denominatore,  $\langle \tilde{q}|e^{-2iT'H}|\tilde{q}\rangle$  è una ampiezza di transizione, che possiamo esprimere come  $\int d[q(t')] \exp(iS)$ , dove l'integrazione è su tutti i cammini che partono da  $\tilde{q}$  a  $t = -T'$  e tornano allo stesso punto per  $t = T'$ . Per eseguire l'integrazione su  $\tilde{q}$  basta estendere l'integrale sui cammini a tutti quelli che, partendo da *qualsiasi* punto per  $t = -T'$ , tornano al punto di partenza per  $t = T'$ . I due denominatori sono quindi eguali.

Per il numeratore, assumiamo che sia  $T > t_1 > t_2 > -T$ , e introduciamo accanto ai due operatori  $q$  due somme sul sistema completo di stati,  $\int dq |q\rangle \langle q| = 1$

$$\begin{aligned} & \int d\tilde{q} \langle \tilde{q} | e^{-iH(T'-t'_1)} q e^{-iH(t'_1-t'_2)} q e^{-iH(t'_2+T')} | \tilde{q} \rangle \\ &= \iiint d\tilde{q} dq_1 dq_2 \langle \tilde{q} | e^{-iH(T'-t'_1)} | q_1 \rangle \langle q_1 | q e^{-iH(t'_1-t'_2)} | q_2 \rangle \langle q_2 | q e^{-iH(t'_2+T')} | \tilde{q} \rangle \\ &= \iiint d\tilde{q} dq_1 dq_2 q_1 q_2 \langle \tilde{q} | e^{-iH(T'-t'_1)} | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-iH(t'_1-t'_2)} | q_2 \rangle \langle q_2 | e^{-iH(t'_2+T')} | \tilde{q} \rangle . \end{aligned}$$

L'ultima espressione contiene il prodotto di tre ampiezze di transizione, che possiamo scrivere come una singola somma sui cammini che passano rispettivamente per  $q_1$  al tempo  $t'_1$  e per  $q_2$  a  $t'_2$ :

$$[q(-T') = \tilde{q}] \rightarrow [q(t'_2) = q_2] \rightarrow [q(t'_1) = q_1] \rightarrow [q(T') = \tilde{q}] .$$

L'integrazione su  $\tilde{q}$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  significa estendere l'integrale funzionale su tutti i cammini periodici tali cioè che  $[q(T') = q(-T')]$ , sostituendo il fattore  $q_1 q_2$  con  $q(t'_1) q(t'_2)$ , e si ottiene così il numeratore del secondo membro della eguaglianza (2.29). Lasciamo come esercizio la dimostrazione che il risultato è corretto anche per l'altro possibile ordinamento dei tempi,  $t_2 > t_1$ . La dimostrazione si estende facilmente, seguendo gli stessi passi, al caso in cui siano presenti più di due operatori.



## Capitolo 3

### Passaggio alla teoria dei campi

La procedura che abbiamo descritto per il caso di un grado di libertà si può estendere immediatamente al caso di un numero finito di gradi di libertà. Tutti i risultati ottenuti valgono direttamente per un sistema con  $n$  gradi di libertà, purchè si intenda che il simbolo  $q$  deve essere interpretato come un vettore ad  $n$  componenti,  $q = \{q_1 \dots q_n\}$ . Ad esempio una funzione di Green può essere definita come

$$G_{k_1, k_2, \dots, k_N}(t_1, t_2, \dots, t_N) = \langle 0 | T(q_{k_1}(t_1) q_{k_2}(t_2) \dots q_{k_N}(t_N)) | 0 \rangle. \quad (3.1)$$

Per “cammino” si intende la traiettoria del vettore  $q_k(t)$  tra il tempo iniziale  $t_1$  e il tempo finale  $t_2$ , cioè l’insieme delle funzioni  $q_k(t)$  nell’intervallo  $t_1 \leq t \leq t_2$ .

Queste idee si estendono facilmente, almeno dal punto di vista formale, ad una teoria di campo. Considerando, ad esempio, il caso di un campo scalare reale  $\phi(\vec{x}, t)$ , possiamo definire la lagrangiana  $L$  come integrale di una densità di lagrangiana e l’azione come integrale sul tempo della lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad , \quad L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \\ S &= \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Possiamo pensare questo sistema come limite di un campo definito su un reticolo di punti  $\vec{x}_k$  a distanza  $a$ , il *passo reticolare*, che coprono un cubo di lato  $L$ . Si tratta di un doppio limite  $a \rightarrow 0$ ,  $L \rightarrow \infty$ . Per ogni valore di  $a$ ,  $L$  abbiamo un numero finito  $n = (L/a)^3$  di punti, e il campo risulta descritto dalle  $n$  variabili dinamiche  $\phi_k(t) = \phi(\vec{x}_k, t)$ . Nella versione discretizzata, scriveremo l’azione come

$$S = \int dt \sum_k a^3 \mathcal{L}[\phi(\vec{x}_k, t), \partial_\mu \phi(\vec{x}_k, t)] = \int dt \sum_k a^3 \mathcal{L}_k,$$

dove  $\mathcal{L}_k$  è la densità di lagrangiano nel punto  $\vec{x}_k$ , calcolata approssimando le derivate del campo con differenze, ad esempio

$$\frac{\partial \phi(\vec{x}_k, t)}{\partial x} \approx \frac{\phi(x_k + a, y_k, z_k, t) - \phi(x_k, y_k, z_k, t)}{a}.$$

La descrizione di un campo mediante un reticolo di punti, e un passaggio al limite del continuo, può essere usata per definire formalmente una teoria di campo, ma anche per eseguire calcoli numerici di grandezze interessanti, ad esempio le funzioni di Green. In questo secondo caso conviene di solito rappresentare anche il tempo come variabile discreta, come abbiamo accennato nella Sezione 2.2.

In conclusione una teoria di campo può essere considerata come caso limite di un sistema a molti gradi di libertà, e la corrispondente teoria quantistica può essere definita mediante la somma sui cammini. Per “cammino”, con valori fissati di  $a$  e  $L$ , si intende l'insieme delle funzioni  $\phi_k(t)$  nell'intervallo temporale assegnato. Nel limite  $a \rightarrow 0$ ,  $L \rightarrow \infty$  questo diviene il valore della funzione  $\phi(\vec{x}, t)$  per tutti i valori di  $\vec{x}$  e per  $t$  nell'intervallo dato. Rimane da dimostrare la convergenza del processo di limite, cosa che non si sa fare in generale se non nel caso più semplice, quello di campi liberi, e in pochi altri casi. Per campi in interazione si può ricorrere alla teoria delle perturbazioni, che discuteremo nel seguito. Vedremo allora che un passo essenziale è costituito dalla procedura di rinormalizzazione, necessaria per eliminare (o meglio interpretare) le divergenze che emergono nel limite di piccole distanze,  $a \rightarrow 0$ .

Supponendo di avere risolto i problemi relativi al passaggio al limite, quello che abbiamo detto nelle sezioni precedenti si applica direttamente a una teoria di campo. Ad esempio possiamo definire la funzione di Green ad  $N$  punti come

$$G(x_1, x_2, \dots, x_N) = \langle 0 | T(\phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_N)) | 0 \rangle, \quad (3.3)$$

dove  $|0\rangle$  indica lo stato vuoto, e  $x_k$  il quadrivettore  $(\vec{x}_k, t_k)$ . Come nel caso finito-dimensionale,  $G$  può essere espressa come integrale funzionale:

$$G(x_1, \dots, x_N) = \frac{\int d[\phi(x)] \exp(iS) \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_N)}{\int d[\phi(x)] \exp(iS)}, \quad (3.4)$$

dove  $d[\phi(x)]$  rappresenta la misura nello spazio delle funzioni  $\phi(x)$ . Anche in questo caso, come nella Sezione 2.6, questa espressione va intesa come limite,

$$G(x_1, \dots, x_N) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ L \rightarrow \infty}} \left[ \frac{\int d[\phi(\vec{x}, t')] \exp(iS) \phi(\vec{x}_1, t'_1) \phi(\vec{x}_2, t'_2) \dots \phi(\vec{x}_N, t'_N)}{\int d[\phi(\vec{x}, t')] \exp(iS)} \right], \quad (3.5)$$

e l'integrale in parentesi quadra si estende su tutte le funzioni  $\phi(\vec{x}, t')$ , con  $t' = (1 - i\chi)t$  compreso tra  $\pm(1 - i\chi)T$ , e periodiche sia nel tempo che nello spazio, cioè tali che

$$\begin{aligned} \phi[\vec{x}, (1 - i\chi)T] &= \phi[\vec{x}, -(1 - i\chi)T], \\ \phi(x, y, z, t) &= \phi(x + L, y, z, t) = \phi(x, y + L, z, t) = \phi(x, y, z + L, t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

La periodicità sia nella direzione temporale che nella direzione spaziale permette di eseguire liberamente integrazioni per parti. Ad esempio

$$\int d^4x (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) = - \int d^4x (\phi \partial_\mu \partial^\mu \phi). \quad (3.7)$$

Queste espressioni si generalizzano al caso di più campi,  $\phi_k(x)$ , ( $k = 1 \dots n$ ):

$$\begin{aligned} G_{k_1, \dots, k_N}(x_1, \dots, x_N) &= \langle 0 | T(\phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_N}(x_N)) | 0 \rangle \\ &= \frac{\int \prod_{k=1}^n d[\phi_k(x)] \exp(iS) \phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_N}(x_N)}{\int \prod_{k=1}^n d[\phi_k(x)] \exp(iS)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Il caso di un campo complesso si può ricondurre a quello di due campi reali<sup>1</sup>,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2); \quad \phi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2). \quad (3.9)$$

Il fattore  $1/\sqrt{2}$  è scelto in modo che  $d[\phi(x)]d[\phi^\dagger(x)] = d[\phi_1(x)]d[\phi_2(x)]$  come si verifica dallo Jacobiano. Usando questa relazione il calcolo delle funzione di Green si riconduce alla (3.8), e si ottiene in generale

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\phi(x_1) \dots \phi(x_N) \phi^\dagger(y_1) \dots \phi^\dagger(y_M))|0\rangle \\ = \frac{\int d[\phi(x)]d[\phi^\dagger(x)] \exp(iS) \phi(x_1) \dots \phi(x_N) \phi^\dagger(y_1) \dots \phi^\dagger(y_M)}{\int d[\phi(x)]d[\phi^\dagger(x)] \exp(iS)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Nel caso semplice di una funzione a due punti,

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\phi(x) \phi^\dagger(y))|0\rangle \\ = \frac{\int d[\phi(x)]d[\phi^\dagger(x)] \exp(iS) \phi(x) \phi^\dagger(y)}{\int d[\phi(x)]d[\phi^\dagger(x)] \exp(iS)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

La dimostrazione delle eqq. (3.10) e (3.11) è elementare, basta notare che le funzioni di Green definite tramite i valori di aspettazione sono lineari nei campi in ciascun punto, e che questo è ovviamente vero per la loro definizione in termini di somma sui cammini, per cui

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\dots (\phi_1(x) \pm i\phi_2(x)) \dots)|0\rangle &= \langle 0|T(\dots \phi_1(x) \dots)|0\rangle \pm i \langle 0|T(\dots \phi_2(x) \dots)|0\rangle \\ &= \frac{\int d[\phi(x)]d[\phi^\dagger(x)] \exp(iS) \dots (\phi_1(x) \pm i\phi_2(x)) \dots}{\int d[\phi(x)]d[\phi^\dagger(x)] \exp(iS)}. \end{aligned}$$

### 3.1 Il funzionale generatore

In questa Sezione introduciamo il formalismo basato sull'uso del *funzionale generatore*, che permette di esprimere in modo compatto l'insieme delle funzioni di Green. Consideriamo il caso di un sistema con  $n$  gradi di libertà  $q_k(t)$ , ( $k = 1 \dots n$ ). Definiamo il funzionale generatore  $Z$  come  $[\mathbf{q} \equiv (q_1, \dots, q_n)]$

$$Z[J] \equiv Z[J_1(t), \dots, J_n(t)] = \int d[\mathbf{q}(t)] \exp\left(iS(\mathbf{q}(t)) - i \int dt \sum_k q_k(t) J_k(t)\right), \quad (3.12)$$

dove le  $J_k(t)$  sono  $n$  funzioni del tempo, e l'integrale funzionale va definito come limite

$$Z[J] \equiv Z[J_1(t), \dots, J_n(t)] = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \lim_{T \rightarrow \infty} \int d[\mathbf{q}(t')] \exp\left(iS(\mathbf{q}(t')) - i \int dt' \sum_k q_k(t') J_k(t')\right), \quad (3.13)$$

<sup>1</sup>Useremo il simbolo  $\dagger$  sia per indicare la coniugazione hermitiana nel caso di operatori, che la coniugazione complessa delle funzioni numeriche che rappresentano le traiettorie delle stesse grandezze.

e gli integrali nella parentesi sono estesi su tutti i cammini *periodici* tra  $t = -T' = -T(1 - i\chi)$  e  $t = T' = T(1 - i\chi)$ , tali cioè che  $q(T') = q(-T')$ , e  $t' = (1 - i\chi)t$ .

Dalla definizione, segue subito che  $Z[0]$  è proprio il denominatore che compare nella espressione delle funzioni di Green nel formalismo degli integrali sui cammini. Dimosteremo ora che le funzioni di Green si ottengono come derivate funzionali di  $Z[J]$ .

Il concetto di “derivata funzionale” è molto semplice. Consideriamo una funzione  $f(x)$ , e un funzionale  $X[f(x)]$ . Consideriamo poi una variazione della funzione  $f(x)$  nel punto  $x = y$ , cioè  $f(x) \rightarrow f(x) + \epsilon \delta^{(4)}(x - y)$ . La derivata funzionale  $\delta X[f(x)]/\delta f(y)$  è definita, in analogia con la derivata di una ordinaria funzione di una variable, come

$$\frac{\delta X[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \{X[f(x) + \epsilon \delta^{(4)}(x - y)] - X[f(x)]\}. \quad (3.14)$$

Utilizzando la (3.14) vediamo ora come si ottiene il numeratore che compare nell’espressione della funzione di Green nel caso del campo scalare libero, nel quale il funzionale generatore si scrive

$$Z[J] = \int d[\phi] e^{S - i \int d^4 x \phi(x) J(x)}. \quad (3.15)$$

Consideriamo la derivata funzionale

$$\begin{aligned} i \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)} &= i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int d[\phi] e^{\{iS - i \int d^4 x \phi(x) J(x) - \epsilon \delta^{(4)}(x - x_2)\}} - \int d[\phi] e^{\{iS - i \int d^4 x \phi(x) J(x)\}} \right\} \\ &= i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int d[\phi] e^{\{iS - i \int d^4 x \phi(x) J(x)\}} e^{-i\epsilon \int d^4 \phi(x) \delta^{(4)}(x - x_2)} - \int d[\phi] e^{\{iS - i \int d^4 x \phi(x) J(x)\}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Utilizzando la funzione delta per effettuare l’integrazione, e sviluppando l’esponenziale in serie di potenze di  $\epsilon$  si ottiene

$$i \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)} = \int d[\phi] \phi(x_2) e^{\{iS - i \int d^4 x \phi(x) J(x)\}}, \quad (3.17)$$

e derivando una seconda volta

$$\frac{i\delta}{\delta J(x_1)} \frac{i\delta}{\delta J(x_2)} Z[J] = \int d[\phi] \phi(x_1) \phi(x_2) e^{\{iS - i \int d^4 x \phi(x) J(x)\}}. \quad (3.18)$$

Abbiamo quindi dimostrato che la funzione di Green a due punti si puo’ scrivere nella forma

$$G(x_1, x_2) = \frac{1}{Z[0]} \left[ \frac{i\delta}{\delta J(x_1)} \frac{i\delta}{\delta J(x_2)} Z[J] \right]_{J=0}. \quad (3.19)$$

Il risultato ottenuto si estende facilmente al caso di funzioni di Green a più punti e a teorie di campo più complesse. Nel caso di  $N$  campi  $\phi_1(x) \dots \phi_N(x)$ , il funzionale generatore dipenderà da  $N$  funzioni di  $x$ ,  $J_k(x)$ , ( $k = 1 \dots N$ ) secondo la

$$Z[J] = \int d[\phi(x)] \exp \left( iS(\phi(x)) - i \int d^4 x \sum_k \phi_k(x) J_k(x) \right). \quad (3.20)$$

La definizione di questo integrale richiede le prescrizioni di limite e periodicità specificate nella Sezione precedente, eqs. (3.5), (3.6). Le funzioni di Green a  $N$  punti risultano allora

$$\begin{aligned} G_{k_1, \dots, k_N}(x_1, \dots, x_N) &= \langle 0 | T(\phi_{k_1}(x_1) \dots \phi_{k_N}(x_N)) | 0 \rangle \\ &= \frac{\int d[\phi(x)] \phi(x_1) \dots \phi(x_N) \exp(iS(\phi(x)))}{\int d[\phi(x)] \exp(iS(\phi(x)))} = \\ &= (i)^N \frac{1}{Z[0]} \left[ \frac{\delta^N Z[J]}{\delta J_{k_1}(x_1) \dots \delta J_{k_N}(x_N)} \right]_{J=0}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Notiamo che la (3.21) si ottiene con la semplice regola di sostituzione

$$\phi_k(x) \rightarrow i \frac{\delta}{\delta J_k(x)}, \quad (3.22)$$

che possiamo ad esempio utilizzare nel modo seguente: se  $F[\phi]$  è un arbitrario funzionale dei campi, otteniamo che

$$\int d[q(t)] F[\phi] \exp(iS) = \left[ F \left[ i \frac{\delta}{\delta J} \right] Z[J] \right]_{J=0}, \quad (3.23)$$

un risultato che utilizzeremo per ricavare lo sviluppo perturbativo di una teoria di campo in presenza di interazioni.

Per un campo complesso possiamo definire un funzionale generatore mediante due funzioni reali  $J_1, J_2$  o, meglio, in termini di una funzione complessa  $J$  e della sua coniugata  $J^\dagger$ ,

$$Z(J, J^\dagger) = \int d[\phi(x)] d[\phi^\dagger(x)] \exp \left( iS(\phi(x), \phi^\dagger(x)) - i \int d^4x (\phi^\dagger(x) J(x) + J^\dagger(x) \phi(x)) \right). \quad (3.24)$$

Le funzioni di Green si ottengono allora dalla regola di sostituzione (vedi Eq. 3.22)

$$\phi(x) \rightarrow i \frac{\delta}{\delta J^\dagger(x)}, \quad \phi^\dagger(x) \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta J(x)} \quad (3.25)$$

che si estende in modo ovvio al caso di più campi reali o complessi.

**Invarianza per traslazioni e conservazione del quadri-momento.** La forma delle funzioni di Green data nella seconda riga della (3.21) permette di discutere in modo molto semplice l'invarianza per traslazioni. Se consideriamo una traslazione di  $a^\mu$ , possiamo scrivere:

$$G_{k_1, \dots, k_N}(x_1 + a, \dots, x_N + a) = \frac{\int d[\phi(x)] \phi(x_1 + a) \dots \phi(x_N + a) \exp(iS(\phi(x)))}{\int d[\phi(x)] \exp(iS(\phi(x)))} \quad (3.26)$$

$$= \frac{\int d[\phi(x)] \phi(x_1 + a) \dots \phi(x_N + a) \exp(iS(\phi(x + a)))}{\int d[\phi(x)] \exp(iS(\phi(x)))} \quad (3.27)$$

$$= \frac{\int d[\phi(x)] \phi(x_1) \dots \phi(x_N) \exp(iS(\phi(x)))}{\int d[\phi(x)] \exp(iS(\phi(x)))} \quad (3.28)$$

$$= G_{k_1, \dots, k_N}(x_1, \dots, x_N), \quad (3.29)$$

dove abbiamo usato l'invarianza per traslazioni dell'azione e l'ultimo passaggio segue dall'invarianza della misura di integrazione funzionale per la sostituzione:  $\phi(x) \rightarrow \phi(x+a)$ .

Per concludere notiamo che, siccome le funzioni di Green dipendono solo delle differenze delle  $x_k$ , la loro trasformata di Fourier deve contenere una funzione delta che esprime la conservazione del quadrimpulso

$$\int \dots \int d^4 x_1 \dots d^4 x_N e^{i[(p_1 x_1) + \dots + (p_N x_N)]} = G_{k_1, \dots, k_N}(x_1, \dots, x_N) \quad (3.30)$$

$$= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + \dots + p_N) \tilde{G}(p_1, \dots, p_N), \quad (3.31)$$

dove  $\tilde{G}$  è una funzione regolare dei quadrimpulsi. Lasciamo al lettore di dimostrare la (3.31) a partire dalla (3.26) (si veda, ad esempio la Ref. [1], Cap. 12).

### 3.2 L'oscillatore armonico

In questa Sezione applicheremo i concetti che abbiamo illustrati ad un caso particolarmente semplice, quello di un oscillatore armonico di massa  $m = 1$ . L'hamiltoniana e la lagrangiana di questo sistema sono, rispettivamente

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) \quad , \quad L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2). \quad (3.32)$$

Vogliamo usare la tecnica del funzionale generatore,  $Z$ , per calcolare le funzioni di Green. Descriveremo i calcoli in dettaglio, perchè la stessa procedura si applica in contesti interessanti, come ad esempio alla teoria dei campi. Prima di procedere con il funzionale  $Z$ , calcoliamo la funzione di Green a due punti partendo dalla normale formulazione della Meccanica Quantistica, in modo da poter verificare la equivalenza delle due formulazioni.

Ricordiamo che, in termini degli operatori di creazione e distruzione (si veda, ad esempio [6]), possiamo scrivere le relazioni

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger), \\ a^\dagger|0\rangle &= |1\rangle \quad , \quad a^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle \quad , \quad a|1\rangle = |0\rangle, \\ H|0\rangle &= \frac{\omega}{2}|0\rangle \quad , \quad H|1\rangle = \frac{3\omega}{2}|1\rangle, \end{aligned} \quad (3.33)$$

dalle quali segue che

$$q|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}|1\rangle, \quad q|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(|0\rangle + \sqrt{2}|2\rangle). \quad (3.34)$$

Consideriamo per primo l'ordinamento temporale  $t_1 > t_2$ . In questo caso

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2) &= \langle 0|q(t_1)q(t_2)|0\rangle \quad , \quad (t_1 > t_2) \\ &= \langle 0|e^{iHt_1}q e^{-iH(t_1-t_2)}q e^{-iHt_2}|0\rangle \\ &= \frac{1}{2\omega}e^{-i\omega(t_1-t_2)}, \end{aligned}$$

e, combinando il risultato con quello che si ottiene per  $t_2 > t_1$ , troviamo

$$G(t_1, t_2) = \frac{1}{2\omega} \left( e^{-i\omega(t_1-t_2)} \theta(t_1 - t_2) + e^{-i\omega(t_2-t_1)} \theta(t_2 - t_1) \right). \quad (3.35)$$

Per quanto riguarda il metodo della somma sui cammini, notiamo anzitutto che con una integrazione per parti

$$S = \frac{1}{2} \int dt (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) = -\frac{1}{2} \int dt (q\ddot{q} - \omega^2 q^2) = -\frac{1}{2} \int dt (q\mathcal{O}q), \quad (3.36)$$

dove  $\mathcal{O}$  è l'operatore differenziale

$$\mathcal{O} = \partial_t^2 + \omega^2. \quad (3.37)$$

Il funzionale generatore sarà quindi

$$Z[J] = \int d[q(t)] \exp \left[ -\frac{i}{2} \int dt (q\mathcal{O}q + 2qJ) \right]. \quad (3.38)$$

La strategia per eseguire l'integrale è quella standard per integrare funzioni del tipo  $\exp(-ax^2 + bx)$ , usata, per esempio, nell'Appendice A. Consiste nel riscrivere l'esponente come un quadrato perfetto, per ottenere un integrale gaussiano. Procediamo formalmente, riscrivendo la (3.38) come<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int d[q(t)] \exp \frac{-i}{2} \int dt ((q + \mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(q + \mathcal{O}^{-1}J) - (\mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J)) \\ &= \exp \left[ \frac{i}{2} \int dt (\mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J) \right] \int d[q(t)] \exp \left[ \frac{-i}{2} \int dt (q + \mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(q + \mathcal{O}^{-1}J) \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

L'integrale funzionale nell'ultima espressione è in realtà una costante indipendente da  $J$ , come si vede con un cambiamento di variabili<sup>3</sup>  $q \rightarrow q' = q + \mathcal{O}^{-1}J$ , e in conclusione

$$Z[J] = K \exp \left[ \frac{i}{2} \int dt (\mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J) \right]. \quad (3.40)$$

Una costante moltiplicativa non ha alcun effetto sul valore delle funzioni di Green, per cui possiamo semplicemente scrivere

$$Z[J] = \exp \left[ \frac{i}{2} \int dt J\mathcal{O}^{-1}J \right]. \quad (3.41)$$

<sup>2</sup>Per verificare questo risultato, notare che, con due integrazioni per parti,

$$\int dt (\mathcal{O}^{-1}J)\mathcal{O}\phi = \int dt (\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J))\phi = \int dt J\phi.$$

<sup>3</sup>Ricordiamo che l'integrale funzionale si estende su tutte le orbite periodiche,  $q(+\infty) = q(-\infty)$ , quindi vogliamo che anche  $q'$  sia periodico. Occorre quindi imporre qualche restrizione su  $J(t)$ , ad esempio che le funzioni  $J(t)$  ammissibili tendano abbastanza rapidamente a zero per  $t \rightarrow \pm\infty$ . Una analoga restrizione si dovrà applicare nel caso della teoria dei campi.

L'inverso dell'operatore differenziale  $\mathcal{O}$  sarà un operatore integrale

$$(\mathcal{O}^{-1}J)(t) = - \int dt' G(t-t') J(t'), \quad (3.42)$$

dove la funzione  $G$  è detta "propagatore". Il segno è stato scelto in vista degli sviluppi successivi in teoria dei campi e delle convenzioni esistenti. e Ovviamente deve essere verificata la relazione

$$\mathcal{O}(\mathcal{O}^{-1}J)(t) = J(t),$$

che implica che la funzione  $G(t)$  deve essere soluzione dell'equazione differenziale

$$\mathcal{O}G(t) = -\delta(t). \quad (3.43)$$

Dobbiamo però ricordare che, nell'Eq. (3.13) la  $Z[J]$  è definita come limite partendo da valori del tempo con una piccola<sup>4</sup> parte immaginaria negativa,  $t' = (1-i\chi)t$ . Per  $\chi$  piccolo ma non nullo, l'operatore differenziale  $\mathcal{O}$  diventa

$$\mathcal{O} = \partial_t^2 + \omega^2 = (1+2i\chi)\partial_t^2 + \omega^2, \quad (3.44)$$

e il propagatore  $G(t)$  sarà il limite per  $\chi \rightarrow 0$  di una funzione  $G(t, \chi)$  che soddisfa l'equazione<sup>5</sup> (si veda l'Eq. (2.17))

$$(1+2i\chi)\partial_t^2 G(t, \chi) + \omega^2 G(t, \chi) = -\delta(t). \quad (3.45)$$

La soluzione generale di questa equazione è la somma di una soluzione particolare e della soluzione generale della equazione omogenea, che possiamo scrivere, sempre trascurando termini  $\mathcal{O}(\chi^2)$ ,

$$\partial_t^2 G = -[(1-i\chi)\omega]^2 G, \quad G = a e^{-i\omega(1-i\chi)t} + b e^{i\omega(1-i\chi)t}.$$

Per trovare una soluzione della (3.45) passiamo alle trasformate di Fourier,

$$G(t, \chi) = \frac{1}{2\pi} \int dE G(E, \chi) e^{-iEt} \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int dE e^{-iEt}. \quad (3.46)$$

Troviamo così

$$G(E, \chi) = \frac{-1}{\omega^2 - E^2(1+2i\chi)} = \frac{(1-2i\chi)}{E^2 - \omega^2(1-2i\chi)}, \quad (3.47)$$

e trascurando il fattore moltiplicativo  $(1-2i\chi)$ ,

$$G(E, \chi) = \frac{1}{E^2 - \omega^2 + i\epsilon} \quad \text{ovvero} \quad = \frac{1}{E^2 - (\omega - i\eta)^2} \quad (3.48)$$

dove  $\epsilon = 2\chi\omega^2$ ,  $\eta = \chi\omega$ .

<sup>4</sup>Nelle seguenti manipolazioni trascureremo termini  $\propto \chi^2$ .

<sup>5</sup>Stiamo trascurando fattori moltiplicativi che tendono ad uno quando  $\chi \rightarrow 0$ . Ad esempio avremmo dovuto scrivere  $\delta(t') = \delta(t)/(1-i\chi)$ , ma questo fattore è irrilevante nel limite.

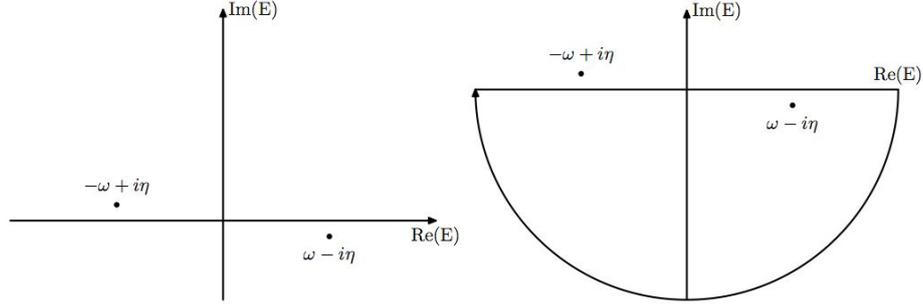


Figura 3.1: Posizione dei poli nella funzione  $G(x, \chi)$  e cammino di integrazione per tempi positivi.

Possiamo adesso calcolare  $G(t, \chi)$ ,

$$G(t, \chi) = \frac{1}{2\pi} \int dE \frac{e^{-iEt}}{E^2 - (\omega - i\eta)^2}. \quad (3.49)$$

Per  $t > 0$  il cammino di integrazione può essere completato sul semipiano inferiore (si veda la Fig. 3.2) e comprende il polo di destra, mentre per  $t < 0$  il cammino di integrazione va chiuso nel semipiano superiore e comprende il polo di sinistra. Notiamo che la presenza di una parte immaginaria del tempo risulta in una selezione del polo che contribuisce all'integrazione. Applicando il teorema dei residui in ciascuno dei due casi,  $t > 0$  e  $t < 0$ , otteniamo quindi una soluzione particolare della (3.45)

$$G(t, \chi) = -\frac{i}{2\omega} \left( e^{-i\omega(1-i\chi)t} \theta(t) + e^{i\omega(1-i\chi)t} \theta(-t) \right). \quad (3.50)$$

La soluzione generale è

$$G(t, \chi) = \frac{-i}{2\omega} \left( e^{-i\omega(1-i\chi)t} \theta(t) + e^{i\omega(1-i\chi)t} \theta(-t) \right) + a e^{-i\omega(1-i\chi)t} + b e^{i\omega(1-i\chi)t}. \quad (3.51)$$

Per determinare le costanti  $a, b$  ricordiamo che, per eseguire il calcolo che porta alla (3.41) abbiamo effettuato un cambiamento di variabili nella integrazione sui cammini

$$q(t) \rightarrow q'(t) = q(t) - \delta q(t), \quad \delta q(t) = \int dt' G(t-t') J(t') = q(t).$$

Dato che l'integrale è esteso su tutti i cammini periodici tra  $t = \pm\infty$ , anche i cammini trasformati devono essere periodici, qualunque sia la funzione  $J(t)$ . Quindi  $\delta q(t)$  deve essere periodica. La soluzione particolare soddisfa questa condizione, dato che tende a zero sia per  $x \rightarrow \infty$  che per  $x \rightarrow -\infty$  (ricordiamo che questo limite va preso prima di mandare  $\chi \rightarrow 0$ ) grazie alla presenza delle funzioni  $\theta(\pm t)$ . Quindi dobbiamo considerare l'effetto dei termini aggiuntivi. Se prendiamo  $J(t) = \delta(t - t_1)$ , con  $t_1$  un tempo arbitrario, dai termini aggiuntivi  $a, b$  della (3.51) otteniamo

$$\delta q(t) = a e^{-i\omega(1-i\chi)(t-t_1)} + b e^{i\omega(1-i\chi)(t-t_1)}.$$

Poichè il primo termine diverge per  $t \rightarrow -\infty$  e il secondo per  $t \rightarrow +\infty$ , la sola soluzione accettabile per la (3.45) è quella con  $a = b = 0$ , cioè la soluzione (3.50), che passando al limite  $\chi \rightarrow 0$  diviene

$$G(t) = -\frac{i}{2\omega} \left( e^{-i\omega t} \theta(t) + e^{i\omega t} \theta(-t) \right). \quad (3.52)$$

Il funzionale generatore — Eq. (3.41), (3.42) — può essere scritto nella forma

$$Z[J] = \exp \left[ \frac{-i}{2} \iint dt dt' J(t) G(t-t') J(t') \right], \quad (3.53)$$

che implica

$$G(t, t') = \langle 0|T(q(t)q(t'))|0\rangle = -\frac{1}{Z(0)} \left[ \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(t)\delta J(t')} \right]_{J=0}. \quad (3.54)$$

Abbiamo apparentemente fatto molto più lavoro che nella formulazione usuale — ma in quel caso avevamo dato per conosciute le proprietà degli operatori di creazione e distruzione, quindi il paragone non è interamente calzante — ma abbiamo ottenuto di più, dato che nel funzionale generatore della Eq. (3.53) sono racchiuse tutte le possibili funzioni di Green dell'oscillatore armonico. Ad esempio potremmo calcolare in due righe — lo lasciamo come esercizio — il valore della funzione di Green a quattro punti,  $\langle 0|T(q(t_1)q(t_2)q(t_3)q(t_4))|0\rangle$ .

E' interessante a questo punto fingere di non sapere nulla sulla struttura degli stati eccitati dell'oscillatore armonico e vedere cosa possiamo direttamente imparare dalla conoscenza delle funzioni di Green, cioè dalla (3.35), che riscriviamo per comodità, nel caso  $t_1 > t_2$

$$\langle 0|q(t_1)q(t_2)|0\rangle = \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega(t_1-t_2)} \quad (t_1 > t_2). \quad (3.55)$$

D'altra parte, introducendo un insieme completo di stati,

$$\langle 0|q(t_1)q(t_2)|0\rangle = \sum_X \langle 0|q(t_1)|X\rangle \langle X|q(t_2)|0\rangle \quad (t_1 > t_2), \quad (3.56)$$

e paragonando con il risultato precedente concludiamo che deve esistere uno stato  $|1\rangle$  tale che

$$\langle 0|q(t_1)|X\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t_1}, \quad (3.57)$$

e quindi  $E_1 = E_0 + \omega$ . Dalla funzione di Green a quattro punti possiamo imparare qualcosa del secondo stato eccitato, e così via. Il funzionale  $Z[J]$  contiene quindi informazioni sull'intero spettro degli stati.

### 3.3 Campi scalari liberi: propagatore e funzionale generatore

Il lavoro svolto nella precedente Sezione ci permette di passare direttamente alla teoria dei campi, senza introdurre novità concettuali. Consideriamo quì il caso più semplice, cioè quello di un campo scalare reale  $\phi(x)$ , dove  $x$  denota il quadrivettore  $\{\vec{x}, t\}$ . Ricordiamo anche che nel sistema di unità

di misura che adottiamo la velocità della luce è  $c = 1$ . La densità di lagrangiana è, per un campo in assenza di interazioni

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^2] . \quad (3.58)$$

In analogia con quanto fatto per l'oscillatore armonico vogliamo calcolare il valore di aspettazione nel vuoto del prodotto ordinato nel tempo di due operatori di campo,  $\langle 0 | T(\phi(x) \phi(y)) | 0 \rangle$ . Seguendo i passi eseguiti nel caso dell'oscillatore armonico, calcoliamo il funzionale generatore (Eq. 3.20). Con una integrazione per parti<sup>6</sup> possiamo scrivere la azione come

$$\begin{aligned} S &= \int d^4 x \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^2] \\ &= - \int d^4 x \frac{1}{2} [\phi(x) \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) + m^2 \phi^2] = - \int d^4 x \frac{1}{2} (\phi K \phi) , \end{aligned} \quad (3.59)$$

dove  $K$  è l'operatore differenziale di Klein Gordon,

$$K = \partial_\mu \partial^\mu + m^2 = \square + m^2 . \quad (3.60)$$

Possiamo allora calcolare il funzionale generatore (3.20), notando l'analogia con il metodo usato nella Sezione precedente

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int d[\phi(x)] \exp \left( i S(\phi(x)) - \int d^4 x \phi(x) J(x) \right) \\ &= \int d[\phi(x)] \exp \left( -\frac{i}{2} \int d^4 x [\phi K \phi + 2 \phi(x) J(x)] \right) \\ &= \int d[\phi(x)] \exp \left( -\frac{i}{2} \int d^4 x [(\phi + K^{-1} J) K (\phi + K^{-1} J) - (J K^{-1} J)] \right) \\ &= \exp \left( \frac{i}{2} \int d^4 x (J K^{-1} J) \right) \int d[\phi(x)] \exp \left( -\frac{i}{2} \int d^4 x [(\phi + K^{-1} J) K (\phi + K^{-1} J)] \right) . \end{aligned}$$

Il residuo integrale funzionale può essere eseguito con un cambiamento di variabili,  $\phi \rightarrow \phi' = \phi + K^{-1} J$  e contribuisce al risultato con una costante che può essere omessa. Possiamo quindi scrivere semplicemente

$$Z[J] = \exp \left( \frac{i}{2} \int d^4 x (J K^{-1} J) \right) .$$

L'inverso dell'operatore differenziale  $K$  sarà un operatore integrale, che (per riprodurre l'usuale convenzione di segno sulla funzione  $\Delta_F$ ) possiamo definire attraverso la relazione

$$K^{-1} J(x) = - \int dy \Delta_F(x-y) J(y) , \quad (3.61)$$

dove  $\Delta_F$  deve soddisfare l'equazione

$$(\square + m^2) \Delta_F(x) = -\delta^4(x) . \quad (3.62)$$

<sup>6</sup>Nel fare integrazioni per parti assumiamo una periodicità di  $\phi(x)$  sia nel tempo che nello spazio, come descritto in dettaglio nella Sezione 3.

Anche questa volta, come nel caso dell'oscillatore armonico, dobbiamo considerare valori complessi del tempo, per cui riscriviamo l'operatore  $K$  come (vedi Eq. 3.44)

$$K = (1 + 2i\chi)\partial_t^2 - (\vec{\nabla})^2 + m^2. \quad (3.63)$$

Passando alle trasformate di Fourier troviamo quindi

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \Delta_F(p) e^{-ipx}, \quad \delta^4(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ipx}, \quad (3.64)$$

dove  $p$  il quadrivettore  $\{E, \vec{p}\}$ , e (si veda la discussione nella Sezione precedente)

$$\Delta_F(p) = \frac{1}{E^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.65)$$

Come abbiamo visto, il termine  $i\epsilon$  nel denominatore specifica il cammino di integrazione.

Naturalmente, lo stesso risultato per la funzione di Green a due punti, inclusa la prescrizione dell' $i\epsilon$ , si ottiene a partire dalla quantizzazione canonica del campo scalare, discussa in [1].

In conclusione, abbiamo dimostrato che il funzionale generatore per un campo scalare reale ha la forma

$$Z[J] = \exp\left(\frac{-i}{2} \iint d^4 x d^4 y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)\right), \quad (3.66)$$

dalla quale possiamo ricavare le differenti funzioni di Green. In particolare, quella a due punti è

$$\langle 0 | T(\phi(x) \phi(y)) | 0 \rangle = i \Delta_F(x-y). \quad (3.67)$$

La funzione  $\Delta_F(x)$  è detta il propagatore del campo  $\phi$ .

Il risultato che abbiamo ottenuto si estende semplicemente al caso di un campo complesso (ovvero di due campi reali, Eq.(3.9)) di massa  $m$  in assenza di interazioni, la cui densità di lagrangiana si può scrivere

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi_k(x) \partial^\mu \phi_k(x) - m^2 \phi_k^2] = \partial_\mu \phi^\dagger(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^\dagger \phi. \quad (3.68)$$

Anche in questo caso il funzionale generatore  $Z[J]$ , definito dalla Eq. (3.24), si calcola esplicitamente usando la procedura descritta. Si trova così il risultato

$$Z[J, J^\dagger] = \exp\left(-i \iint d^4 x d^4 y J^\dagger(x) \Delta_F(x-y) J(y)\right). \quad (3.69)$$

La funzione a due punti, che si ottiene utilizzando le regole di sostituzione (3.25), ha la forma

$$\langle 0 | T(\phi(x) \phi^\dagger(y)) | 0 \rangle = i \Delta_F(x-y), \quad (3.70)$$

mentre

$$\langle 0 | T(\phi(x) \phi(y)) | 0 \rangle = \langle 0 | T(\phi^\dagger(x) \phi^\dagger(y)) | 0 \rangle = 0. \quad (3.71)$$

Lasciamo la derivazione di questi ultimi risultati come esercizio.

### 3.4 Campi scalari liberi: stati a una particella

Possiamo usare le Eq. (3.70) e (3.71) per studiare lo spettro degli stati nella teoria scalare, come abbiamo fatto precedentemente nel caso dell'oscillatore armonico. Troveremo così che un campo scalare complesso descrive due particelle della stessa massa, che potremo chiamare la *particella P* e la *antiparticella A*. Ciascuna delle due può esistere in stati caratterizzati da una quantità di moto  $\vec{p}$  e energia  $\omega_p = \sqrt{(\vec{p}^2 + m^2)}$ .

Riscriviamo la (3.70) usando le Eq. (3.64) e (3.65)

$$\langle 0 | T \left( \phi(x) \phi^\dagger(y) \right) | 0 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \left[ \frac{1}{(2\pi)} \int dE \frac{e^{-iE(t_x-t_y)}}{E^2 - \omega_p^2 + i\epsilon} \right].$$

L'integrale in parentesi quadre è quello dell'Eq. (3.49), che già conosciamo ((3.52)). Possiamo quindi scrivere

$$\langle 0 | T \left( \phi(x) \phi^\dagger(y) \right) | 0 \rangle = i\Delta_F(x-y) \quad (3.72)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{2\omega_p} \left( e^{-i\omega_p(t_x-t_y)} \theta(t_x-t_y) + e^{-i\omega_p(t_y-t_x)} \theta(t_y-t_x) \right). \quad (3.73)$$

Se consideriamo la trasformata di Fourier sulla variabile  $\vec{y}$ , definendo

$$\phi(\vec{q}, t_y) = \int d^3 y e^{-i\vec{q}y} \phi(\vec{y}, t_y), \quad \phi^\dagger(\vec{q}, t_y) = \int d^3 y e^{i\vec{q}y} \phi^\dagger(\vec{y}, t_y), \quad (3.74)$$

otteniamo

$$\langle 0 | T \left( \phi(\vec{x}, t_x) \phi^\dagger(\vec{q}, t_y) \right) | 0 \rangle = \frac{e^{i\vec{q}\vec{x}}}{2\omega_q} \left( e^{-i\omega_q(t_x-t_y)} \theta(t_x-t_y) + e^{-i\omega_q(t_y-t_x)} \theta(t_y-t_x) \right).$$

Analizziamo separatamente i casi  $t_x > t_y$  e  $t_y > t_x$ ,

$$\langle 0 | \phi(\vec{x}, t_x) \phi^\dagger(\vec{q}, t_y) | 0 \rangle = \frac{e^{i\vec{q}\vec{x}}}{2\omega_q} e^{-i\omega_q(t_x-t_y)} \quad (t_x > t_y), \quad (3.75)$$

$$\langle 0 | \phi^\dagger(\vec{q}, t_y) \phi(\vec{x}, t_x) | 0 \rangle = \frac{e^{i\vec{q}\vec{x}}}{2\omega_q} e^{-i\omega_q(t_y-t_x)} \quad (t_y > t_x). \quad (3.76)$$

definendo due famiglie di stati  $|P, \vec{q}\rangle$  e  $|A, \vec{q}\rangle$ ,

$$|P, \vec{q}\rangle = \frac{\sqrt{2\omega_q}}{(2\pi)^{3/2}} \phi^\dagger(\vec{q}, 0) | 0 \rangle, \quad (3.77)$$

$$|A, \vec{q}\rangle = \frac{\sqrt{2\omega_q}}{(2\pi)^{3/2}} \phi(-\vec{q}, 0) | 0 \rangle. \quad (3.78)$$

Dalla (3.75) otteniamo

$$\langle 0 | \phi(\vec{x}, t_x) | P; \vec{q} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_q}} e^{i(\vec{q}\vec{x} - \omega_q t_x)}, \quad (3.79)$$

e dal complesso coniugato della (3.76),

$$\langle 0 | \phi^\dagger(\vec{x}, t_x) | A; \vec{q} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_q}} e^{i(\vec{q}\vec{x} - \omega_q t_x)}. \quad (3.80)$$

Questo ci dice già<sup>7</sup> che gli stati  $|P, \vec{q}\rangle$  e  $|A, \vec{q}\rangle$  hanno energia  $\omega_q = \sqrt{m^2 + \vec{q}^2}$  ed impulso  $\vec{q}$ , e sono quindi interpretabili come stati<sup>8</sup> di una particella libera di massa  $m$ .

Con una seconda trasformata di Fourier su  $\vec{x}$  ricaviamo anche i prodotti scalari di due stati  $P$ , o due stati  $A$

$$\langle P; \vec{p} | P; \vec{q} \rangle = \langle A; \vec{p} | A; \vec{q} \rangle = \delta^3(\vec{p} - \vec{q}). \quad (3.81)$$

Se ora ripetiamo l'esercizio a partire dalla funzione di Green con due  $\phi$ , (3.71), possiamo dimostrare che gli stati  $|P\rangle$  e  $|A\rangle$  sono ortogonali tra loro, cioè che

$$\langle P; \vec{p} | A; \vec{q} \rangle = 0. \quad (3.82)$$

Si tratta quindi di stati di due particelle differenti, ambedue di massa  $m$ .

Che i due tipi di particella siano in rapporto particella–antiparticella non si vede in una teoria così semplice, che descrive particelle prive di interazione. Introducendo però l'interazione con un campo elettromagnetico potremmo facilmente dimostrare che le due particelle hanno carica elettrica opposta. Quale chiamare particella e quale antiparticella rimane tuttavia sempre una scelta arbitraria. Ovviamente, nel caso di un campo scalare reale la situazione è più semplice, e abbiamo un solo tipo di particella.

### 3.5 Operatori di creazione e di distruzione, normalizzazione del continuo

È utile collegare la discussione della Sezione precedente alla formulazione della teoria del campo scalare libero in termini di operatori di creazione e distruzione, discussa in [1]. Ci poniamo inizialmente in un volume finito, per poi introdurre una normalizzazione degli stati e degli operatori di creazione e distruzione appropriata nel limite di volume infinito.

Consideriamo i campi in un volume cubico  $V$  con condizioni periodiche ai bordi, e definiamo un insieme di soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon (K-G) a frequenza positiva

$$\begin{aligned} f_q(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{q})V}} e^{-iqx}, \quad (\square + m^2)f_q = 0, \\ \mathbf{q} &= \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3), \quad \omega(\mathbf{q}) = +\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}, \end{aligned} \quad (3.83)$$

dove  $n_{1,2,3}$  sono numeri interi e  $L$  è il lato del cubo, cioè  $V = L^3$ . Le funzioni (3.83) sono normalizzate in  $V$  secondo la

$$\int_V d^3x f_q^*(x) i \overleftrightarrow{\partial}_t f_{q'}(x) = \delta_{q, q'}, \quad (3.84)$$

<sup>7</sup> Possiamo scrivere  $\phi(\vec{x}, t) = e^{i(Ht - \vec{P}\vec{x})} \phi(0, 0) e^{-i(Ht - \vec{P}\vec{x})}$  dove  $H$  è l'hamiltoniano e  $\vec{P}$  l'operatore impulso.

<sup>8</sup> la normalizzazione dei ket che compaiono nelle Eq.(3.77) e (3.78) corrisponde al limite di volume infinito, e sarà discussa in dettaglio nella prossima Sezione.

dove abbiamo introdotto la notazione abbreviata

$$\overleftarrow{\partial}_t g = f(\partial_t g) - (\partial_t f)g . \quad (3.85)$$

Possiamo costruire gli operatori di creazione e distruzione a partire da  $\phi$  e dalle  $f_q$  nella forma

$$\begin{aligned} a_q &= \int d^3x \left[ f_q(x)^* i \overleftarrow{\partial}_t \phi(x) \right] && \text{(distruzione) ,} \\ a_q^\dagger &= (a_q)^\dagger && \text{(creazione) ,} \end{aligned}$$

con

$$\left[ a_q, a_{q'}^\dagger \right] = i \delta_{q,q'} . \quad (3.86)$$

Dopo l' integrazione spaziale, gli operatori  $a_q$  potrebbero dipendere dal tempo ma è immediato mostrare che di fatto sono costanti, come segue dalla

$$\begin{aligned} \partial_t a_q &= i \int d^3x \left[ f_q(x)^* (\partial_t^2 \phi(x)) - (\partial_t^2 f_q(x)^*) \phi(x) \right] = \\ &= i \int d^3x \left[ f_q(x)^* (\square \phi(x)) - (\square f_q(x)^*) \phi(x) \right] = \\ &= i \int d^3x \left[ f_q(x)^* (\square + m^2) \phi(x) \right] = 0 , \end{aligned} \quad (3.87)$$

poiché sia  $f_q$  che  $\phi$  soddisfano l'equazione di K-G.

Per effettuare il limite al continuo, introduciamo l'operatore di proiezione sugli stati con momento compreso in un intervallo tridimensionale,  $\Delta^3 n$

$$P = \sum_{\Delta^3 n} |p\rangle \langle p| , \quad (3.88)$$

con  $P^2 = P$  in virtù della ortonormalità degli stati  $|p\rangle$ . Se adesso passiamo al limite otteniamo la

$$P = \int_{\Delta^3 p} |p\rangle \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3} \langle p| , \quad (3.89)$$

che suggerisce di definire i ket normalizzati

$$|\tilde{p}\rangle = \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}} |p\rangle , \quad (3.90)$$

per i quali:

$$P = \int_{\Delta^3 p} |\tilde{p}\rangle d^3 p \langle \tilde{p}| . \quad (3.91)$$

Notiamo che la condizione  $P^2 = P$  richiede, come condizione di normalizzazione dei nuovi ket

$$\langle \tilde{p}' | \tilde{p} \rangle = \delta^{(3)}(p' - p) . \quad (3.92)$$

Gli operatori di distruzione e creazione che corrispondono ai nuovi stati sono, evidentemente,

$$\tilde{a}_p = \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}} a_p, \quad \tilde{a}_p^\dagger = (\tilde{a}_p)^\dagger, \quad (3.93)$$

e le nuove regole di commutazione si ottengono dalla (3.92)

$$\delta^{(3)}(p' - p) = \langle 0 | \tilde{a}_{p'} \tilde{a}_p^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | [\tilde{a}_{p'}, \tilde{a}_p^\dagger] | 0 \rangle, \quad (3.94)$$

che implica

$$[\tilde{a}_{p'}, \tilde{a}_p^\dagger] = \delta^{(3)}(p' - p). \quad (3.95)$$

Lo sviluppo del campo si scrive ora nella forma

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p})V}} \left[ a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx} \right] = \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p})}} \left[ \tilde{a}_p e^{-ipx} + \tilde{a}_p^\dagger e^{ipx} \right]. \end{aligned} \quad (3.96)$$

I nuovi stati sono normalizzati in modo di avere, invece che una particella nel volume di riferimento, una densità di particelle costante. Questa proprietà si verifica calcolando l'energia del campo, che risulta pari a (usiamo il prodotto normale degli operatori, definito in [1])

$$\begin{aligned} H &= \int d^3 x \frac{1}{2} [ : (\partial_t \phi)^2 : + : (\nabla \phi)^2 : + m^2 : \phi^2 : ] \\ &= \int d^3 p \omega(\mathbf{p}) \tilde{a}_p^\dagger \tilde{a}_p, \end{aligned}$$

con

$$E_p = \langle \tilde{p} | H | \tilde{p} \rangle = \delta^{(3)}(0) \omega(\mathbf{p}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \omega(\mathbf{p}). \quad (3.97)$$

Si vede così che la densità di particelle nello stato  $|\tilde{p}\rangle$  è pari a  $\rho = 1/(2\pi)^3$ .

Per finire, notiamo che la relazione che lega i campi agli operatori di distruzione si scrive:

$$\tilde{a}_q = \int d^3 x \left[ \tilde{f}_q(x)^* i \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(x) \right], \quad (3.98)$$

con

$$\tilde{f}_q(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega(\mathbf{p})}} e^{-ipx}. \quad (3.99)$$

Nel seguito adotteremo la normalizzazione del continuo, omettendo per brevità la tilde sia sugli operatori che sulle funzioni  $f_q$ .

## Capitolo 4

### Sviluppo perturbativo delle funzioni di Green. Teoria $\lambda\phi^4$

Nei Capitoli precedenti abbiamo applicato il metodo della somma sui cammini a teorie di campo molto semplici, in particolare a campi scalari reali o complessi *liberi*, che descrivono particelle di spin zero, rispettivamente neutre e cariche, in assenza di interazioni. Il caso dei campi liberi è l'unico nel quale si può effettuare il calcolo delle varie grandezze che caratterizzano la teoria, in particolare il funzionale generatore e le funzioni di Green. Con l'espressione campi *liberi* ci si riferisce a campi che descrivono particelle che non interagiscono tra loro. Ciò si traduce nella richiesta che la lagrangiana non contenga termini che sono il prodotto di più di due campi. Alle lagrangiane di questo tipo corrispondono equazioni del moto lineari nei campi, come per esempio l'equazione di Klein-Gordon, per il campo scalare

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 .$$

La soluzione generale delle equazioni del moto è delle teorie libere è data da una sovrapposizione di onde piane, che corrispondono ai diversi possibili stati di impulso definito delle particelle. In tutti i casi interessanti la situazione è invece molto più complessa: la lagrangiana contiene termini del terzo o quarto ordine (o di ordine ancora superiore), le equazioni del moto sono non lineari e non si possono risolvere esattamente. Si ricorre allora a metodi approssimati, e tra questi in primo luogo la teoria delle perturbazioni.

Anche se in questo corso vogliamo occuparci soprattutto di elettrodinamica quantistica, consideriamo per primo il caso semplice di un campo scalare reale con una interazione  $\lambda\phi^4$ . La lagrangiana ha la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 , \quad (4.1)$$

alla quale corrisponde l'equazione del moto non lineare

$$(\square + m^2)\phi(x) = \frac{1}{3!}\lambda\phi^3 ,$$

la cui soluzione generale non è nota, nemmeno a livello classico.

#### 4.1 Sviluppo perturbativo del funzionale generatore e diagrammi di Feynman

Possiamo esprimere, almeno formalmente, le grandezze di interesse fisico come serie di potenze nella *costante d'accoppiamento*  $\lambda$ , la cosiddetta *serie perturbativa*. In particolare è possibile esprimere

re come serie di potenze in  $\lambda$  le funzioni di Green. Se  $\lambda$  è piccolo, i primi termini di questa serie forniscono una buona approssimazione della grandezza di interesse fisico.

Per cominciare, si suddivide la lagrangiana in due termini secondo la

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \mathcal{L}^0(\phi, \partial_\mu\phi) + \mathcal{L}^1(\phi), \quad (4.2)$$

dove  $\mathcal{L}^0$  è la lagrangiana della teoria libera, ad esempio quella studiata nella Sezione 3.3, e  $\mathcal{L}^1$  un termine di interazione<sup>1</sup>. Il funzionale generatore è dunque dato dalla (si veda l'Eq. (3.20))

$$Z[J] = \int D[\phi(x)] \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}^1(\phi)\right) \exp\left(i \int d^4x (\mathcal{L}^0(\phi, \partial_\mu\phi) - \phi(x)J(x))\right),$$

che possiamo riscrivere (si veda l'Eq. (3.23)) nella forma

$$Z[J] = \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}^1\left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right) Z^0[J], \quad (4.3)$$

dove  $Z^0[J]$  è il funzionale generatore ottenuto dalla lagrangiana imperturbata  $\mathcal{L}^0$ . Nel caso della teoria  $\lambda\phi^4$ , Eq. (4.1),  $Z^0[J]$  è quello definito dalla (3.66), che riportiamo per convenienza

$$Z^0[J] = \exp\left(-\frac{i}{2} \iint d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)\right). \quad (4.4)$$

Formalmente, il funzionale generatore  $Z[J]$  si può sviluppare in serie di potenze di  $\lambda$  secondo la

$$Z[J] = \exp\left(\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right) Z^0[J] \quad (4.5)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{(4!)^n n!} \left(\int d^4x \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right)^n Z^0[J] \quad (4.6)$$

$$= Z^0[J] + i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 Z^0[J] \quad (4.7)$$

$$- \frac{\lambda^2}{2(4!)^2} \iint d^4x d^4y \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 \left(i \frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^4 Z^0[J] + \dots \quad (4.8)$$

Per procedere col calcolo, ordine per ordine, dobbiamo eseguire materialmente le derivate funzionali. Notiamo innanzitutto che (si veda l'Eq. (4.4))

$$i \frac{\delta}{\delta J(x)} Z^0[J] = \int d^4y \Delta_F(x-y) J(y) Z^0[J]. \quad (4.9)$$

La prima derivata che si esegue “cala” un fattore  $\Delta_F J$  dall'esponenziale, mentre quelle successive possono “calare” ulteriori fattori, o “catturare” la  $J$  da un fattore  $\Delta_F J$  “calato” da una derivata precedente, ad esempio per la derivata seconda troviamo

$$\begin{aligned} i \frac{\delta}{\delta J(x')} \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} Z^0[J]\right) &= \left(\int d^4y' \Delta_F(x'-y') J(y')\right) \left(\int d^4y \Delta_F(x-y) J(y)\right) Z^0[J] + \\ &+ i \Delta_F(x-x') Z^0[J]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

<sup>1</sup>Abbiamo supposto che  $\mathcal{L}^1$  dipenda dai campi e non dalle loro derivate. Questa limitazione che semplifica gli sviluppi formali, ma può essere superata senza particolari difficoltà. Pure per semplicità ci limiteremo anche al caso di un singolo campo.

Per dominare meglio la complicazione di questi calcoli, che cresce rapidamente di derivata in derivata, si introduce una rappresentazione grafica. Ad ogni fattore  $(i\delta/\delta J(x))^4$  corrisponde un punto, detto “vertice” da cui escono quattro linee. Ogni linea può finire in un altro vertice di cui ha “catturato” una  $J$  (o nello stesso vertice se cattura una  $J$  prodotta da una precedente derivata), oppure in un pallino, che rappresenta una  $J$  non catturata da altre derivate. Nel primo caso la linea (che chiameremo “linea interna”) corrisponde a un propagatore  $i\Delta_F$ , nel secondo (linea “esterna”) ad un fattore  $\Delta_F J$ . Ad esempio, i due termini della derivata seconda possono essere rappresentati dai due diagrammi della Fig. 4.1. Naturalmente in questo caso da ciascuno dei due punti  $x, x'$  esce una sola linea. Per unificare la descrizione dei due tipi di linee ci conviene riscrivere il termine che corrisponde a una linea che termina in un pallino come  $\Delta_F J = (i\Delta_F)(-iJ)$  di modo che ad ogni linea, interna o esterna, corrisponda un fattore  $i\Delta_F$ .



Figura 4.1: Rappresentazione grafica dei due termini dell’Eq.(4.10). I pallini grandi tratteggiati corrispondono ciascuno ad un fattore  $-iJ$ .

Al termine di ordine  $\lambda$  della  $Z[J]$  (Eq.(4.5)) corrisponderanno diagrammi con un singolo vertice, e ci si convince facilmente che le sole possibilità sono i diagrammi (a), (b) e (c) della Fig. 4.2. Il diagramma (a), dove tutte le  $J$  sono state “catturate”, e che è privo di linee esterne, viene detto diagramma *vuoto-vuoto*.

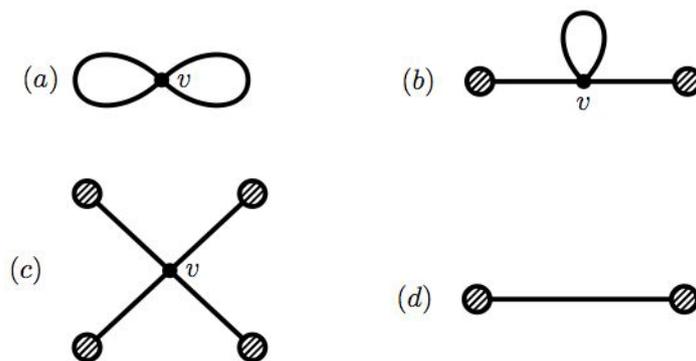


Figura 4.2: I diagrammi al primo ordine perturbativo

Il diagramma (b) rappresenta una modificazione al propagatore che abbiamo calcolato in precedenza (Sezione 3.3) all’ordine  $\lambda^0$  è quello, e che possiamo rappresentare con diagramma senza vertici, come in (d). Anche su questo torneremo nel seguito. Per ora limitiamoci a passare in rassegna i diagrammi dello stesso tipo che si incontrano al secondo ordine perturbativo, illustrati nella Fig. 4.3.

Sorge subito il sospetto che il diagramma (a) di questa figura sia, assieme ai diagrammi (b) e (d) della figura precedente, l'inizio di una serie interessante. Come vedremo, si tratta di un sospetto del tutto giustificato.

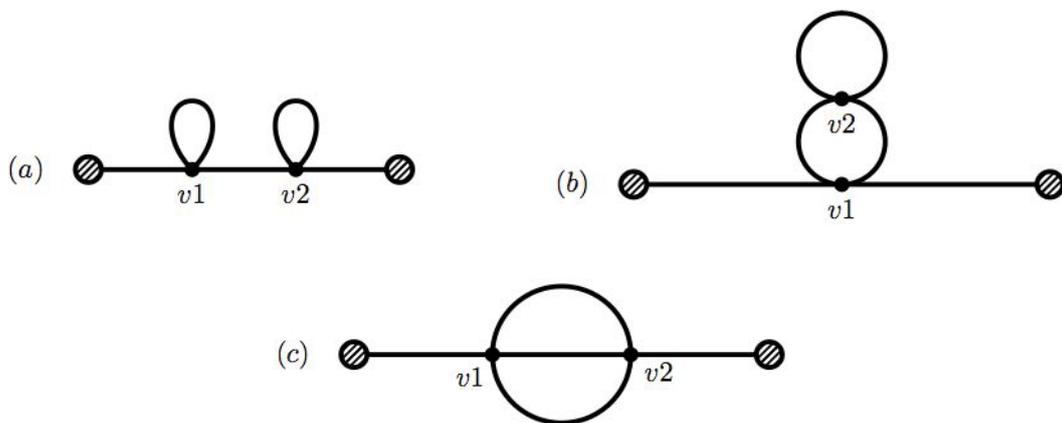


Figura 4.3: Correzioni di ordine  $\lambda^2$  al propagatore.

Infine, il diagramma (c) della Fig. 4.2, rappresenta lo scattering di due particelle e, come vedremo, è direttamente connesso all'elemento della matrice  $S$  che descrive questo processo, o meglio alla sua approssimazione d'ordine  $\lambda$ . Le correzioni di ordine  $\lambda^2$  sono rappresentate dai diagrammi della Fig. 4.4.

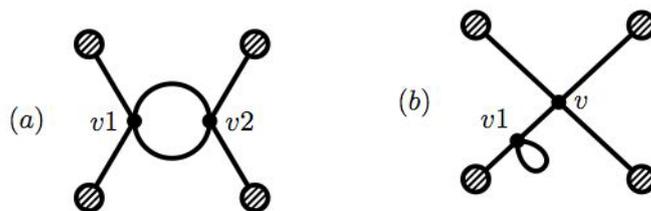


Figura 4.4: Correzioni di ordine  $\lambda^2$  al grafico (c) della Fig. 4.2.

La corrispondenza tra diagrammi della teoria  $\lambda\phi^4$  e termini dell'espansione di  $Z[J]$  si può riassumere in alcune semplici regole:

pallino	$-i \int d^4x J(x),$	
vertice	$i \frac{\lambda}{4!} \int d^4v,$	(4.11)
linea da $x$ a $y$	$i\Delta_F(x-y).$	

A queste si deve aggiungere una regola per calcolare il fattore combinatorio da applicare al contributo di ciascun diagramma. Nel caso della teoria  $\lambda\phi^4$  quest'ultima regola è parecchio più complicata che nel caso della elettrodinamica quantistica (QED). Nel contesto delle nostre lezioni, in cui la teoria  $\lambda\phi^4$  serve solo come modello semplice per la QED, è conveniente omettere la discussione di questo problema. È comunque sempre possibile, una volta identificata — con le regole che abbiamo dato — la forma di un particolare contributo alla  $Z[J]$ , ricorrere alla (4.5) per ottenere il fattore combinatorio corretto.

Ad ogni vertice o pallino si associa un punto nello spazio-tempo  $(x, v)$ , sulle cui coordinate viene eseguita una integrazione, e l'argomento delle  $\Delta_F$  è la differenza tra le posizioni degli estremi, siano essi vertici o pallino. Quindi, al diagramma (c) della Fig. 4.2 corrisponde un termine in  $Z[J]$  che possiamo chiamare  $D_1$  (è il primo diagramma che calcoliamo!)

$$D_1[J] = (-i)^4 \int d^4 x_1 J(x_1) \int d^4 x_2 J(x_2) \int d^4 x_3 J(x_3) \int d^4 x_4 J(x_4) \quad (4.12)$$

$$\times \frac{(i\lambda)^4}{4!} \int d^4 v (i)^4 \Delta_F(x_1 - v) \Delta_F(x_2 - v) \Delta_F(x_3 - v) \Delta_F(x_4 - v), \quad (4.13)$$

che rappresenta il primo ordine in  $\lambda$  del termine in  $Z[J]$  proporzionale a  $J^4$ . Le correzioni di ordine  $\lambda^2$  sono date dai diagrammi della Fig. 4.4: il diagramma (a) corrisponde a

$$D_2[J] = (-i)^4 (6^2) \int d^4 x_1 J(x_1) \int d^4 x_2 J(x_2) \int d^4 x_3 J(x_3) \int d^4 x_4 J(x_4) \left(\frac{i\lambda}{4!}\right)^2 \iint d^4 v_1 d^4 v_2 \\ (i)^6 \Delta_F(x_1 - v_1) \Delta_F(x_2 - v_1) \Delta_F(x_3 - v_2) \Delta_F(x_4 - v_2) \Delta_F(v_1 - v_2) \Delta_F(v_1 - v_2),$$

dove  $(6^2)$  è un fattore combinatorio. Avremmo potuto ottenere questi risultati, incluso il fattore  $(6^2)$ , isolando direttamente i termini  $J^4$  nella Eq. (4.5). Lasciamo questo compito come esercizio ai lettori. Del diagramma (b) della Fig. 4.4 discuteremo a parte, perchè si tratta di una correzione sulle linee esterne.

## 4.2 Diagrammi e regole di Feynman per le funzioni di Green

Consideriamo la funzione di Green del campo scalare reale a  $2k$  punti (nella teoria con interazione  $\lambda\phi^4$  si ottiene un risultato non nullo solo per un numero pari di punti<sup>2</sup>). Riassumendo le formule precedenti, otteniamo

$$G(x_1, x_2, \dots, x_{2k}) = \frac{1}{Z[0]} \int D[\phi(x)] \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_{2k}) \exp[i \int d^4 x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)] = \\ = \frac{1}{Z[0]} \left[ \left( i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left( i \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \right) \dots \left( i \frac{\delta}{\delta J(x_{2k})} \right) Z[J] \right]_{J=0}, \quad (4.14)$$

<sup>2</sup>La lagrangiana di questa teoria, Eq. (4.1), è simmetrica sotto l'operazione  $\phi \rightarrow -\phi$ . Deve quindi esistere un operatore unitario  $\mathbf{P}$  sullo spazio degli stati, tale che  $\mathbf{P}\phi\mathbf{P} = -\phi$ . Nel linguaggio degli operatori di creazione e distruzione si verifica facilmente che se  $|n\rangle$  è un stato ad  $n$  particelle,  $\mathbf{P}|n\rangle = (-1)^n |n\rangle$ . Dato che il vuoto ( $n=0$ ) è pari, ne segue che  $\langle n|\phi|0\rangle = 0$  se  $n$  è pari.

dove, utilizzando lo sviluppo perturbativo

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int D[\phi(x)] \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}^1(\phi)\right] \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}^0 - i \int d^4x J(x)\phi(x)\right] \\ &= \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}^1\left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right] Z^0[J] \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$= \sum_n \left(\frac{i}{n!}\right)^n \left[\int d^4x \mathcal{L}^1\left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]^n Z^0[J], \quad (4.16)$$

dove

$$Z^0[J] = \exp\left[-\frac{i}{2} \int \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)\right] = \exp\left[-\frac{i}{2} (J \Delta_F J)\right]. \quad (4.17)$$

Lo sviluppo perturbativo di  $G$  prende quindi la forma

$$G(x_1, \dots, x_{2k}) = \sum_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_{2k}),$$

con

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_{2k}) = \left\{ \left(i \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right) \dots \left(i \frac{\delta}{\delta J(x_{2k})}\right) \frac{1}{n!} \left[ i \int d^4x \mathcal{L}^1\left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right) \right]^n Z^0[J] \right\}_{J=0}. \quad (4.18)$$

Poiché alla fine del calcolo dobbiamo porre  $J = 0$ , nello sviluppo di  $Z^0$  in potenze di  $(J \Delta_F J)$  conta solo il termine di grado pari al numero di derivate funzionali che compaiono nella Eq. (4.18). Nel caso dell'interazione  $\lambda\phi^4$ , possiamo quindi scrivere

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_{2k}) = \left(i \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right) \dots \left(i \frac{\delta}{\delta J(x_{2k})}\right) \frac{1}{n!} \left[ i \int d^4x \frac{(i\lambda)}{4!} \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 \right]^n \frac{1}{M!} \left[-\frac{i}{2} (J \Delta_F J)\right]^M. \quad (4.19)$$

con  $M = k + 2n$ .

Naturalmente, le derivate funzionali possono essere eseguite in molti modi diversi. Ciascuno di essi può essere rappresentato da un *diagramma di Feynman*, cioè un grafico nello spazio-tempo in cui  $M$  linee, i propagatori  $i\Delta_F$ , connettono i punti  $x_1, \dots, x_{2k}$  tra loro e/o con gli  $n$  punti in cui sono localizzate le interazioni, i *vertici*. Ciascuno di questi grafici è associato ad un'ampiezza, che è il prodotto di propagatori, costanti di accoppiamento  $\lambda$  e fattori numerici, determinati dalla struttura della (4.19). Esplicitamente, dalla (4.19) possiamo vedere che:

- ogni volta che due derivate agiscono sullo stesso propagatore, otteniamo un fattore 2, e quindi il risultato è un fattore  $i\Delta_F$  calcolato nei punti associati alle derivate funzionali;
- i ruoli dei propagatori possono essere permutati senza cambiare il risultato. Questa proprietà permette di semplificare il fattore  $1/M!$ ;
- analogamente, i ruoli dei vertici possono essere permutati ottenendo  $n!$  contributi identici. Questa proprietà permette di semplificare il fattore  $1/n!$ .

Le considerazioni appena svolte si riassumono in prescrizioni semplici ed eleganti per ottenere la funzione di Green a  $2k$  punti all'ordine  $n$  della teoria delle perturbazioni, note col nome di *regole di Feynman*.

**Diagrammi di Feynman** Iniziamo con l'individuazione delle ampiezze indipendenti che contribuiscono alla funzione di Green a la costruzione dei corrispondenti diagrammi di Feynman.

- fissiamo i punti esterni  $(x_1, x_2, \dots, x_{2k})$  ed i punti  $(x, y, z, \dots)$  dove sono localizzate le interazioni (vertici);
- disegniamo i grafici in cui  $M$  linee connettono tra loro punti esterni e vertici in tutti i modi topologicamente indipendenti;

**Regole di Feynman** Ad ogni grafico è associata un'ampiezza, secondo le regole seguenti.

- un fattore  $i\Delta_F(u - v)$  per ogni linea che inizia nel punto  $u$  e finisce in  $v$ ;
- un fattore  $i\lambda$  per ogni vertice;
- un fattore numerico, da calcolare caso per caso, che nasce dalla incompleta cancellazione dei fattori  $1/4!$  nei vertici con la molteplicità dei modi in cui si eseguono le derivate corrispondenti al grafico;
- integriamo l'ampiezza sulle coordinate di tutti i vertici;
- la funzione di Green è la somma delle ampiezze corrispondenti a ciascun grafico.

Consideriamo, a titolo di esempio, il calcolo della funzione a due e quattro punti al primo ordine in  $\lambda$ .

**Calcolo di  $G^{(1)}(x_1, x_2)$ .** Con un vertice e due punti esterni possiamo costruire i due grafici indipendenti della Fig. 4.5. Calcoliamo adesso i fattori numerici ad essi associati eseguendo esplicitamente le derivate funzionali (per brevità scriviamo 1, 2 al posto di  $x_{1,2}$ ):

$$G^{(1)}(1, 2) = \left(i \frac{\delta}{\delta J(1)}\right) \left(i \frac{\delta}{\delta J(2)}\right) \frac{i\lambda}{4!} \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 \frac{1}{3!} \left[-\frac{i}{2} (J\Delta_F J)\right]^3. \quad (4.20)$$

Eseguiamo le derivate rispetto a  $J(1)$  e  $J(2)$ . Le due derivate possono agire: (a) sullo stesso propagatore, (b) su propagatori diversi:

$$\begin{aligned} G_{2a} &= i\Delta_F(1-2) \frac{i\lambda}{4!} \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{2} J\Delta_F J\right)^2, \\ G_{2b} &= \frac{i\lambda}{4!} \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 \\ &\quad \times \int \int d^4u d^4v [i\Delta_F(1-u)(-iJ(u))] [i\Delta_F(2-v)(-iJ(v))] \left(-\frac{i}{2} J\Delta_F J\right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Nel caso di  $G_{2a}$ , eseguendo la prima derivata troviamo

$$G_{2a} = i\Delta_F(1-2) \frac{i\lambda}{4!} \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 \int d^4u \Delta_F(x-u) J(u) \left[-\frac{i}{2} (J\Delta_F J)\right]. \quad (4.22)$$

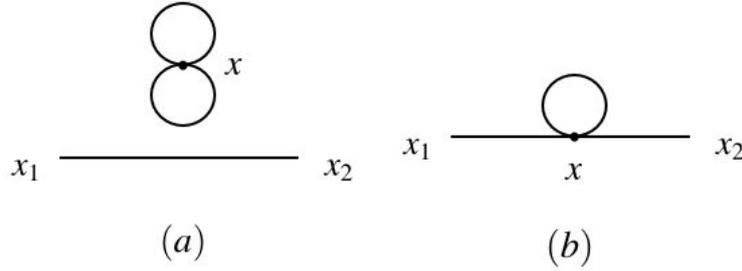


Figura 4.5: Diagrammi di Feynman al primo ordine per la funzione di Green a due punti.

Una delle altre tre derivate deve agire su  $J(u)$ , il che può avvenire in tre modi diversi, le altre due eliminano le correnti in  $(J\Delta_F)$ . Quindi:

$$G_{2a} = C_a [i\Delta_F(1-2)] (i\lambda) [i\Delta_F(0)]^2, \quad C_a = \frac{3}{4!} = \frac{1}{8}. \quad (4.23)$$

Nel caso di  $G_{2b}$ , due derivate devono operare sulle correnti  $J(u)$  e  $J(v)$ , il che può avvenire in  $4 \times 3$  modi diversi, mentre le altre due agiscono su  $(J\Delta_F)$ . In totale, troviamo quindi:

$$G_{2b} = C_b i\lambda [i\Delta_F(1-x)] [i\Delta_F(2-x)i\Delta_F(0)], \quad C_b = \frac{12}{4!} = \frac{1}{2}. \quad (4.24)$$

**Calcolo di  $G^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ .** I diagrammi di Feynman della funzione a quattro punti al primo ordine sono illustrati in Fig. 4.6.

Il calcolo esplicito si effettua a partire dall'espressione

$$G^{(1)}(1, 2, 3, 4) = (i \frac{\delta}{\delta J(1)}) (i \frac{\delta}{\delta J(2)}) (i \frac{\delta}{\delta J(3)}) (i \frac{\delta}{\delta J(4)}) \frac{i\lambda}{4!} (i \frac{\delta}{\delta J(x)})^4 \frac{1}{4!} [-\frac{i}{2} (J\Delta_F J)]^4. \quad (4.25)$$

Il contributo del grafico (a) si ottiene facendo agire due a due le derivate rispetto alle correnti dei punti esterni su due propagatori. Otteniamo così

$$G_{4a} = \frac{i\lambda}{4!} i\Delta_F(1-2) i\Delta_F(3-4) (i \frac{\delta}{\delta J(x)})^4 \frac{1}{2!} [-\frac{i}{2} (J\Delta_F J)]^2 + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4). \quad (4.26)$$

Riutilizzando l'argomento che ci ha portato alla (4.23) troviamo quindi

$$G_{4a} = \frac{3}{4!} i\lambda i\Delta_F(1-2) i\Delta_F(3-4) [i\Delta_F(0)]^2 + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4). \quad (4.27)$$

Per il grafico (b), solo due delle derivate rispetto alle correnti nei punti esterni vanno sullo stesso propagatore. Il risultato è

$$G_{4b} = \frac{i\lambda}{4!} i\Delta_F(1-2) (i \frac{\delta}{\delta J(x)})^4 \times \\ \times \int \int d^4u d^4v \Delta_F(3-u) \Delta_F(4-v) J(u) J(v) [-\frac{i}{2} (J\Delta_F J)] + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4), \quad (4.28)$$

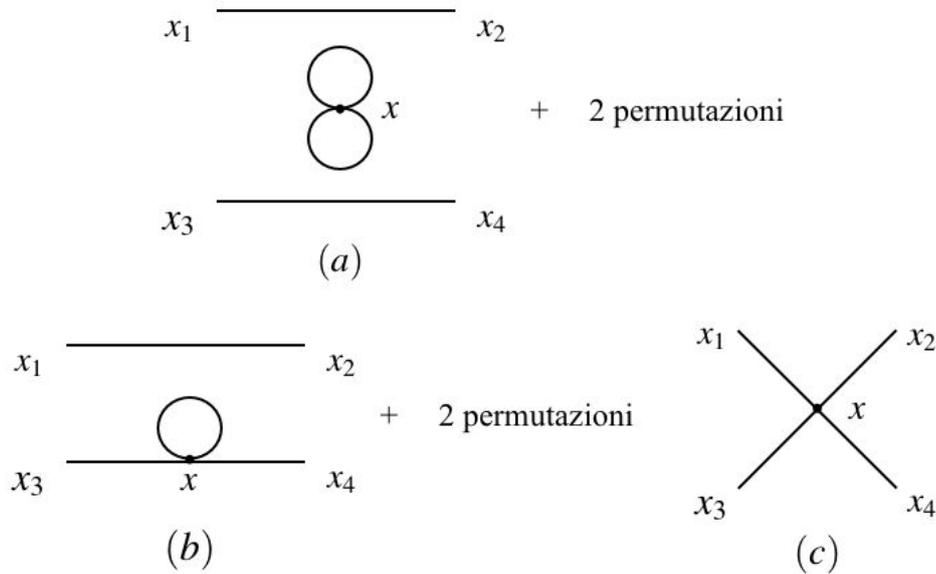


Figura 4.6: Diagrammi di Feynman al primo ordine per la funzione di Green a quattro punti.

e procedendo come per la (4.24) otteniamo

$$G_{4b} = \frac{12}{4!} i\lambda i\Delta_F(1-2) i\Delta_F(3-x) i\Delta_F(4-x) i\Delta_F(0) + (2 \leftrightarrow 3) + (2 \leftrightarrow 4) . \quad (4.29)$$

Calcoliamo infine il grafico (c). In questo caso le derivate rispetto alle correnti nei punti esterni devono agire tutte su propagatori diversi, col risultato

$$G_{4c} = \frac{i\lambda}{4!} (i \frac{\delta}{\delta J(x)})^4 \int d^4u \int d^4v \int d^4w \int d^4z \times \Delta_F(1-u)\Delta_F(2-v)\Delta_F(3-w)\Delta_F(4-z) J(u)J(v)J(w)J(z) . \quad (4.30)$$

La cancellazione del fattore  $1/4!$  è completa, e quindi

$$G_{4c} = i\lambda i\Delta_F(1-x)i\Delta_F(2-x)i\Delta_F(3-x)i\Delta_F(4-x) . \quad (4.31)$$

A conclusione della Sezione, facciamo alcune considerazioni di ordine generale.

**Diagrammi di Feynman e somma sui cammini.** L'analisi delle funzioni di Green in termini dei diagrammi di Feynman corrisponde in pieno all'idea di somma sui cammini che abbiamo introdotto all'inizio di questo volume. Per esempio, possiamo interpretare la funzione di Green a 4 punti come l'ampiezza quantistica di un processo nello spazio-tempo in cui due particelle vengono create in  $x_1$  ed  $x_2$  ed assorbite in  $x_3$  ed  $x_4$ . Ogni grafico indipendente, fissate le posizioni dei vertici, corrisponde ad un cammino possibile e l'ampiezza corrispondente è data dal prodotto delle ampiezze delle diverse componenti del cammino: ampiezza di propagazione,  $i\Delta_F(x-y)$ , e interazione,  $i\lambda$ . Lo sviluppo perturbativo corrisponde ad avere una, due, ...,  $n$ , interazioni lungo i cammini delle diverse particelle.

Le coordinate dei punti esterni non determinano quante interazioni avvengono nel processo nè fissano i punti dello spazio-tempo dove avvengono le interazioni stesse. Secondo i principi generali della Meccanica Quantistica, dobbiamo quindi integrare sullo spazio-tempo le coordinate delle interazioni (vertici) per ciascun grafico e sommare le ampiezze dei grafici indipendenti.

**Contrazioni nello stesso vertice.** Quando due derivate funzionali in una lagrangiana di interazione catturano le due  $J$  di un termine ( $J\Delta_F J$ ), nel grafico corrispondente appare una linea che si chiude sul vertice stesso, come nel diagramma (b) della Fig. 4.2. Il circuito chiuso corrisponde all'inserzione di un termine di interazione con due potenze in meno dei campi, in questo caso della forma  $\text{cost} \times \phi^2$ . Poichè la lagrangiana già contiene termini con tutte le potenze dei campi fino a quattro, l'inserzione corrisponde a ridefinire le costanti già presenti nella lagrangiana stessa. Il risultato è una nuova, semplice, regola:

- Le contrazioni nello stesso vertice possono essere ignorate.

Nella formulazione di Dyson della matrice S, questa regola è soddisfatta automaticamente se si prende la lagrangiana di interazione come *prodotto normale* di campi [1].

### 4.3 Parti connesse e diagrammi vuoto-vuoto

Torniamo a considerare lo sviluppo perturbativo del funzionale generatore,  $Z[J]$ . I diagrammi che abbiamo mostrato nelle Fig. 4.2 – 4.4 sono tutti topologicamente connessi. In ciascuno di essi ci si può spostare da qualsiasi vertice o pallino a qualsiasi altro muovendosi lungo le linee del diagramma. Esistono però anche diagrammi non connessi. Ad esempio, tra i termini del secondo ordine in  $\lambda$  nella Eq. (4.5) ne esiste uno in cui ciascuna delle otto derivate “cala” un fattore  $\Delta_F J$ , dando come risultato il quadrato del termine della Eq. (4.12). Questo termine, rappresentato da un diagramma composto da due parti topologicamente separate centrate sui due vertici  $v_1$  e  $v_2$ , è illustrato nella Fig. 4.7. A un diagramma non connesso corrisponde un termine (un funzionale di  $J$ ) che si fattorizza nel prodotto di due o più funzionali di  $J$ , e nel caso della Fig. 4.7 si ottiene<sup>3</sup>  $(D_1[J])^2/2$ . Dal punto di vista

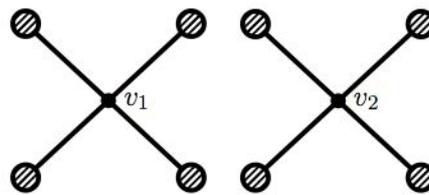


Figura 4.7: Un diagramma sconnesso al secondo ordine in  $\lambda$ .

fisico ciascuna delle due parti del diagramma nella Fig. 4.7 rappresenta un processo di scattering tra due particelle. La combinazione delle due parti rappresenta due processi di scattering indipendenti tra loro: possiamo immaginare che il primo avvenga al CERN e il secondo a Frascati. L'ampiezza di

<sup>3</sup>La giustificazione di questo risultato si troverà nell'Appendice B, Eq. (B.14).

probabilità per la combinazione di più processi indipendenti è semplicemente il prodotto delle ampiezze di ciascuno di essi, e la probabilità che tutti avvengano è il prodotto delle singole probabilità. Non c'è altro da imparare dallo studio di processi indipendenti. Conviene quindi concentrarsi sui singoli processi, che corrispondono a diagrammi connessi.

Abbiamo visto che tramite la teoria delle perturbazioni il funzionale  $Z[J]$  può essere espresso come una somma di diagrammi, connessi e non connessi. È possibile definire un funzionale  $W[J]$  che genera solo i diagrammi connessi tramite la

$$W[J] = \sum_{(\text{diag. connessi})} D_i[J]. \quad (4.32)$$

La relazione tra  $W[J]$  e  $Z[J]$  è data dalla

$$Z[J] = \exp(W[J]), \quad (4.33)$$

come dimostrato nell'Appendice B.

Notiamo ancora che per  $J = 0$  otteniamo

$$Z[0] = \exp(W[0]), \quad (4.34)$$

dove  $W[0]$  corrisponde alla somma dei diagrammi connessi vuoto-vuoto, cioè quelli che non hanno "pallino" e sono gli unici che non si annullano per  $J = 0$ . Possiamo quindi scrivere

$$Z[J] = Z[0] \exp(W'[J]), \quad (4.35)$$

dove  $W'[J]$  è la somma di tutti i diagrammi connessi che non siano del tipo vuoto-vuoto, cioè dei diagrammi provvisti di gambe esterne. L'effetto dei diagrammi vuoto-vuoto sul funzionale generatore  $Z[J]$  consiste quindi in una costante moltiplicativa  $Z[0]$  che, come si vede dalla (3.21), non contribuisce al calcolo delle funzioni di Green, e può quindi essere tralasciato. Un semplice esempio che mostra come i contributi dei diagrammi vuoto-vuoto al funzionale generatore  $Z[J]$  venga cancellato esattamente dal denominatore  $Z[0]$  è discusso nell'Appendice C.

Possiamo applicare risultato ottenuto direttamente al calcolo delle funzioni di Green definendo le funzioni di Green *connesse* tramite le derivate del funzionale  $W[J]$  o, in modo equivalente, del funzionale  $W'[J]$ , poichè questi due funzionali differiscono per una costante  $W[0]$  che non contribuisce alle derivate

$$\langle 0|T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_N))|0\rangle_{\text{Conn.}} = \frac{i\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{i\delta}{\delta J_N(x_N)} W[J] \Big|_{J=0}. \quad (4.36)$$

Alla funzione di Green connessa ad  $N$  punti contribuiranno i diagrammi connessi con esattamente  $N$  linee esterne, quindi  $N$  fattori  $J$ . Se guardiamo alle regole per i diagrammi (4.11), vediamo che le derivate funzionali  $i\delta/\delta J(x_k)$  della (4.36) sopprimono i fattori  $-iJ(x)$  delle linee esterne, e fissano ad  $x_k$  la terminazione di ciascuna linea. Si passa quindi dai diagrammi per il funzionale generatore a quelli per la funzione di Green semplicemente sopprimendo i pallini e il relativo fattore,  $-i \int d^4x J(x)$ , e fissando l'estremità di ciascuna linea alla coordinata di uno dei campi presenti nella

funzione di Green. Consideriamo ad esempio la funzione a quattro punti. Il diagramma di ordine minore che contribuisce è il diagramma (c) della Fig. 4.2, dal quale otteniamo (si veda l'Eq. (4.12))

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\phi(x_1)\cdots\phi(x_4))|0\rangle\Big|_{\text{Conn.}} \\ = i\lambda \int d^4v (i)^4 \Delta_F(x_1-v)\Delta_F(x_2-v)\Delta_F(x_3-v)\Delta_F(x_4-v) + \mathcal{O}(\lambda^2). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Notiamo che la derivata quarta a primo membro ha eliminato il fattore  $1/4!$  della (4.12).

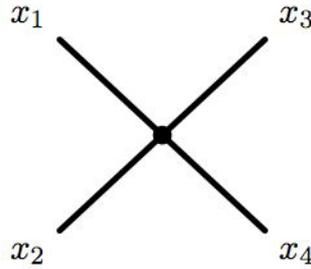


Figura 4.8: Diagramma di Feynman di ordine  $\lambda$  per la funzione a quattro punti.

A livello grafico possiamo rappresentare i diagrammi della funzione di Green sostituendo ai “pallini” le coordinate dei punti in cui terminano le linee esterne, come illustrato ad esempio nella Fig. 4.8.

#### 4.4 Rappresentazione spettrale della funzione di Green a due punti.

In questa Sezione discuteremo la forma esatta della funzione di Green a due punti per un campo scalare reale. In una teoria di campo con interazioni non è possibile calcolare esattamente le funzioni di Green, ma la richiesta di invarianza rispetto a trasformazioni di Lorentz e una ragionevole ipotesi sulla struttura degli stati ad una e più particelle permette di stabilire una *rappresentazione spettrale* della funzione a due punti. Nelle Sezioni successive questa rappresentazione verrà utilizzata per stabilire una relazione tra le funzioni di Green a più punti e gli elementi della matrice  $S$  che descrivono l'ampiezza di transizione negli urti tra particelle.

L'idea alla base della rappresentazione spettrale è molto semplice. Cominciamo scrivendo, per  $x^0 > 0$

$$\langle 0|T(\phi(x)\phi(0))|0\rangle = \langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle = \sum_{\alpha} \langle 0|\phi(x)|\alpha\rangle \langle \alpha|\phi(0)|0\rangle, \quad (4.38)$$

dove  $|\alpha\rangle$  è l'elemento di una base di stati dello spazio di Hilbert. Alla somma sugli stati intermedi possono contribuire stati ad una particella,  $|\mathbf{p}\rangle$ , e stati con due o più particelle. Dividiamo quindi la somma, ed il risultato, in due parti

$$\langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle = \langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle_1 + \langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle_{(2+)}. \quad (4.39)$$

Il contributo degli stati a una particella può essere scritto esplicitamente nella forma (si veda l'Eq.(3.91))

$$\langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle_1 = \int d^3p \langle 0|\phi(x)|\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}|\phi(0)|0\rangle. \quad (4.40)$$

Procediamo ora in due passi.

- La dipendenza da  $x$  si ottiene dalla relazione:

$$\phi(x) = e^{iPx} \phi(0) e^{-iPx}, \quad (4.41)$$

dove  $P$  è l'operatore che rappresenta il quadripulso totale. Troviamo così

$$\langle 0|\phi(x)|p\rangle = e^{-ipx} \langle 0|\phi(0)|\mathbf{p}\rangle. \quad (4.42)$$

- L'elemento di matrice di  $\phi(0)$  si parametrizza nella forma

$$\langle 0|\phi(0)|\mathbf{p}\rangle = \frac{\sqrt{Z(p)}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{p})}}, \quad (4.43)$$

con  $\omega(\mathbf{p}) = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ , che implica

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle_1 = \int d^3p \frac{Z(p)}{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{p})} e^{-ipx}. \quad (4.44)$$

Il punto cruciale è che la  $Z(p)$  definita dalla (4.43) risulta essere *Lorentz-invariante*. Essa deve quindi essere una funzione dell'unico invariante che possiamo costruire con il quadripulso della particella, cioè  $p_\mu p^\mu = m^2$ , che è una costante indipendente dal valore di  $\mathbf{p}$ . La dimostrazione di questa affermazione è discussa nell'Appendice D. In modo più intuitivo, ma sostanzialmente corretto, si può argomentare come segue.

(1) La funzione di Green è invariante sotto trasformazioni di Lorentz, così come la sua restrizione agli stati intermedi ad una particella, che compare a primo membro nella (4.44).

(2) Nel secondo membro della (4.44), la misura  $d^3p/(2\omega(\mathbf{p}))$  è un invariante di Lorentz, e lo è anche l'esponenziale  $\exp(-ipx)$ . Di conseguenza, dalla richiesta che il secondo membro della (4.44) sia invariante segue l'invarianza di  $Z(p)$ . Possiamo quindi portare  $Z(p) = Z(m^2) = Z$  fuori dell'integrale e scrivere

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle_1 = Z \int d^3p \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{p})} e^{-ipx}, \quad (x^0 > 0). \quad (4.45)$$

Ripetendo questi passi nel caso  $x^0 < 0$  otteniamo, per il contributo degli stati a una particella

$$\begin{aligned} \langle 0|T(\phi(x)\phi(0))|0\rangle_1 \\ = \frac{Z}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x})}}{2\omega(\mathbf{p})} \left( e^{-i\omega(\mathbf{p})x^0} \theta(x^0) + e^{i\omega(\mathbf{p})x^0} \theta(-x^0) \right), \end{aligned}$$

e, confrontando con la (3.72) otteniamo il risultato finale

$$\langle 0|T(\phi(x)\phi(0))|0\rangle_1 = iZ \Delta_F(x; m), \quad (4.46)$$

nel quale abbiamo introdotto la notazione  $\Delta_F(x; m)$  per indicare il propagatore di Feynman relativo a particelle di massa  $m$ . La costante  $Z$  è detta costante di rinormalizzazione del campo.

Gli stati a due o più particelle possono essere caratterizzati sulla base del loro impulso  $\mathbf{p}$ , della loro massa invariante,  $M$ , e della loro energia  $E = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}$ . Al contrario degli stati di singola particella, che corrispondono a un valore preciso di  $m$ , gli stati a due o più particelle presentano uno spettro continuo di valori di  $M$  a partire da una soglia  $M_s$ . Ad esempio gli stati a due particelle di impulso totale nullo, per i quali  $E = M$ , saranno composti da due particelle di impulso opposto,  $\pm\mathbf{p}$ , e quindi  $M = E = 2\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} \geq M_s = 2m$ . Nella teoria  $\lambda\phi^4$ , come abbiamo visto, non sono possibili funzioni di Green con numero dispari di punti, ovvero transizioni tra stati con un numero pari e un numero dispari di particelle. In questo caso la soglia effettiva è quindi  $M_s = 3m$ .

Gli stati che contribuiscono alla somma (4.38) sono creati da  $\phi$  che opera sul vuoto, e avranno momento angolare intrinseco nullo. Quindi anche a questi stati si applicano le considerazioni fatte sugli stati di singola particella, e il contributo degli stati di massa  $M$  risulterà proporzionale a  $i\Delta_F(x; M)$ . Possiamo quindi dare l'espressione generale per la funzione a due punti in una teoria scalare:

$$\langle 0|T(\phi(x)\phi(0))|0\rangle = iZ\Delta_F(x; m) + i \int_{M^2=M_s^2}^{\infty} dM^2 \sigma(M^2) \Delta_F(x; M) . \quad (4.47)$$

che dipende da due sole grandezze incognite: la costante di rinormalizzazione  $Z$  e la funzione  $\sigma(M^2)$ , che prende il nome di *funzione spettrale*.

Notiamo che in teoria delle perturbazioni possiamo sviluppare la funzione a due punti in potenze della costante di accoppiamento ( $\lambda$  nella teoria scalare che adottiamo come modello in questo capitolo). Quindi sia la costante di rinormalizzazione  $Z$  che la funzione spettrale  $\sigma(M^2)$  devono essere considerate come serie di potenze nella costante di accoppiamento. All'ordine zero ci si riduce ai risultati della teoria libera (si veda, ad esempio, l'Eq. (3.67)), cioè

$$Z = 1 \quad , \quad \sigma(M^2) = 0 . \quad (4.48)$$

Nella teoria  $\lambda\phi^4$  le prime correzioni a  $Z$  e  $\sigma(M^2)$  provengono dal diagramma (c) nella figura 4.3, e sono  $\propto \lambda^2$ .

Possiamo dare una derivazione formale del secondo termine nella (9.31) nel modo seguente. Consideriamo per primo il caso  $x^0 > 0$ . Il contributo degli stati con tre o più particelle si scrive:

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle_{2+} &= \sum_n \langle 0|\phi(x)|n\rangle \langle n|\phi(0)|0\rangle \\ &= \sum_n e^{-P_n x} \langle 0|\phi(0)|n\rangle \langle n|\phi(0)|0\rangle . \end{aligned} \quad (4.49)$$

Gli stati  $|n\rangle$  sono stati con tre o più particelle, caratterizzati dal quadri-momento totale  $P_n$ , più altri numeri quantici che non è necessario specificare. Inserendo nella (4.49) due funzioni delta, che si integrano esplicitamente ad uno troviamo

$$\begin{aligned} &\sum_n \langle 0|\phi(x)|n\rangle \langle n|\phi(0)|0\rangle \\ &= \int dM^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta(p^2 - M^2) \sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - P_n) e^{-iP_n x} \langle 0|\phi(0)|n\rangle \langle n|\phi(0)|0\rangle \\ &= \int dM^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta(p^2 - M^2) e^{-ipx} \sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - P_n) \langle 0|\phi(0)|n\rangle \langle n|\phi(0)|0\rangle , \end{aligned} \quad (4.50)$$

dove abbiamo portato l'esponenziale fuori della somma usando la funzione delta.

Il punto cruciale è che, come nel caso della singola particella, la somma sugli stati da una funzione del quadri-momento  $p$  che è *invariante di Lorentz*. Quindi la somma deve essere una funzione di  $p^2$  ovvero, in virtù della seconda funzione delta, di  $M^2$ . Possiamo definire questa funzione

$$2\pi \sigma(M^2) = \sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - P_n) \langle 0 | \phi(0) | n \rangle \langle n | \phi(0) | 0 \rangle \quad (M^2 = p^2), \quad (4.51)$$

ottenendo così

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x) \phi(0) | 0 \rangle_{2+} &= \int dM^2 \sigma(M^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p x} \\ &= \int dM^2 \sigma(M^2) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\omega(p, M)} e^{-i(\omega(p, M)t} e^{i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

dove  $\omega(p, M)$  è l'energia che corrisponde ad una particella di quadrimpulso  $\mathbf{p}$  e massa  $M$ .

Ripetendo l'argomento per  $x^0 < 0$  e cambiando la variabile di integrazione  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  si trova

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(0) \phi(x) | 0 \rangle_{2+} &= \int dM^2 \sigma(M^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{+i p x} \\ &= \int dM^2 \sigma(M^2) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\omega(p, M)} e^{+i(\omega(p, M)t} e^{i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

In conclusione, possiamo scrivere

$$\langle 0 | T [\phi(x) \phi(0)] | 0 \rangle_{2+} = \int dM^2 \sigma(M^2) \left\{ \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\omega(p, M)} e^{i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \left[ \theta(x^0) e^{-i(\omega(p, M)t} + \theta(-x^0) e^{+i(\omega(p, M)t} \right] \right\}, \quad (4.54)$$

e confrontando con la ((3.72)), otteniamo il risultato finale

$$\langle 0 | T [\phi(x) \phi(0)] | 0 \rangle_{2+} = i \int dM^2 \sigma(M^2) \Delta_F(x, M). \quad (4.55)$$

La funzione  $\sigma(M^2)$  è diversa da zero solo per quei valori di  $M^2$  che corrispondono alla massa di qualche possibile stato intermedio, cioè per  $M^2 > (3m)^2$ , quindi i limiti di integrazione vanno da  $(3m)^2$  all'infinito. Abbiamo così ritrovato proprio il secondo termine della (9.31).

## 4.5 Funzione di Green a due punti in teoria delle perturbazioni.

Nella sezione precedente abbiamo discusso la rappresentazione esatta della funzione a due punti in teoria dei campi nota come rappresentazione di Kallen-Lehmann (KL).

Per la teoria di un campo scalare corrispondente a particelle di massa  $m$ , la rappresentazione KL prende la forma

$$G(x, y) = i Z \Delta_F(x - y, m^2) + \int_{(3m)^2}^{+\infty} dM^2 \sigma(M^2) i \Delta_F(x - y, M^2), \quad (4.56)$$

dove  $i\Delta_F(x-y, m^2)$  è il propagatore di una particella scalare libera di spin zero e massa  $m$ . La funzione  $\sigma(M^2)$ , la cosiddetta *funzione spettrale*, è definita positiva.

In questa Sezione discutiamo la funzione a due punti della teoria scalare  $\lambda\phi^4$  includendo termini fino all'ordine  $\lambda^2$ . Cominciamo col riportare qui l'espressione della lagrangiana data nell'Eq. (3.58)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \quad (4.57)$$

nella quale indichiamo però con  $m_0$  il coefficiente del termine quadratico in  $\phi$ , per distinguerlo dalla massa fisica  $m$  che compare nella (4.56).

Possiamo definire  $m_0$  come la massa che avrebbe la particella *nel limite*  $\lambda \rightarrow 0$ , una quantità ovviamente *non osservabile*, mentre  $m$  è la massa inerziale di una particella isolata, in linea di principio misurabile e determinata dalla posizione del polo nella trasformata di Fourier della funzione a due punti, (4.56). Il calcolo che segue mostra come, partendo dai grafici di Feynman in termini della *massa nuda*  $m_0$ , si ricostruisce la funzione a due punti in termini della massa fisica, o rinormalizzata. È il più semplice caso della procedura indicato come *rinormalizzazione* in teoria dei campi.

I diagrammi di Feynman connessi, che contribuiscono alla funzione a due punti all'ordine  $\lambda^2$ , sono illustrati nella Fig. 4.9. Consideriamo la trasformata di Fourier

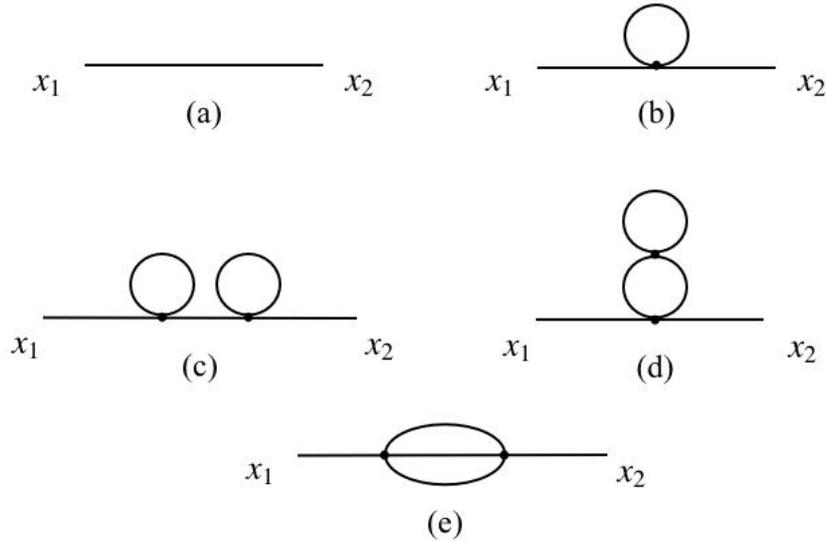


Figura 4.9: Diagrammi connessi per la funzione a due punti nella teoria  $\lambda\phi^4$  al secondo ordine perturbativo.

$$\tilde{G}(p_1, p_2) = \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-ip_1x_1} e^{+ip_2x_2} G(x_1, x_2), \quad (4.58)$$

limitandoci, in un primo momento, ai termini del primo ordine in  $\lambda$ , Fig. 4.9, (a) e (b). Rifacendoci alle Eq. (4.23) e (4.24), possiamo scrivere direttamente

$$\tilde{G}(p_1, p_2) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_2) G_{(a+b)}(p_1), \quad (4.59)$$

con

$$G_{(a+b)}(p) = \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (i\lambda C_1) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \mathcal{O}(\lambda^2), \quad (4.60)$$

dove abbiamo posto

$$C_1 = i \frac{1}{2} \Delta_F(0). \quad (4.61)$$

Nella (4.60) compare la *massa nuda*,  $m_0$ . Notiamo che il propagatore ha un polo per  $p^2 = m_0^2$ , mentre dalla rappresentazione KL sappiamo che il polo della funzione a due punti deve trovarsi a  $p^2 = m^2$ . Introduciamo ora la *massa rinormalizzata*,  $m$ , legata a  $m_0$  dalla

$$m_0^2 = m^2 + \delta m^2. \quad (4.62)$$

È evidente che  $\delta m^2$  deve dipendere da  $\lambda$ , in particolare deve essere  $\delta m^2 = \mathcal{O}(\lambda)$ , poiché se mandiamo  $\lambda \rightarrow 0$   $m^2 \rightarrow m_0^2$ . Possiamo sviluppare il primo termine nella (4.60) utilizzando la relazione

$$\frac{1}{A + \epsilon} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A^2} \epsilon + \frac{1}{A^3} \epsilon^2 + \dots, \quad (4.63)$$

e fermandoci al primo ordine in  $\delta m^2$ . Il risultato è

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2} = \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2} \delta m^2 + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (4.64)$$

Se ci limitiamo al primo ordine in  $\lambda$ , trascurando termini di ordine  $\lambda^2$ , possiamo invece identificare  $m_0^2$  con  $m^2$  nel secondo termine della (4.60). In totale abbiamo quindi

$$G_{(a+b)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2} [\delta m^2 - \lambda C_1] + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (4.65)$$

Secondo la rappresentazione KL, la funzione di Green deve avere un polo semplice per  $p^2 = m^2$ , dove  $m$  è la *massa fisica*. Ciò implica che  $\delta m^2 = \lambda C_1 + \mathcal{O}(\lambda^2)$ . A questo ordine, riconosciamo così l'Eq. (4.56) con

$$Z = 1, \quad \sigma(M^2) = 0. \quad (4.66)$$

Possiamo determinare la forma del propagatore al secondo ordine abbastanza semplicemente, aggiungendo all'espressione (4.60) i contributi dei grafici (c), (d) ed (e) della Fig. 4.9

$$\begin{aligned} G_c &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} (i\lambda C_1) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (i\lambda C_1) \frac{i}{p^2 - m_0^2}, \\ G_d &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} (i\lambda^2 C_2) \frac{i}{p^2 - m_0^2}, \\ G_e &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} [i\lambda^2 F(p^2)] \frac{i}{p^2 - m_0^2}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

In questi termini, che sono già del secondo ordine, possiamo identificare  $m_0$  con  $m$ .

Abbiamo indicato, come prima, con  $i\lambda C_1$  la costante corrispondente alla singola bolla nei grafici (b) e (c) della Fig. 4.9, e con  $i\lambda^2 C_2$  il contributo, sempre una costante, della doppia bolla del grafico (d). Il calcolo esplicito di  $G_e$  è alquanto più difficile e non siamo ancora in grado di farlo. Per ora, ci basta sapere che l'ampiezza corrispondente al circuito chiuso (*loop*) nella Fig. 4.9 (e) si può scrivere nella forma  $i\lambda^2 F(p^2)$ , dove  $F$  una funzione non triviale di  $p^2$ , regolare in  $p^2 = m^2$ .

Possiamo rappresentare la funzione  $F(p^2)$  per mezzo dell'espansione

$$F(p^2) = F(m^2) + (p^2 - m^2)F'(m^2) + (p^2 - m^2)R(p^2), \quad (4.68)$$

dove  $R(p^2)$  è una funzione regolare che *si annulla* per  $p^2 = m^2$ <sup>4</sup>. Nella (4.60), dobbiamo adesso sviluppare il primo termine fino al secondo ordine in  $\delta m^2$  e il secondo termine fino al primo ordine. Otteniamo così

$$\begin{aligned} G_{a+b}(p^2) &= \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2} [\delta m^2 - \lambda C_1] \\ &+ \frac{i}{(p^2 - m^2)^3} [(\delta m^2)^2 - 2\delta m^2 (\lambda C_1)]. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Per quanto riguarda  $G_e$ , usando la rappresentazione (4.68), troviamo

$$G_e = \frac{i}{(p^2 - m^2)^2} [-\lambda^2 F(m^2)] + \frac{i}{(p^2 - m^2)} [-\lambda^2 F'(m^2)] + \frac{i}{p^2 - m^2} [-\lambda^2 R(p^2)]. \quad (4.70)$$

Mettendo tutto insieme, troviamo

$$\begin{aligned} G(p^2) &= \frac{i[1 - \lambda^2 F'(m^2)]}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2} [\delta m^2 - \lambda C_1 - \lambda^2 C_2 - \lambda^2 F(m^2)] \\ &+ \frac{i}{(p^2 - m^2)^3} [(\delta m^2)^2 - 2\delta m^2 (\lambda C_1) + \lambda^2 C_1^2] \\ &+ i \frac{-\lambda^2 R(p^2)}{p^2 - m^2} + \mathcal{O}(\lambda^3). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Notiamo ora che, per eliminare il termine con il doppio polo dobbiamo porre

$$\delta m^2 = \lambda C_1 + \lambda^2 C_2 + \lambda^2 F(m^2) + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (4.72)$$

Con questa posizione si cancella anche il contributo del termine con il polo triplo. Il risultato finale è quindi

$$G(p^2) = \frac{i[1 - \lambda^2 F'(m^2)]}{p^2 - m^2} + i \frac{-\lambda^2 R(p^2)}{p^2 - m^2} + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (4.73)$$

Abbiamo ottenuto una rappresentazione della funzione a due punti composta da un termine con un polo semplice (il primo) ed un termine regolare in  $p^2 = m^2$ , in quanto  $R(m^2) = 0$ . Il risultato ha la

---

<sup>4</sup> $(p^2 - m^2)R(p^2)$  è il resto di Taylor dello sviluppo al primo ordine di  $F(p^2)$  in  $p^2 = m^2$ , ed è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $p^2 - m^2$ .

forma data dalla (4.56) se identifichiamo

$$Z = 1 - \lambda^2 F'(m^2), \quad (4.74)$$

$$\mathcal{R}(p^2) = \frac{-\lambda^2 R(p^2)}{p^2 - m^2} = \int_{(3m)^2}^{+\infty} \frac{\sigma(M^2)}{p^2 - M^2} dM^2. \quad (4.75)$$

Uno studio più approfondito mostra che la funzione a primo membro della (4.75) è una funzione analitica della variabile complessa  $p^2$  con un taglio sull'asse reale positivo di  $p^2$  che parte da  $p^2 = (3m)^2$  e arriva a  $+\infty$ . Il secondo membro della (4.75) è quindi la familiare rappresentazione di Cauchy di una funzione analitica, come integrale della discontinuità sul taglio. La discontinuità è proprio la funzione spettrale  $\sigma(M^2)$  che, come anticipato, risulta essere di  $\mathcal{O}(\lambda^2)$ . Esplicitamente:

$$\sigma(M^2) = \frac{i}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\mathcal{R}(M^2 + i\epsilon) - \mathcal{R}(M^2 - i\epsilon)]. \quad (4.76)$$



## Capitolo 5

### Processi di diffusione e matrice S

Possiamo descrivere un processo di collisione tra due particelle al modo seguente.

All'istante iniziale, indichiamolo con  $-T/2$ , le particelle sono preparate in uno stato corrispondente a due pacchetti d'onda localizzati in regioni dello spazio molto lontane tra loro. A tutti gli effetti, al tempo  $-T/2$ , possiamo trascurare l'interazione tra le due particelle.

Successivamente, il sistema evolve senza influenze dall'esterno per un tempo  $T$ , durante il quale le particelle interagiscono tra loro e danno luogo ai prodotti della collisione. Questi ultimi vengono rivelati, al tempo  $+T/2$ , da opportuni apparati sperimentali. Anche al momento della rivelazione, il sistema consiste di due particelle (o piú particelle, per collisioni ad energie relativistiche) molto lontane tra loro e quindi di nuovo non interagenti.

L'intervallo di tempo  $T$  durante il quale si svolge l'esperimento è, in genere, molto piú lungo dei tempi tipici su cui avviene l'interazione, essendo determinato dalle dimensioni lineari degli apparati di produzione e rivelazione, che sono macroscopiche. Per dimensioni dell'ordine del metro troviamo che  $T \approx 10^{-9} - 10^{-8}$  secondi. L'interazione, invece, avviene quando le particelle sono a distanza di qualche Fermi l'una dall'altra (1 Fermi =  $10^{-15}$  m) e quindi su tempi dell'ordine di  $10^{-23}$  secondi, molto inferiori a  $T$ . Possiamo quindi considerare che, a tutti gli effetti, il processo si svolga tra i tempi  $t = \pm\infty$ .

A differenza di quanto avviene nella Meccanica Classica, anche se partiamo da uno stato perfettamente definito non possiamo prevedere, in genere, il risultato di un particolare esperimento. Tutto quello che la Meccanica Quantistica può fornire sono le ampiezze di diffusione, numeri complessi i cui moduli quadri danno la probabilità dei possibili risultati dell'esperimento. Le ampiezze di diffusione possono, a loro volta, essere descritte dagli elementi di matrice di un operatore, la *matrice S*, o matrice di scattering, che è quindi l'elemento centrale della teoria della diffusione.

Lo studio delle collisioni tra particelle rappresenta pressochè l'unico metodo di indagine a nostra disposizione per investigare la struttura delle interazioni fondamentali. Lo studio sperimentale della diffusione ed il calcolo teorico della matrice  $S$  sono quindi il punto di contatto tra teoria ed esperimento.

#### 5.1 Stati asintotici "in" e "out"

Come abbiamo detto, al tempo  $-T/2$  lo stato iniziale del processo di diffusione è costituito da particelle separate tra loro e praticamente non interagenti. Possiamo descrivere questi stati con una

sovrapposizione di onde piane, caratterizzate dalla quantità di moto di ciascuna particella:

$$|p_1, \alpha; p_2, \beta\rangle \quad (\text{al tempo } t = -T/2), \quad (5.1)$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  rappresentano altri numeri quantici, in aggiunta alla quantità di moto, eventualmente necessari per caratterizzare lo stato di moto delle particelle stesse (ad esempio le componenti dello spin lungo la direzione del moto).

Nella rappresentazione di Schrödinger, lo stato (5.1) evolve nel tempo in modo complicato, descrivendo una traiettoria nello spazio degli stati, traiettoria che è determinata dall'Hamiltoniana esatta del problema,  $H$ . La stessa traiettoria, nella rappresentazione di Heisenberg, è individuata da un vettore fisso, anch'esso determinato dalle quantità di moto  $p_1$  e  $p_2$ , che caratterizzano le condizioni del sistema al tempo  $-T/2 \rightarrow -\infty$ . Chiameremo questo stato uno stato "in" e lo indicheremo con:

$$|p_1, \alpha; p_2, \beta; in\rangle. \quad (5.2)$$

Il complesso di tutti gli stati di questo tipo, cioè degli stati di Heisenberg, con un numero arbitrario di particelle<sup>1</sup>, che si riducono ad onde piane per  $t = -T/2 \rightarrow -\infty$ , forma la base degli stati "in" [7, 8]. Questa base è ovviamente ortonormale. Ci possiamo chiedere se sia anche completa.

In sostanza, porre questa domanda equivale a chiederci se possiamo raggiungere tutti gli stati di moto del sistema a partire da stati di particelle molto lontane tra loro. I processi di diffusione sono l'unico modo con cui possiamo studiare i sistemi microscopici, quindi la risposta non può che essere affermativa, ma con una precisazione importante che faremo tra un momento.

L'ipotesi che gli stati "in" siano un insieme completo di stati prende anche il nome di *ipotesi asintotica* ed è caratterizzata dalla relazione

$$\sum_i |i; in\rangle \langle i; in| = \mathbf{1}. \quad (5.3)$$

Naturalmente, nei casi in cui possiamo risolvere le equazioni del moto a partire dall'hamiltoniana, possiamo anche decidere la composizione degli stati "in ed accertare se la relazione di completezza è soddisfatta oppure no. In alcune formulazioni assiomatiche della teoria dei campi, la condizione (5.3) è considerata uno degli assiomi di base.

**Completezza della base "in".** Consideriamo dapprima il caso di una particella non relativistica in un potenziale assegnato, con uno spettro discreto per  $E < 0$ , e continuo per  $E > 0$  (ad esempio un elettrone nel potenziale di un protone, considerato come una sorgente fissa).

Possiamo costruire pacchetti d'onda normalizzati sovrapponendo autostati con  $E > 0$ . E' immediato dimostrare che, per questi stati, il moto si svolge prevalentemente all'infinito, in quanto il valore medio nel tempo della probabilità di trovare la particella in una qualsiasi regione limitata dello spazio è zero (si veda, ad esempio, la discussione in [9]). Infatti

$$|\psi(x, t)|^2 = \int \int dE dE' c(E)^* c(E') \Psi_E(x)^* \Psi_{E'}(x) e^{+i(E-E')t}, \quad (5.4)$$

<sup>1</sup>Lo stato che non contiene alcuna particella, il cosiddetto "stato di vuoto", è indicato con  $|0\rangle$  ed è lo stato di energia minima,  $E = 0$ . Come vedremo in seguito, lo stato di vuoto svolge un ruolo fondamentale nelle teorie di campo.

e inoltre, per  $T \rightarrow \infty$ :

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{+i(E-E')t} \rightarrow \frac{2\pi}{T} \delta(E' - E), \quad (5.5)$$

da cui segue

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_V dx |\psi(x, t)|^2 = \frac{2\pi}{T} \int dE |c(E)|^2 \int_V dx |\Psi_E(x)|^2 \rightarrow 0. \quad (5.6)$$

Uno stato arbitrario del tipo (5.4), a tempi sufficientemente remoti, è rappresentato da una sovrapposizione di stati liberi, ed è quindi raggiungibile dagli stati “in”.

Al contrario, se il pacchetto d’onda è costruito come sovrapposizione delle autofunzioni dello spettro discreto:

$$|\psi(x, t)|^2 = \sum_{n, n'} c_n(E)^* c_{n'}(E') \Psi_n(x)^* \Psi_{n'}(x) e^{+i(E_n - E_{n'})t}, \quad (5.7)$$

la (5.5) sarà rimpiazzata dalla

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{+i(E_n - E_{n'})t} = \delta_{n, n'}, \quad (5.8)$$

e la probabilità media (5.6) risulta essere diversa da zero

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_V dx |\psi(x, t)|^2 = \sum_n |c_n(E)|^2 \int_V |\Psi_n(x)|^2 \neq 0. \quad (5.9)$$

In questo caso il moto si svolge permanentemente nella regione nella quale la particella è legata al potenziale. Ne segue che la base degli stati “in” non è completa, e la relazione (5.3) diventa

$$\sum_i |i; in\rangle \langle i; in| = \mathbb{1} - \sum_n |E_n\rangle \langle E_n|, \quad (5.10)$$

dove a secondo membro compare l’operatore di proiezione sugli stati legati.

In una teoria invariante per traslazioni, in cui permettiamo anche al protone di muoversi, lo spettro dell’energia totale è sempre continuo e tutti gli stati localizzati, prima o poi, finiscono all’infinito. Tuttavia, gli stati con un elettrone ed un protone lontani tra loro non danno una base completa, poichè le due particelle possono allontanarsi all’infinito restando legate tra loro.

Se però includiamo nella base “in” anche quegli stati che, al tempo  $-T/2 \rightarrow -\infty$ , contengono degli stati legati (ad esempio l’atomo di idrogeno nel livello fondamentale) possiamo ritenere che gli stati “in” formino una base completa<sup>2</sup>.

In termini concreti, questo vuol dire che, per determinare completamente la fisica del sistema elettrone-protone, dovremo studiare anche esperimenti di diffusione che coinvolgono, tra gli stati iniziali, l’atomo di idrogeno ad esempio:

$$e + H \rightarrow e + e + P \quad (5.11)$$

<sup>2</sup>In generale, non esiste un unico tempo  $-T/2$  a cui tutti gli stati possibili si sono ridotti a stati di particelle non interagenti. La convergenza degli stati alle condizioni asintotiche non è uniforme, e la base degli stati “in” diventa completa solo nel limite  $-T/2 \rightarrow -\infty$ . Questo punto è importante nella derivazione delle formule di riduzione discussa nel seguito.

Accanto alla base “in”, possiamo ora introdurre la base completa degli stati “out”. Questi stati descrivono degli stati di moto, nella rappresentazione di Heisenberg, che si riducono, al tempo  $t = +T/2 \rightarrow +\infty$ , a stati con un certo numero di particelle libere, ciascuna con quantità di moto definita.

In analogia con la (5.2), nel caso di due particelle, indicheremo questi stati con

$$|p_1, \alpha; p_2, \beta; out \rangle . \quad (5.12)$$

La discussione sulla completezza della base “out” procede allo stesso modo che per quella “in”, e quindi, con le stesse qualifiche utilizzate precedentemente, concludiamo che deve essere

$$\sum_n |n; out \rangle \langle n; out| = \mathbb{1} . \quad (5.13)$$

In assenza di interazione, i numeri quantici che caratterizzano gli stati “in” o “out”, ad esempio la quantità di moto delle singole particelle, sono tutti conservati. In questo caso, gli stati “in” e “out” coincidono.

Anche in presenza di interazione, tuttavia, la distinzione tra stati “in” e “out” non si applica nei casi seguenti:

- Lo stato privo di particelle (stato di vuoto) è stabile, in quanto stato di energia minima. Quindi

$$|0; in \rangle = |0; out \rangle = |0 \rangle .$$

- Per gli stati che contengono una sola particella, la quantità di moto e la componente dello spin nella direzione del moto della particella stessa sono grandezze conservate, per cui

$$|p, \alpha; in \rangle = |p, \alpha; out \rangle = |p, \alpha \rangle .$$

## 5.2 Ampiezze di diffusione e Matrice S

Possiamo caratterizzare lo stato  $|p'_1, \alpha'; p'_2, \beta'; out \rangle$  come quello in cui, con certezza, i nostri rivelatori troveranno due particelle con quantità di moto  $p'_1$  e  $p'_2$  e gli altri numeri quantici con i valori, rispettivamente,  $\alpha'$  e  $\beta'$  al tempo  $+T/2$ . Analogamente, lo stato  $|p_1, \alpha; p_2, \beta; in \rangle$  è quello in cui, con certezza, due particelle con numeri quantici  $p_1, \alpha$  e  $p_2, \beta$  sono presenti al tempo  $-T/2$ . Il loro prodotto scalare è quindi, per definizione, l'ampiezza di probabilità della reazione

$$(p_1, \alpha) + (p_2, \beta) \rightarrow (p'_1, \alpha') + (p'_2, \beta') .$$

Più in generale, l'ampiezza di diffusione è data dalla

$$S_{fi} = \langle f; out | i; in \rangle , \quad (5.14)$$

dove  $f$  ed  $i$  sono i valori dei numeri quantici che caratterizzano lo stato finale ed iniziale, rispettivamente. Per stati normalizzati, il modulo quadro

$$|\langle f; out | i; in \rangle|^2 = P(i \rightarrow f) \quad (5.15)$$

corrisponde alla probabilità del processo. Per la relazione che lega la probabilità (5.15) alla sezione d'urto si veda, ad esempio, [1]. In termini degli stati “in” e “out”, la matrice  $S$  si può scrivere nella forma

$$S = \sum_n |n; in\rangle \langle n, out|, \quad (5.16)$$

che implica

$$S_{fi} = \langle f; out|i; in\rangle = \langle f; in|S|i; in\rangle = \langle f; out|S|i; out\rangle. \quad (5.17)$$

Si verifica subito dalla (5.16) che l'operatore  $S$  trasforma la base “out” nella base “in”, cioè che

$$S|m; out\rangle = |m; in\rangle. \quad (5.18)$$

Di conseguenza, dalla completezza delle due basi segue che  $S$  è un operatore unitario

$$S^\dagger S = S S^\dagger = \mathbb{1}. \quad (5.19)$$

Sriviendo l'elemento di matrice diagonale della (5.19) nella forma

$$\mathbb{1} = \langle i; out|S^\dagger S|i; out\rangle = \sum_f \langle f; out|S|i; out\rangle \langle i; out|S|f; out\rangle = \sum_f P(i \rightarrow f), \quad (5.20)$$

vediamo che l'unitarietà di  $S$  equivale a richiedere che la somma delle probabilità (5.15) su tutti gli stati  $f$  sia pari all'unità. L'insieme di questi stati deve quindi coincidere con tutti i possibili stati finali in un esperimento di diffusione, come è infatti il caso se la base di questi stati è completa.

Le relazioni (5.17) mostrano la relazione tra la definizione della matrice  $S$  nella rappresentazione di Heisenberg e la definizione più elementare, in termini della rappresentazione di interazione, discussa in [1].

Nelle (5.17) sia il bra sia il ket si riferiscono allo stesso tempo, che esso sia nel passato o nel futuro, quindi non fanno più riferimento ad una data rappresentazione. Possiamo interpretare  $|f; out\rangle$  e  $|i; out\rangle$  semplicemente come i vettori dello spazio di Hilbert, rispettivamente  $|f\rangle$  e  $|i\rangle$ , che individuano gli stati di ingresso e di uscita del processo di diffusione. In questo caso, il vettore  $S|i\rangle$  rappresenta lo stato in cui evolve  $|i\rangle$  nella rappresentazione di interazione. e la proiezione  $\langle f|S|i\rangle$  rappresenta l'ampiezza di probabilità di trovare questo stato in  $|f\rangle$ . Nella teoria delle perturbazioni,  $S$  è data dalla usuale rappresentazione mediante la formula di Dyson [1].

### 5.3 Grandezze conservate

La relazione tra la matrice  $S$  e le grandezze conservate si discute molto semplicemente. Consideriamo una grandezza conservata  $Q$ . Siccome  $Q$  commuta con  $H$ , possiamo scegliere sia gli stati “in” sia gli stati “out” in modo che siano autostati simultanei di  $Q$  ed  $H$ . Inoltre, poiché  $Q$  è una costante del moto, lo stato “in” che corrisponde ad un dato autovalore  $q$  di  $Q$  deve trasformarsi, per  $t \rightarrow +\infty$ , in uno stato con lo stesso autovalore, Abbiamo quindi

$$\langle f, q'; out|i, q; in\rangle = 0 \quad , \quad q' \neq q. \quad (5.21)$$

Lo stesso risultato si ottiene notando che  $S$  commuta con tutte le costanti del moto, per cui

$$\langle f, q'; in | [Q, S] | i, q; in \rangle = (q' - q) \langle f, q'; in | S | i, q; in \rangle = 0. \quad (5.22)$$

Quindi l'elemento di matrice deve essere nullo se  $q \neq q'$ . Per lo stesso motivo

$$U(R) S U(R)^\dagger = S, \quad (5.23)$$

dove  $U(R)$  è l'operatore unitario associato ad una simmetria esatta che non coinvolga l'inversione temporale.

Per i sistemi invarianti sotto traslazioni, la matrice  $S$  deve essere diagonale nella base degli stati con quantità di moto ed energia definiti. I suoi elementi di matrice hanno quindi la forma ( $f \neq i$ )

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \mathcal{M}_{fi}. \quad (5.24)$$

## 5.4 Proprietà dei campi “in” e “out”

Nella Sezione successiva ricaveremo le relazioni che legano la funzione di Green a  $q$  punti all'elemento di matrice  $S$  della reazione tra  $p$  particelle iniziali che produce  $q-p$  particelle finali (con  $p \leq q-2$ ). Queste relazioni sono state ottenute da H. Lehman, K. Szymanski e W. Zimmermann [11] e sono note come *formule di riduzione LSZ*. Prima di dimostrare le formule di riduzione, tuttavia, dobbiamo introdurre la cosiddetta *ipotesi asintotica* per i campi nella rappresentazione di Heisenberg ed i corrispondenti campi asintotici,  $\phi_{in}(x)$  e  $\phi_{out}(x)$ .

Fissare lo stato quantistico nella rappresentazione di Heisenberg corrisponde, in Meccanica Classica, a determinare la traiettoria nello spazio delle fasi del sistema dando le condizioni iniziali ad un dato tempo,  $t_0$ . Si comprende quindi perchè il vettore di stato, in questa rappresentazione, non cambi al variare del tempo.

Quelle che variano, al variare del tempo, sono le variabili dinamiche del sistema, cioè i campi, che sono funzioni del punto nello spazio e del tempo

$$\phi = \phi(\vec{x}, t) = \phi(x). \quad (5.25)$$

Nella teoria libera, il campo applicato al vuoto crea uno stato di singola particella per qualunque valore di tempo. Questo non è più vero nel caso della teoria in interazione, in cui il campo ha elementi di matrice non nulli anche tra il vuoto e gli stati con due o più particelle, (si veda la discussione nella Sez. 4.4). Tuttavia, come discusso nelle Sezioni precedenti, ci aspettiamo che la situazione fisica tenda a quella della teoria libera quando il tempo tende a  $\pm T/2 \approx \pm \infty$ . Poichè lo stato è comunque fisso, la richiesta precedente, che si indica col termine di *condizione asintotica* deve significare che il campo, in questi limiti, deve tendere “in qualche senso” al campo libero.

Per fissare le idee, assumiamo di scegliere gli stati nella base “in”, cioè  $t_0 = -T/2$ . In queste condizioni le particelle che partecipano al processo di diffusione non sono soggette ad interazioni reciproche, ma solo ad autointerazioni. Quindi gli operatori  $\phi_{in}(x)$ , creano stati con particelle che si propagano indipendentemente l'una dall'altra ma con la massa *fisica*, cioè modificata dalle autointerazioni.

Per semplicità, consideriamo per primo il caso di particelle descritte da un campo scalare neutro con interazione  $\lambda\phi^4$ . Come vedremo, la generalizzazione a casi più complessi è immediata. La densità lagrangiana è dunque la

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 + j(x)\phi(x), \quad (5.26)$$

dove il termine di sorgente  $j(x) = \lambda\phi(x)^3/4!$  descrive le autointerazioni delle particelle descritte dalla teoria. I campi  $\phi$  e  $\phi_{in}$  soddisfano, rispettivamente, alle equazioni

$$(\square + m_0^2)\phi(x) = j(x), \quad (5.27)$$

e

$$(\square + m^2)\phi_{in}(x) = 0, \quad (5.28)$$

dove  $m$  è la massa fisica.

Per verificare che operando sul vuoto il campo  $\phi_{in}(x)$  crea solo stati con una particella consideriamo la quantità

$$-i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle n|\phi_{in}(x)|0\rangle, \quad (5.29)$$

dove  $|n\rangle$  è un autostato del quadrimpulso con autovalore  $p_n$ , cioè

$$P^\mu|n\rangle = p_n^\mu|n\rangle. \quad (5.30)$$

Si vede subito che

$$-i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle n|\phi_{in}(x)|0\rangle = \langle n|[P^\mu, \phi_{in}(x)]|0\rangle = p_n^\mu\langle n|\phi_{in}(x)|0\rangle \quad (5.31)$$

e, derivando una seconda volta, otteniamo la

$$-\square\langle n|\phi_{in}(x)|0\rangle = p_n^2\langle n|\phi_{in}(x)|0\rangle \quad (5.32)$$

che, in virtù della (5.28) implica

$$(p_n^2 - m^2)\langle n|\phi_{in}(x)|0\rangle = 0, \quad (5.33)$$

cioè che gli unici stati che si ottengono operando sul vuoto con  $\phi_{in}$  hanno quadrimpulso  $p_n^2 = m^2$ . Sono cioè stati ad una particella.

Dalla (5.28) segue anche che lo sviluppo in onde piane del campo  $\phi_{in}$  è analogo a quello del campo libero:

$$\phi_{in}(x) = \int d^3k [a_{in}(\mathbf{k})f_{\mathbf{k}}(x) + a_{in}^\dagger(\mathbf{k})f_{\mathbf{k}}^*(x)], \quad (5.34)$$

con

$$f_{\mathbf{k}}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{-ikx} \quad (5.35)$$

e  $k_0 = \omega_k = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$ . La (5.34) si può facilmente invertire per ottenere l'espressione dell'operatore  $a_{in}(\mathbf{k})$

$$a_{in}(\mathbf{k}) = i \int d^3x f_{\mathbf{k}}^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{in}(x). \quad (5.36)$$

La relazione tra il campo  $\phi_{in}$  e il campo  $\phi$ , soluzione della (5.27) si può rendere esplicita scrivendo la massa al quadrato delle particelle fisiche nella forma  $m^2 = m_0^2 + \delta m^2$  e sostituendo questa espressione nella (5.27). Troviamo così

$$(\square + m^2)\phi_{in}(x) = \tilde{j}(x) \quad (5.37)$$

con

$$\tilde{j}(x) = j(x) + \delta m^2 \phi(x). \quad (5.38)$$

La soluzione della (5.37)

$$\phi(x) = \sqrt{Z_-} \phi_{in}(x) + \int d^4 y G_{rit}(x-y) \tilde{j}(x), \quad (5.39)$$

dove  $\sqrt{Z_-}$  è una costante che specificheremo nel seguito e  $G_{rit}(x-y)$  è la funzione di Green ritardata (che soddisfa cioè alla condizione  $G_{rit}(x-y) = 0$  per  $x_0 < y_0$ ), suggerisce di interpretare  $\tilde{j}(x)$  come una sorgente di onde diffuse, in assenza delle quali la soluzione descrive la propagazione di particelle libere di massa  $m$ . Questa interpretazione delle (5.39) porterebbe a concludere che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(x) = \sqrt{Z_-} \phi_{in}(x). \quad (5.40)$$

Dobbiamo però tenere presente che nel nostro caso la sorgente  $\tilde{j}$  descrive anche le autointerazioni che generano  $\delta m^2$ . Di conseguenza, il campo  $\phi$  non può essere completamente isolato da  $\tilde{j}$

La condizione espressa dall'equazione operatoriale (5.40) si deve formulare richiedendo che siano gli elementi di matrice del campo a convergere ai corrispondenti elementi di matrice del campo  $\phi_{in}$ , moltiplicati per una costante di proporzionalità, definita in modo tale che  $\phi_{in}(x)$  risulti normalizzato come un campo canonico.

La relazione asintotica che si ottiene procedendo in questo modo, dovuta a Lehman, Simanzik e Zimmermann [11] è

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \alpha | \phi^f(t) | \beta \rangle = \sqrt{Z_-} \langle \alpha | \phi_{in}^f(t) | \beta \rangle, \quad (5.41)$$

dove  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$  sono stati dello spazio di Hilbert,

$$\phi^f(t) = i \int d^3 x f^*(\vec{x}, t) \overrightarrow{\partial}_0 \phi(\vec{x}, t), \quad \phi_{in}^f(t) = i \int d^3 x f^*(\vec{x}, t) \overrightarrow{\partial}_0 \phi_{in}(\vec{x}, t), \quad (5.42)$$

e  $f(\vec{x}, t)$  è una soluzione normalizzabile (cioè localizzata) dell'equazione di Klein-Gordon. La funzione  $f(\vec{x}, t)$  soddisfa quindi alle

$$(\square + m^2)f(\vec{x}, t) = 0, \quad i \int d^3 x f^*(\vec{x}, t) \overrightarrow{\partial}_0 f(\vec{x}, t) = 1, \quad (5.43)$$

e si può scrivere, ad esempio, nella forma

$$f(\vec{x}, t) = \left( \frac{1}{\pi\Gamma} \right)^{3/2} \int d^3 k e^{-i(\mathbf{k}-\bar{\mathbf{k}})^2/\Gamma} f_{\mathbf{k}}(\vec{x}, t), \quad (5.44)$$

che descrive un pacchetto d'onda di larghezza  $\Gamma$  distribuito intorno al valore  $\bar{\mathbf{k}}$ .

Il limite  $t \rightarrow +\infty$  si tratta in modo analogo, e porta ad introdurre il campo  $\phi_{out}$ , che soddisfa alla condizione asintotica

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \alpha | \phi^f(t) | \beta \rangle = \sqrt{Z_+} \langle \alpha | \phi_{out}^f(t) | \beta \rangle, \quad (5.45)$$

con  $\phi^f(t)$  e  $\phi_{out}^f(t)$  definiti come nella (5.42). Anche in questo caso possiamo sviluppare  $\phi_{out}$  e ottenere l'espressione degli operatori che creano e distruggono particelle non interagenti con massa fisica al tempo  $t = +\infty$ . Per esempio (si confronti con la (5.36))

$$a_{out}(\mathbf{k}) = i \int d^3x f_{\mathbf{k}}(x)^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{out}(x). \quad (5.46)$$

Notiamo che gli operatori di distruzione definiti dalle (5.36) (5.46) sono indipendenti dal tempo, in virtù dell'equazione di Klein-Gordon.

Le condizioni asintotiche “deboli” (5.41) e (5.45) esprimono le condizioni iniziale e finale sui pacchetti d'onda localizzati che rappresentano le particelle, rispettivamente, entranti e uscenti.

Gli stati ad una particella in ed out coincidono. È facile dimostrare che, per lo stesso motivo, anche le costanti di normalizzazione nelle (5.45) e (5.41) sono uguali tra loro ed uguali alla costante introdotta nella trattazione della funzione a due punti della Sezione 4.4.

Per ottenere questo risultato, consideriamo l'elemento di matrice del campo  $\phi(x)$  tra il vuoto e lo stato ad una particella. Utilizzando la (5.39) e la

$$\langle 0 | \tilde{j}(x) | \mathbf{p} \rangle = \langle 0 | (\square + m^2) \phi(x) | \mathbf{p} \rangle = (\square + m^2) e^{-ipx} \langle 0 | \phi(0) | \mathbf{p} \rangle = (-p^2 + m^2) \langle 0 | \phi(x) | \mathbf{p} \rangle = 0, \quad (5.47)$$

otteniamo, usando lo sviluppo del campo  $\phi_{in}$

$$\langle 0 | \phi(x) | \mathbf{p} \rangle = \sqrt{Z_-} \langle 0 | \phi_{in}(x) | \mathbf{p} \rangle = \sqrt{\frac{Z_-}{2\omega(\mathbf{p})(2\pi)^3}} e^{-ipx} \quad (5.48)$$

D'altro canto, come abbiamo visto nella Sezione 4.4, l'elemento di matrice del campo  $\phi$  si può parametrizzare nella forma

$$\langle 0 | \phi(x) | \mathbf{p} \rangle = \sqrt{\frac{Z}{2\omega(\mathbf{p})(2\pi)^3}} e^{-ipx}. \quad (5.49)$$

Confrontando con la (5.48) otteniamo:  $Z_- = Z$ . Ripetendo l'argomento nel limite  $t \rightarrow +\infty$  otteniamo anche  $Z_+ = Z = Z_-$ .

**Ipotesi asintotica e correzioni di auto-energia.** L'ipotesi asintotica, alla base della teoria della matrice S, richiede una qualificazione importante. Quello che è ragionevole attendersi, quando il tempo tende a  $\pm\infty$ , è che tenda a zero l'interazione tra *particelle diverse*. Non possiamo tuttavia isolare una particella dall'azione del campo da essa stessa generato. Questo è il problema dell'*auto-energia* della particella, già presente e noto in fisica classica.

Nel caso di una particella classica elettricamente carica, l'energia del campo coulombiano da essa stessa generato è facilmente calcolabile e dipende dall'inverso del raggio della particella stessa: è divergente per una carica esattamente puntiforme. In virtù della relazione di Einstein, il campo generato dalla particella contribuisce con un termine aggiuntivo alla massa inerziale della particella stessa, massa che, quindi, *non è la stessa* che la particella avrebbe in assenza di campo, ovvero nel limite in cui mandiamo a zero la sua carica elettrica.

Il problema si ripropone nella teoria quantistica dei campi, e si risolve con la procedura di rinormalizzazione, che discuteremo più avanti.

## 5.5 Le formule di riduzione LSZ

Vogliamo ora derivare le formule di riduzione LSZ. Per semplicità, consideriamo ancora il caso della teoria di campo scalare descritta dalla densità lagrangiana (5.26) e analizziamo un processo di diffusione caratterizzato dagli stati iniziale e finale

$$|k, p; in\rangle = a_{in}^\dagger(p) a_{in}^\dagger(k) |0\rangle, \quad |k', p'; out\rangle = a_{out}^\dagger(p') a_{out}^\dagger(k') |0\rangle \quad (5.50)$$

con

$$a_{in}^\dagger(\mathbf{k}) = -i \int d^3x f_{\mathbf{k}}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{in}(x), \quad a_{out}^\dagger(\mathbf{k}) = -i \int d^3x f_{\mathbf{k}}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{out}(x), \quad (5.51)$$

dove  $f_{\mathbf{k}}(x)$  è una soluzione dell'equazione di Klein-Gordon.

Il nostro obiettivo è mettere in relazione l'ampiezza di diffusione, espressa dall'elemento di matrice S

$$S_{if} = \langle k', p'; out | k, p; in \rangle, \quad (5.52)$$

e la funzione di Green a quattro punti  $G(x_1, x_2, x'_1, x'_2)$ . Cominciamo notando che si possono utilizzare la prima delle (5.51) e la (5.41) per riscrivere l'ampiezza nella forma<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \langle k', p'; out | k, p; in \rangle &= \langle k', p'; out | a_{in}^\dagger(\mathbf{k}) | p; in \rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-i}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(k)} Z} \int d^3x_1 e^{-ikx_1} \overleftrightarrow{\partial}_{t_1} \langle k', p'; out | \phi(x_1) | p; in \rangle. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Ora vogliamo riscrivere il secondo membro della (5.53) in forma esplicitamente covariante, usando la relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x F(\vec{x}, t) = \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \right) \int d^3x F(\vec{x}, t), \quad (5.54)$$

con

$$F(\vec{x}_1, t_1) = \frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(k)} Z} e^{-ikx_1} \overleftrightarrow{\partial}_{t_1} \langle k', p'; out | \phi(x) | p; in \rangle. \quad (5.55)$$

Poichè non vi sono particelle con quadrimpulso  $k$  nello stato finale, otteniamo così

$$\begin{aligned} &\left( \lim_{t_1 \rightarrow +\infty} - \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \right) \frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(k)} Z} \int d^3x_1 e^{-ikx_1} \overleftrightarrow{\partial}_{t_1} \langle k', p'; out | \phi(x_1) | p; in \rangle \\ &= \langle k', p'; out | [a_{in}^\dagger(k) - a_{out}^\dagger(k)] | p; in \rangle \\ &= \langle k', p'; out | a_{in}^\dagger(k) | p; in \rangle \\ &= \frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(k)} Z} \int d^4x_1 \partial_{t_1} [e^{-ikx_1} \overleftrightarrow{\partial}_{t_1} \langle k', p'; out | \phi(x_1) | p; in \rangle]. \end{aligned} \quad (5.56)$$

<sup>3</sup>I lettori più attenti avranno notato che, nella (5.53), si sarebbero dovuti utilizzare stati normalizzabili, il che equivale a sostituire

$$a_{in}(\tilde{\mathbf{k}}) \rightarrow \tilde{a}_{in}(\tilde{\mathbf{k}}) = \left( \frac{1}{\pi\Gamma} \right)^{3/2} \int d^3k e^{-(\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}})/\Gamma^2} a_{in}(\mathbf{k}).$$

Per semplicità abbiamo invece usato la soluzione di onda piana. È chiaro che, per valori di  $\Gamma$  dell'ordine della risoluzione con la quale vengono misurati impulso ed energia delle particelle osservate, le due espressioni sono equivalenti dal punto di vista sperimentale.

Effettuando una interegrazione per parti si trova la

$$\begin{aligned}
& \int d^4 x_1 \partial_{t_1} [e^{-ikx_1} \overrightarrow{\partial}_{t_1} \langle k', p'; out | \phi(x_1) | p; in \rangle] \\
&= \int d^4 x_1 \{ e^{-ikx_1} (\partial_{t_1}^2 \langle k', p'; out | \phi(x_1) | p; in \rangle) - [(\nabla_1^2 - m^2) e^{-ikx_1}] \langle k', p'; out | \phi(x_1) | p; in \rangle \} \\
&= \int d^4 x_1 e^{-ikx_1} (\square_1 + m^2) \langle k', p'; out | \phi(x_1) | p; in \rangle, \tag{5.57}
\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}
S_{if} &= \langle k', p'; out | k, p; in \rangle = \langle k', p'; out | a_{in}^\dagger(k) | p; in \rangle \\
&= \frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(k) Z}} \int d^4 x_1 e^{-ikx_1} (\square_1 + m^2) \langle k', p'; out | \phi(x_1) | p; in \rangle. \tag{5.58}
\end{aligned}$$

Utilizziamo ora lo stesso procedimento per rimuovere una particella dallo stato finale. Otteniamo così il risultato

$$\begin{aligned}
S_{if} &= \langle k', p'; out | k, p; in \rangle = \langle p'; out | a_{out}(k') a_{in}^\dagger(k) | p; in \rangle \\
&= \frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(k) Z}} \frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(k') Z}} \lim_{t_1 \rightarrow +\infty} \int d^4 x_1 d^4 x'_1 e^{-ikx_1} (\square_1 + m^2) \\
&\times \partial_{t'_1} [e^{ik'x'_1} \overleftarrow{\partial}_{t'_1} \langle p'; out | \phi(x'_1) \phi(x_1) | p; in \rangle], \tag{5.59}
\end{aligned}$$

nel quale, in virtù del limite  $t'_1 \rightarrow +\infty$ , possiamo operare la sostituzione

$$\phi(x'_1) \phi(x_1) \rightarrow T \{ \phi(x'_1) \phi(x_1) \}. \tag{5.60}$$

La procedura che abbiamo descritto si può ripetere finchè tutte le particelle sono rimosse dagli stati iniziale e finale, e quello che resta è il valore di aspettazione nel vuoto del prodotto cronologico degli operatori di campo. Il risultato finale che si ottiene è

$$\begin{aligned}
S_{if} &= \langle k', p'; out | k, p; in \rangle = \left( \frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3 Z}} \right)^4 \frac{1}{\sqrt{2\omega(k) 2\omega(p) 2\omega(k') 2\omega(p')}} \\
&\times \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x'_1 d^4 x'_2 e^{-i(kx_1 + px_2)} e^{i(k'x'_1 + p'x'_2)} \\
&\times \overrightarrow{(\square_1 + m^2)} \overrightarrow{(\square_2 + m^2)} \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x'_1) \phi(x'_2) \} | 0 \rangle \overleftarrow{(\square_{1'}) + m^2} \overleftarrow{(\square_{2'}) + m^2}. \tag{5.62}
\end{aligned}$$

Ricordiamo che il valore di aspettazione nel vuoto che compare nella (5.62) è la funzione di Green a quattro punti *completa*, cioè data dalla somma di tutti i diagrammi di Feynman con quattro particelle create o distrutte in  $x_1, x_2, x'_1$  e  $x'_2$ . I fattori  $(\square_i + m^2)$  rimuovono i propagatori corrispondenti alle gambe esterne, come si vede facilmente considerando che nello spazio degli impulsi questi fattori si trasformano in  $(m^2 - p_i^2)$ . Quindi la formula di riduzione (5.62) stabilisce che l'elemento di matrice  $S$  non è altro che la funzione di Green con le gambe esterne amputate e con i quadrimpulsi delle gambe

esterne sul mass shell, cioè con  $p^2 = p'^2 = k^2 = k'^2 = m^2$ . Questa interpretazione emerge chiaramente riscrivendo la (5.62) nella forma

$$S_{if} = \langle k', p'; out | k, p; in \rangle = \left( \frac{-i}{\sqrt{(2\pi)^3 Z}} \right)^4 \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)2\omega(p)2\omega(k')2\omega(p')}} \quad (5.63)$$

$$\times (k^2 - m^2)(p^2 - m^2)(k'^2 - m^2)(p'^2 - m^2) \widehat{G}(k, p, k', p'),$$

con

$$\widehat{G}(k, p, k', p') = \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x'_1 d^4 x'_2 e^{-i(kx_1 + px_2)} e^{i(k'x'_1 + p'x'_2)} \quad (5.64)$$

$$\times \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x'_1) \phi(x'_2) \} | 0 \rangle.$$

Ovviamente la derivazione che abbiamo descritto è valida per ogni numero di particelle negli stati iniziale e finale.

**Invarianza di Lorentz, sezione d'urto.** La funzione di Green è Lorentz invariante ed è inoltre invariante per traslazioni. Quest'ultima affermazione vuol dire che  $G$  dipende solo dalle differenze  $x_1 - x_2$ , etc... Per la trasformata di Fourier, questo significa che (si veda [1])

$$\widehat{G}(p_1, p_2, \dots) = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( \sum p_{in} - \sum p_{fin} \right) \mathcal{G}(p_1, p_2, \dots), \quad (5.65)$$

dove  $\mathcal{G}$  è una funzione regolare e Lorentz-invariante dei momenti. Lo stesso argomento si applica evidentemente al residuo di  $G$  nei poli. Quindi, trascurando segni inessenziali, possiamo scrivere:

$$S_{fi} = \langle p_3, p_4, \dots; out | p_1, p_2; in \rangle = \Pi \left[ \frac{1}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( \sum p_{in} - \sum p_{fin} \right) \mathcal{M}(p_1, p_2, \dots), \quad (5.66)$$

dove  $\mathcal{M}$  è l'ampiezza di Feynman, una funzione Lorentz-invariante dei suoi argomenti. Dalla (5.66) si calcola la sezione d'urto del processo  $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + \dots$  a partire dalla formula generale [1]

$$(\rho v_{rel} N) d\sigma = \sum_{fin} \frac{|S_{fi}|^2}{T}. \quad (5.67)$$

I nostri stati *non* sono normalizzati a una particella nel volume  $V$ , di qui il fattore  $N$  a primo membro, che indica il numero di particelle bersaglio in  $V$ . Con la normalizzazione del continuo,  $N = V/(2\pi)^3$  (si veda la l'Eq. (3.97),  $\rho = 1/(2\pi)^3$  è la densità delle particelle proiettile, e  $v_{rel}$  la velocità relativa.

Lasciamo al lettore la dimostrazione delle seguenti formule.

- sezione d'urto:

$$d\sigma = \frac{1}{4\omega(\mathbf{p}_1)\omega(\mathbf{p}_2)\mathbf{v}_{rel}} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( \sum p_{in} - \sum p_{fin} \right) \prod_{i=3, \dots} \left[ \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{p}_i)} \right] |\mathcal{M}|^2, \quad (5.68)$$

dove  $v_{rel} = |v_1 - v_2|$  è la velocità relativa delle particelle iniziali.

- spazio delle fasi invariante:

$$\frac{d^3 p}{2\omega(\mathbf{p}_i)} = d^4 p \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2). \quad (5.69)$$

- fattore invariante di flusso:

$$\omega(\mathbf{p}_1) \omega(\mathbf{p}_2) |v_1 - v_2| = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2}. \quad (5.70)$$

Le equazioni (5.69) e (5.70), sostituite nella (5.68), mostrano che  $d\sigma$  è Lorentz-invariante.



## Capitolo 6

### Diagrammi di Feynman per la matrice S. Teoria $\lambda\phi^4$

Utilizzando la formula di riduzione possiamo tradurre le regole per il calcolo dei diagrammi di Feynman per le funzioni di Green, discusse nella Sezione 4.3, in regole per il calcolo degli elementi della matrice S. Il punto di partenza è la trasformata di Fourier che appare nella generalizzazione della formula di riduzione, Eq.(5.64), al caso di processi che coinvolgano  $n$  particelle. Per semplificare la notazione consideriamo tutte le particelle come se appartenessero allo stato iniziale. Per le particelle nello stato finale basta cambiare segno all'impulso e all'energia. Dobbiamo quindi calcolare la seguente espressione

$$\prod_{k=1}^{k=n} \left( \frac{p_k^2 - m^2}{i\sqrt{Z}} \right) \int \prod_{k=1}^n d^4 x_k \prod_{k=1}^n e^{-i p_k x_k} \langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) | 0 \rangle \quad (6.1)$$

e per ottenere il risultato basterà porre  $p_k = q_k$  per le particelle nello stato iniziale, e  $p_k = -q_k$  per quelle nello stato finale.

#### 6.1 Grafici irriducibili ad una particella

Per quanto riguarda la funzione di Green, dobbiamo considerare solo i grafici di Feynman connessi con  $n \geq 3$  linee esterne. Possiamo dividere ulteriormente questi grafici in due categorie, a seconda che siano *riducibili ad una particella* (1-particle irreducible, 1PI) *sulle linee esterne* o no.

Un grafico è riducibile ad una particella sulle linee esterne se, tagliando una sola linea, possiamo separare un grafico della funzione a due punti con un'interazione non triviale. Nella Fig. 6.1 riportiamo i grafici connessi per la funzione a quattro punti, al secondo ordine in  $\lambda^2$ . I grafici (a) e (c) sono 1PI, mentre il grafico (b) e le corrispondenti permutazioni sono riducibili ad una particella sulle linee esterne. Naturalmente, grafici di ordine superiore possono essere 1PI anche relativamente a più linee esterne, come quello riportato in Fig. 6.2.

Tenendo conto che l'ampiezza associata ad un grafico è il prodotto delle sue diverse componenti, possiamo rappresentare il complesso di tutti i grafici connessi con un grafico a blocchi in cui ogni linea esterna è rimpiazzata dalla funzione a due punti esatta mentre la funzione di Green restante è 1PI su tutte le linee esterne, vedi Fig. 6.3 nel caso della funzione a quattro punti.

Lo sviluppo della funzione 1PI sulle linee esterne è mostrato in Fig. 6.4 sempre per il caso della funzione a quattro punti.

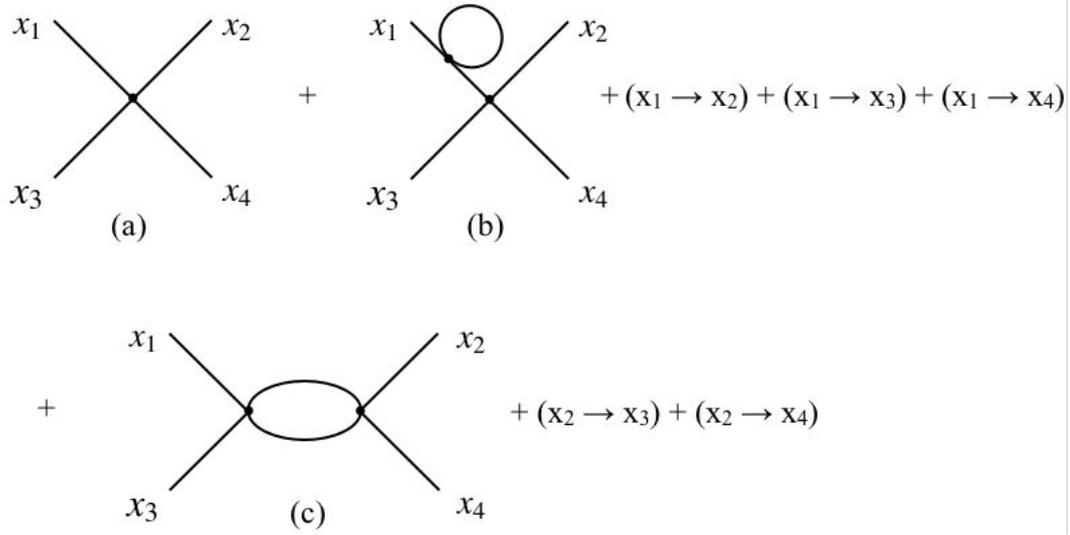


Figura 6.1: Diagrammi connessi per la funzione a quattro punti nella teoria  $\lambda\phi^4$  al secondo ordine perturbativo.

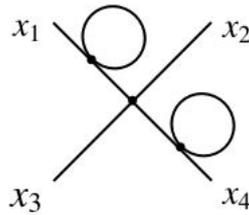


Figura 6.2: Esempio di diagramma connesso riducibile ad una particella su due linee esterne.

Riprendendo il risultato della Sez. 4.5, Eq. (9.31), possiamo scrivere:

$$G(x, y)|_{conn} = iZ\Delta_F(x - y, m) + i\mathcal{R}(x - y), \tag{6.2}$$

dove  $m$  è la massa rinormalizzata e  $\mathcal{R}(x-y)$  è una funzione la cui trasformata di Fourier è regolare quando  $p^2 \rightarrow m^2$ . Nel diagramma a blocchi della Fig. 6.3, le coordinate dei campi appaiono come terminazione delle linee esterne. Quindi ciascuna linea esterna è rappresentata da (si vedano anche la Eq. (3.64), (3.65))

$$i\Delta_F(v - x_k) = \frac{iZ}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ipv} e^{ipx_k}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + i\mathcal{R}(v - x_k), \tag{6.3}$$

dove  $v$  è la coordinata del vertice cui la linea è attaccata, e  $x_k$  la coordinata di uno dei punti della funzione di Green. Una volta applicata la trasformata di Fourier e moltiplicato per il fattore  $-i(p_k^2 - m^2)/\sqrt{Z}$ ,

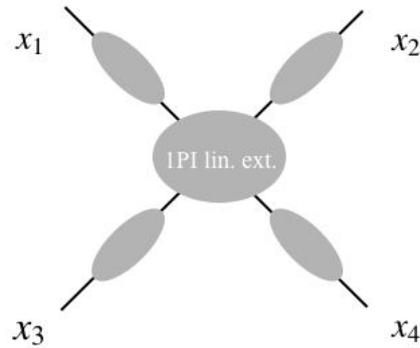


Figura 6.3: Rappresentazione a blocchi della funzione di Green a quattro punti connessa. Le linee esterne rappresentano le funzioni a due punti esatte, il blocco centrale la funzione di Green a quattro punti 1PI sulle linee esterne.

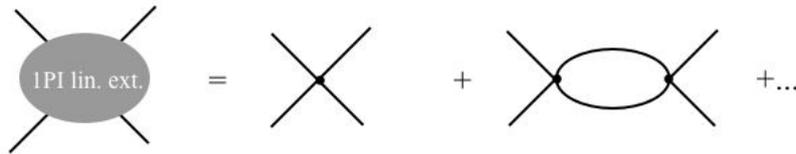


Figura 6.4: Sviluppo della funzione di Green a quattro punti connessa e 1PI sulle linee esterne.

si seleziona il residuo nel polo ed otteniamo

$$\lim_{p_k^2 \rightarrow m^2} \frac{(p_k^2 - m^2)}{i\sqrt{Z}} \int d^4 x_k e^{-ip_k x_k} (iZ\Delta_F(v - x_k)) = \sqrt{Z} e^{-ip_k v}, \quad (6.4)$$

Eeguire il limite richiesto dalla formula di riduzione si riduce a moltiplicare per  $\sqrt{Z}$  e assegnare alla linea esterna l'impulso della corrispondente particella fisica, con  $p_k = q_k$  per particelle nello stato iniziale,  $p_k = -q_k$  per particelle nello stato finale. Nell' elemento di matrice S, alla linea esterna resta anche associato il fattore  $1/\sqrt{2\omega(q)(2\pi)^3}$

I grafici 1PI sulle linee esterne contengono linee interne cui è associato il *propagatore nudo*,  $i\Delta_F(x - y, m_0)$ . Ad una linea interna che connette due vertici con coordinate  $v_1, v_2$ , corrisponde un fattore

$$i\Delta_F(v_2 - v_1) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{e^{-ipv_2} e^{ipv_1}}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}. \quad (6.5)$$

Con riferimento a quanto abbiamo visto per le linee esterne, un fattore  $e^{-ipv_2}$  corrisponde ad un impulso  $p$  che entra nel vertice  $v_2$  ed esce dal vertice  $v_1$ . Ad ogni vertice risultano così associati i fattori  $e^{\pm ipv}$  delle linee, interne o esterne che vi confluiscono, e l'integrazione nella coordinata del

vertice risulta allora in una funzione  $\delta$  che garantisce la conservazione dell'energia e dell'impulso portato dalle linee che confluiscono in ciascun vertice,

$$\int d^4x e^{ix\Sigma(\pm p_i)} = (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma(\pm p_i)) . \quad (6.6)$$

Per un grafico con  $n$  vertici, le  $n$  funzioni delta, Eq. (6.6), permettono di eliminare l'integrazione su  $(n-1)$  momenti interni, in quanto possiamo estrarre da esse una funzione delta che corrisponde alla conservazione del quadrimpulso totale della reazione, e che quindi non dipende dai momenti interni.

## 6.2 Regole di Feynman per gli elementi della Matrice S

Riassumiamo le regole per i diagrammi che rappresentano gli elementi di matrice S.

- Si devono considerare i grafici di Feynman connessi e 1PI sulle linee esterne.
- Ai diversi elementi di ogni grafico, vertici, linee interne, linee esterne, sono associate le seguenti quantità

$$\text{Vertice} \quad \frac{-i\lambda}{4!} (2\pi)^4 \delta^4(\sum p_{\text{in}} - \sum p_{\text{out}}) , \quad (6.7)$$

$$\text{Linea interna} \quad \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} , \quad (6.8)$$

$$\text{Linea esterna} \quad \frac{\sqrt{Z}}{\sqrt{2\omega_p}(2\pi)^3} . \quad (6.9)$$

Rimane da definire il coefficiente combinatorio da assegnare a ciascun diagramma, di cui abbiamo visto esempi particolari nella Sezione precedente, ma non discuteremo questo problema in generale nel caso della teoria  $\lambda\phi^4$ .

Come esempio, ci limitiamo a considerare l'ampiezza per lo scattering di due particelle.

Dobbiamo partire dai diagrammi della Fig. 6.4. Considereremo  $p_1, p_2$  come particelle iniziali (entranti),  $p_3, p_4$  come particelle finali (uscenti). Il valore del primo diagramma è semplicemente

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) Z^2 (-i\lambda) \prod \frac{1}{\sqrt{2\omega_{q_i}}} . \quad (6.10)$$

Il valore del secondo diagramma risulta essere

$$C (-i\lambda)^2 Z^2 \prod \frac{1}{\sqrt{2\omega_{q_i}}} \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{i}{q_1^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{q_2^2 - m_0^2 + i\epsilon} \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p_3 - p_4) ,$$

dove  $q_1$  e  $q_2$  sono i momenti associati alle linee interne e  $C$  rappresenta un fattore combinatorio, in cui abbiamo incorporato i fattori  $1/4!$ . Le due  $\delta$  si possono combinare in una che garantisce la

conservazione dell'impulso e dell'energia tra particelle entranti e particelle uscenti e una seconda  $\delta$  che elimina una delle integrazioni, fissando  $q_2 = p_1 + p_2 - q_1$ . Si ottiene così

$$D_2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) Z^2 C(-i\lambda)^2 \prod \frac{1}{\sqrt{2\omega_{q_i}}} \\ \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{i}{q_1^2 - m_0^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_1 + p_2 - q_1)^2 - m_0^2 + i\epsilon}.$$

Notiamo che l'integrale residuo è divergente. Per grandi valori di  $q_1$  si comporta come  $\int d^4 q / q^4$ , il che implica una divergenza logaritmica. Delle divergenze in teoria delle perturbazioni, e di come trattarle, parleremo nel caso dell'elettrodinamica. In quella occasione discuteremo anche del calcolo della costante di rinormalizzazione  $Z$  e di come eliminare in modo sistematico le quantità *nude*, massa,  $m_0$ , e costante di accoppiamento,  $e_0$ , in favore delle costanti fisicamente misurabili, cioè le quantità *rinormalizzate*.



## Capitolo 7

### Il campo elettromagnetico

In questo capitolo ci occuperemo della quantizzazione del campo elettromagnetico con il metodo degli integrali sui cammini di Feynman. Adotteremo le convenzioni dei testi [1, 3], secondo le quali il tensore di campo  $F^{\mu\nu}$  si scrive in termini dei potenziali  $A^\mu$  tramite la

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu, \quad (7.1)$$

e le equazioni di Maxwell per il campo libero

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = 0, \quad (7.2)$$

possono essere derivate dalla densità di lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (7.3)$$

Una trasformazione dei potenziali

$$A^\mu(x) \rightarrow A_\Lambda^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x), \quad (7.4)$$

dove  $\Lambda(x)$  è una funzione arbitraria, lascia invariante sia il tensore di campo  $F^{\mu\nu}$  che la densità di lagrangiana  $\mathcal{L}$ , e quindi l'integrale d'azione. Più in generale, una trasformazione di gauge non deve avere alcun effetto su qualsiasi processo fisico, e in particolare sui risultati di qualunque misura. Un corollario di questa affermazione è che i potenziali elettromagnetici  $A^\mu$  non sono essi stessi misurabili.

L'invarianza di gauge è centrale nella teoria del campo elettromagnetico e delle sue interazioni. La richiesta che anche in presenza di interazioni la teoria sia invariante rispetto alla trasformazione di gauge determina il tipo di interazione possibile con altri campi. La teoria del campo elettromagnetico è il prototipo delle moderne teorie delle interazioni fondamentali, tutte basate sull'esistenza di particolari simmetrie di gauge.

#### 7.1 La scelta di gauge

Per descrivere la teoria quantistica del campo elettromagnetico mediante la somma sui cammini dobbiamo superare un problema legato all'invarianza di gauge.

Dove è il problema? I lettori ricorderanno che per definire una teoria quantistica abbiamo dovuto garantire la convergenza degli integrali funzionali che definiscono la somma sui cammini. Per ottenere questo risultato abbiamo considerato una continuazione analitica nel piano complesso della variabile tempo, tramite la prescrizione  $t \rightarrow t(1 - i\chi)$ . Nel caso del campo elettromagnetico l'invarianza di gauge introduce un nuovo tipo di divergenza che è immune a questo rimedio. Consideriamo infatti l'integrale funzionale:

$$I = \int d[A^\mu] e^{iS[A^\mu]} \mathcal{O}[A^\mu], \quad (7.5)$$

dove  $\mathcal{O}[A^\mu]$  è un funzionale delle  $A^\mu$  invariante di gauge, che quindi può rappresentare una qualche grandezza fisica. Come al solito, l'integrale funzionale è esteso ai campi  $A^\mu$  periodici tra  $t = \pm\infty$ . Notiamo che, siccome l'integrale  $I$  deve risultare invariante di gauge, e poichè sia l'azione  $S$  che il funzionale  $\mathcal{O}$  sono invarianti, tale deve essere anche la misura d'integrazione  $d[A^\mu]$ .

Secondo i principi generali dell'integrazione sui cammini, la quantità  $I$  nella (7.5) deve rappresentare l'elemento di matrice di  $\mathcal{O}$  sul vuoto, a meno di una costante moltiplicativa indipendente da  $\mathcal{O}$ . Tuttavia, è immediato convincersi che l'integrale  $I$  definito dalla  $\mathcal{O}[A^\mu]$  è in realtà infinito.

Poichè  $S[A^\mu]$  è invariante di gauge, per ogni cammino  $A^\mu(t, \mathbf{x})$  ne esistono infiniti altri, ottenuti con una trasformazione di gauge, per i quali l'integrando ha lo stesso valore. Dato che lo spazio delle possibili trasformazioni di gauge, ovvero lo spazio delle funzioni  $\Lambda(x)$ , è infinito, l'integrale è necessariamente divergente.

Per dominare questa divergenza occorre trovare il modo di fattorizzarla in ogni integrale del tipo (7.5). L'insieme dei cammini  $A^\mu(x)$  connessi da trasformazioni di gauge è detto una *traiettoria di gauge*. Quello che vorremmo fare è stabilire un sistema di coordinate nello spazio dei cammini tali che un sottoinsieme di tali coordinate (le linee orizzontali nella Fig. 7.1) corrispondano alle traiettorie di gauge e le rimanenti coordinate (la linea verticale) servano a distinguere cammini non equivalenti sotto trasformazioni di gauge, e quindi fisicamente distinti.

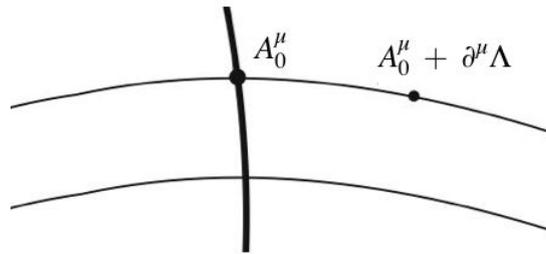


Figura 7.1: Lo spazio delle funzioni  $A^\mu(x)$  può essere *affettato* secondo traiettorie (linee orizzontali) composte da cammini connessi da trasformazioni di gauge. Lungo le coordinate ortogonali alle traiettorie di gauge (linea verticale) troviamo cammini fisicamente distinti.

Se questo fosse possibile, potremmo riscrivere l'integrale (7.5) nella forma

$$\int d[\Lambda] \int d[A_0^\mu] e^{iS[A^\mu]} \mathcal{O}[A^\mu], \quad (7.6)$$

ma poichè l'integrando è per ipotesi invariante di gauge, la (7.6) potrebbe essere messa nella forma

$$\left[ \int d[\Lambda] \right] \int d[A_0^\mu] e^{iS[A_0^\mu]} \mathcal{O}[A_0^\mu],$$

in modo che l'integrale sulle trasformazioni di gauge, sia pure divergente, diverrebbe un fattore moltiplicativo comune in tutti gli integrali del tipo (7.5) e potrebbe essere omissa nel calcolo delle funzioni di Green, che sono (si veda l'Eq. (2.26)) rapporti di integrali di questo tipo. Naturalmente le cose non sono così semplici, dato che, trattandosi di un cambiamento di variabili, dobbiamo anche includere il determinante jacobiano della trasformazione da  $A^\mu$  a  $\{A_0^\mu, \Lambda\}$ .

Per fare quello che ci proponiamo, dobbiamo prima di tutto imporre una "condizione di gauge" che renda trattabile l'integrale funzionale. Una tale condizione viene anche detta una "scelta di gauge" (o *gauge fixing*, in inglese).

Un esempio di condizione di gauge, discussa in [1] è quella che porta alla cosiddetta "gauge di Coulomb",  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$ . Poichè siamo interessati a mantenere in evidenza l'invarianza relativistica, consideriamo invece la "gauge di Lorentz", caratterizzata dalla condizione

$$\partial_\nu A^\nu = 0. \quad (7.7)$$

Nella gauge di Lorentz le equazioni di Maxwell si riducono all'equazione delle onde per ciascuna componente di  $A^\mu$ ,

$$\square A^\mu = 0. \quad (7.8)$$

In realtà non conviene imporre direttamente la condizione (7.7)<sup>1</sup>, ma piuttosto modificare la densità di lagrangiano (ovvero l'azione) in maniera che le equazioni del moto divengano proprio le (7.8).

Come si verifica facilmente<sup>2</sup>, l'azione originale della teoria si può scrivere nella forma

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) = -\frac{1}{2} \int d^4x ((\partial^\nu A^\mu)(\partial_\nu A_\mu) - (\partial_\nu A^\nu)^2).$$

Se potessimo sopprimere il secondo termine troveremmo l'azione proposta da Enrico Fermi,

$$S_F = -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial^\nu A^\mu)(\partial_\nu A_\mu), \quad (7.9)$$

che porta alle equazioni del moto (7.8). Nella prossima Sezione utilizzeremo il metodo di deWitt-Faddeev-Popov per dimostrare che il cambiamento dell'azione non modifica, a meno di un'inessenziale costante moltiplicativa, il valore di integrali funzionali del tipo (7.5) in cui compaiono funzionali gauge-invarianti.

<sup>1</sup>Imporre la condizione (7.7) comporta notevoli complicazioni, discusse ad esempio in [3]. La procedura presentata in questo Capitolo ha il vantaggio di essere utilizzabile anche nel caso di teorie dotate di simmetrie di gauge non abeliane, come per esempio il Modello Standard.

<sup>2</sup>Il secondo termine richiede due integrazioni per parti

$$\int dx (\partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu) = - \int dx (\partial_\mu \partial^\nu A^\mu)(A_\nu) = \int dx (\partial_\mu A^\mu)(\partial^\nu A_\nu).$$

## 7.2 Il metodo di deWitt-Faddeev-Popov

In questa Sezione seguiremo la trattazione del testo di Peskin e Schroeder [12]. Vogliamo dimostrare che, se  $\mathcal{O}$  è un funzionale invariante di gauge, l'integrale (7.5) si può riscrivere usando l'azione di Fermi

$$I = K \int d[A^\mu] e^{iS_F[A^\mu]} \mathcal{O}[A^\mu] = K \int d[A^\mu] e^{iS[A^\mu]} e^{-\frac{i}{2} \int d^4x (\partial_\nu A^\nu)^2} \mathcal{O}[A^\mu], \quad (7.10)$$

dove  $K$  è una costante moltiplicativa. Conviene però considerare l'espressione più generale

$$I = K(\xi) \int d[A^\mu] e^{iS[A^\mu]} e^{-\frac{i}{2\xi} \int d^4x (\partial_\nu A^\nu)^2} \mathcal{O}[A^\mu], \quad (7.11)$$

nella quale abbiamo introdotto il parametro libero  $\xi$ . Per  $\xi = 1$  si ritrova l'azione di Fermi e la (7.11) si riduce alla (7.10). La scelta  $\xi = 1$  viene anche detta "gauge di Feynman", ed è quella più comunemente adottata.

Il fattore  $\exp[-(i/2\xi) \int d^4x (\partial_\nu A^\nu)^2]$  aggiunto all'integrando deprime esponenzialmente il contributo all'integrale funzionale delle configurazioni del campo che *non* obbediscono alla condizione  $\partial_\nu A^\nu = 0$  ed elimina la divergenza associata alle orbite di gauge. Per valori decrescenti di  $\xi$  la gaussiana diventa sempre più stretta, e nel limite  $\xi \rightarrow 0$  sopravvive solo il contributo delle configurazioni  $A^\nu(x)$  tali che  $\partial_\nu A^\nu = 0$ . Questo limite corrisponde alla gauge detta "gauge di Landau".

La dimostrazione si basa sull'identità

$$\int d[\Lambda] \det \left[ \frac{\delta \partial_\nu A_\Lambda^\nu}{\delta \Lambda} \right] \delta(\partial_\nu A_\Lambda^\nu - \omega) = 1, \quad (7.12)$$

dove  $A_\Lambda^\nu$  è il campo che si ottiene dalla trasformazione di gauge (7.4),  $\omega(x)$  è una funzione arbitraria e l'espressione  $\delta(\partial_\nu A_\Lambda^\nu - \omega)$  va intesa come una delta di Dirac *funzionale*<sup>3</sup>.

Per quanto riguarda il determinante jacobiano, nel caso dell'elettrodinamica<sup>4</sup> esso si riduce ad una costante: il determinante dell'operatore d'alambertiano

$$\det \left[ \frac{\delta \partial_\nu A_\Lambda^\nu}{\delta \Lambda} \right] = \det \left[ \frac{\delta \square \Lambda}{\delta \Lambda} \right] = \det \square. \quad (7.13)$$

Partendo di nuovo dalla definizione (7.5) dell'integrale  $I$  vediamo che possiamo trasformarlo nella (7.11) attraverso semplici manipolazioni. Per prima cosa, utilizziamo l'identità (7.12) e l'invarianza di gauge per riscrivere  $I$  nella forma

$$\begin{aligned} I &= \int d[A^\mu] e^{iS[A^\mu]} \mathcal{O}[A^\mu] = \det \square \int d[A^\mu] e^{iS[A^\mu]} \mathcal{O}[A^\mu] \int d[\Lambda] \delta(\partial_\nu A_\Lambda^\nu - \omega) \\ &= \det \square \int d[\Lambda] \int d[A_\Lambda^\mu] e^{iS[A_\Lambda^\mu]} \mathcal{O}[A_\Lambda^\mu] \delta(\partial_\nu A_\Lambda^\nu - \omega) \\ &= \det \square \int d[\Lambda] \int d[A^\mu] e^{iS[A^\mu]} \mathcal{O}[A^\mu] \delta(\partial_\nu A^\nu - \omega), \end{aligned} \quad (7.14)$$

<sup>3</sup>Possiamo pensarla come limite del reticolo, cioè

$$\delta(\partial_\nu A_\Lambda^\nu - \omega) = \lim_{\text{continuo}} \prod_i \delta[\partial_\nu A_\Lambda^\nu(x_i) - \omega(x_i)].$$

<sup>4</sup>Nel caso non-abeliano il formalismo generale resta immutato, ma il determinante di Faddeev-Popov dipende dai campi e dà un contributo assolutamente non banale.

dove l'ultima riga si ottiene con il cambiamento di variabili  $A_\Lambda^\mu \rightarrow A^\mu$ . Notiamo che  $\int d[\Lambda]$  è diventato un semplice fattore moltiplicativo. Per arrivare alla (7.11) basta ora eseguire un'integrazione sulla funzione  $\omega(x)$  con un peso gaussiano definito dalla

$$N(\xi) = \int d[\omega] e^{-\frac{i}{\xi} \int d^4x \omega^2(x)} = 1, \quad (7.15)$$

dove  $N(\xi)$  è un opportuno fattore di normalizzazione. Troviamo così

$$\begin{aligned} I &= N(\xi) \det \square \int d[\Lambda] \int d[\omega] e^{-\frac{i}{\xi} \int d^4x \omega^2(x)} \int d[A^\mu] e^{iS[A^\mu]} \mathcal{O}[A^\mu] \delta(\partial_\nu A^\nu - \omega) \\ &= N(\xi) \det \square \int d[\Lambda] \int d[A^\mu] e^{iS[A^\mu]} e^{-i\frac{1}{2\xi} \int d^4x (\partial_\nu A^\nu)^2} \mathcal{O}[A^\mu]. \end{aligned} \quad (7.16)$$

L'espressione che abbiamo ottenuto è proprio la (7.11) con  $K(\xi) = N(\xi) \det \square \int d[\Lambda]$ .

In conclusione, se consideriamo l'elemento di matrice nel vuoto dell'osservabile invariante di gauge  $\mathcal{O}[A^\mu]$  e semplifichiamo le costanti moltiplicative comuni tra numeratore e denominatore otteniamo

$$\langle 0 | \mathcal{O}[A^\mu] | 0 \rangle = \frac{\int d[A^\mu] e^{iS[A^\mu]} \mathcal{O}[A^\mu]}{\int d[A^\mu] e^{iS[A^\mu]}} = \frac{\int d[A^\mu] e^{iS_{new}[A^\mu]} \mathcal{O}[A^\mu]}{\int d[A^\mu] e^{iS_{new}[A^\mu]}}, \quad (7.17)$$

dove l'azione modificata è data dalla

$$\begin{aligned} S_{new}[A^\mu] &= \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) \right] \\ &= \int d^4x \frac{1}{2} A_\mu \left[ g^{\mu\nu} \square + \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\nu. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Sebbene l'azione complessiva,  $S_{new}$ , non sia invariante di gauge, la relazione (7.17) che abbiamo derivato mostra che *per grandezze gauge invarianti* l'uso di  $S_{new}$  dà il risultato invariante di gauge desiderato. L'identità (7.17) giustifica quindi, per il calcolo di grandezze gauge invarianti, l'uso dell'azione di Fermi, che d'ora in avanti indicheremo semplicemente con  $S$ .

### 7.3 Il funzionale generatore e il propagatore

Le funzioni di Green del campo elettromagnetico,

$$\langle 0 | T(A^{\mu_1}(x_1) \cdots A^{\mu_n}(x_n)) | 0 \rangle,$$

possono essere dedotte da un funzionale generatore dipendente da una funzione ausiliaria  $J_\mu(x)$ ,

$$Z[J_\mu] = \int d[A^\mu] \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^4x (\partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu + 2J_\mu A^\mu) \right], \quad (7.19)$$

tramite la regola di corrispondenza

$$A^\mu(x) \rightarrow i \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}. \quad (7.20)$$

Riscrivendo  $Z[J]$  con una integrazione per parti come

$$Z[J_\mu] = \int d[A^\mu] \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4x (A^\mu \square A_\mu - 2A^\mu J_\mu) \right],$$

possiamo completare un quadrato perfetto all'esponente definendo

$$\square^{-1} J_\mu(x) = - \int d^4y \Delta_F(x-y; 0) J_\mu(y),$$

di modo che

$$Z[J_\mu] = \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^4x (J^\mu \square^{-1} J_\mu) \right] \\ \times \int d[A^\mu] \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4x (A^\mu - \square^{-1} J^\mu) \square (A_\mu - \square^{-1} J_\mu) \right].$$

Anche in questo caso, l'integrale funzionale residuo è un fattore costante che può essere ommesso. Otteniamo quindi

$$Z[J_\mu] = \exp \left[ \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^\mu(x) \Delta_F(x-y; 0) J_\mu(y) \right], \quad (7.21)$$

e la funzione a due punti, nella gauge di Feynman, diviene

$$\langle 0 | T (A^\mu(x) A^\nu(y)) | 0 \rangle = i \Delta_F^{\mu\nu}(x-y) = -i g^{\mu\nu} \Delta_F(x-y; 0). \quad (7.22)$$

**Propagatore nella gauge generica.** È utile calcolare il propagatore del fotone anche nella gauge più generale in cui la l'azione prende la forma dell'Eq. (7.18). Invece che l'inverso dell'operatore  $\square$ , dobbiamo calcolare l'inverso di

$$g^{\mu\nu} \square + \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial^\mu \partial^\nu,$$

ovvero, per la trasformata di Fourier, l'inverso di

$$K^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} p^2 + \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) p^\mu p^\nu. \quad (7.23)$$

Se scriviamo l'operatore desiderato nella forma più generale

$$D^{\mu\nu} = A(p^2) g^{\mu\nu} + B(p^2) p^\mu p^\nu,$$

e imponiamo che

$$D^{\mu\nu} K_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu, \quad (7.24)$$

otteniamo

$$A = \frac{1}{p^2}, \quad B = (\alpha - 1) \frac{1}{(p^2)^2},$$

cioè

$$D^{\mu\nu} = \frac{1}{p^2} \left[ g^{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right]. \quad (7.25)$$

In conclusione, diamo l'espressione del propagatore del fotone nella gauge generica:

$$i[\Delta_F^{(\alpha)}]^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \left[ -g^{\mu\nu} + (1-\alpha) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right]. \quad (7.26)$$

Per  $\alpha = 1$  si ottiene il propagatore nella gauge di Feynman. Per  $\alpha = 0$  si ottiene invece la cosiddetta *gauge di Landau*, in cui il propagatore soddisfa la condizione di Lorentz. Questo è in accordo con il fatto, già notato, che il limite  $\alpha \rightarrow 0$  corrisponde a restringere l'integrale funzionale nella (7.5) ai campi che soddisfano la condizione di Lorentz esattamente.

## 7.4 Gli stati a un fotone

Se consideriamo il campo elettromagnetico libero (in assenza di cariche e correnti) nella gauge di Coulomb<sup>5</sup> la condizione  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  implica che  $\Delta\phi = 0$  e quindi possiamo porre  $\phi = 0$ . Per un fotone di impulso  $\mathbf{k}$  dalla condizione  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  segue che il vettore di polarizzazione  $\epsilon$  deve essere ortogonale a  $\mathbf{k}$ . Un fotone di impulso  $\mathbf{k}$  può quindi avere due stati di polarizzazione che corrispondono a due vettori  $\epsilon_r$  tali che  $\epsilon_r \cdot \mathbf{k} = 0$  e  $\epsilon_r \cdot \epsilon_s = \delta_{rs}$  ( $r = 1, 2$ ).

Queste conclusioni, che sono di chiaro significato fisico, devono essere indipendenti da qualsiasi scelta di gauge, e dal metodo di quantizzazione, e devono quindi essere valide anche se procediamo con una quantizzazione nella gauge di Feynman, come abbiamo fatto nelle sezioni precedenti. Su questo punto sorge un problema piuttosto sottile. L'azione di Fermi (7.9) tratta in modo simmetrico le quattro componenti del campo  $A^\mu$  e, sebbene la lagrangiana di Fermi sia equivalente a quella gauge-invariante della (7.3) purché  $\partial_\mu A^\mu = 0$ , questa condizione non segue direttamente dalla lagrangiana di Fermi, o dalle equazioni del moto (7.8). In effetti, nella gauge di Feynman sono apparentemente presenti quattro stati di polarizzazione, e una sorpresa! Vediamo quale.

La funzione a due punti nel caso  $t_x > t_y$  può essere calcolata direttamente dalla espressione di  $\Delta_F$  (si confronti col l'Eq. (3.72)),

$$\langle 0 | A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle = \frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{e^{i\mathbf{p}(x-y)}}{2\omega_p} e^{-i\omega_p(t_x - t_y)}.$$

Se adesso definiamo le trasformate di Fourier spaziali (tenendo presente che  $A^\nu(x)$  è reale)

$$A^\mu(\mathbf{k}, t_x) = \frac{\sqrt{2\omega_k}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 x e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} A^\mu(\mathbf{x}, t_x),$$

$$A^{\nu\dagger}(\mathbf{q}, t_y) = \frac{\sqrt{2\omega_q}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 y e^{i\mathbf{q}\mathbf{y}} A^\nu(\mathbf{y}, t_y) = A^\nu(-\mathbf{q}, t_y),$$

otteniamo da una trasformata di Fourier in  $\mathbf{y}$

$$\langle 0 | A^\mu(x) A^{\nu\dagger}(\mathbf{q}, t_y) | 0 \rangle = \frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}, e^{-i\omega_q(t_x - t_y)}, \quad (7.27)$$

<sup>5</sup>Per una discussione della gauge di Coulomb rimandiamo al Capitolo 1 del Mandl e Shaw [3].

da cui, ponendo  $\mu = \nu$ , impariamo che lo stato

$$|\mu; \mathbf{q}\rangle = A^{\mu\dagger}(\mathbf{q}, 0)|0\rangle,$$

ha impulso  $\mathbf{q}$  e energia  $\omega_q = \sqrt{\mathbf{q}^2}$ . Questo stato descrive quindi una particella di massa nulla. Una seconda trasformata in  $\mathbf{x}$ , e nel limite  $t_x = t_y = 0$  porta a

$$\langle\mu; \mathbf{k}|\nu; \mathbf{q}\rangle = \langle 0|A^\mu(\mathbf{k}, 0)A^{\nu\dagger}(\mathbf{q}, 0)|0\rangle = -g^{\mu\nu}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}). \quad (7.28)$$

Ecco quindi la sorpresa: non solo per ogni valore di  $\mathbf{q}$  ci sono quattro stati, e non i due che ci aspettiamo, ma mentre gli stati con  $\mu = 1, 2, 3$  sono di modulo quadro positivo, dato che  $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$ ,

$$\langle\mu; \mathbf{k}|\nu; \mathbf{q}\rangle = \langle 0|A^\mu(\mathbf{k}, 0)A^{\nu\dagger}(\mathbf{q}, 0)|0\rangle = \delta_{\mu\nu}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \quad (\mu, \nu = 1.2.3)$$

lo stato  $|\mu = 0; \mathbf{q}\rangle$  ha modulo quadro negativo,

$$\langle 0; \mathbf{k}|0; \mathbf{q}\rangle = \langle 0|A^0(\mathbf{k}, 0)A^{0\dagger}(\mathbf{q}, 0)|0\rangle = -\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q})$$

Una situazione che sembra in aperto contrasto con i dettami della meccanica quantistica: si tratta di uno stato di probabilità negativa.

La soluzione di questo problema deriva dall'invarianza di gauge dell'elettromagnetismo, che non è del tutto obliterata dalla scelta della gauge di Feynman. Infatti l'azione di Fermi è invariante sotto una classe ristretta di trasformazioni di gauge, caratterizzate da funzioni  $f(x)$  tali che  $\square f(x) = 0$ : Infatti (si veda l'Eq. (7.9))

$$\begin{aligned} \int d^4x \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu f) \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu f) &= \int d^4x (\partial^\nu A^\mu) (\partial_\nu A_\mu) \\ &+ \int d^4x (\partial^\nu \partial^\mu f) \partial_\nu A_\mu + \int d^4x (\partial^\nu A^\mu) (\partial_\nu \partial_\mu f) + \int d^4x (\partial^\nu \partial^\mu f) (\partial_\nu \partial_\mu f), \end{aligned}$$

e con una integrazione per parti si verifica che tutti i termini della seconda riga si annullano se  $\square f(x) = 0$ .

Nella prossima Sezione vedremo come la presenza di questa invarianza risolva il problema degli stati aggiuntivi che appaiono nella gauge di Feynman<sup>6</sup>.

Per ogni valore di  $\mathbf{q}$  possiamo scegliere quattro vettori di polarizzazione:

$\epsilon_1, \epsilon_2$  Le due polarizzazioni *trasverse*:  $\epsilon_{1,2}^\mu = \{0, \epsilon_{1,2}\}$ , con  $(\epsilon_{1,2} \cdot \mathbf{q}) = 0$ .

$\epsilon_3$  La polarizzazione *longitudinale*: un vettore spaziale parallelo a  $\mathbf{q}$ :  $\epsilon_3^\mu = \{0, \hat{\mathbf{q}}\}$ .

$\epsilon_0$  La polarizzazione *temporale*: un vettore di tipo tempo,  $\epsilon_0^\mu = \eta^\mu = \{1, \mathbf{0}\}$

In corrispondenza dei quattro vettori parleremo di fotoni trasversi, longitudinali o temporali. Se ad esempio  $\mathbf{q}$  è nella direzione 3, possiamo scegliere i quattro vettori come

$$\epsilon_1 = \{0, 1, 0, 0\}, \quad \epsilon_2 = \{0, 0, 1, 0\}, \quad \epsilon_L = \{0, 0, 0, 1\}, \quad \epsilon_T = \{1, 0, 0, 0\}.$$

<sup>6</sup>Una discussione più approfondita e citazioni della letteratura originale, in particolare il lavoro di Gupta e Bleuler, si trovano nel Capitolo 5 del Mandl e Shaw [3].

Per gli stati trasversi possiamo, per ogni valore di  $\mathbf{q}$  scegliere due vettori di polarizzazione  $\epsilon_r^v(\mathbf{q})$  ( $\mathbf{r} = 1, 2$ ) puramente spaziali ( $\epsilon_{1,2}^0 = 0$ ), tali che

$$\mathbf{q} \cdot \epsilon_r = 0 \quad , \quad \epsilon_r \cdot \epsilon_s = \delta_{rs} .$$

Se quindi definiamo gli stati a un fotone come

$$|\gamma; \mathbf{q}, r\rangle = \epsilon_r^v(\mathbf{q}) A_v^\dagger(\mathbf{q}, 0)|0\rangle ,$$

dalla (7.28) otteniamo

$$\langle \gamma; \mathbf{k}, s | \gamma; \mathbf{q}, r \rangle = \delta_{rs} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}) , \quad (7.29)$$

e, dalla (7.27),

$$\langle 0 | A^\mu(x) | \gamma; \mathbf{q}, r \rangle = \frac{\epsilon_r^\mu(\mathbf{q})}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} e^{-i\omega_q(t_x - t_y)} . \quad (7.30)$$

Quest'ultima equazione risulterà utile per stabilire le regole di calcolo per la matrice  $S$ . Nel presente testo consideriamo i vettori  $\epsilon_r^v$  come vettori a componenti *reali*, che descrivono fotoni a polarizzazione lineare. Ricordiamo però che per descrivere stati con polarizzazione circolare, in particolare fotoni di elicità definita si devono usare vettori  $\epsilon_r^v$  a componenti *complesse*.

## 7.5 Fotoni virtuali

L'interazione tra il campo elettromagnetico e la materia avviene attraverso la corrente elettromagnetica [1]

$$\mathcal{L}_I = e A_\mu(x) J^\mu(x) , \quad (7.31)$$

e l'invarianza di gauge prescrive che la corrente sia conservata, cioè che

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 . \quad (7.32)$$

Nelle interazioni con un'elettrone

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi , \quad (7.33)$$

e la conservazione della corrente è garantita dal teorema di Noether.

Il piú semplice apparato con cui possiamo sperimentare sul campo elettromagnetico è costituito da un'antenna e da un ricevitore. Nell'antenna, un elettrone compie una transizione da uno stato  $A$  ad uno stato  $B$ , nel ricevitore un'altro elettrone passa da  $A'$  a  $B'$ .

L'ampiezza della transizione complessiva:  $A \rightarrow B, A' \rightarrow B'$  al secondo ordine della teoria delle perturbazioni è data dalla

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle B, B' | \int d^4x d^4y T [\mathcal{L}_I(x) \mathcal{L}_I(y)] | A, A' \rangle \\ &= \frac{(ie)^2}{2} \int d^4x d^4y \langle B, B' | T [A_\mu(x) J^\mu(x) A_\nu(y) J^\nu(y)] | A, A' \rangle . \end{aligned} \quad (7.34)$$

Fattorizzando gli stati quantistici di antenna e ricevitore ( $|A, A'\rangle = |A\rangle|A'\rangle$ , etc.) e tenendo conto che, a questo ordine, le correnti commutano tra loro e con il potenziale vettore, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \frac{(ie)^2}{2} \int d^4x d^4y (\langle B|J^\mu(x)|A\rangle \langle B'|J^\nu(y)|A'\rangle + x \leftrightarrow y) \langle 0|T[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle = \\ &= (ie)^2 \int d^4x d^4y \langle B|J^\mu(x)|A\rangle \langle 0|T[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle \langle B'|J^\nu(y)|A'\rangle \end{aligned} \quad (7.35)$$

dove abbiamo usato la simmetria tra le variabili di integrazione  $x$  ed  $y$  per cancellare il fattore  $1/2$ . Possiamo rappresentare l'ampiezza (7.35) con il diagramma di Feynman in Fig. 7.2. La linea ondulata rappresenta il propagatore del fotone. Si dice, in questo caso, che tra le due correnti si scambia un *fotone virtuale*.

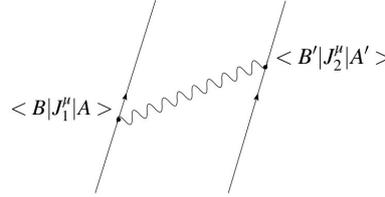


Figura 7.2: Diagramma di Feynman che rappresenta l'ampiezza dell'interazione antenna-ricevitore dovuta allo scambio di un fotone virtuale. Le linee continue raffigurano, nello spazio-tempo, le linee-universo di antenna e ricevitore, la linea ondulata scambiata tra i vertici rappresenta la propagazione del campo elettromagnetico.

Passando alle trasformate di Fourier ed usando la (7.26) otteniamo

$$S_{fi} = (ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{J}_{BA}^\mu(-p) \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \left[ -g_{\mu\nu} + (1 - \alpha) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \tilde{J}_{B'A'}^\nu(p). \quad (7.36)$$

Una prima conseguenza della (7.36) è che  $S_{fi}$  è indipendente dalla gauge: i termini dipendenti da  $\alpha$  nel propagatore danno contributo nullo grazie alla conservazione della corrente (7.32), che implica  $p_\mu J^\mu(p) = 0$ .

Possiamo quindi scrivere

$$S_{fi} = (ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (\tilde{J}_{BA})^\mu(-p) \frac{i(-g_{\mu\nu})}{p^2 + i\epsilon} (\tilde{J}_{B'A'})^\nu(p). \quad (7.37)$$

Questa equazione fa pensare ci sia ancora un problema: il residuo nel polo a  $p^2 = 0$  è proporzionale a  $-g_{\mu\nu}$ , il che sembra indicare che tutti e quattro i tipi di fotoni possano contribuire, vedi la (7.28). La patologia, tuttavia, è solo apparente ed è di nuovo curata dalla conservazione della corrente<sup>7</sup>.

<sup>7</sup>Notiamo che l'ampiezza si può anche scrivere come  $\int d^4x J_{A'B'}^\mu(x)(A_{AB})_\mu(x)$ , dove  $(A_{AB})_\mu(x)$  è il campo classico generato dalla corrente  $J_{AB}^\mu(x)$ . La discussione a questo punto segue quasi parola per parola quella riportata in [1] a proposito della funzione di Green del campo elettromagnetico classico.

Con riferimento al quadrimpulso  $p$ , introduciamo i quattro vettori di polarizzazione  $\epsilon^\mu(p)$ , definiti dall'equazione (7.4), che formano una base ortonormale nello spazio delle  $p$  (naturalmente in relazione alla metrica  $g^{\mu\nu}$ ). È facile convincersi che la relazione di completezza per questa base si scrive

$$\sum_{i=0,\dots,3} x_i \epsilon_i^\mu \epsilon_i^\nu = -g^{\mu\nu}, \quad (7.38)$$

con  $x_0 = -1$  e  $x_{1,2,3} = +1$ , ovvero

$$-g^{\mu\nu} = \left( \sum_{i=1,2} \epsilon_i^\mu \epsilon_i^\nu \right) + (\epsilon_3^\mu \epsilon_3^\nu - \eta^\mu \eta^\nu). \quad (7.39)$$

Se esprimiamo  $\epsilon_3$  in funzione di  $p$  e di  $\eta^\mu$ , otteniamo

$$\epsilon_3^\mu = \frac{1}{|\mathbf{p}|} (p^\mu - p^0 \eta^\mu) \quad , \quad (\epsilon_3^\mu \epsilon_3^\nu - \eta^\mu \eta^\nu) = \frac{p^2}{|\mathbf{p}|} \eta^\mu \eta^\nu + \dots, \quad (7.40)$$

dove i punti di sospensione indicano termini proporzionali a  $p^\mu$  e/o a  $p^\nu$ , che danno zero quando inseriti nella (7.36), sempre in virtù della conservazione della corrente.

In conclusione, con questa sostituzione, la (7.36) diventa

$$S_{fi} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{J}_{BA}^\mu(-p) \frac{i(\sum_{i=1,2} (\epsilon_i)_\mu (\epsilon_i)_\nu)}{p^2 + i\epsilon} \tilde{J}_{B'A'}^\nu(p) + \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{J}_{BA}^0(-p) \frac{-i}{|\mathbf{p}|} \tilde{J}_{B'A'}^0(p). \quad (7.41)$$

Il primo termine a secondo membro della (7.41) mostra che al polo in  $p^2 = 0$  contribuiscono solo i fotoni trasversi, che sono quindi gli unici stati presenti a grande distanza dall'interazione. Non ci sono fotoni di altro tipo negli stati "in" e "ou" discussi nei Capitoli precedenti. Il contributo dei fotoni longitudinali e temporali si combina, in virtù della conservazione della corrente, nel secondo termine che, come si vede dal fattore  $1/|\mathbf{p}|$ , non è altro che l'interazione coulombiana istantanea tra le due correnti.

In effetti, tornando allo spazio  $x$ , troviamo

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{J}_{BA}^0(-p) \frac{-i}{|\mathbf{p}|} \tilde{J}_{B'A'}^0(p) &= \int d^4 x d^4 y J_{BA}^0(x) J_{B'A'}^0(y) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{-i}{|\mathbf{p}|} \\ &= -i \int d^4 x d^4 y J_{BA}^0(x) \delta(x^0 - y^0) \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} J_{B'A'}^0(y). \end{aligned} \quad (7.42)$$

che non è altro che  $-i$  moltiplicato per l'elemento di matrice dell'hamiltoniana d'interazione elettrostatica tra le due correnti.

Se avessimo effettuato il calcolo nella gauge di Coulomb, avremmo scritto l'hamiltoniana di interazione come somma dell'interazione della corrente con i fotoni trasversi (di ordine  $e$ ) più l'interazione coulombiana tra le densità di carica, di ordine  $e^2$

$$H_I = e \int d^3 x \mathbf{A}(x, t) \mathbf{j}(x, t) + \frac{e^2}{2} \int d^3 x d^3 y j_0(x, t) \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} j_0(x, t). \quad (7.43)$$

L'ampiezza (7.41) si ottiene prendendo, nella matrice  $S$ , l'interazione coulombiana al primo ordine e l'interazione con i fotoni trasversi al secondo ordine. Il vantaggio decisivo della formulazione relativistica è di calcolare *tutto insieme*, con il solo grafico della Fig. 7.2.



## Capitolo 8

### Campi Fermionici

#### 8.1 L'oscillatore armonico e l'oscillatore di Fermi

In questo capitolo passiamo dalla trattazione di campi scalari a quella di campi di Dirac che descrivono particelle di spin  $1/2$ . Il problema che si pone è come trattare campi che devono obbedire leggi di anticommutazione e al principio di Pauli. Nelle trattazioni elementari della teoria dei campi abbiamo visto che un campo libero che descrive particelle bosoniche non interagenti è equivalente a un insieme di oscillatori armonici, uno per ciascun stato in cui si può trovare una particella. Concentrandoci su un singolo oscillatore possiamo definire gli operatori di creazione e distruzione,  $a^\dagger$ ,  $a$  che obbediscono a regole di commutazione

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (8.1)$$

Se indichiamo con  $|n\rangle$  lo stato in cui l'oscillatore contiene  $n$  particelle, avremo

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (\text{bosoni}). \quad (8.2)$$

Anche un campo spinoriale può essere sviluppato in "oscillatori", ma oscillatori di tipo diverso, gli *oscillatori di Fermi*. Ciascuno di questi oscillatori può contenere al massimo una particella, e l'azione dei corrispondenti operatori di creazione e distruzione su stati a 0,1 particelle è

$$a^\dagger|0\rangle = |1\rangle, \quad a^\dagger|1\rangle = 0, \quad a|1\rangle = |0\rangle, \quad a|0\rangle = 0 \quad (\text{fermioni}). \quad (8.3)$$

Questo dà luogo a regole di anticommutazione,

$$\{a, a^\dagger\} = 1. \quad (8.4)$$

In ambedue i casi l'hamiltoniano diviene<sup>1</sup>

$$H = \hbar\omega a^\dagger a, \quad (8.5)$$

con  $\omega$  l'energia della particella. Possiamo ricavare formalmente questo hamiltoniano da un lagrangiano

$$L = i\hbar a^\dagger \dot{a} - \hbar\omega a^\dagger a, \quad (8.6)$$

---

<sup>1</sup>Come diverrà chiaro fra poco conviene in questa fase esplicitare la dipendenza dalla costante di Planck.

dal quale si ottiene l'hamiltoniano corretto

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = i\hbar a^\dagger, \quad H = \pi \dot{a} - L = \hbar\omega a^\dagger a. \quad (8.7)$$

Notiamo che  $\partial L / \partial \dot{a}^\dagger = 0$ , dato che  $L$  non dipende da  $\dot{a}^\dagger$ . In realtà la relazione tra  $a$  ed  $a^\dagger$  è simmetrica, dato che con una integrazione per parti possiamo esprimere l'azione in due modi equivalenti in cui i ruoli di  $a$ , e  $a^\dagger$  sono scambiati,

$$S = \hbar \int dt (i a^\dagger \dot{a} - \omega a^\dagger a) = \hbar \int dt (-i \dot{a}^\dagger a - \omega a^\dagger a).$$

Se applichiamo le regole di commutazione canoniche otteniamo il risultato "bosonico",

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{i\hbar} [a, \pi] = \frac{1}{i\hbar} i\hbar = 1. \quad (8.8)$$

Sappiamo già come derivare tutte le proprietà dell'oscillatore armonico bosonico mediante la somma sui cammini della variabile  $q(t)$ . Come vedremo fra poco, possiamo direttamente usare cammini nelle variabili  $a(t)$  e  $a^\dagger(t)$ . Come modificare la somma sui cammini per ottenere risultati fermionici? L'idea giusta nasce considerando, invece di  $a, a^\dagger$ , le variabili  $\tilde{a} = \sqrt{\hbar}a$ ,  $\tilde{a}^\dagger = \sqrt{\hbar}a^\dagger$ , che non dipendono dalla costante di Planck, e sono quindi variabili classiche:

$$\tilde{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left( x + \frac{ip}{m\omega} \right), \quad \tilde{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left( x - \frac{ip}{m\omega} \right). \quad (8.9)$$

In termini di queste il lagrangiano diviene

$$L = i \tilde{a}^\dagger \dot{\tilde{a}} - \omega \tilde{a}^\dagger \tilde{a}, \quad (8.10)$$

e le regole di commutazione

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = \hbar. \quad (8.11)$$

Nella somma sui cammini  $\tilde{a}(t), \tilde{a}^\dagger(t)$  sono trattate come funzioni a valore numerico, cioè come grandezze che commutano. Quindi è come se si prendesse un limite classico,  $\hbar \rightarrow 0$ , nel quale  $\tilde{a}(t), \tilde{a}^\dagger(t)$  divengono grandezze commutanti,

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 0. \quad (8.12)$$

Nel caso fermionico si parte da regole di anticommutazione che nel limite  $\hbar \rightarrow 0$  divengono semplicemente

$$\{\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\} = 0. \quad (8.13)$$

Quindi, i cammini nel caso fermionico devono essere descritti da una funzione il cui valore non è un normale numero, ma una quantità che anticommuta, una variabile di Grassman.

Nel seguito torniamo ad usare unità di misura in cui  $\hbar = 1$ .

### 8.1.1 Variabili anticommutanti

Le regole di calcolo con grandezze anticommutanti sono molto semplici, e la pagina che segue contiene un intero manuale di calcolo differenziale e integrale con variabili di Grassmann. Supponiamo di avere  $n$  variabili di questo tipo,  $a_1 \cdots a_n$ , tali quindi che

$$\{a_h, a_k\} = 0, \quad (8.14)$$

il che in particolare implica che  $(a_i)^2 = 0$ . Valgono allora le seguenti regole:

**Coefficienti numerici, combinazioni lineari** Una variabile anticommutante può essere moltiplicata per un numero ordinario  $c$ , con cui commuta,  $ca = ac$ . Si possono fare combinazioni lineari:  $c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots$ .

**Funzioni** Dato che  $a_k^2 = 0$ , la più generale funzione è un polinomio di ordine  $n$

$$F = C_0 + \sum_k C_1(k) a_k + \sum_{h>k} C_2(h, k) a_h a_k \cdots + C_n a_1 a_2 \cdots a_n, \quad (8.15)$$

dove le  $C$  sono coefficienti numerici.

**Differenziali e derivate** Il differenziale  $da$  di una grandezza anticommutante  $a$  è esso stesso anticommutante: dato che  $a_1 a_2 = -a_2 a_1$ , deve essere  $a_1 da_2 = -da_2 a_1$ . La derivata rispetto a una variabile anticommutante  $d/da_k$  è definita dalle seguenti regole:

- $\frac{d}{da_k} 1 = 0$ ;  $\frac{d}{da_k} a_h = \delta_{hk}$ ;
- L'operazione  $d/da_k$  anticommuta con altre variabili grassmaniane. Questo si può capire considerando un prodotto di grandezze anticommutanti  $cd \cdots a \cdots$ :  $d/da$  "sfila"  $a$  dal prodotto e per far questo deve portare  $a$  in prima posizione. Quindi  $d/da (b \cdot a) = d/da (-a \cdot b) = -b$  ovvero  $d/da b \cdot a = -b \cdot d/da a$ , e così via;
- Le derivate anticommutano tra loro, ad esempio  $d/da d/db (ba) = 1$  mentre  $d/db d/da (ba) = d/db (-b) = -1$ .

**Integrali** Gli integrali di variabili anticommutanti è definito con le seguenti regole:

$$\int da = 0, \quad \int da a = 1. \quad (8.16)$$

Ne segue che per variabili anticommutanti l'integrale e la derivata sono la stessa operazione.

$$\int da F = \frac{d}{da} F. \quad (8.17)$$

Questa definizione è motivata nel modo seguente: gli integrali  $\int da$  e  $\int da a$  devono essere definiti come costanti che non dipendono da nessuna grandezza anticommutante, quindi come numeri ordinari. Allo stesso tempo, dato che  $da$  è anticommutante  $\int da$  dovrebbe essere anticommutante, quindi l'unica possibilità è che sia  $= 0$ , l'unico numero ordinario che sia anche anticommutante,  $0x = -x0$ . Il secondo integrale,  $\int da a$ , può essere un numero qualsiasi: porre  $\int da a = 1$  equivale a definire la normalizzazione delle  $a$ . Se ad esempio avessimo  $\int da a = X$ , potremmo definire una nuova variabile,  $a = a' X^{1/2}$  tale che  $\int da' a' = 1$ .

Notiamo che se  $P_i$  indica prodotti di un numero pari di grandezze anticommutanti e  $A_k$  prodotti di un numero dispari, si ha

$$P_i P_k = P_k P_i, \quad P_i A_k = A_k P_i, \quad A_i A_k = -A_k A_i. \quad (8.18)$$

Ad esempio, se  $a, b, c, d$  sono anticommutanti,  $(ab)(cd) = (cd)(ab)$ ,  $(ab)c = c(ab)$ , mentre  $(abc)d = -d(abc)$ . Quindi il prodotto di un numero pari di grandezze anticommutanti si comporta come una grandezza commutante.

### 8.1.2 Somma sui cammini per i due oscillatori

In questa sezione sviluppiamo le regole di calcolo della somma sui cammini di grandezze anticommutanti applicandole a un caso concreto: l'oscillatore di Fermi definito nella sezione 8.1. Come vedremo la somma sui cammini porta a risultati che sono in pieno accordo con quelli ottenuti in modo tradizionale.

Nella sezione 3.2 abbiamo calcolato il funzionale generatore dell'oscillatore armonico nel linguaggio delle  $q(t)$ . Vogliamo adesso rifarlo nel linguaggio delle  $a(t)$ ,  $a^\dagger(t)$ , stando attenti a fare operazioni che siano egualmente valide sia nel caso che queste variabili commutino (caso bosonico) che anticommutino (caso fermionico) e notando via via le differenze tra i due casi. Definiamo quindi  $Z(J, J^\dagger)$  come

$$Z(J, J^\dagger) = \int \mathcal{D}a(t) \mathcal{D}a^\dagger(t) \exp \left[ i \int dt \left( a^\dagger(t) D a(t) - J^\dagger(t) a(t) - a^\dagger(t) J(t) \right) \right], \quad (8.19)$$

dove (si veda l'eq.(8.10)) l'operatore differenziale<sup>2</sup>  $D$  è dato da

$$D = i \frac{d}{dt} - \omega. \quad (8.20)$$

Dato che l'azione deve in ogni caso essere una grandezza commutante, nel caso fermionico sia  $J$  che  $J^\dagger$  devono essere anticommutanti. Come abbiamo fatto nella sezione 3.2 introduciamo una funzione  $S(t)$  tale che

$$D S(t) = \delta(t) \quad \rightarrow \quad \dot{S}(t) = -i\omega S(t) - i\delta(t). \quad (8.21)$$

Possiamo riscrivere il termine in  $(a^\dagger J)$  della (8.19) come

$$\int dt a^\dagger(t) J(t) = \int dt a^\dagger(t) D \left( \int dt' S(t-t') J(t') \right),$$

mentre il termine in  $(J^\dagger a)$  può essere scritto come

$$\int dt J^\dagger(t) a(t) = \int dt \left( \int dt' J^\dagger(t') S(t'-t) \right) D a(t),$$

come si verifica con una integrazione per parti

$$\int dt \left( \int dt' J^\dagger(t') S(t'-t) \right) \left( i \frac{d}{dt} - \omega \right) a(t) = \int dt \left( -i \frac{d}{dt} - \omega \right) \int dt' J^\dagger(t') S(t'-t) a(t), \quad (8.22)$$

<sup>2</sup>Questo non è altro che l'operatore di Dirac ( $i\gamma^\mu \partial_\mu - m$ ), ma in uno spazio ad una sola dimensione.

e notando che

$$\left(-i\frac{d}{dt} - \omega\right)S(t' - t) = \left(i\frac{d}{d(t' - t)} - \omega\right)S(t' - t) = \delta(t' - t).$$

Possiamo allora riscrivere il funzionale generatore come

$$Z(J, J^\dagger) = \exp \left[ -i \int dt' dt J^\dagger(t') S(t' - t) J(t) \right] \int \mathcal{D}a(t) \mathcal{D}a^\dagger(t) \exp \left[ i \int dt \left( a^\dagger(t) - \int dt' J^\dagger(t') S(t' - t) \right) D \left( a(t) - \int dt' S(t - t') J(t') \right) \right].$$

L'integrale funzionale residuo viene eseguito con un cambiamento di variabile

$$a(t) \rightarrow a'(t) = a(t) - \int dt' S(t - t') J(t')$$

e analogamente per  $a^\dagger$ , e si riduce a una costante moltiplicativa che coincide con il valore di  $Z[0]$  e può essere omessa. Questi cambiamenti di variabile sono però legittimi solo se (si veda la Sezione 3.2)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t(1 - i\chi)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} S(t(1 - i\chi)) = 0. \quad (8.23)$$

La soluzione generale della (8.21) è  $S(t) = A e^{-i\omega t} - i\theta(t) e^{-i\omega t}$ , ma la (8.23) impone  $A = 0$ , quindi

$$S(t) = -i\theta(t) e^{-i\omega t}, \quad (8.24)$$

e il funzionale generatore diviene

$$Z(J, J^\dagger) = \exp \left[ -i \int dt' dt J^\dagger(t') S(t' - t) J(t) \right]. \quad (8.25)$$

Dato che siamo stati attenti a non cambiare l'ordinamento delle grandezze che nel caso fermionico anticommutano tra loro, quanto fatto sinora vale sia per il caso bosonico che per quello fermionico. Delle differenze appaiono nel calcolo delle funzioni di Green, dove bisogna tenere conto del carattere anticommuntante degli operatori. Ad esempio, se  $a$  è una grandezza anticommuntante, la (2.24) va ridefinita come

$$T(a(t_1) a(t_2)) = \begin{cases} a(t_1) a(t_2) & \text{se } t_1 \geq t_2 \\ -a(t_2) a(t_1) & \text{se } t_2 \geq t_1 \end{cases} \quad \text{Fermioni,} \quad (8.26)$$

e quindi anche

$$T(a(t_1) a(t_2)) = -T(a(t_2) a(t_1)), \quad (8.27)$$

e queste proprietà si estendono al prodotto ordinato nel tempo di più operatori e quindi anche alle funzioni di Green.

Le regole per l'uso del funzionale generatore sono anche leggermente diverse nei due casi. Infatti, mentre la regola di corrispondenza

$$a(t) \rightarrow i \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t)} \quad \text{Bosoni o Fermioni,} \quad (8.28)$$

è la stessa nei due casi, si ha

$$a^\dagger(t) \rightarrow \begin{cases} i \frac{\delta}{\delta J(t)} & \text{Bosoni,} \\ -i \frac{\delta}{\delta J(t)} & \text{Fermioni,} \end{cases} \quad (8.29)$$

come si vede dalla (8.19) notando che nel caso fermionico  $\frac{\delta}{\delta J(t)}$  anticommuta con  $a^\dagger(t)$ . Calcoliamo alcune funzioni di Green: Per la funzione a due punti otteniamo, sia nel caso fermionico che nel caso bosonico (lasciamo la derivazione ai lettori),

$$\langle 0|T(a(t)a^\dagger(\tau))|0\rangle = \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t)} \frac{\delta}{\delta J(\tau)} Z[J, J^\dagger] \Big|_{J=J^\dagger=0} = iS(t-\tau) = \theta(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}. \quad (8.30)$$

Consideriamo anzitutto il caso  $t > \tau$ , per cui otteniamo, assegnando una energia  $E_0 = 0$  allo stato  $|0\rangle$ ,

$$\langle 0|a(t)a^\dagger(\tau)|0\rangle \equiv \langle 0|a e^{-iH(t-\tau)} a^\dagger|0\rangle = e^{-i\omega(t-\tau)}.$$

Questo risultato ci dice che<sup>3</sup> esiste uno stato  $|1\rangle$  con energia  $E_1 = \omega$ , e che  $\langle 1|a^\dagger|0\rangle^2 = 1$ . Quindi possiamo definire la fase dello stato  $|1\rangle$  in modo che  $a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$ . Al contrario, se  $\tau > t$  otteniamo

$$\langle 0|a^\dagger(\tau)a(t)|0\rangle = 0,$$

e introducendo un insieme completo di stati  $|A\rangle$  con energia  $E_A$ ,

$$\sum_A |\langle A|a|0\rangle|^2 e^{iE_A(\tau-t)} = 0,$$

da cui si ottiene (considerando il caso  $\tau = t$ )  $a|0\rangle = 0$ .

Per la funzione a quattro punti c'è una differenza tra il caso bosonico e quello fermionico. Nei passaggi che seguono, dove appare il simbolo  $\pm$  si intende che il segno  $+$  si applica al caso bosonico, il  $-$  al caso fermionico, e dove non appare il risultato è lo stesso nei due casi.

$$\begin{aligned} & \langle 0|T(a(t_1)a(t_2)a^\dagger(\tau_1)a^\dagger(\tau_2))|0\rangle \\ &= \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_1)} \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_2)} \frac{\delta}{\delta J(\tau_1)} \frac{\delta}{\delta J(\tau_2)} \frac{1}{2} \left[ -i \int dt' dt J^\dagger(t') S(t'-t) J(t) \right]^2 \\ &= -\frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_1)} \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_2)} \left[ \int dt' J^\dagger(t') S(t'-\tau_1) \right] \left[ \int dt'' J^\dagger(t'') S(t''-\tau_2) \right] \\ &= -[S(t_2-\tau_1) S(t_1-\tau_2) \pm S(t_1-\tau_1) S(t_2-\tau_2)] \\ &= e^{i\omega(t_1+t_2-\tau_1-\tau_2)} [\theta(t_2-\tau_1)\theta(t_1-\tau_2) \pm \theta(t_1-\tau_1)\theta(t_2-\tau_2)]. \end{aligned}$$

Il segno  $-$  che appare nel caso fermionico riflette il principio di Pauli. Ad esempio, nel caso  $t_1 > t_2 > \tau_1 > \tau_2$  si ottiene

$$\langle 0|(a(t_1)a(t_2)a^\dagger(\tau_1)a^\dagger(\tau_2))|0\rangle = \begin{cases} 2e^{-i\omega(t_1+t_2-\tau_1-\tau_2)} & \text{Bosone,} \\ 0 & \text{Fermione.} \end{cases} \quad (8.31)$$

<sup>3</sup>Vedi la discussione alla fine della Sezione 3.2.

Se in questa espressione passiamo al limite  $t_1 \rightarrow t_2$  e  $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ , nel caso bosonico otteniamo

$$\langle 0|[a(t_2)]^2 [a^\dagger(\tau_2)]^2|0\rangle = 2e^{-i2\omega(t_2-\tau_2)}, \quad (8.32)$$

e da questo impariamo che esiste uno stato  $|2\rangle$  con energia  $E_2 = 2\omega$ , e che  $[a^\dagger]^2|0\rangle = \sqrt{2}|2\rangle$ . Dato che  $a^\dagger|0\rangle = |1\rangle$ , deve essere  $a^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle$ . Analogamente deduciamo che  $a^2|2\rangle = \sqrt{2}|0\rangle$ . Nel caso fermionico impariamo invece che, come segue dal principio di Pauli,  $[a^\dagger]^2|0\rangle = 0$  — non esiste un secondo stato eccitato dell'oscillatore di Fermi.

### 8.1.3 Integrali gaussiani per variabili anticommutanti

Per usi successivi, riportiamo qui il calcolo degli integrali gaussiani su variabili anticommutanti, da confrontare con il risultato per gli analoghi integrali su variabili commutanti.

L'integrale piú semplice è

$$A(\lambda) = \int da^\dagger da e^{-\lambda a^\dagger a}, \quad (8.33)$$

e si effettua utilizzando le regole date sopra:

$$A(\lambda) = \int da^\dagger da (1 - \lambda a^\dagger a) = \lambda \int da^\dagger a^\dagger da a = \lambda. \quad (8.34)$$

Il risultato (8.34) si generalizza immediatamente al caso di N coppie di variabili:

$$A(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \int \left( \prod_i da_i^\dagger da_i \right) e^{\sum_k \lambda_k a_k^\dagger a_k} = \prod_i \lambda_i, \quad (8.35)$$

e quindi al caso di una forma bilineare:

$$\begin{aligned} A(\Lambda) &= \int \left( \prod_i da_i^\dagger da_i \right) e^{(a^\dagger \Lambda a)}, \\ (a^\dagger \Lambda a) &= \sum_{ij} a_i^\dagger \Lambda_{ij} a_j. \end{aligned} \quad (8.36)$$

In questo caso, diagonalizziamo la matrice  $\Lambda$  con una trasformazione unitaria:

$$\tilde{a}_i = \sum_k U_{ik} a_k; \quad U^\dagger U = 1, \quad (8.37)$$

in modo tale che:

$$(a^\dagger \Lambda a) = \sum_k \lambda_k \tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k, \quad (8.38)$$

dove le  $\lambda_k$  sono gli autovalori di  $\Lambda$ . Da notare che lo jacobiano della trasformazione tra le variabili  $a^\dagger, a$  e le  $\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}$  vale uno:

$$\begin{aligned} J &= \det \left[ \frac{\partial(\tilde{a}^\dagger, \tilde{a})}{\partial(a^\dagger, a)} \right] = \\ &= \det \left[ \frac{\partial(\tilde{a}^\dagger)}{\partial(a^\dagger)} \right] \det \left[ \frac{\partial(\tilde{a})}{\partial(a)} \right] = |\det U|^2 = 1, \end{aligned} \quad (8.39)$$

da cui segue

$$A(\Lambda) = \int \left( \prod_i d\tilde{a}_i^\dagger d\tilde{a}_i \right) e^{\sum_k \lambda_k \tilde{a}_k^\dagger \tilde{a}_k} = \det \Lambda . \quad (8.40)$$

Questo risultato si può confrontare con quello relativo all' integrale gaussiano su variabili commutanti:

$$C(\Lambda) = \int \left( \prod_i dx_i^\dagger dx_i \right) e^{-(x^\dagger \Lambda x)} . \quad (8.41)$$

Nella base in cui  $\Lambda$  è diagonale, poniamo:

$$x_i = \frac{u_i + i v_i}{\sqrt{2}}; \quad x_i^\dagger = \frac{u_i - i v_i}{i\sqrt{2}} , \quad (8.42)$$

da cui otteniamo:

$$C(\Lambda) = \int \prod \left( du_i dv_i e^{-\frac{\lambda_i(u_i^2 + v_i^2)}{2}} \right) = \prod_i \left( \frac{2\pi}{\lambda_i} \right) \propto [\det \Lambda]^{-1} . \quad (8.43)$$

Il passaggio da variabili anticommutanti a commutanti comporta il cambiamento:  $\det \Lambda \rightarrow [\det \Lambda]^{-1}$ , a meno di una inessenziale costante moltiplicativa.

Con l' aiuto delle formule precedenti, possiamo considerare il caso di integrali funzionali gaussiani della forma:

$$\begin{aligned} A(D) &= \int d[\psi^\dagger(x)] d[\psi(x)] e^{-(\psi^\dagger D \psi)} , \\ (\psi^\dagger D \psi) &= \int dx dy \psi^\dagger(x) D(x, y) \psi(y) . \end{aligned} \quad (8.44)$$

Determinato il sistema delle autofunzioni dell' operatore  $D$ :

$$\int D(x, y) \psi_i(y) = \lambda_i \psi_i(x) , \quad (8.45)$$

possiamo sviluppare le funzioni anticommutanti nella base delle autofunzioni:

$$\psi(x) = \sum_i a_i \psi_i(x) , \quad (8.46)$$

dove le  $a_i$  sono variabili anticommutanti. Nella nuova base, scriviamo l' integrale funzionale come:

$$A(D) = \int \prod_i da_i^\dagger da_i e^{-(a^\dagger D a)} , \quad D_{ij} = \int dx dy \psi_i^\dagger(x) D(x, y) \psi_j(y) , \quad (8.47)$$

da cui, come prima:

$$A(D) = \det D , \quad (8.48)$$

con il determinante di  $D$  dato dalla (8.40). Il caso di variabili commutanti si tratta in modo analogo.

## 8.2 Quantizzazione del campo di Dirac

In questa sezione calcoliamo esplicitamente il funzionale generatore per un campo di Dirac libero e la funzione a due punti. Daremo per nota la descrizione standard di questo sistema, basata sulle regole di quantizzazione canonica, e le proprietà delle matrici  $\gamma$  e delle soluzioni ad onda piana della equazione di Dirac. Adotteremo le notazioni e convenzioni del Mandl e Shaw [3] in particolare la Appendice A di quel testo.

Ricordiamo che esistono due tipi di quadrispinori: il tipo “normale”, rappresentato dal campo di Dirac  $\psi(x)$  e il tipo “aggiunto” rappresentato dal campo  $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger \gamma^0$ . In genere ometteremo gli indici spinoriali intendendo in particolare che due indici contigui, uno “normale” ed uno “aggiunto” siano sommati. Nelle matrici di Dirac il primo indice va considerato “normale” e il secondo “aggiunto”.

La equazione di Dirac per una particella di massa  $m$  sarà scritta come

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (8.49)$$

e può essere derivata da una densità di lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x). \quad (8.50)$$

La (8.50) sarà il nostro punto di partenza. In analogia a quanto abbiamo fatto per l'oscillatore, definiamo il funzionale generatore introducendo due funzioni ausiliarie  $J_\rho(x)$ ,  $\bar{J}_\rho(x)$ .

$$Z(J, \bar{J}) = \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \exp \left[ i \int d^4x (\bar{\psi}(x) D \psi(x) - \bar{J}(x) \psi(x) - \bar{\psi}(x) J(x)) \right], \quad (8.51)$$

dove  $D$  è l'operatore di Dirac

$$D = i\gamma^\mu \partial_\mu - m.$$

e considereremo  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $J$ ,  $\bar{J}$  come grandezze *anticommutanti*. Per eseguire l'integrale seguiamo i passi della sezione precedente. Introduciamo quindi una funzione  $S_F(x)$ , il propagatore, tale che

$$D S_F(x) = \delta^4(x), \quad (8.52)$$

di modo che possiamo scrivere:

$$Z(J, \bar{J}) = \exp \left[ -i \int d^4x' d^4x \bar{J}(x') S_F(x' - x) J(x) \right] \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \exp \left[ i \int d^4x \left( \bar{\psi}(x) - \int d^4x' \bar{J}(x') S_F(x' - x) \right) D \left( \psi(x) - \int d^4x' S_F(x - x') J(x') \right) \right].$$

Per dimostrare questa trasformazione cominciamo con

$$\int d^4x \bar{\psi}(x) J(x) = \int d^4x \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m) \int d^4x' S_F(x - x') J(x'),$$

che si verifica direttamente dalla (8.52). Inoltre

$$\begin{aligned} & \int d^4 x' d^4 x \bar{J}(x') S_F(x' - x) (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m) \psi(x) \\ &= \int d^4 x' d^4 x \bar{J}(x') S_F(x' - x) (-i\gamma^\mu \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x_\mu}} - m) \psi(x) \\ &= \int d^4 x' d^4 x \bar{J}(x') \delta^4(x' - x) \psi(x) = \int d^4 x \bar{J}(x) \psi(x), \end{aligned}$$

dove nel primo passaggio abbiamo eseguito una integrazione per parti, e nel secondo abbiamo utilizzato la (8.56) che dimostreremo fra poco. La freccia indica che la derivata va eseguita sulla funzione alla sinistra.  $\overleftarrow{\partial}$  L'integrale funzionale si calcola con un cambiamento di variabili

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = \psi(x) - \int d^4 x' S_F(x - x') J(x'), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) - \int d^4 x' \bar{J}(x') S_F(x' - x), \end{aligned}$$

e risulta in una costante moltiplicativa (il valore di  $Z[0]$ ) che può essere omessa, e si ottiene semplicemente

$$Z(J, \bar{J}) = \exp \left[ -i \int d^4 x' d^4 x \bar{J}(x') S_F(x' - x) J(x) \right]. \quad (8.53)$$

Come visto in precedenza, questa procedura è legittima solo se

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} S_F((t(1 - i\chi), \vec{x})) = 0. \quad (8.54)$$

Una soluzione della (8.52) con le qualità desiderate si ottiene ponendo

$$S_F(x) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ipx} \frac{\not{p} + m}{E^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (8.55)$$

Infatti, sostituendo nella (8.52) si ottiene<sup>4</sup>

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta_F(x) = -(\square + m^2) \Delta_F(x) = \delta^4(x).$$

Dalla espressione (8.55) segue una relazione che abbiamo usato in precedenza,

$$S_F(y - x) (i\gamma^\mu \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} + m) = -\delta^4(x - y). \quad (8.56)$$

<sup>4</sup>SI veda la Sezione 3.3. Ricordiamo che  $(\gamma^\mu \partial_\mu)^2 = \partial^\mu \partial_\mu = \square$ . Si verifica facilmente che questa è l'unica soluzione accettabile, dato che l'equazione omogenea che corrisponde alla (8.52) non è altro che l'equazione di Dirac, le cui soluzioni sono sovrapposizioni di onde piane che falliscono la condizione (8.54), per  $t \rightarrow -\infty$  se del tipo a frequenza positiva  $e^{-i\omega t}$ , e per  $t \rightarrow \infty$  per le frequenze negative,  $e^{i\omega t}$ .

Sostituendo infatti nel primo membro la (8.55) otteniamo  $(\partial/\partial x = -\partial/\partial y)$

$$\begin{aligned} S_F(y-x)(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_{x^\mu} + m) &= (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} + m)(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m)\Delta_F(y-x) \\ &= (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} + m)(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} + m)\Delta_F(y-x) = -\delta^4(x-y). \end{aligned} \quad (8.57)$$

Le regole di corrispondenza per passare dal funzionale generatore alle funzioni di Green sono dedotte dalla (8.51),

$$\psi_\alpha(x) \rightarrow i \frac{\delta}{\delta \bar{J}_\alpha(x)}, \quad \bar{\psi}_\beta(x) \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta J_\beta(x)}, \quad (8.58)$$

e la funzione di Green a due punti diviene

$$\langle 0|T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y))\rangle = i(S_F)_{\alpha\beta}(x-y). \quad (8.59)$$

Come abbiamo visto nel caso dell'oscillatore, il segno “-” nella seconda delle regole di corrispondenza si compensa con un secondo segno “-” che proviene dal carattere anticommutante delle derivate funzionali. Avremmo quindi ottenuto esattamente lo stesso risultato se avessimo trattato il campo di Dirac come grandezza commutante.

Notiamo anche che le funzioni di Green con due  $\psi$  o due  $\bar{\psi}$  sono eguali a zero

$$\langle 0|T(\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y))\rangle = \langle 0|T(\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y))\rangle = 0. \quad (8.60)$$

### 8.2.1 Propagatore del fermione

Per le applicazioni successive, registriamo le formule relative al propagatore del fermione.

$$\begin{aligned} i(S_F)_{\alpha\beta}(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} (i\tilde{S}_F)_{\alpha\beta}(p) \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{i(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (8.61)$$

Possiamo semplificare l'espressione della trasformata di Fourier di  $S_F$  usando la relazione:

$$(\not{p} + m)(\not{p} + m) = p^2 + m^2, \quad (8.62)$$

per scrivere:

$$i(S_F)_{\alpha\beta}(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \left( \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \right)_{\alpha\beta}. \quad (8.63)$$

## 8.2.2 Il teorema di spin e statistica

Il teorema di spin e statistica, secondo cui particelle di spin intero sono descritte da campi commutanti, mentre particelle di spin semintero da campi anticommutanti, è uno dei pochi risultati esatti della teoria dei campi. In questa sezione verifichiamo che la teoria quantistica di un campo di Dirac libero necessariamente richiede che  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  siano grandezze anticommutanti, e che al contrario nella teoria del campo scalare libero la  $\phi$  è necessariamente una grandezza commutante. Chiaramente questa verifica non è una dimostrazione generale del teorema, che si applica anche al caso di campi in interazione con spin arbitrario.

Nel caso della teoria di Dirac scriviamo in forma più esplicita il secondo membro della (8.59) utilizzando la (3.72).

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T (\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)) | 0 \rangle \\ &= \frac{(i\partial + m)_{\alpha\beta}}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{2\omega_p} \left( e^{-i\omega_p(t_x-t_y)} \theta(t) + e^{i\omega_p(t_x-t_y)} \theta(-t) \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{e^{-ip(x-y)} (p+m)_{\alpha\beta}}{2\omega_p} & (t_x > t_y) \\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{e^{ip(x-y)} (-p+m)_{\alpha\beta}}{2\omega_p} & (t_x < t_y) \end{cases} . \end{aligned}$$

Nel termine con frequenze negative  $e^{i\omega_p(t_x-t_y)}$  abbiamo cambiato segno alla variabile di integrazione  $\vec{p}$ .

Nei passi che seguono useremo le proprietà degli operatori di proiezione (Si veda [3], Appendice A),

$$\frac{(p+m)_{\alpha\beta}}{2m} = \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{u}_{r\beta}(\vec{p}) , \quad \frac{(-p+m)_{\alpha\beta}}{2m} = - \sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{v}_{r\beta}(\vec{p}) , \quad (8.64)$$

e le proprietà di ortogonalità

$$\left( u_r^\dagger(\vec{q}) u_s(\vec{q}) \right) = \left( v_r^\dagger(\vec{q}) v_s(\vec{q}) \right) = \frac{\omega_q}{m} \delta_{rs} , \quad \left( u_r^\dagger(\vec{q}) v_s(-\vec{q}) \right) = 0 . \quad (8.65)$$

Quindi, per  $t_x > t_y$  otteniamo

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{-ip(x-y)} \frac{m}{\omega_p} \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{u}_{r\beta}(\vec{p}) , \quad (8.66)$$

e, per  $t_x < t_y$ ,

$$-\langle 0 | \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{ip(x-y)} \frac{m}{\omega_p} \sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}(\vec{p}) \bar{v}_{r\beta}(\vec{p}) , \quad (8.67)$$

dove il segno “-” a secondo membro deriva dall’operatore di proiezione per energie negative, mentre quello a primo membro deriva dalla anticommutatività dei campi.

Moltiplicando primo e secondo membro per  $\gamma^0$ , trasformiamo  $\bar{\psi} \rightarrow \psi^\dagger$ ,  $\bar{u} \rightarrow u^\dagger$  e  $\bar{v} \rightarrow v^\dagger$ , e le due equazioni divengono

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x) \psi_\beta^\dagger(y) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{-ip(x-y)} \frac{m}{\omega_p} \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(\vec{p}) u_{r\beta}^\dagger(\vec{p}), \quad (8.68)$$

$$\langle 0 | \psi_\beta^\dagger(y) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{-ip(y-x)} \frac{m}{\omega_p} \sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}(\vec{p}) v_{r\beta}^\dagger(\vec{p}). \quad (8.69)$$

È facile vedere che la anticommutatività è indispensabile. Consideriamo infatti la equazione (8.69), passando al limite  $y \rightarrow x$ , e con  $\alpha = \beta$ . Riesprimiamo anche il primo membro introducendo un sistema completo di stati  $|X\rangle\langle X|$ ,

$$\langle 0 | \psi_\alpha^\dagger(x) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle = \sum_X |\langle X | \psi_\alpha(x) | 0 \rangle|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{m}{\omega_p} \sum_{r=1}^2 |v_{r\alpha}(\vec{p})|^2.$$

Sia il primo membro che il secondo membro sono grandezze definite positive. Se avessimo considerato  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  come grandezze *commutanti* il secondo membro di questa equazione avrebbe un segno negativo (verrebbe a mancare il segno “-” a primo membro della eq. (8.67) ) e avremmo ottenuto un risultato assurdo. I campi di Dirac devono essere *anticommutanti*.

Alla conclusione opposta si arriva nel caso di un campo scalare. Consideriamo il caso di un campo scalare complesso (vedi sez. 3.4). È facile verificare che sia nel caso commutante che nel caso anticommutante la funzione a due punti sarebbe data dalla equazione (3.72); nelle manipolazioni che hanno portato a quel risultato partendo dalla (3.24) abbiamo infatti sempre rispettato l'ordinamento delle varie grandezze. Se nella (3.72) consideriamo il caso  $t_x < t_y$ , otteniamo, nel caso di grandezze commutanti,

$$\langle 0 | \phi^\dagger(y) \phi(x) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{e^{-ip(x-y)}}{2\omega_p},$$

e nel limite  $y \rightarrow x$ ,

$$\langle 0 | \phi^\dagger(x) \phi(x) | 0 \rangle = \sum_X |\langle X | \psi(x) | 0 \rangle|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{1}{2\omega_p},$$

una eguaglianza tra grandezze definite positive. Nel caso *anticommutante* il cambiamento di segno a primo membro avrebbe portato a un risultato assurdo.

### 8.2.3 Stati ad una particella del campo di Dirac

Vogliamo adesso dimostrare che il campo di Dirac descrive due tipi di particelle — particella e antiparticella — ciascuna con due stati di polarizzazione. Per fare questo definiamo i seguenti operatori

ottenuti dalle  $\psi, \bar{\psi}$  con trasformate di Fourier spaziali proiettate sugli spinori  $u, v$ :

$$c_r(\vec{q}; t) = \left( \frac{m}{(2\pi)^3 \omega_q} \right)^{1/2} \sum_{\alpha} \int d^3 x e^{-i\vec{q}\vec{x}} u_{r\alpha}^{\dagger}(\vec{q}) \psi_{\alpha}(\vec{x}, t), \quad (8.70)$$

$$c_r^{\dagger}(\vec{q}; t) = \left( \frac{m}{(2\pi)^3 \omega_q} \right)^{1/2} \sum_{\alpha} \int d^3 y e^{i\vec{q}\vec{y}} \psi_{\beta}^{\dagger}(\vec{y}, t) u_{r\beta}(\vec{q}), \quad (8.71)$$

$$d_r(\vec{q}; t) = \left( \frac{m}{(2\pi)^3 \omega_q} \right)^{1/2} \sum_{\alpha} \int d^3 y e^{-i\vec{q}\vec{y}} \psi_{\beta}^{\dagger}(\vec{y}, t) v_{r\beta}(\vec{q}), \quad (8.72)$$

$$d_r^{\dagger}(\vec{q}; t) = \left( \frac{m}{(2\pi)^3 \omega_q} \right)^{1/2} \sum_{\alpha} \int d^3 x e^{i\vec{q}\vec{x}} v_{r\alpha}^{\dagger}(\vec{q}) \psi_{\alpha}(\vec{x}, t). \quad (8.73)$$

Naturalmente, come adesso dimostreremo, questi sono gli usuali operatori di creazione e distruzione per le particelle e le antiparticelle.

Dalle (8.68), (8.69), e le proprietà di ortogonalità (8.65), otteniamo

$$\langle 0 | c_r(\vec{q}; t_x) \psi_{\beta}^{\dagger}(y) | 0 \rangle = \left( \frac{m}{(2\pi)^3 \omega_q} \right)^{1/2} e^{-i\omega_q t} e^{iqy} u_{r\beta}^{\dagger}(\vec{q}), \quad (8.74)$$

$$\langle 0 | \psi_{\beta}^{\dagger}(y) d_r^{\dagger}(\vec{q}; t_x) | 0 \rangle = \left( \frac{m}{(2\pi)^3 \omega_q} \right)^{1/2} e^{i\omega_q t} e^{-iqy} v_{r\beta}^{\dagger}(\vec{q}), \quad (8.75)$$

come si verifica facilmente sostituendo a  $c, d^{\dagger}$  le espressioni (8.70), (8.73), mentre

$$\langle 0 | \psi_{\beta}^{\dagger}(y) c_r(\vec{q}; t_x) | 0 \rangle = \langle 0 | d_r^{\dagger}(\vec{q}; t_x) \psi_{\beta}^{\dagger}(y) | 0 \rangle = 0. \quad (8.76)$$

Con passaggi analoghi, dalle (8.74), (8.75) otteniamo

$$\begin{aligned} \langle 0 | c_r(\vec{q}; t_x) c_s^{\dagger}(\vec{p}; t_y) | 0 \rangle &= \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) \delta_{rs} e^{-i\omega_q(t_x - t_y)}, \\ \langle 0 | d_s(\vec{p}; t_y) d_r^{\dagger}(\vec{q}; t_x) | 0 \rangle &= \delta^3(\vec{q} - \vec{p}) \delta_{rs} e^{-i\omega_q(t_y - t_x)}. \end{aligned} \quad (8.77)$$

inoltre dalla (8.76),

$$\langle 0 | c_s^{\dagger}(\vec{p}; t_y) c_r(\vec{q}; t_x) | 0 \rangle = \langle 0 | d_r^{\dagger}(\vec{q}; t_x) d_s(\vec{p}; t_y) | 0 \rangle = 0,$$

da cui, con  $s = r, \vec{p} = \vec{q}, t_y = t_x = 0$ , e introducendo un insieme completo di stati,

$$\sum_X |\langle X | c_r(\vec{q}) | 0 \rangle|^2 = \sum_X |\langle X | d_r(\vec{q}) | 0 \rangle|^2 = 0,$$

dove  $c_r(\vec{q}) = c_r(\vec{q}; t = 0), d_r(\vec{q}) = d_r(\vec{q}; t = 0)$ . Quindi

$$c_r(\vec{q}) | 0 \rangle = d_r(\vec{q}) | 0 \rangle = 0. \quad (8.78)$$

Se adesso definiamo

$$|P; \vec{p}, r\rangle = c_r^{\dagger}(\vec{p}) | 0 \rangle, \quad |A; \vec{p}, r\rangle = d_r^{\dagger}(\vec{p}) | 0 \rangle, \quad (8.79)$$

sostituendo nella (8.74) (di cui prendiamo il complesso coniugato) e nella (8.75), in ambedue i casi con  $t_x = 0$ , otteniamo

$$\langle 0 | \psi_\beta(y) | P; \vec{p}, r \rangle = \left( \frac{m}{(2\pi)^3 \omega_p} \right)^{1/2} e^{-ip \cdot y} u_{r\beta}(\vec{p}), \quad (8.80)$$

$$\langle 0 | \psi_\beta^\dagger(y) | A; \vec{p}, r \rangle = \left( \frac{m}{(2\pi)^3 \omega_p} \right)^{1/2} e^{-ip \cdot y} v_{r\beta}^\dagger(\vec{p}). \quad (8.81)$$

Queste ci dicono che  $|P; \vec{p}, r\rangle$ ,  $|A; \vec{p}, r\rangle$  sono stati di impulso  $\vec{p}$  e di energia  $\omega_p = (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}$ , quindi stati a una particella. I due stati di polarizzazione associati alla variabile  $r = 1, 2$  possono essere scelti come stati di elicità definita. La equazione (8.77), con  $t_x = t_y = 0$  fissa la normalizzazione degli stati:

$$\langle P; \vec{p}, r | P; \vec{q}, s \rangle = \langle A; \vec{p}, r | A; \vec{q}, s \rangle = \delta_{rs} \delta(\vec{p} - \vec{q}). \quad (8.82)$$

Gli stati  $|P\rangle$  e  $|A\rangle$  sono necessariamente differenti: infatti la funzione a due punti  $\langle 0 | T(\psi \psi) | 0 \rangle$  si annulla (eq 8.60), e da questo possiamo ottenere, con un lavoro analogo a quello svolto sinora, che

$$\langle 0 | c_s(\vec{p}; t_y) d_r^\dagger(\vec{q}; t_x) | 0 \rangle = \langle P; \vec{p}, s | A; \vec{q}, r \rangle = 0. \quad (8.83)$$

Gli stati di particella  $|P\rangle$  e di antiparticella  $|A\rangle$  sono quindi ortogonali e necessariamente differenti.

In conclusione abbiamo visto che il formalismo funzionale permette di ricostruire lo spettro degli stati a una particella della teoria e il ruolo, già ben noto, degli operatori di creazione e distruzione.



## Capitolo 9

### Elettrodinamica quantistica (QED)

In questo Capitolo applicheremo i metodi sviluppati nei Capitoli precedenti alla costruzione della teoria delle perturbazioni applicata all'elettrodinamica quantistica, la teoria delle interazioni tra elettroni, descritti dal campo di Dirac, e il campo elettromagnetico. Questo sistema è descritto dalla Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\gamma^\mu(\partial_\mu - ie_0 A_\mu) - m_0] \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} .$$

Come sappiamo [1, 2], una caratteristica saliente della (9) è l'invarianza sotto trasformazioni di gauge, che sono trasformazioni simultanee del campo elettromagnetico e del campo dell'elettrone,

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) , \quad (9.1)$$

$$\psi(x) \rightarrow e^{ie_0 f(x)} \psi(x) . \quad (9.2)$$

L'invarianza di gauge stabilisce uno stretto legame tra il campo dell'elettrone e il campo del fotone. Una invarianza sotto trasformazioni del campo dell'elettrone per un fattore di fase che dipende arbitrariamente dal punto — Eq. (9.2) — non sarebbe possibile senza il campo elettromagnetico. L'invarianza di gauge non è quindi una caratteristica secondaria del campo elettromagnetico, ma la sua ragione d'essere. Una conseguenza della invarianza di gauge è l'esistenza di una simmetria sotto una trasformazione del campo dell'elettrone con un fattore di fase costante,

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x) .$$

Questa è una simmetria “globale” (in contrasto con la simmetria “locale” — la simmetria di gauge completa — da cui, tramite il teorema di Nöther, discende la conservazione della corrente,

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0 , \quad (9.3)$$

che è quindi anch'essa una conseguenza dell'invarianza di gauge.

In questo capitolo adotteremo la gauge di Feynman, nella quale la Lagrangiana si scrive

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu(\partial_\mu - ie_0 A_\mu) - m_0) \psi - \frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu . \quad (9.4)$$

Per costruire una teoria delle perturbazioni possiamo dividere la Lagrangiana (9.4) in due parti

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 , \quad (9.5)$$

dove  $\mathcal{L}_0$  descrive campi liberi, ed è quindi totalmente risolvibile, mentre  $\mathcal{L}_1$  è un termine di interazione. Potremmo ad esempio porre

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0)\psi - \frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu\partial^\nu A^\mu,$$

$$\mathcal{L}_1 = e_0(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu.$$

Come vedremo nel seguito  $m_0$  non è la massa fisica dell'elettrone, ma il valore che questa massa assumerebbe in assenza di interazioni, cioè per  $e_0 = 0$ . La vera massa fisica,  $m$ , può essere scritta come

$$m = m_0 + \delta m. \quad (9.6)$$

Il termine  $\delta m$  può essere considerato come l'energia del campo elettrico (e magnetico) prodotto dalla carica (e momento magnetico) dell'elettrone. Dato che useremo la teoria delle perturbazioni per calcolare le ampiezze di transizione associate a processi d'urto, gli elementi della matrice  $S$ , conviene una separazione diversa tra  $\mathcal{L}_0$  e  $\mathcal{L}_1$ , tale che  $\mathcal{L}_0$  descriva elettroni di massa  $m$ , cioè la stessa massa delle particelle descritte dalla Lagrangiana completa  $\mathcal{L}$ , e quindi

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu\partial^\nu A^\mu, \quad (9.7)$$

$$\mathcal{L}_1 = e_0(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu + \delta m(\bar{\psi}\psi). \quad (9.8)$$

Il termine  $\delta m(\bar{\psi}\psi)$  in  $\mathcal{L}_1$  è detto *controtermine* di massa. Mentre la massa dell'elettrone viene modificata dalle interazioni, la massa del fotone, come vedremo nel seguito, è *protetta* dall'invarianza di gauge e resta eguale a zero. Analogamente, il parametro  $e_0$  non è, come vedremo, la carica elettrica misurata dell'elettrone,  $e$ . Quest'ultima si ottiene da  $e_0$  applicando le correzioni che derivano dalla presenza di interazioni. Notiamo che né  $e_0$  né  $m_0$  sono quantità osservabili, ma parametri della Lagrangiana. Il processo di rinormalizzazione, che discuteremo nel Capitolo 10, consiste essenzialmente nell'esprimere tutti i risultati della teoria in termini delle grandezze misurabili  $e$ ,  $m$ .

La costruzione della serie perturbativa per la matrice  $S$  procede attraverso gli stessi passi illustrati nel caso del campo scalare:

1. Costruzione della serie perturbativa per il funzionale generatore delle funzioni di Green in termini di diagrammi di Feynman.
2. Determinazione delle formule di riduzione, che mettono in relazione gli elementi di matrice  $S$  e le funzioni di Green.
3. Costruzione della serie perturbativa per la matrice  $S$ .

## 9.1 Diagrammi di Feynman per il funzionale generatore

Il funzionale generatore per l'elettrodinamica dipende da tre funzioni ausiliarie:  $J(x)$  e  $\bar{J}(x)$  per il campo dell'elettrone,  $J_\mu(x)$  per il fotone. Nel limite  $e \rightarrow 0$ , e cioè in assenza di interazioni<sup>1</sup>, il

<sup>1</sup>In questo caso si ha anche  $\delta m = 0$ .

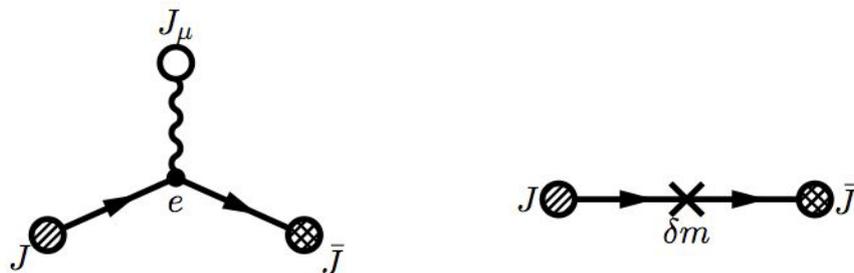


Figura 9.1: I due diagrammi con un singolo vertice

funzionale generatore  $Z$  è semplicemente il prodotto dei funzionali generatori per gli elettroni e i fotoni,

$$\begin{aligned} Z^0[J, \bar{J}, J_\mu] &= Z^0[J, \bar{J}] Z^0[J_\mu], \\ Z^0[J, \bar{J}] &= \exp\left(-i \int d^4x d^4y \bar{J}(x) S_F(x-y) J(y)\right), \\ Z^0[J_\mu] &= \exp\left(\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^\mu(x) \Delta_F(x-y) J_\mu(y)\right), \end{aligned} \quad (9.9)$$

dove  $\Delta_F(x-y)$  è il propagatore di Feynman associato ad un campo scalare reale con massa  $m = 0$ ,  $\Delta_F(x-y; 0)$ . In presenza della Lagrangiana di interazione (9.8) possiamo esprimere il funzionale generatore come (si veda la Sezione 4.1)

$$Z[J, \bar{J}, J_\mu] = e^V Z^0[J, \bar{J}, J_\mu] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^n}{n!} Z^0[J, \bar{J}, J_\mu]. \quad (9.10)$$

L'operatore vertice,  $V$ , è semplicemente  $i \int d^4x \mathcal{L}_1$ , che tradotto con le regole di corrispondenza (8.58), (7.20) diventa

$$i\mathcal{L}_1(x) = ie \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right) \gamma^\mu \left(i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)}\right) \left(i \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)}\right) + i\delta m \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)}\right) \left(i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)}\right). \quad (9.11)$$

Questa espressione può sembrare più complicata di quella corrispondente ottenuta nel caso scalare, ma è in realtà più semplice, almeno per un aspetto. Infatti, ciascuno dei due termini in  $\mathcal{L}_1$  ha una sola derivata di ciascun tipo, e questo semplifica drasticamente l'analisi combinatoria.

Il termine  $V^n$  nello sviluppo di  $Z$  può essere calcolato direttamente, e risulta in una serie di contributi rappresentabili con diagrammi di Feynman. Come nel caso scalare, l'azione di ciascuna derivata può esercitarsi su  $Z^0$ , e in questo caso viene calata una "linea con pallino", cioè un termine  $\Delta_F J_\mu$ , o  $S_F J$ , o  $\bar{J} S_F$ , oppure si esercita su una "linea" prodotta da una derivata precedente, e in questo caso la "linea con pallino" diviene una linea interna. Se il pallino non viene catturato da una derivata successiva, quello che rimane è una linea esterna.

Tutto questo si può esprimere in termini di diagrammi. Ad esempio, al primo ordine in  $V$  abbiamo i due diagrammi della figura 9.1. Diamo qui alcune regole per la loro interpretazione

- I fotoni sono rappresentati da linee ondulate, e un pallino vuoto rappresenta una  $J_\mu$ .
- Un pallino tratteggiato rappresenta una  $J$  e uno grigliato rappresenta una  $\bar{J}$ .
- Le linee fermioniche hanno un verso indicato sul diagramma, e si muovono<sup>2</sup> da una  $J$  a una  $\bar{J}$ . Una linea esterna di tipo  $\bar{J}$  è detta “uscente” dal diagramma, una di tipo  $J$  “entrante”.
- Ci sono due tipi di vertice, uno associato alla interazione elettrone-fotone, l'altro al controtermine di massa, rappresentato con una  $x$ .

Osserviamo più in dettaglio la corrispondenza tra vari elementi del diagramma ed elementi del risultato.

**Linee fermioniche esterne** Una derivata produce una linea esterna,

$$\begin{aligned} \left( i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) Z^0 &= - \int d^4 y \bar{J}(y) S(y-x) Z^0, \\ \left( -i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)} \right) Z^0 &= - \int d^4 x S(y-x) J(x) Z^0. \end{aligned} \quad (9.12)$$

**Linee fermioniche interne** Applicando una seconda derivata il risultato dipende dall'ordine (come ci aspettiamo dato che le derivate *anticommutano*),

$$\left( i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)} \right) \left( -i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) Z^0 = i S(y-x) Z^0, \quad (9.13)$$

ma, scambiando l'ordine,

$$\left( -i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \left( i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)} \right) Z^0 = -i S(y-x) Z^0. \quad (9.14)$$

**Linee esterne fotoniche**

$$\left( i \frac{\delta}{\delta J^\mu(x)} \right) Z^0 = - \int d^4 y \Delta_F(x-y) J_\mu(y) Z^0. \quad (9.15)$$

**Linee fotoniche interne** Tenendo presente che  $(\delta/\delta J^\nu(y))J_\mu(x) = g_{\mu\nu}\delta^4(x-y)$ ,

$$\left( i \frac{\delta}{\delta J^\nu(x)} \right) \left( i \frac{\delta}{\delta J^\mu(y)} \right) Z^0 = -i g^{\mu\nu} \Delta_F(x-y) Z^0. \quad (9.16)$$

Possiamo formulare direttamente le regole per l'interpretazione dei diagrammi nello spazio degli impulsi. Ricordiamo l'espressione di  $\Delta_F$ , (6.5), e  $S_F$ , (8.55), dalle quali segue che per una linea interna fotonica e fermionica abbiamo rispettivamente

$$-i g_{\mu\nu} \Delta_F(x-y) = \frac{-i g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{1}{p^2 + i\epsilon} e^{-ipx} e^{ipy}, \quad (9.17)$$

<sup>2</sup>Questa definizione del verso è ovviamente arbitraria — avremmo potuto scegliere il verso da  $\bar{J}$  a  $J$  — ma è quella comunemente usata.

$$iS_F(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ipx} e^{ipy} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (9.18)$$

Per una linea esterna che finisce in una  $J$  (si veda la seconda delle (9.12)) abbiamo

$$-\int d^4 x S(v-x)J(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ipv} \frac{\not{p} + m}{E^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\epsilon} \int d^4 x e^{ipx} iJ(x), \quad (9.19)$$

dove  $v$  è la coordinata di uno dei vertici del grafico. Analogamente per una linea di tipo  $\bar{J}$

$$-\int d^4 x \bar{J}(x)S(x-v) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{ipv} \int d^4 x e^{-ipx} i\bar{J}(x) \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (9.20)$$

Infine, per una linea esterna fotonica

$$\int d^4 x \Delta_F(v-x)J_\mu(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{1}{p^2 + i\epsilon} e^{-ipv} \int d^4 x e^{ipx} iJ_\mu(x). \quad (9.21)$$

I vari fattori  $e^{\pm ipv}$  confluiscono nei vertici in cui le linee terminano, e vanno integrati, producendo un fattore  $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_i)$  che garantisce la conservazione del quadrimpulso in ogni singolo vertice.

## 9.2 Funzioni a due punti

Possiamo facilmente stabilire una rappresentazione spettrale per le funzioni a due punti dei campi fermionici e del potenziale vettore, del tutto analoghe a quella trovata per il campo scalare.

Consideriamo esplicitamente il campo fermionico e la funzione a due punti

$$i(G_F)_{\alpha\beta}(x) = \langle 0|T[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(0)]|0\rangle, \quad (9.22)$$

e analizziamo il caso  $x^0 > 0$ . Come abbiamo fatto in precedenza, inseriamo un sistema completo di stati nel prodotto dei campi, separando il contributo dello stato ad una particella che, in questo caso, è un elettrone creato dal vuoto da  $\bar{\psi}$ :

$$i(G_F)_{\alpha\beta} = \sum_s \int d^3 p e^{-ipx} \langle 0|\psi_\alpha(0)|\mathbf{p}, s\rangle \langle \mathbf{p}, s|\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle + \langle 0|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(0)|0\rangle_{(2+)}. \quad (9.23)$$

Il contributo della singola particella si calcola facilmente (si veda la Sezione 4.4 per il caso del campo scalare):

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(0)|0\rangle_1 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E(p)} e^{-ipx} Z_2 \sum_s (u_s(p))_\alpha (\bar{u}_s(p))_\beta \\ &= \frac{Z_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2E(p)} e^{-ipx} (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \\ &= (i\not{\partial} + m)_{\alpha\beta} \left[ \frac{Z_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2E(p)} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{-iE(p)t} \right], \quad (\theta(x^0) > 0). \end{aligned} \quad (9.24)$$

Calcolando in modo analogo il  $T$ -prodotto ristretto alla singola particella per  $x^0 < 0$ , troviamo

$$-\langle 0 | \bar{\psi}_\beta(0) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle_1 = - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E(p)} e^{+ipx} \sqrt{Z_2(p^2)} \sum_s (v_s(p))_\alpha (\bar{v}_s(p))_\beta \quad (9.25)$$

$$\begin{aligned} &= - \frac{Z_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2E(p)} e^{+ipx} (\not{p} - m)_{\alpha\beta} \\ &= (i\partial + m)_{\alpha\beta} \frac{Z_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2E(p)} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{+iE(p)t} . \end{aligned} \quad (9.26)$$

Mettendo tutto insieme, arriviamo quindi alla

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0)] | 0 \rangle_1 &= (i\partial + m)_{\alpha\beta} \left\{ \frac{Z_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2E(p)} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \left[ \theta(x^0) e^{-iE(p)t} + \theta(-x^0) e^{+iE(p)t} \right] \right\} \\ &= Z_2 i S_F(x, m)_{\alpha\beta} , \end{aligned} \quad (9.27)$$

dove  $S_F$  è il propagatore del fermione libero con massa pari alla massa fisica dell'elettrone,  $m$ .

Per il termine con stati intermedi con due o più particelle, si procede come nella Sezione 4.4 e si trova

$$\langle 0 | T [\psi(x) \bar{\psi}(0)] | 0 \rangle_{(2+)} = \int dM^2 [i\partial \rho_1(M^2) + M \rho_2(M^2)]_{\alpha\beta} i[\Delta_F(x, M)] . \quad (9.28)$$

Notiamo che in questo caso è necessario introdurre due funzioni spettrali, definite dalla relazione

$$\sum_{n, 2+} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_n - p) \langle 0 | \psi_\alpha(0) | n \rangle \langle n | \bar{\psi}_\beta(0) | 0 \rangle = (2\pi) [\not{p} \rho_1(M^2) + M \rho_2(M^2)]_{\alpha\beta} . \quad (9.29)$$

Le funzioni spettrali, dovendo essere invarianti di Lorentz, sono funzioni di  $p^2$ , che è fissato al valore  $p^2 = M^2$ .

Mettendo tutto insieme, troviamo la rappresentazione spettrale del propagatore dell'elettrone nella forma

$$i(G_F)_{\alpha\beta}(x) = \langle 0 | T [\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(0)] | 0 \rangle = Z_2 i S_F(x)_{\alpha\beta} \quad (9.30)$$

$$+ \int dM^2 [i\partial \rho_1(M^2) + M \rho_2(M^2)]_{\alpha\beta} i[\Delta_F(x, M)] , \quad (9.31)$$

dalla quale segue che la trasformata di Fourier della funzione a due punti ha un polo per  $p = m$  con residuo  $iZ_2$ .

Lasciamo al lettore la derivazione della rappresentazione spettrale del campo del fotone. Il risultato è

$$\begin{aligned} i(G_F)^{\mu\nu}(x) &= \langle 0 | T [A^\mu(x) A^\nu(0)] | 0 \rangle \\ &= -g^{\mu\nu} \left[ Z_3 i \Delta_F(x, M=0) + \int dM^2 \sigma_3(M^2) i \Delta_F(x, M^2) \right] + \dots , \end{aligned} \quad (9.32)$$

dove i puntini indicano termini proporzionali alle derivate parziali, rispetto ad  $x^\mu$  e/o  $x^\nu$  di funzioni di  $x$ . Questi termini possono essere omessi dal propagatore in virtù della conservazione delle correnti, per le quali il propagatore stesso viene moltiplicato nel calcolo delle ampiezze fisiche.

### 9.3 La formula di riduzione

Gli argomenti che hanno portato alla formula di riduzione (5.62) si applicano direttamente all'elettrodinamica, con l'unica complicazione che proviene dallo spin dell'elettrone e del fotone.

Possiamo definire come prima gli stati "in" e "out", che adesso sono stati con un numero specifico di elettroni, positroni e fotoni, con assegnati valori dei momenti, spin e polarizzazione. Questi stati sono creati o distrutti dal vuoto dai campi "in" e "out" che si ottengono nel limite per  $t \rightarrow \pm\infty$  e coinvolgono le costanti di rinormalizzazione dell'elettrone,  $Z_2$ , e del fotone,  $Z_3$ <sup>3</sup>. Ad esempio

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(x) &= \sqrt{Z_2} \psi_{out}(x), \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} A^\mu(x) &= \sqrt{Z_3} A_{out}^\mu(x).\end{aligned}\quad (9.33)$$

I campi "in" e "out" si sviluppano in onde piane, con coefficienti che sono gli operatori di annichilazione e distruzione, che a loro volta si possono ottenere proiettando i campi sul sistema di onde piane e di spinori o vettori di polarizzazione appropriata.

Ad esempio, per elettroni e positroni, scriviamo (omettendo i suffissi "in" e "out" per brevità):

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(x) &= \int d^3 p \sqrt{\frac{m}{E(\mathbf{p})(2\pi)^3}} \left[ a_r(\mathbf{p}) [u_r(\mathbf{p})]_\alpha e^{-ipx} + [c_r(\mathbf{p})]^\dagger [v_r(\mathbf{p})]_\alpha e^{+ipx} \right], \\ \bar{\psi}_\alpha(x) &= \int d^3 p \sqrt{\frac{m}{E(\mathbf{p})(2\pi)^3}} \left[ b_r(\mathbf{p}) [\bar{v}_r(\mathbf{p})]_\alpha e^{-ipx} + [a_r(\mathbf{p})]^\dagger [\bar{u}_r(\mathbf{p})]_\alpha e^{+ipx} \right],\end{aligned}\quad (9.34)$$

e troviamo

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{E(\mathbf{p})(2\pi)^3}{m}} a_r(\mathbf{p}) &= \int d^3 x e^{+ipx} [\bar{u}_r(\mathbf{p})]_\alpha [\gamma^0]_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) \quad (\text{annich.elettrone}), \\ \sqrt{\frac{E(\mathbf{p})(2\pi)^3}{m}} [c_r(\mathbf{p})]^\dagger &= \int d^3 x e^{-ipx} [\bar{v}_r(\mathbf{p})]_\alpha [\gamma^0]_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) \quad (\text{creaz.positrone}), \\ \sqrt{\frac{E(\mathbf{p})(2\pi)^3}{m}} [a_r(\mathbf{p})]^\dagger &= \int d^3 x e^{-ipx} [\bar{\psi}(\mathbf{p})]_\alpha [\gamma^0]_{\alpha\beta} [u_r(\mathbf{p})]_\beta \quad (\text{creaz.elettrone}), \\ \sqrt{\frac{E(\mathbf{p})(2\pi)^3}{m}} c_r(\mathbf{p}) &= \int d^3 x e^{+ipx} [\bar{\psi}(\mathbf{p})]_\alpha [\gamma^0]_{\alpha\beta} [v_r(\mathbf{p})]_\beta \quad (\text{annich.positrone}).\end{aligned}\quad (9.35)$$

Lasciamo al lettore di dimostrare, seguendo la procedura descritta nella Sezione 5.5 e utilizzando le (9.35) e l'equazione di Dirac, la formula base di riduzione dell'elettrone nello stato iniziale

$$\begin{aligned}S_{if} &= \langle k' r', p' s'; out | kr, ps; in \rangle = \langle k' r', p' s'; out | a_{in}^\dagger(p, s) | kr; in \rangle \\ &= i \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E(\mathbf{p}) Z_2}} \int d^4 x_1 \langle k' r', p' s'; out | \bar{\psi}(x_1) | k, r; in \rangle \overleftarrow{(i\partial_1 + m)} u_s(\mathbf{p}) e^{-ipx_1}.\end{aligned}\quad (9.36)$$

La (9.36) e l'espressione analoga per l'elettrone nello stato finale permettono di ottenere l'elemento di matrice  $S$  dalla corrispondente funzione di Green.

<sup>3</sup>Questa è la notazione standard, secondo la quale  $Z_1$  è la costante di rinormalizzazione del vertice.

Relazioni analoghe si ottengono per gli stati a un fotone, ad esempio

$$S_{if} = \langle k' r', p' s'; out | k r, p s; in \rangle \quad (9.37)$$

$$= \langle k' r', p' s'; out | a_{in}^\dagger(k, r) | p s; in \rangle \quad (9.38)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3 E(\mathbf{p}) Z_3}} \int d^4 x_1 \langle k' r', p' s'; out | A^\mu(x_1) | p, s; in \rangle \overleftarrow{(\square_1)} \epsilon_\mu^{(r)}(\mathbf{k}) e^{-ikx_1}.$$

Paragonando queste relazioni a quelle che valgono per un campo scalare vediamo che le differenze nel caso dell'elettrodinamica sono minime. Oltre a quelle dovute alla presenza degli spinori o dei vettori di polarizzazione, dobbiamo solo tener conto della differenza nei fattori moltiplicativi nel caso dei fermioni, (9.36), e in quello dei bosoni, (9.37).

In conclusione, possiamo scrivere la formula di riduzione per un processo con un numero qualsiasi di particelle negli stati iniziale e finale in forma (molto) schematica come (si confronti con la (5.64))

$$\begin{aligned} \langle f | S | i \rangle &= \langle f; out | i; in \rangle = \left( \prod_{\text{bos}} \sqrt{\frac{1}{Z_3 2\omega_q (2\pi)^3}} \right) \left( \prod_{\text{ferm}} \sqrt{\frac{m}{Z_2 E(\mathbf{q}) (2\pi)^3}} \right) \\ &\prod_{e^- \text{ out}, e^+ \text{ in}} [\bar{u}(\mathbf{q}_k - m)]_\alpha \dots [\bar{v}(\mathbf{q}_s - m)]_\delta \dots \prod_{\text{bos}} \dots \epsilon_\mu^{(s)}(\mathbf{q}_\ell) q_\ell^2 \dots \\ &\int \prod_{\text{Tutte}} [d^4 x] \prod_{\text{Finali}} e^{iq_k x_k} \prod_{\text{Iniziali}} e^{-iq_k x_k} \langle 0 | T(\psi_\alpha \dots \bar{\psi}_\beta \dots \bar{\psi}_\gamma \dots \psi_\delta \dots A^\mu) | 0 \rangle \\ &\prod_{e^- \text{ in}, e^+ \text{ out}} [(\mathbf{q}_l + m) u]_\beta \dots [(\mathbf{q}_t + m) v]_\gamma \dots, \end{aligned} \quad (9.39)$$

dove per i vari fattori o manipolazioni è indicata la categoria di particelle cui si applicano. In corrispondenza ad ogni particella iniziale o finale la funzione di Green dovrà contenere un campo proiettato sull'appropriato spinore o vettore di polarizzazione

$u_r(\mathbf{q})$	fermione iniziale ,
$v_r(\mathbf{q})$	anti-fermione finale ,
$\bar{v}_r(\mathbf{q})$	anti-fermione iniziale ,
$\bar{u}_r(\mathbf{q})$	fermione finale ,
$\epsilon_r^\mu(\mathbf{q})$	fotone iniziale o finale .

## 9.4 Diagrammi di Feynman per la matrice S

Come abbiamo fatto nel caso del campo scalare, possiamo direttamente passare dai diagrammi che descrivono il funzionale generatore a quelli che descrivono elementi di matrice S.

Dobbiamo restringerci alle funzioni di Green che corrispondono ai grafici *connessi*, con linee esterne che corrispondono alle particelle iniziali e finali.

Inserendo le funzioni di Green nelle formule di riduzione e prendendo i residui nei poli corrispondenti ai momenti esterni, eliminiamo completamente i propagatori delle linee esterne ed otteniamo un fattore  $\sqrt{Z_2}$  per ogni elettrone o positrone ed un fattore  $\sqrt{Z_3}$  per ogni fotone.

Arriviamo così alla espressione generale per l'elemento di matrice S,

$$\langle f|S|i\rangle = \left( \prod_{\text{Ferm.}} \sqrt{2m} \right) \left( \prod_{\text{Tutte}} \sqrt{\frac{Z}{2\omega_q(2\pi)^3}} \right) (2\pi)^4 i \delta^4 \left( \sum_{\text{In}} q_i - \sum_{\text{Fin}} q_i \right) \mathcal{M}_{fi}. \quad (9.40)$$

Come vedremo, i fattori  $\sqrt{Z}$  associati alle linee esterne spariscono quando si esegue la rinormalizzazione. Abbiamo messo in evidenza i fattori cinematici e messo in evidenza un fattore

$$(2\pi)^4 i \delta^4 \left( \sum_{\text{In}} q_i - \sum_{\text{Fin}} q_i \right),$$

che garantisce la conservazione dell'energia e della quantità di moto. Il fattore "i" segue la convenzione secondo cui la matrice S viene espressa come  $\mathbb{1} + iT$ , dove T è la matrice di transizione.

In termini di diagrammi dobbiamo limitarci a diagrammi connessi che siano, inoltre, *irriducibili ad una particella sulle linee esterne*. Avremo quindi

$$(2\pi)^4 i \delta^4 \left( \sum_{\text{In}} q_i - \sum_{\text{Fin}} q_i \right) \mathcal{M}_{fi} = \sum_i D_i. \quad (9.41)$$

**Regole di Feynman.** Per definire meglio le regole per il calcolo dei diagrammi dobbiamo dire qualcosa di più sulla loro struttura. Per prima cosa osserviamo che (si veda l'Eq. 9.11) ad ogni vertice afferiscono due linee fermioniche, una di tipo " $\bar{J}$ " prodotta dalla derivata  $\delta/\delta J$ , che possiamo considerare *uscende* dal vertice, l'altra di tipo " $J$ ", prodotta da  $\delta/\delta \bar{J}$ , che possiamo considerare *entrante*. Come risulta dalla (9.13) una linea uscente da un primo vertice risulterà entrante in un secondo. Quindi se, partendo da un vertice, seguiamo di vertice in vertice una linea fermionica secondo il suo verso, si possono realizzare due situazioni: o arriviamo a una linea uscente dal diagramma (e seguendo all'indietro a una linea entrante nel diagramma), oppure torniamo al punto di partenza. Nel primo caso avremo una linea aperta, nel secondo una linea chiusa (in inglese *loop*). Dato che si tratta di fermioni, dobbiamo fare attenzione ai segni. Nei due termini del vertice (9.11) la derivata  $\delta/\delta \bar{J}$  (linea entrante) è a destra di  $\delta/\delta J$  (linea uscente). Per una linea aperta possiamo ordinare gli operatori  $V$  che contribuiscono in modo che siano contigui e che le contrazioni avvengano sempre tra il fattore  $\delta/\delta \bar{J}$  in uno dei vertici e il  $\delta/\delta J$  in quello alla sua destra, una situazione che chiameremo *normale*. Ad esempio, per una linea aperta con tre vertici in  $x, y, z$

$$\left[ \left( -i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \gamma^\mu \left( -i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)} \right) \right] \left[ \left( i \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) \gamma^\nu \left( -i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)} \right) \right] \left[ \left( i \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \gamma^\sigma \left( -i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(z)} \right) \right],$$

di modo che siamo sempre nel caso della prima delle (9.13). Nel caso di una linea fermionica chiusa troviamo necessariamente un numero dispari di casi in cui vengono contratte due derivate nell'ordinamento inverso, cioè  $\delta/\delta \bar{J}$  alla destra di  $\delta/\delta J$ . In questi casi si applica la seconda equazione (9.13), che ha il segno opposto alla prima. Ad esempio, per una linea chiusa con due vertici

$$\left[ \left( -i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \gamma^\mu \left( -i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)} \right) \right] \left[ \left( i \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) \gamma^\nu \left( -i \frac{\delta}{\delta \bar{J}(y)} \right) \right].$$

la contrazione interna è nell'ordine normale, quella esterna nell'ordine opposto. Possiamo quindi usare sempre la prima delle (9.13) aggiungendo un ulteriore fattore (-1) per ciascuna linea chiusa.

Abbiamo omesso l'indicazione degli indici spinoriali, dato che gli indici contigui sono sommati. Nelle linee chiuse abbiamo anche una somma tra il primo e l'ultimo indice, una traccia: l'esempio che abbiamo dato corrisponde, includendo il fattore (-1), a

$$(-1)Tr [\gamma^\mu iS_F(x-y)\gamma^\nu iS_F(y-x)] .$$

Per quanto riguarda le linee aperte, l'espressione corrispondente si scrive da sinistra a destra *cominciando con la linea uscente*, che può rappresentare un fermione nello stato finale, o un antifermione nello stato iniziale, e finisce con la linea entrante — un fermione iniziale o un antifermione nello stato finale. Quindi per una linea fermionica aperta la regola è *risalire lungo la linea fermionica cominciando dalla fine*. Per una linea chiusa si può partire da qualunque vertice, dato che la traccia è invariante rispetto a permutazioni circolari, *risalendo lungo la linea*. Detto questo, gli elementi di un diagramma sono

Vertice elettrone-fotone	$ie (2\pi)^4 \delta^4(\sum q_i) \gamma^\mu ,$	
Vertice del controtermine di massa	$i\delta m (2\pi)^4 \delta^4(\sum q_i) ,$	
Linea interna fermionica	$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} ,$	
Linea interna fotonica	$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} ,$	
Linea esterna fotonica	$\epsilon_\mu ,$	(9.42)
Linea Fermionica entrante	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Fermione iniziale} & u_r(\vec{q}) \\ \text{Antiferm. finale} & v_r(\vec{q}) \end{array} \right. ,$	
Linea Fermionica uscente	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Fermione finale} & \bar{u}_r(\vec{q}) \\ \text{Antiferm. iniziale} & \bar{v}_r(\vec{q}) \end{array} \right. ,$	
Linea Fermionica chiusa	Aggiungere un fattore (-1) .	

importante notare che i segni *relativi* tra diagrammi differenti che contribuiscono allo stesso processo sono fisicamente rilevanti. questo il caso del fattore (-1) associato alle linee fermioniche chiuse, dato che diversi diagrammi per lo stesso processo possono avere un diverso numero di linee chiuse.

A titolo di esercizio, nella Fig. 9.2 riportiamo i diagrammi di Feynman del secondo ordine dello sviluppo perturbativo, relativi alla funzione a quattro punti

$$G(x_1, x_2; y_1, y_2) = \langle 0 | T [\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)A^\mu(y_1)A^\nu(y_2)] | 0 \rangle . \quad (9.43)$$

Tutti i diagrammi devono avere una linea fermionica aperta e si possono ordinare a seconda del numero di vertici  $V = 0, 1, 2$  che cadono su di essa.

Notiamo che, come sottodiagrammi connessi, appaiono le correzioni al secondo ordine alla propagazione del fotone (primo diagramma con  $V = 0$ ) e dell'elettrone (primo diagramma con  $V = 2$ ). Nel terzo diagramma con  $V = 0$  compare come sottodiagramma connesso la prima correzione perturbativa all'ampiezza della transizione *vuoto-vuoto*. Il secondo grafico con  $V = 0$  ed il grafico con  $V = 1$  contengono entrambi un'ampiezza relativa alla transizione di un fotone nel vuoto. Questa am-

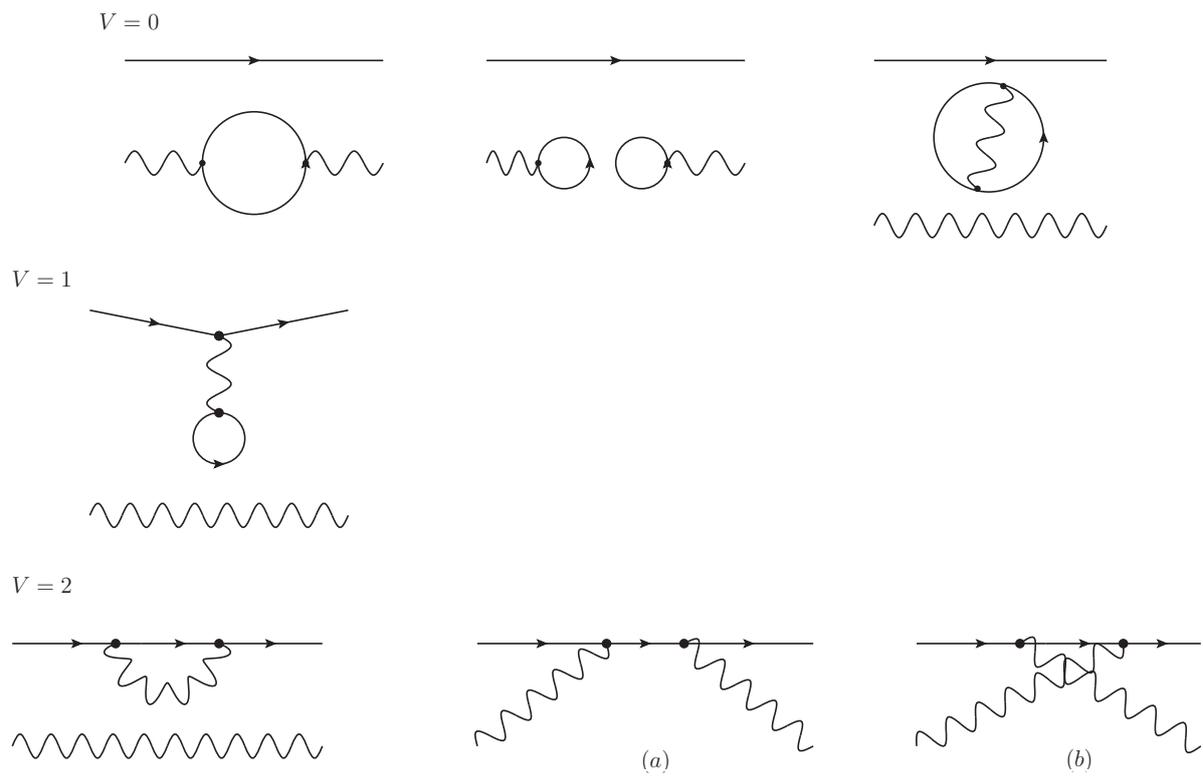


Figura 9.2: Diagrammi del secondo ordine perturbativo con numero di vertici  $V=0, 1, 2$  lungo la linea aperta fermionica. I diagrammi che contribuiscono ad un processo di diffusione sono i diagrammi connessi, (a) e (b).

piezza si annulla a causa di una particolare simmetria della QED, la simmetria per Coniugazione di carica [1]<sup>4</sup>.

I diagrammi che contribuiscono ad un processo di diffusione, ad esempio la diffusione Compton,

$$\gamma(k, r) + e(p, s) \rightarrow \gamma(k', r') + e(p', s'), \quad (9.44)$$

dove  $(k, r)$ ,  $(p, s)$ ,  $(k', r')$  e  $(p', s')$  indicano quadrimpulso, spin e polarizzazione delle particelle negli stati, rispettivamente, iniziale e finale, sono soltanto i diagrammi connessi, indicati con (a) e (b).

L'ampiezza invariante  $\mathcal{M}_{fi}$ , Eq. (9.41) per la diffusione Compton, che si ottiene usando le regole di Feynman derivate in questo Capitolo, è

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{fi}^{(a)} &= e^2 \bar{u}_{s'}(p') \gamma_\mu \epsilon_{r'}^\mu(k') \frac{i}{p+k-m} \gamma_\nu \epsilon_r^\nu(k) u_s(p), \\ \mathcal{M}_{fi}^{(b)} &= e^2 \bar{u}_{s'}(p') \gamma_\nu \epsilon_r^\nu(k) \frac{i}{p-k'-m} \gamma_\mu \epsilon_{r'}^\mu(k') u_s(p), \end{aligned} \quad (9.45)$$

dove per semplicità abbiamo assunto vettori di polarizzazione reali e abbiamo lasciato sottintesi gli indici di spin. I dettagli dei calcoli necessari per ottenere la (9.45) sono esposti nell'Appendice E.

## 9.5 Combinatoria

In poche parole: *non ci sono problemi di combinatoria*. Il fattore  $1/n!$  che appare nello sviluppo di  $Z$  in potenze dell'operatore differenziale  $V$  (Eq. 9.10) si compensa esattamente per i diagrammi connessi non di tipo vuoto-vuoto (i soli che ci interessano) dell'elettrodinamica quantistica. La ragione è che in un diagramma connesso ogni vertice ha un suo ruolo unico rispetto a quelli degli altri vertici. Supponiamo di avere dimostrato questo risultato, e di avere assegnato agli  $n$  vertici dei "ruoli"  $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ . Il diagramma con  $n$  vertici sarà prodotto dal termine  $V^n/n!$ , ed esistono  $n!$  modi di assegnare gli  $n$  ruoli alle  $n$  copie di  $V$ . Questo cancella esattamente il fattore  $1/n!$ .

Resta da far vedere che in ogni diagramma i ruoli dei vertici sono tutti diversi. Per far questo basta far vedere che esiste un algoritmo per assegnare a ciascun vertice un numero d'ordine progressivo, ad esempio

**Passo 1** Supponiamo che ci siano  $a > 0$  linee fermioniche aperte ed  $l \geq 0$  linee fermioniche chiuse.

Prima di tutto diamo un ordine alle linee aperte, ciascuna delle quali ha una identità definita dagli impulsi entranti e uscenti. Se  $A_1, A_2, \dots, A_a$  sono le linee aperte, possiamo aprire la lista dei vertici mettendo prima quelli di  $A_1$  cominciando (per non perdere l'allenamento) dalla fine della linea, poi quelli di  $A_2$ , e così via. Così abbiamo una lista che contiene tutti i vertici sulle linee aperte, ciascuno con il suo numero d'ordine.

**Passo 2** Se  $l > 0$  la lista deve ancora essere completata con i vertici di  $l$  linee chiuse. Almeno qualcuno di questi sarà connesso da un fotone con uno dei vertici già nella lista, altrimenti il diagramma sarebbe sconnesso, e tra questi scegliamo come prossimo nella lista quello connesso

<sup>4</sup>L'annullarsi di tutte le ampiezze con un numero dispari di fotoni esterni (uno nel nostro caso) va sotto il nome di Teorema di Furry.

al vertice con il numero d'ordine più basso. Partendo dal vertice appena aggiunto alla lista, aggiungiamo alla lista gli altri vertici che si incontrano sulla stessa linea chiusa, risalendo la linea (sempre per l'allenamento).

Se  $l - 1 > 0$  la lista deve ancora essere completata con i vertici di  $l - 1$  linee chiuse. Almeno qualcuno di questi sarà connesso da un fotone con uno dei vertici già nella lista, altrimenti il diagramma sarebbe sconnesso, e tra questi scegliamo come prossimo nella lista quello connesso al vertice con il numero d'ordine più basso. Partendo dal vertice appena aggiunto alla lista, aggiungiamo alla lista gli altri vertici che si incontrano sulla stessa linea chiusa, risalendo la linea (sempre per l'allenamento).

**Passi 3 ...** Continuare fino a che restano vertici fuori dalla lista

Se non ci sono linee aperte (come ad esempio nel processo  $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma + \gamma$ ) diamo un ordine alle particelle entranti (necessariamente fotoni), e apriamo la lista con il vertice su cui arriva la prima di queste. Aggiungiamo i vertici che si trovano sulla stessa linea chiusa del primo (dobbiamo dire in che ordine?). Se rimangono  $l > 0$  linee chiuse con vertici non catalogati, si torna al Passo 2.

A questo punto ogni vertice ha il suo ruolo, ad esempio: “il vertice 7 è il terzo a partire dalla fine della seconda linea aperta” e la dimostrazione è completa.



## Capitolo 10

### Rinormalizzazione della QED

Questo capitolo tratta della rinormalizzazione della elettrodinamica quantistica (QED). La rinormalizzazione permette di risolvere il problema delle divergenze che si incontrano nel calcolo di diagrammi di Feynman che contengono circuiti chiusi (in inglese, *loop*), ma è un concetto più generale che si incontrerebbe anche in assenza di divergenze. La necessità di rinormalizzare discende infatti dalla esistenza di interazioni, che fa sì che le masse che compaiono nel lagrangiano non siano quelle delle particelle che i vari campi descrivono, e che i campi stessi non siano “ben normalizzati”, come messo in evidenza dalla presenza di fattori  $Z$  nel contributo degli stati a singola particella ai rispettivi propagatori.

Nelle teorie di campo la presenza di divergenze rappresenta la norma, ma si possono verificare due situazioni radicalmente differenti. La più interessante è quella delle teorie rinormalizzabili, tra cui la elettrodinamica quantistica e più in generale il Modello Standard delle interazioni fondamentali. Alla seconda categoria appartengono teorie non rinormalizzabili.

In una teoria rinormalizzabile si incontrano divergenze solo quando si cerca di stabilire la relazione tra grandezze che appaiono nel lagrangiano, nel caso della QED la massa  $m_0$  o la carica  $e_0$ , e le corrispondenti grandezze fisiche  $m$  ed  $e$ . In teorie di questo tipo le divergenze possono essere nascoste “sotto il tappeto”, esprimendo i risultati in termini di grandezze fisicamente osservabili. Se consideriamo ad esempio il caso della massa dell’elettrone, lo spostamento di massa  $\delta m$ , introdotto nel precedente capitolo, risulta divergente in teoria delle perturbazioni. Come abbiamo visto, però, è possibile riorganizzare la teoria delle perturbazioni in modo che il termine  $\delta m$  sia esattamente cancellato da un apposito controtermine, di modo che esso non appaia, ad esempio, nel calcolo degli elementi di matrice  $S$ .

Un esempio di teoria non rinormalizzabile è la teoria di Fermi delle interazioni deboli. In una teoria non rinormalizzabile le divergenze sono presenti nel calcolo di qualsiasi grandezza fisica, ad esempio nel calcolo di qualsiasi elemento della matrice  $S$ .

In ogni caso le divergenze appaiono in integrali su impulsi di particelle virtuali estesi sino ad infinito. Per quanto riguarda il significato delle divergenze si possono fare due ipotesi: la prima è che queste divergenze siano una caratteristica del metodo perturbativo, che non si presenterebbero in ipotetici metodi non perturbativi. La seconda è che la teoria sia solo una prima approssimazione della realtà fisica, non valida per impulsi estremamente alti, il che per il principio di indeterminazione corrisponde a distanze estremamente piccole. Per integrali convergenti, al contrario, il risultato dipende dal comportamento degli integrandi (e quindi dal comportamento della teoria cui gli integrali

si riferiscono) per valori finiti degli impulsi. In una teoria rinormalizzabile, quindi, una volta eliminate le divergenze con una ridefinizione dei parametri della teoria, i risultati del calcolo perturbativo dipenderanno dal comportamento della teoria per impulsi finiti (distanze non infinitesimamente piccole), e possono dare una buona approssimazione anche se la teoria perdesse la sua validità nel limite di impulsi infiniti.

Questi ragionamenti, necessariamente qualitativi a questo stadio, possono essere resi quantitativi una volta che si sia approfondita la conoscenza della teoria. Per fare un esempio tratto da ricerche in corso, esiste attualmente una lieve discrepanza tra il valore della anomalia magnetica<sup>1</sup> del muone misurato sperimentalmente e la previsione teorica ottenuta sulla base del Modello Standard. L'entità della deviazione potrebbe essere un indizio della esistenza di nuovi fenomeni fisici ad una scala di energia di circa un TeV, esplorabile con gli esperimenti di LHC.

Nascondere le divergenze nella ridefinizione di alcuni parametri della teoria (masse, carica elettrica, etc.) costituisce la cosiddetta *rinormalizzazione* ed è un procedimento che richiede una qualche cura. La manipolazione di grandezze divergenti è matematicamente sospetta e va chiaramente evitata. Il metodo per evitare manipolazioni sospette consiste nella cosiddetta *regolarizzazione* della teoria. L'idea è molto semplice: Se  $T$  è la teoria cui siamo interessati (nel nostro caso la QED), costruire una famiglia di teorie  $T(\eta)$  che dipendono da un parametro  $\eta$ , e tali che:

1. Nel limite  $\eta \rightarrow 0$ ,  $T(\eta) \rightarrow T$ .
2.  $T(\eta)$  gode di tutte le proprietà "importanti" di  $T$ . Nel caso della QED (o del Modello Standard) la preoccupazione principale è il mantenimento della invarianza di gauge.
3. Per  $\eta \neq 0$ ,  $T(\eta)$  non ha divergenze.

In questo caso  $T(\eta)$  viene detta una versione *regolarizzata* di  $T$ . In  $T(\eta)$  le manipolazioni necessarie per la rinormalizzazione riguardano grandezze finite, e sono legittime. Solo dopo aver eseguito la rinormalizzazione si prende il limite  $\eta \rightarrow 0$ . Dato che la rinormalizzazione ha nascosto tutte le potenziali divergenze, il limite è finito.

Il metodo di regolarizzazione attualmente usato è quello della "regolarizzazione dimensionale". In termini semplici si tratta di questo: possiamo considerare la QED come definita dall'insieme di diagrammi di Feynman che descrivono a ciascun ordine in  $\alpha$  i vari processi, e dalle regole che permettono di calcolare ciascun diagramma. Nel calcolo dei diagrammi con circuiti chiusi appaiono integrali logaritmicamente divergenti, cioè integrali del tipo

$$\int d^4k I(k) \quad , \quad I(k) \sim \frac{1}{k^4} \quad \text{per } |k| \rightarrow \infty . \quad (10.1)$$

Questi integrali *non* sarebbero divergenti in uno spazio con meno di quattro dimensioni, ad esempio in tre dimensioni dove avremmo  $d^3k$  invece di  $d^4k$ . La regolarizzazione dimensionale consiste nel considerare una teoria descritta dagli stessi diagrammi della QED, con l'unica differenza che tutti gli integrali del tipo (10.1) vanno eseguiti non in 4 dimensioni ma in  $4 - \eta$  dimensioni. Si tratta in un certo senso di una continuazione analitica nel numero di dimensioni dello spazio. Per  $\eta > 0$  la teoria

<sup>1</sup>L'anomalia magnetica di una particella di spin 1/2 rappresenta la deviazione del momento magnetico dal valore (eguale ad un magnetone di Bohr) previsto dalla equazione di Dirac. Nel seguito daremo una definizione più esatta di questa grandezza e la calcoleremo in primo ordine nella teoria delle perturbazioni.

è priva di divergenze. Dopo avere eseguito la rinormalizzazione si può prendere il limite  $\eta \rightarrow 0$ . Per una illustrazione di questo metodo, ancora elementare ma più dettagliata, rimandiamo al testo di Mandl e Shaw [3].

L'interesse della regolarizzazione dimensionale è che essa non disturba la validità di alcune relazioni fondamentali quali la identità di Ward. Anche se nel caso della QED esistono metodi alternativi di regolarizzazione, la regolarizzazione dimensionale è l'unico metodo che ha permesso il trattamento perturbativo di teorie basate su invarianze di gauge non abeliane, come ad esempio nella descrizione unificata delle interazioni elettromagnetiche e deboli del Modello Standard.

Le divergenze che appaiono negli integrali per impulsi  $p \rightarrow \infty$  prendono il nome di divergenze *ultraviolette*. Esiste nella QED un secondo tipo di divergenza, detta divergenza *infrarossa*, che si manifesta quando l'impulso di un fotone, sia reale (fotone emesso) che virtuale (propagatore) tende a zero. Le divergenze infrarosse hanno un significato fisico ben preciso: ad ogni processo, ad esempio di scattering, in cui una particella carica cambia direzione in maniera impulsiva, è associata, già a livello classico, l'emissione di onde elettromagnetiche con uno spettro di energia  $dW/d\nu$  che tende ad una costante per  $\nu \rightarrow 0$ . Ma dato che questa radiazione è composta da fotoni di energia  $h\nu$ , la densità spettrale nel numero di fotoni si comporta come  $dN/d\nu = (1/h\nu)dW/d\nu$ , e tende ad infinito per  $\nu \rightarrow 0$ . La divergenza infrarossa non è presente nelle grandezze effettivamente misurate, dato che qualsiasi apparato sperimentale ha una risoluzione energetica finita: una misura, ad esempio, di un processo di scattering non è in grado di distinguere il processo di scattering vero e proprio da quello in cui esso è accompagnato dalla (inevitabile) emissione di uno o più fotoni di bassa energia. La probabilità (o sezione d'urto) del processo di scattering, sommata a quelle per lo stesso processo accompagnato da uno o più fotoni di bassa energia, risulta finita. La presenza delle divergenze infrarosse introduce notevoli complicazioni tecniche nel paragone tra teoria ed esperimento, ma nessun problema a livello concettuale.

In questo capitolo discutiamo brevemente delle tre divergenze ultraviolette presenti nella QED. Esse appaiono nel calcolo dei propagatori per il fotone e l'elettrone, e nel vertice elettrone-elettrone-fotone. Discuteremo anche della identità di Ward che lega le correzioni al propagatore dell'elettrone e al vertice. Il trattamento di questo capitolo riguarda in ciascun caso le correzioni di ordine  $\alpha$ . Esistono dimostrazioni valide a tutti gli ordini perturbativi — rinormalizzabilità della teoria, identità di Ward — ma questi argomenti vanno oltre il livello introduttivo di questo corso. Conchiuderemo con un calcolo esplicito della correzione di ordine  $\alpha$  al momento magnetico dell'elettrone.

## 10.1 Il propagatore del fotone

Le correzioni all'ordine  $\alpha$  al propagatore del fotone sono descritte dalla figura 10.1. Questa correzione va aggiunta al propagatore di ordine zero, quindi il propagatore corretto all'ordine  $\alpha$  può essere scritto come

$$iD_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} + \frac{-ig_{\mu\alpha}}{k^2 + i\epsilon} ie_0^2 \Pi^{\alpha\beta}(k) \frac{-ig_{\beta\nu}}{k^2 + i\epsilon}. \quad (10.2)$$

dove  $\Pi^{\alpha\beta}(k)$  rappresenta il circuito chiuso dell'elettrone, ed è definito da

$$ie_0^2 \Pi^{\alpha\beta}(k) = \frac{(-1)(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \operatorname{Tr} \left[ \gamma^\alpha \frac{i(\not{p} + m)}{(p)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\beta \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \right].$$

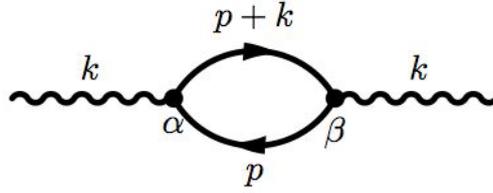


Figura 10.1: Il propagatore del fotone all'ordine  $\alpha$ .

Notiamo il fattore (-1) e la traccia, tipici dei circuiti fermionici chiusi, e che abbiamo risalito la linea fermionica. Semplificando l'espressione (fattori  $i$ ,  $-1$ ,  $e_0^2$ ) otteniamo

$$\Pi^{\alpha\beta}(k) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{\text{Tr}[\gamma^\alpha(\not{p} + m)\gamma^\beta(\not{p} + \not{k} + m)]}{((p)^2 - m^2 + i\epsilon)((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (10.3)$$

Questa espressione è divergente, e dovremo ricorrere alla regolarizzazione. Applichiamo quindi una regolarizzazione dimensionale, che consiste nel passare dallo spazio 4-dimensionale ad uno a  $D$  dimensioni,

$$\Pi^{\alpha\beta}(k) = \frac{i}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{\text{Tr}[\gamma^\alpha(\not{p} + m)\gamma^\beta(\not{p} + \not{k} + m)]}{((p)^2 - m^2 + i\epsilon)((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)}, \quad (10.4)$$

dove è sottintesa una continuazione analitica a valori non interi di  $D$ , eseguita ad esempio con i metodi delineati nella Appendice D. L'integrale risulterà allora finito, tranne per valori interi di  $D$ , in particolare per  $D = 4$ , dove l'integrale diverge come  $1/(D-4)$ . Per qualsiasi valore non intero di  $D$  vengono legittime le usuali manipolazioni, come ad esempio il cambiamento di variabili che useremo per dimostrare una importante proprietà di  $\Pi^{\alpha\beta}(k)$ ,

$$k_\beta \Pi^{\alpha\beta}(k) = 0. \quad (10.5)$$

Questa identità è in effetti un'altra conseguenza della invarianza di gauge, o più semplicemente della conservazione della corrente  $j^\beta = \bar{\psi}\gamma^\beta\psi$ . Infatti il vertice  $\gamma^\beta$  nella (10.3), o nel diagramma 10.1, rappresenta l'azione di una corrente  $j^\beta$ , e moltiplicare per  $k_\beta$  equivale a prenderne la divergenza. La dimostrazione della (10.5) nasce dalla identità

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^\alpha(\not{p} + m)\not{k}(\not{p} + \not{k} + m)] &= \text{Tr}[\gamma^\alpha(\not{p} + m)((\not{p} + \not{k} - m) - (\not{p} - m))(\not{p} + \not{k} + m)] \\ &= \text{Tr}[\gamma^\alpha(\not{p} + m)]((p+k)^2 - m^2) - \text{Tr}[\gamma^\alpha(\not{p} + \not{k} + m)]((p)^2 - m^2) \\ &= 4p^\alpha((p+k)^2 - m^2) - 4(p+k)^\alpha((p)^2 - m^2) \end{aligned}$$

da cui

$$k_\beta \Pi^{\alpha\beta}(k) = \frac{4i}{(2\pi)^4} \left[ \int d^D p \frac{p^\alpha}{((p)^2 - m^2 + i\epsilon)} - \int d^D p \frac{(p+k)^\alpha}{((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)} \right] = 0,$$

come si dimostra con un cambiamento di variabili,  $(p+k) \rightarrow p$ , nel secondo integrale<sup>2</sup>. Questo risultato è confermato da un calcolo esplicito di  $\Pi^{\alpha\beta}(k)$ , per il quale rimandiamo gli interessati al cap. 10 del Mandl e Shaw [3].

<sup>2</sup>Notiamo che questa manipolazione è legittima nella teoria regolarizzata, in cui l'integrale è divergente.

$\Pi^{\alpha\beta}(k)$  è un tensore simmetrico a due indici, funzione del vettore  $k$ , quindi la sua forma più generale è necessariamente

$$\Pi^{\alpha\beta}(k) = g^{\alpha\beta} A(k^2) + k^\alpha k^\beta B(k^2), \quad (10.6)$$

dove  $A(k^2), B(k^2)$  sono funzioni dello scalare  $k^2$ , ma la condizione (10.5) stabilisce una relazione tra le due funzioni,

$$A(k^2) = k^2 B(k^2).$$

Quindi<sup>3</sup>  $A(0) = 0$ , e sviluppando in potenze di  $k^2$ ,

$$A(k^2) = k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2), \quad (10.7)$$

dove  $\Pi_c(k^2)$  contiene gli ordini superiori nello sviluppo in potenze di  $k^2$ , e quindi

$$\Pi_c(0) = 0. \quad (10.8)$$

La divergenza di  $\Pi^{\alpha\beta}(k)$  è quadratica: per alti valori di  $p$  l'integrale (10.3) si comporta come  $\int d^4 p / p^2$ . Nello sviluppo in potenze di  $k$ , tuttavia, il grado di divergenza decresce di una unità per ogni potenza di  $k$ , ovvero di due unità per ogni potenza di  $k^2$ . Per ottenere ad esempio il valore di  $A'$  dobbiamo eseguire la derivata seconda di  $\Pi$  rispetto a  $k$ , e si ottiene di conseguenza un integrando che si comporta come  $p^{-4}$ , il che comporta una divergenza logaritmica. I termini successivi dello sviluppo raccolti in  $\Pi_c(k^2)$  sono convergenti. Questa considerazione si applica a qualunque diagramma di Feynman: anche se un diagramma diverge, in uno sviluppo in potenze degli impulsi esterni le divergenze si riscontrano solamente nei coefficienti dei primi termini dello sviluppo.

Una ulteriore semplificazione dell'espressione di  $\Pi^{\alpha\beta}(k)$  si ottiene dalla considerazione che, dato che in qualsiasi diagramma il propagatore (10.2) si connette alle correnti che scorrono lungo le linee fermioniche,

$$j^\mu D_{\mu\nu}(k) j^\nu,$$

e che queste correnti sono conservate, il termine di  $\Pi^{\alpha\beta}(k)$  proporzionale a  $k^\alpha k^\beta$  dà contributo nullo e può essere omesso. In conclusione possiamo scrivere

$$\Pi^{\alpha\beta}(k) = g^{\alpha\beta} (k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2)), \quad (10.9)$$

e quindi il propagatore del fotone, corretto all'ordine  $\alpha$  risulta

$$iD_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} (1 + e_0^2 A'(0)) + \frac{-ig_{\mu\nu} e_0^2 \Pi_c(k^2)}{k^2 + i\epsilon}. \quad (10.10)$$

In questa espressione il primo termine corrisponde al propagatore del fotone, ma moltiplicato per un fattore  $(1 + e_0^2 A'(0))$ , mentre il secondo, grazie alla (10.8) non ha una singolarità per  $k^2 = 0$ . Se paragoniamo questa situazione con la rappresentazione spettrale discussa in *Interazioni Elettrodinamiche* [10], cfr. anche la Sezione 4.5, vediamo che il primo termine corrisponde alla propagazione del fotone libero, mentre il secondo corrisponde a stati intermedi con più particelle, in questo caso una coppia elettrone-positrone. Il fattore  $(1 + e_0^2 A'(0))$  va quindi interpretato come una costante di rinormalizzazione,

$$Z_3 = 1 + e_0^2 A'(0). \quad (10.11)$$

<sup>3</sup>Come mostrato in [3], da  $A(0) = 0$  segue che la massa del fotone rimane nulla anche in seguito alle correzioni radiative, un'altra conseguenza della invarianza di gauge.

## 10.2 La rinormalizzazione della carica

Trascurando per un momento l'effetto delle rinormalizzazioni dovute alle correzioni al vertice o al propagatore dell'elettrone, che come vedremo si compensano grazie alla identità di Ward, discutiamo brevemente della rinormalizzazione della carica dovuta alle correzioni al propagatore del fotone.

Il significato fisico della costante di rinormalizzazione si ottiene ricordando che il propagatore del fotone, con la sua singolarità in  $k^2 = 0$  descrive non solamente lo scambio di fotoni tra due elettroni, ma anche la loro interazione coulombiana. La correzione al propagatore che abbiamo trovato è equivalente a modificare la interazione coulombiana,

$$\frac{e_0^2}{r} \rightarrow \frac{e_0^2 Z_3}{r}.$$

La carica elettrica dell'elettrone è operativamente definita tramite l'intensità della interazione coulombiana, quindi la carica effettiva dell'elettrone non è  $e_0$ , ma  $e = e_0 \sqrt{Z_3}$ .

Conviene riesprimere la serie perturbativa in potenze della carica fisica  $e$ , e per far questo notiamo che il propagatore del fotone appare sempre nella combinazione  $e_0^2 D_{\mu\nu}(k)$  che possiamo riscrivere come

$$e_0^2 D_{\mu\nu}(k) = e^2 D_{R\mu\nu}(k), \quad (10.12)$$

dove  $D_{R\mu\nu}(k)$  è il propagatore "rinormalizzato",

$$D_{R\mu\nu}(k) = \frac{1}{Z_3} D_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} - \frac{-ig_{\mu\nu} e^2 \Pi_c(k^2)}{k^2 + i\epsilon} + \mathcal{O}(e^4). \quad (10.13)$$

Resta da verificare che questa regola si applica anche a linee fotoniche esterne, corrispondenti a fotoni presenti nello stato iniziale o finale del processo.

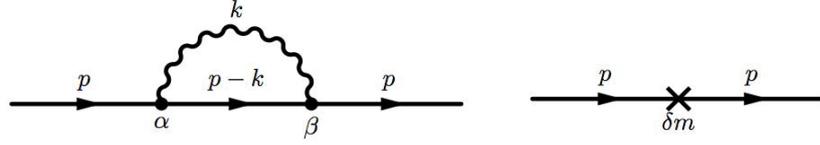
Ricordiamo che nella espressione della matrice  $S$  in termini di diagrammi, (9.40), dobbiamo considerare solo grafici irriducibili ad una particella sulle linee esterne ed associare ad ogni linea fotonica esterna un fattore  $\sqrt{Z_3}$ . Questo fattore origina dalla parziale semplificazione del fattore  $1/\sqrt{Z_3}$  nella formula di riduzione, con il numeratore della funzione a due punti del fotone, termine di polo, che, come abbiamo appena visto, è pari a  $Z_3$ , eqq. (10.10) e (10.11). Naturalmente, la linea corrispondente al fotone esterno finisce su un vertice del diagramma da cui partono due linee fermioniche (di cui almeno una interna). L'ampiezza: linea fotonica esterna-vertice si può scrivere come

$$(\cdots e_0 \gamma^\mu \cdots) \epsilon_\mu \sqrt{Z_3} = (\cdots e \gamma^\mu \cdots) \epsilon_\mu, \quad (10.14)$$

e anche in questo caso il fattore  $\sqrt{Z_3}$  trasforma il parametro  $e_0$  nella carica fisica  $e$ .

Notiamo che quanto abbiamo fatto equivale ad aggiungere le seguenti regole per il calcolo dei diagrammi:

- Nel calcolo dei diagrammi usare la carica fisica  $e$  invece del parametro  $e_0$  che appare nel lagrangiano.
- Dopo aver calcolato (in una teoria regolarizzata) il valore di  $\Pi^{\alpha\beta}(k)$ , sottrarre il contributo di  $A'(0)$ , o in altre parole porre a zero il valore di  $A'(0)$ .
- Eliminare i fattori  $\sqrt{Z_3}$  dalla (9.40)


 Figura 10.2: Correzioni di ordine  $\alpha$  al propagatore di un elettrone.

### 10.3 Il propagatore dell'elettrone

In questa sezione studiamo le correzioni di ordine  $\alpha$  al propagatore dell'elettrone, descritte dai due diagrammi della figura 10.2. Notiamo che  $\delta m$  rappresenta lo spostamento di massa dovuto alle interazioni, che in teorie perturbativa può essere espresso come serie di potenze in  $\alpha = e^2/4\pi$ ,

$$\delta m = \delta_2 e_0^2 + \delta_4 e_0^4 + \dots \quad (10.15)$$

Per calcolare le correzioni di ordine  $\alpha$  al propagatore dovremo includere il termine  $\mathcal{O}(e^2)$  di  $\delta m$ , trascurando i termini di ordine superiore. Per effetto di questa correzione il propagatore dell'elettrone risulterà modificato,

$$iS_F(p) \rightarrow \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} + \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} [ie_0^2 \Sigma(p) + i\delta m] \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}, \quad (10.16)$$

dove  $\Sigma(p)$  è dato dall'espressione

$$ie_0^2 \Sigma(p) = \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} \left[ \gamma^\alpha \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\beta \right],$$

che con alcune semplificazioni diviene

$$\Sigma(p) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 + i\epsilon} \left[ \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\alpha \right]. \quad (10.17)$$

Abbiamo usato una notazione compatta per il propagatore dell'elettrone; in forma un poco più esplicita il fattore in parentesi quadre nell'integrando può essere riscritto, usando note proprietà delle matrici  $\gamma$ , come

$$[\dots] = \frac{\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\alpha}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{-2(\not{p} - \not{k}) + 4m}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

Quindi possiamo scrivere  $\Sigma(p) = s(p) + v_\mu(p) \gamma^\mu$  dove  $s(p)$  è uno scalare, quindi necessariamente una funzione di  $p^2$ , e  $v_\mu(p)$  un vettore, necessariamente della forma  $v_\mu(p) = p_\mu s'(p)$ , dove  $s'(p)$  è anch'esso uno scalare, funzione di  $p^2$ . Dato però che  $p^2 = \not{p}^2$  possiamo combinare i due termini in una singola funzione di  $\not{p}$ , che conviene sviluppare in potenze di  $(\not{p} - m)$

$$\Sigma(p) = A + B(\not{p} - m) + \Sigma_c(p)(\not{p} - m), \quad (10.18)$$

e dato che l'espressione di  $\Sigma(p)$  è linearmente divergente, i primi due coefficienti  $A, B$  di questo sviluppo sono divergenti, mentre i termini successivi, raccolti in  $\Sigma_c(p)$ , risulteranno convergenti. Dato che  $\Sigma_c(p)(p-m)$  raccoglie le potenze  $\geq 2$  di  $(p-m)$ , deve essere

$$\Sigma_c(p) \Big|_{p=m} = 0. \quad (10.19)$$

Sostituendo nella (10.16), e conservando solo il termine di ordine  $e_0^2$  in  $\delta m$  (eq. 10.15),

$$S_F(p) \rightarrow \frac{1}{p-m+i\epsilon} - \left( \frac{1}{p-m+i\epsilon} \right)^2 e_0^2 (A+\delta_2) - \frac{e_0^2 B}{p-m+i\epsilon} - \frac{e_0^2 \Sigma_c(p)}{p-m+i\epsilon}.$$

La correzione  $\propto (A+\delta_2)$  rappresenta un cambiamento di massa, come si vede ad esempio considerandola come il primo termine di uno sviluppo<sup>4</sup>

$$\frac{1}{p-m+e_0^2(A+\delta_2)+i\epsilon} = \frac{1}{p-m+i\epsilon} - \left( \frac{1}{p-m+i\epsilon} \right)^2 e_0^2 (A+\delta_2) + \dots, \quad (10.20)$$

ma dato che  $m$  è la massa “vera” dell'elettrone, dobbiamo scegliere  $\delta_2$  in modo che cancelli esattamente il termine  $A$

$$A + \delta_2 = 0. \quad (10.21)$$

In conclusione il propagatore all'ordine  $e^2$  diventa

$$S_F(p) \rightarrow \frac{1 - e_0^2 B}{p-m+i\epsilon} - \frac{e_0^2 \Sigma_c(p)}{p-m+i\epsilon}. \quad (10.22)$$

Notiamo che il primo termine è singolare per  $p=m$ , e quindi corrisponde alla propagazione di una singola particella di massa  $m$ , mentre grazie alla (10.19) il secondo termine è regolare in  $p=m$ , e deve corrispondere alla propagazione di stati con più di una particella — nel nostro caso un elettrone più un fotone, come si vede dal diagramma nella figura 10.2. Se paragoniamo questa espressione con la formula generale per le funzioni di Green a due punti, (9.31), vediamo che il fattore  $(1 - e_0^2 B)$  va interpretato come costante di rinormalizzazione dell'elettrone,  $Z_2$ , o meglio come la sua approssimazione di ordine  $\alpha$ ,

$$Z_2 = 1 - e_0^2 B + \mathcal{O}(e_0^4). \quad (10.23)$$

Le correzioni della figura 10.2 si applicano anche al caso di una linea esterna. La discussione delle correzioni segue le linee della analoga discussione delle correzioni ad una linea esterna fotonica nella sezione precedente:

1. nella espressione della matrice  $S$  in termini di diagrammi, (9.40), dobbiamo considerare solo grafici irriducibili ad una particella sulle linee esterne;
2. ad ogni linea elettronica esterna è associato un fattore  $\sqrt{Z_2}$ , che origina dalla parziale semplificazione del fattore  $1/\sqrt{Z_2}$  nella formula di riduzione, con il numeratore della funzione a due punti dell'elettrone, termine di polo, che è pari a  $Z_2$ , eq. (9.31);

<sup>4</sup>Sulla giustificazione di questo passaggio torneremo nella sezione seguente.

3. La linea corrispondente all' elettrone esterno finisce su un vertice del diagramma da cui partono una linea fermionica ed una fotonica (di cui almeno una interna).

Possiamo interpretare le correzioni alle linee fermioniche, sia interne che esterne, come una ulteriore rinormalizzazione della carica. Per una linea esterna che confluisce in un vertice la correzione è di un fattore  $\sqrt{Z_2}$ . Per una linea interna il fattore  $Z_2$  va suddiviso tra i due vertici cui la linea si appoggia, quindi un fattore  $\sqrt{Z_2}$  (trascurando termini  $\propto e^4$ ) per ciascun vertice. In conclusione, dato che su ogni vertice insistono due linee fermioniche, esterne o interne, per effetto delle correzioni alle linee fermioniche il vertice  $e_0\gamma^\mu$  risulterà moltiplicato per  $1 - e_0^2 B = Z_2$ . Questo equivale ad una ulteriore rinormalizzazione della carica elettrica

$$e_0 \rightarrow e_0 Z_2 = e_0(1 - e_0^2 B) . \tag{10.24}$$

Grazie alla identità di Ward, come vedremo, questa correzione sarà esattamente compensata dalla analoga correzione alla funzione vertice, per cui la carica elettrica viene solamente rinormalizzata dalla correzione al propagatore del fotone studiata nella sezione precedente.

### 10.3.1 Il propagatore a tutti gli ordini

In questa sezione discutiamo brevemente della struttura generale del propagatore dell'elettrone come si ottiene dalla teoria delle perturbazioni. Questi risultati sono importanti per una discussione della rinormalizzazione a tutti gli ordini, ma nel contesto di queste lezioni li useremo solamente per giustificare la identificazione del termine  $A$  nello sviluppo della  $\Sigma$  (eq. 10.18) come spostamento di massa.

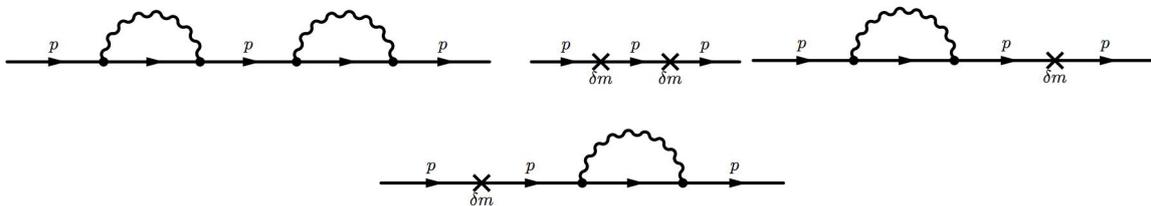


Figura 10.3: Correzioni con due inserzioni al propagatore di un elettrone.

possibile riordinare la serie perturbativa per il propagatore sommando i contributi dei diagrammi che, come quelli della figura 10.3, rappresentano una iterazione di correzioni già incontrate ad ordini inferiori. Diremo che i diagrammi della figura 10.3 hanno due *inserzioni*, mentre quelli della figura 10.2 hanno una singola inserzione, ed è chiaro che ad ordini superiori troveremo diagrammi con tre o più inserzioni.

Sempre al quarto ordine troviamo tre diagrammi con una singola inserzione, mostrati nella figura 10.4, e in analogia con quanto fatto per l'inserzione del secondo ordine nella (10.16) indicheremo il loro contributo con  $e_0^4 \Sigma_4(p)$ . possibile sommare i contributi dei diagrammi con inserzioni multiple: se definiamo  $\Delta(p)$  come la somma di tutte le inserzioni singole

$$\Delta(p) = e_0^4 \Sigma(p) + e_0^4 \Sigma_4(p) + \dots + \delta m , \tag{10.25}$$

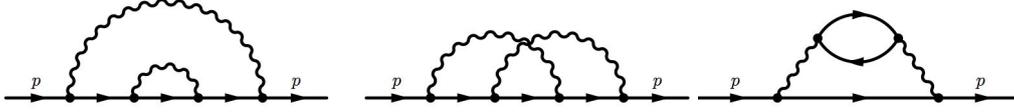


Figura 10.4: Inserzioni di ordine  $e_0^4$ .

per effetto dei diagrammi con inserzioni singole o multiple il propagatore diverrà<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned}
 iS_F(p) &\rightarrow \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} + \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} i\Delta(p) \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \\
 &+ \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} i\Delta(p) \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} i\Delta(p) \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} + \dots \\
 &= \frac{i}{\not{p} - m + \Delta(p) + i\epsilon}.
 \end{aligned} \tag{10.26}$$

Se in analogia con la (10.18) sviluppiamo  $\Delta(p)$  in potenze<sup>6</sup> di  $(\not{p} - m)$ ,

$$\Delta(p) = \tilde{A} + \tilde{B}(\not{p} - m) + \Delta_c(p)(\not{p} - m), \tag{10.27}$$

dalla (10.26) si ottiene la

$$S_F(p) = \frac{i}{(\not{p} - m)(1 + \tilde{B} + \Delta_c(p)) + \tilde{A} + i\epsilon}, \tag{10.28}$$

che è singolare in  $\not{p} = m$  solo se  $\tilde{A} = 0$ . La condizione che  $m$  sia la massa dell'elettrone si traduce quindi nella condizione  $\tilde{A} = 0$ , che all'ordine  $e_0^2$  si riduce alla (10.21).

## 10.4 Il vertice

La correzione al vertice di ordine  $e_0^2$  è data dal diagramma della figura 10.5. Con questa correzione il vertice è

$$ie_0\gamma^\mu \rightarrow ie_0(\gamma^\mu + e_0^2\Lambda^\mu(p', p)), \tag{10.29}$$

dove

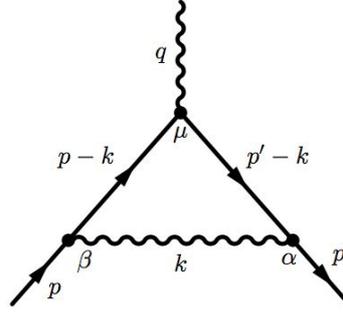
<sup>5</sup>Questo risultato deriva dalla seguente identità, una generalizzazione della serie geometrica, valida per due operatori  $X, Y$ ,

$$S = \frac{1}{X} + \frac{1}{X}Y\frac{1}{X} + \frac{1}{X}Y\frac{1}{X}Y\frac{1}{X} + \dots = \frac{1}{X} + \frac{1}{X}YS$$

da cui, moltiplicando da sinistra per  $X$ ,

$$XS = 1 + YS; \quad \text{e quindi,} \quad S = \frac{1}{X - Y}.$$

<sup>6</sup>Si può dimostrare che i termini raccolti in  $\Delta_c(p)$  sono privi di divergenze. Questo si verifica facilmente all'ordine  $e_0^2$ .

Figura 10.5: Correzione al vertice di ordine  $e_0^2$ .

$$ie_0^3 \Lambda^\mu(p', p) = \frac{(ie_0)^3}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \frac{i}{p' - k - m + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i}{p - k - m + i\epsilon} \gamma^\beta,$$

e con qualche semplificazione,

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{p' - k - m + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{p - k - m + i\epsilon} \gamma^\alpha.$$

Per grandi valori di  $k$  l'integrale si comporta come  $\int d^4k/k^4$ , ed è quindi logicamente divergente. Sorge qui una ulteriore complicazione perché l'integrale non è solamente divergente per  $k \rightarrow \infty$ , ma anche per  $k \rightarrow 0$ , e presenta quindi una divergenza infrarossa.

La divergenza infrarossa verrà discussa separatamente. Sin d'ora diciamo che essa richiede un processo di regolarizzazione che consiste nell'attribuire al fotone una piccola massa  $\lambda$  che viene posta a zero solamente alla conclusione dei calcoli relativi a grandezze fisiche. Scriveremo quindi

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{p' - k - m + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{p - k - m + i\epsilon} \gamma^\alpha. \quad (10.30)$$

Si dimostra facilmente che il termine divergente è proporzionale a  $\gamma^\mu$ . Se infatti scriviamo

$$\Lambda^\mu = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \frac{p' - k + m}{(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{p - k + m}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha,$$

il termine divergente è quello che contiene  $k \dots k$  al numeratore, quindi esplicitando  $k = k_\delta \gamma^\delta = k_\theta \gamma^\theta$  e omettendo  $p, p', m$  al denominatore, trascurabili nel limite  $k \rightarrow \infty$ ,

$$\Lambda^\mu \Big|_{\text{divergente}} = \gamma^\alpha \gamma^\delta \gamma^\mu \gamma^\theta \gamma^\alpha \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \frac{k_\delta k_\theta}{(k^2 + i\epsilon)^2}.$$

La parte divergente di questo ultimo integrale è un tensore costante (nell'integrale non appare nessun vettore); esso deve quindi avere la forma  $K g_{\delta\theta}$ , dove  $K$  è una costante (divergente, ma come al solito dobbiamo immaginare di eseguire il calcolo in modo *regolarizzato*). Quindi

$$\Lambda^\mu \Big|_{\text{divergente}} = K g_{\delta\theta} \gamma^\alpha \gamma^\delta \gamma^\mu \gamma^\theta \gamma^\alpha = K \gamma^\alpha \gamma^\delta \gamma^\mu \gamma_\delta \gamma_\alpha = 4K \gamma^\mu,$$

dove abbiamo usato due volte la nota identità  $\gamma^\delta \gamma^\mu \gamma_\delta = -2\gamma^\mu$ . Dato che la parte divergente di  $\Lambda^\mu$  è proporzionale a  $\gamma^\mu$  possiamo scrivere

$$\Lambda^\mu(p', p) = L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p', p), \quad (10.31)$$

dove  $\Lambda_c^\mu(p', p)$  è privo di divergenze. Dato che  $\Lambda_c^\mu(p', p)$  può esso stesso contenere termini  $\propto \gamma^\mu$  occorre una seconda condizione che fissi la separazione tra parte divergente e parte non divergente. Una possibile scelta di questa condizione parte dalla considerazione che  $e_0 \bar{u}(\vec{p}) \gamma^\mu u(\vec{p})$  rappresenta la corrente elettrica di un elettrone di impulso  $\vec{p}$ . Per effetto delle correzioni al vertice questa diviene<sup>7</sup>

$$e_0 \bar{u}(\vec{p}) \gamma^\mu u(\vec{p}) \rightarrow e_0 \bar{u}(\vec{p}) (\gamma^\mu + e_0^2 \Lambda^\mu(p, p)) u(\vec{p}). \quad (10.32)$$

Si dimostra facilmente<sup>8</sup> che  $\bar{u}(\vec{p}) \Lambda^\mu(p, p) u(\vec{p})$  è proporzionale a  $\bar{u}(\vec{p}) \gamma^\mu u(\vec{p})$ . Possiamo quindi definire la separazione tra parte divergente e parte non divergente di  $\Lambda^\mu(p', p)$ , eq.(10.31), tramite la condizione

$$\bar{u}(\vec{p}) \Lambda^\mu(p, p) u(\vec{p}) = L \bar{u}(\vec{p}) \gamma^\mu u(\vec{p}), \quad \text{ovvero} \quad \bar{u}(\vec{p}) \Lambda_c^\mu(p, p) u(\vec{p}) = 0. \quad (10.33)$$

Dato che la (10.32) rappresenta la corrente di un elettrone come modificata dalla correzione al vertice, ne segue che questa correzione implica una ulteriore rinormalizzazione della carica

$$e_0 \rightarrow \frac{1}{Z_1} e_0 = (1 + e_0^2 L) e_0. \quad (10.34)$$

Come vedremo nella prossima sezione l'identità di Ward stabilisce una relazione tra la correzione al propagatore dell'elettrone e la correzione al vertice, di modo che le due rinormalizzazioni della carica, (10.24) e (10.34), si cancellano esattamente.

## 10.5 L'identità di Ward

L'identità di Ward afferma che

$$\frac{d\Sigma(p)}{dp_\mu} = \Lambda(p, p). \quad (10.35)$$

<sup>7</sup>Trascuriamo per un momento le correzioni alle linee esterne, e la correzione al propagatore del fotone, ciascuna delle quali produce una rinormalizzazione della carica elettrica.

<sup>8</sup>Assumiamo  $\vec{p} = 0$ , da cui il caso generale segue con una trasformazione di Lorentz. Se poniamo

$$u(0) = \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

l'unica grandezza scalare, candidata al ruolo di  $\bar{u}(0) \Lambda^0 u(0)$ , è  $\phi^* \phi = u^* u = \bar{u} \gamma^0 u$ , e quindi  $\bar{u}(0) \Lambda^0(p, p)|_{\vec{p}=0} u(0) \propto \bar{u}(0) \gamma^0 u(0)$ . L'unica grandezza vettoriale è  $\phi^* \vec{\sigma} \phi$ , ma si tratta di un vettore assiale mentre  $\vec{\Lambda}$  dovrebbe essere un vettore polare. Quindi  $\bar{u}(0) \vec{\Lambda}(p, p)|_{\vec{p}=0} u(0) = 0$ . Infine, da

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{segue che} \quad \bar{u}(0) \vec{\gamma} u(0) = 0.$$

In conclusione  $\bar{u}(0) \Lambda^\mu(p, p)|_{\vec{p}=0} u(0) \propto \bar{u}(0) \gamma^\mu u(0)$ , come dovevamo dimostrare.

Ne daremo una dimostrazione all'ordine  $\alpha$ . Una dimostrazione valida in generale può essere ottenuta a partire dalla formulazione della QCD in termini della somma sui cammini. Usando la (10.18) otteniamo

$$\frac{d\Sigma(p)}{dp_\mu} = B\gamma^\mu + \frac{d\Sigma_c(p)}{dp_\mu}(p - m) + \Sigma_c(p)\gamma^\mu.$$

Se prendiamo l'elemento di matrice di questa tra spinori  $u(p)$  tenendo presente che  $\Sigma_c(p)$  è esso stesso proporzionale a  $p - m$  e che  $(p - m)u(p) = \bar{u}(p)(p - m) = 0$  otteniamo che

$$\bar{u}(p)\frac{d\Sigma(p)}{dp_\mu}u(p) = B\bar{u}(p)\gamma^\mu u(p),$$

mentre dalla (10.33) otteniamo

$$\bar{u}(\vec{p})\Lambda^\mu(p, p)u(\vec{p}) = L\bar{u}(\vec{p})\gamma^\mu u(\vec{p}).$$

Paragonando le ultime due equazioni con l'identità (10.35) otteniamo

$$B = L \quad \text{cioè} \quad Z_1 = Z_2, \quad (10.36)$$

quindi la cancellazione delle rinormalizzazioni della carica dovute alle correzioni alla parte vertice — eq. (10.34) — e al propagatore dell'elettrone — eq. (10.24).

Questo è un risultato di estrema importanza, perchè le correzioni al propagatore o al vertice dipendono evidentemente dalla massa della particella, e ancora più dalle interazioni cui la particella è sottoposta. Sarebbe infatti ragionevole attendersi che le correzioni al propagatore dell'elettrone, del  $\mu$ , del  $\tau$ , per non parlare delle correzioni ai propagatori dei quark o dei mesoni  $W$ , siano tutte diverse tra loro. In questa situazione, senza l'identità di Ward, sarebbe estremamente difficile capire l'universalità della costante  $e$  che descrive la carica sia dell'elettrone che del protone, che sono sperimentalmente eguali con precisione estrema. Notiamo viceversa che la rinormalizzazione della carica dovuta alle correzioni del propagatore del fotone sono le stesse per tutte le particelle cariche cui il fotone si accoppia.

All'ordine  $e_0^2$  si può dimostrare l'identità di Ward calcolando direttamente la derivata di  $\Sigma(p)$  come risulta dalla eq. (10.17). Naturalmente questa operazione è priva di senso dato che l'integrale nella è eq. (10.17) divergente, come del resto quello nella (10.30) con cui ci dobbiamo confrontare. Dobbiamo quindi immaginare di aver regolarizzato la teoria, ad esempio con una regolarizzazione dimensionale, scrivendo

$$\Sigma(p) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^{4-\eta}k}{k^2 + i\epsilon} \left[ \gamma^\alpha \frac{1}{p - k - m + i\epsilon} \gamma_\alpha \right].$$

Dato che questo integrale è ora regolare, possiamo applicare la derivata all'integrando. Possiamo allora utilizzare l'identità<sup>9</sup>

$$\frac{d}{dp_\mu} \frac{1}{p - k - m + i\epsilon} = - \frac{1}{p - k - m + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{p - k - m + i\epsilon},$$

<sup>9</sup>Questa si deriva moltiplicando per  $1/(p - k - m + i\epsilon)$  da sinistra la seguente identità:

$$0 = \frac{d}{dp_\mu} \left[ (p - k - m + i\epsilon) \frac{1}{p - k - m + i\epsilon} \right] = \gamma^\mu \frac{1}{p - k - m + i\epsilon} + (p - k - m + i\epsilon) \frac{d}{dp_\mu} \frac{1}{p - k - m + i\epsilon}.$$

da cui

$$\frac{d\Sigma(p)}{dp_\mu} = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^{4-\eta}k}{k^2 + i\epsilon} \left[ \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma_\alpha \right],$$

che coincide con l'espressione regolarizzata di  $\Lambda(p, p)$  eq. (10.30), completando la dimostrazione.

# Capitolo 11

## Applicazioni della QED

In questo Capitolo discuteremo in dettaglio alcune applicazioni dei concetti finora sviluppati: la diffusione in un campo esterno, il calcolo delle correzioni di ordine  $\alpha$  ai livelli energetici degli elettroni atomici ottenuti risolvendo l'equazione di Dirac [1], al propagatore del fotone ed al momento magnetico dell'elettrone. L'accordo tra i risultati di questi calcoli e i dati sperimentali ha confermato in modo inequivocabile la validità della QED e, più in generale, dei concetti che sono alla base della teoria quantistica dei campi.

### 11.1 Diffusione in un campo esterno

La diffusione di un elettrone in un campo esterno (si veda anche [1]) fornisce l'occasione per rivedere, in un contesto semplice, il processo di rinormalizzazione e per discutere su un esempio concreto il problema delle divergenze infrarosse cui abbiamo solo accennato nel capitolo precedente.

La "diffusione da campo esterno" è in realtà solo una idealizzazione della diffusione di un elettrone nell'urto con un bersaglio di grande massa, tipicamente un nucleo pesante, che possiamo con buona approssimazione considerare come una carica elettrica localizzata in una precisa zona dello spazio. Un nucleo di carica  $Ze$  immobile in  $\mathbf{x} = 0$  può ad esempio essere descritto da una corrente "classica"  $j^\mu(x)$  indipendente dal tempo tale che

$$j^\mu(x) = \{\rho(\mathbf{x}), \mathbf{j} = 0\} \quad , \quad \int d^3x \rho(x) = Ze . \quad (11.1)$$

Con questa idealizzazione evitiamo di fornire una descrizione quantistica di questa corrente, ma naturalmente perdiamo anche la possibilità di descrivere fenomeni legati alla sua struttura, come ad esempio l'esistenza di stati eccitati del nucleo. In questo capitolo useremo questo metodo per descrivere una carica elettrica, ma lo potremmo anche usare per descrivere l'emissione di onde elettromagnetiche da un'antenna radio, o la radiazione di sincrotrone emessa da elettroni circolanti in un anello di accumulazione.

L'effetto di una tale corrente "classica" può essere descritto introducendo nel lagrangiano di interazione (9.8) un nuovo termine, che descrive l'interazione del campo elettromagnetico  $A^\mu$  con la corrente classica  $j_\mu$ ,

$$\mathcal{L}_1 = e_0(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu - j^\mu A_\mu + \delta m(\bar{\psi}\psi) . \quad (11.2)$$

Con questa aggiunta il lagrangiano del fotone viene modificato nella forma

$$\frac{-1}{2}(\partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu) \rightarrow \frac{-1}{2}(\partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu) - j^\mu A_\mu. \quad (11.3)$$

Per descrivere l'effetto della corrente  $j^\mu$  in termini di diagrammi è sufficiente una semplice modifica del procedimento che porta dal funzionale generatore ai diagrammi di Feynman per la matrice  $S$ . Infatti paragonando la (11.3) con la (7.19) vediamo che il cambiamento dell'azione prodotto dalla corrente esterna  $j^\mu$  è identico a quello prodotto dalla funzione ausiliaria  $J^\mu$  se  $J^\mu = j^\mu$ . Supponiamo che l'elemento di matrice  $S$  che ci interessa sia connesso dalla formula di riduzione ad una funzione di Green  $\langle 0|T(\cdots\psi\cdots\bar{\psi}\cdots A^\mu\cdots)|0\rangle$ ; il calcolo richiede allora quattro passi:

- (1) Calcolare  $Z[J, \bar{J}, j_\mu]$  come somma di diagrammi.
- (2) Calcolarne la derivata parziale che corrisponde alla funzione di Green

$$\left(\cdots \frac{i\delta}{\delta \bar{J}}, \cdots \frac{-i\delta}{\delta J} \cdots \frac{i\delta}{\delta J_\mu} \cdots\right) Z[J, \bar{J}, j_\mu].$$

Dopo il passo (2) sopravvivono solamente i diagrammi che avevano un numero di "pallini", cioè fattori  $J, \bar{J}, J_\mu$  eguale o superiore al numero delle derivate di ciascuna specie.

- (3) Porre  $J = \bar{J} = J_\mu = 0$ .

Per calcolare la stessa funzione di Green in presenza della corrente classica  $j_\mu$  basta modificare il terzo passo:

- (3') Porre  $J = \bar{J} = 0$  e porre  $J_\mu = j_\mu$ .

- (4) Applicare la formula di riduzione per passare dalla funzione di Green all'elemento di matrice  $S$ .

Guardiamo alla differenza tra (3) e (3'): il passo (3) mette a zero tutti i diagrammi in cui alcuni "pallini" (fattori  $J, \bar{J}, J_\mu$ ) sopravvivono dopo l'applicazione delle derivate parziali. Nel caso (3'), in presenza di una corrente classica  $j_\mu$ , i diagrammi in cui esistono (dopo le derivate) fattori di tipo  $J, \bar{J}$  vengono messi a zero, mentre rimangono in vita tutti i diagrammi provvisti di linee esterne che terminano in un pallino di tipo  $J_\mu$ , ma con  $J_\mu$  sostituita dalla corrente classica  $j_\mu$ . La Fig. 11.1 rappresenta il diagramma di ordine più basso per la diffusione di un elettrone in un campo esterno generato dalla corrente  $j_\mu$ , e in questo caso  $p, p'$  sono gli impulsi dell'elettrone entrante e di quello uscente. La stessa figura può anche essere considerata come una porzione di un diagramma più complesso, in cui  $p, p'$  (o ambedue) sono impulsi di linee interne al diagramma. Alla linea con pallino in questa figura corrisponde un fattore

$$\int d^4y \Delta_F(x-y) j_\mu(y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{1}{q^2 + i\epsilon} e^{-iqx} j_\mu(q) \quad (11.4)$$

$$j_\mu(q) = \int d^4y e^{iqy} j_\mu(y),$$

lo stesso dell'eq. (9.21), ma con la corrente classica  $j_\mu$  al posto della funzione ausiliaria  $J_\mu$ . Il fattore  $e^{-iqx}$  si combina con gli analoghi fattori delle due linee fermioniche a produrre il fattore  $(2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q)$

associato al vertice. In conclusione alle regole di Feynman (9.42) dobbiamo aggiungere

$$\text{Linea di campo esterno} \quad \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 q \frac{j_\mu(q)}{q^2 + i\epsilon}, \quad (11.5)$$

notando però che il fattore  $(2\pi)^4 \delta^4(p' - p - q)$  associato al vertice elimina l'integrazione in  $q$  fissando il valore di  $q = p' - p$ , e che anche i fattori  $(2\pi)^4$  si semplificano.

Consideriamo l'esempio della quadricorrente associata ad una sferetta carica con il centro in  $\mathbf{x} = 0$ ,

$$j_0 = \rho(|\mathbf{x}|); \quad \int d^3 x \rho(|\mathbf{x}|) = Ze_0; \quad \mathbf{j} = 0. \quad (11.6)$$

Avremo allora

$$j_0(q) = \int d^4 y e^{iqy} j_0(y) = 2\pi \delta(q_0) Ze_0 F(\mathbf{q}^2), \quad (11.7)$$

dove il fattore di forma  $F(\mathbf{q}^2)$ , definito dalla trasformata di Fourier sulle coordinate spaziali della distribuzione di carica,

$$Ze F(\mathbf{q}^2) = \int d^3 y e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \rho(|\mathbf{x}|), \quad (11.8)$$

è normalizzato in modo che  $F(0) = 1$ . L'ampiezza di scattering per la diffusione di un elettrone su un campo esterno risulta quindi, all'ordine più basso, con  $q = p' - p$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}', s' | S | \mathbf{p}, s \rangle &= \frac{m}{(2\pi)^3 \sqrt{E E'}} \frac{i e_0}{q^2} j_\mu(q) (\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p)) \\ &= \frac{m}{(2\pi)^3 E} 2\pi \delta(E' - E) \frac{i Z e_0^2 F(\mathbf{q}^2)}{q^2} (\bar{u}(p') \gamma^0 u(p)). \end{aligned} \quad (11.9)$$

Notiamo che dato che il valore di  $q^2 = (\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2$  è fissato, possiamo omettere il termine  $i\epsilon$  nel denominatore. Il fattore  $\delta(E' - E)$  garantisce la conservazione dell'energia degli elettroni, mentre la

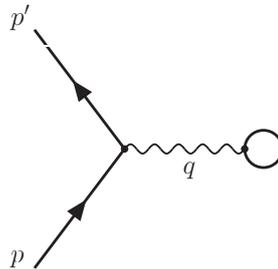


Figura 11.1: Diagramma di Feynman per la diffusione di un elettrone in un campo esterno.

quantità di modo non è conservata, dato che la presenza di un campo esterno causa una violazione dell'invarianza per traslazioni<sup>1</sup>.

Può anche essere interessante esprimere il risultato ottenuto in termini del campo classico  $\tilde{A}_\mu$  prodotto dalla corrente  $j_\mu$ . L'equazione  $\square \tilde{A}_\mu = j_\mu$  porta a

$$\tilde{A}_\mu(q) = \frac{-1}{q^2} j_\mu(q),$$

e possiamo quindi riscrivere l'elemento di matrice S come

$$\langle \mathbf{p}', s' | S | \mathbf{p}, s \rangle = \frac{-ie_0 m}{(2\pi)^3 \sqrt{E E'}} \tilde{A}_\mu(q) (\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p)). \quad (11.10)$$

Utilizzeremo questa forma per discutere delle correzioni radiative al momento magnetico dell'elettrone.

## 11.2 Bremsstrahlung e divergenza infrarossa

Nella Sezione precedente, abbiamo visto che l'interazione con un campo statico deflette la traiettoria dell'elettrone incidente, lasciandone invariata l'energia. Si tratta quindi di un processo di diffusione elastica. In generale, la diffusione di una particella carica è associata all'emissione di fotoni, come illustrato dai diagrammi di Feynman delle Fig. 11.2. In questo caso, il processo è anelastico, perchè parte dell'energia della particella incidente è convertita in energia del fotone presente nello stato finale.

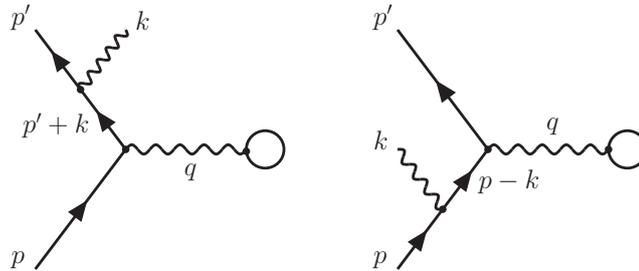


Figura 11.2: Diagrammi di Feynman per i processi di bremsstrahlung.

Dal punto di vista sperimentale, i processi con emissione di radiazione elettromagnetica, detta *bremsstrahlung*, sono indistinguibili da quelli elastici quando l'energia del fotone emesso è al di sotto della soglia di rivelazione dell'apparato di misura. In linea di principio, è quindi necessario tenere

<sup>1</sup>In una trattazione realistica dell'urto tra elettroni e un nucleo di massa  $M$ , se nello stato iniziale il nucleo è in quiete, dopo l'urto esso avrà assorbito dall'elettrone un impulso  $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$ , e quindi una energia di rinculo  $(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2/2M$ . Chiaramente la schematizzazione del nucleo come carica fissa è solamente valida se l'energia dell'elettrone, e quindi il momento trasferito, è molto minore dell'energia di riposo del nucleo bersaglio.

conto del fatto che la sezione d'urto osservata è la somma di due contributi, associati alla diffusione elastica ed alla bremsstrahlung<sup>2</sup>

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}}\right)_{\text{expt}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}}\right)_{\text{el}} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}}\right)_{\text{brem}}. \quad (11.11)$$

Nella (11.11),  $\Omega_{p'}$  è l'angolo solido che individua la direzione dell'elettrone diffuso, e la sezione d'urto elastica è quella che si ottiene dall'ampiezza (11.10).

Nel caso dei processi descritti dai diagrammi della Fig. 11.2, utilizzando le regole di Feynman discusse nella Sezione 11.1 troviamo

$$\langle \mathbf{p}' s'; \mathbf{k} r | S | \mathbf{p} s \rangle = \frac{-ie_0^2 m}{(2\pi)^3 \sqrt{E E'} \sqrt{2\omega}} \bar{u}(p') \left[ \not{\epsilon} \frac{\not{p} + \not{k} + m}{2(pk)} \tilde{A} + \tilde{A} \frac{\not{p} - \not{k} + m}{-2(pk)} \not{\epsilon} \right] u(p), \quad (11.12)$$

dove  $\omega$  e  $\mathbf{k}$  sono, rispettivamente, l'energia e l'impulso del fotone, il cui stato di polarizzazione è descritto dal vettore  $\epsilon$ .

In generale, il calcolo della sezione d'urto a partire dall'ampiezza (11.12) è piuttosto complesso. Si semplifica però notevolmente nel limite  $\omega \approx 0$ , che implica anche  $\mathbf{p} \approx \mathbf{p}'$  e  $\mathbf{q} \approx \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ , al quale siamo interessati. In questo caso l'ampiezza si riduce alla forma

$$\langle \mathbf{p}' s'; \mathbf{k} r | S | \mathbf{p} s \rangle = \langle \mathbf{p}', s' | S | \mathbf{p}, s \rangle \frac{e_0}{\sqrt{2\omega}} \left[ \frac{p'\epsilon}{p'k} - \frac{p\epsilon}{pk} \right], \quad (11.13)$$

dalla quale si ottiene facilmente la sezione d'urto del processo (mediata sullo spin dell'elettrone nello stato iniziale e sommata sugli spin delle particelle nello stato finale)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}}\right)_{\text{brem}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{p'}}\right)_{\text{el}} \frac{-\alpha}{(2\pi)^2} \int_{|\mathbf{k}| < \Delta} \frac{d^3 k}{\omega} \left[ \frac{p'}{p'k} - \frac{p}{pk} \right]^2, \quad (11.14)$$

dove il contributo elastico corrisponde all'ampiezza (11.10) e  $\Delta$  è la soglia in energia dell'apparato di rivelazione dei fotoni.

La sezione d'urto (11.14), oltre alla semplice forma fattorizzata, presenta una divergenza logaritmica nel limite *infrarosso*  $\omega \rightarrow 0$ . Il risultato ottenuto sembrerebbe quindi implicare che la sezione d'urto osservata, risultante dalla somma del contributo elastico discusso nella Sezione precedente e di quello inelastico, dato dalla (11.14), sia divergente per  $\omega \rightarrow 0$ . Una conclusione ovviamente inaccettabile. Notiamo però che la sezione d'urto del processo di bremsstrahlung è di ordine  $\alpha^3$ , mentre quella elastica è di ordine  $\alpha^2$ . Per calcolare in modo consistente la sezione d'urto osservata (11.11) in teoria delle perturbazioni bisogna quindi tenere conto anche dei contributi di ordine  $\alpha^3$  alla sezione d'urto elastica.

Procedendo in questo modo, vedremo che il termine divergente nell'infrarosso della sezione d'urto anelastica viene cancellato esattamente da un termine analogo presente nella correzione di ordine  $\alpha^3$  alla sezione d'urto elastica. Naturalmente, per ottenere questo risultato occorre innanzitutto regolarizzare i termini divergenti, assegnando al fotone una massa finita  $\lambda$ , che verrà fatta tendere a zero al termine del calcolo.

<sup>2</sup>Notiamo che, in questo caso, si devono sommare le sezioni d'urto, e non le ampiezze, perchè i due processi considerati, pur avendo lo stesso stato iniziale, corrispondono a stati finali differenti.

Come abbiamo visto nel Capitolo 10, la correzione di ordine  $\alpha$  al vertice, presenta, oltre alla divergenza ultravioletta che contribuisce alla rinormalizzazione della carica, una divergenza logaritmica, analoga a quella della sezione d'urto (11.14), nel limite infrarosso. Il contributo di questa correzione al processo di diffusione elastica è illustrato dal diagramma della figura 11.3.

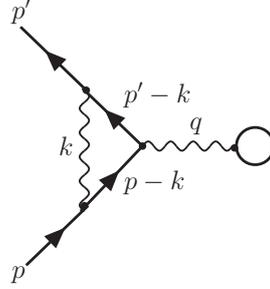


Figura 11.3: Diagramma di Feynman per la correzione al vertice della diffusione di un elettrone in un campo esterno.

Utilizzando l'espressione della correzione al vertice (10.30) possiamo riscrivere  $\bar{u}(p')\Lambda^\mu u(p)$  tenendo presente che per  $\omega \approx 0$  i termini lineari in  $k$  nei numeratori dei propagatori fermionici possono essere trascurati. Otteniamo così

$$e_0^2 \bar{u}(p')\Lambda^\mu(p, p')u(p) = -ie_0^2 \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \times \frac{4(p p')}{[(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon]}. \quad (11.15)$$

L'integrazione sulla variabile  $k_0$  si effettua ricorrendo al teorema di Cauchy, notando che per  $\omega \approx 0$  il contributo dominante è quello associato al polo in  $\omega_\lambda = \sqrt{k^2 + \lambda^2}$ . Troviamo così

$$e_0^2 \bar{u}(p')\Lambda^\mu(p, p')u(p) = ie_0^2 \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{\omega_\lambda} \frac{4(p p')}{[-2(p'k) + \lambda^2][-2(pk) + \lambda^2]}, \quad (11.16)$$

dove l'integrazione tridimensionale è ristretta alla regione  $k \approx 0$ . Il contributo osservabile alla (11.16) si può isolare facilmente utilizzando le (si veda il Capitolo 10)

$$\Lambda^\mu(p, p') = L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p, p'), \quad \bar{u}(p)\Lambda_c^\mu(p, p)u(p) = 0. \quad (11.17)$$

Il risultato

$$e_0^2 \bar{u}(p')\Lambda_c^\mu(p, p')u(p) = e_0^2 \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \frac{1}{4(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{\omega_\lambda} \left[ \frac{2p'}{[-2(p'k) + \lambda^2]} - \frac{2p}{[-2(pk) + \lambda^2]} \right]^2, \quad (11.18)$$

Utilizzando la (11.18) possiamo scrivere l'ampiezza del processo di diffusione elastica all'ordine  $e_0^3$  nella forma

$$\langle \mathbf{p}', s' | S | \mathbf{p}, s \rangle \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{k}| < \Delta} \frac{d^3 k}{\omega_\lambda} \left[ \frac{2p'}{[-2(p'k) + \lambda^2]} - \frac{2p}{[-2(pk) + \lambda^2]} \right]^2 \right\}, \quad (11.19)$$

dove, consistentemente con le semplificazioni introdotte per ottenere la (11.18), l'integrazione è ristretta alla regione  $|\mathbf{k}| \approx 0$ .

Dalle (11.14) e (11.18) segue immediatamente che il contributo alla sezione d'urto elastica associato al termine di interferenza tra le due ampiezze che compaiono nella (11.18) cancella esattamente la divergenza infrarossa della (11.14). Bloch e Nordsieck hanno dimostrato che le divergenze infrarosse si cancellano a tutti gli ordini della teoria delle perturbazioni.

### 11.3 Il Lamb shift

Gli autovalori dell'energia che si ottengono dalla soluzione dell'equazione di Dirac per l'atomo di idrogeno (si veda [1], Sezione 6.1) dipendono dal numero quantico principale  $n$  e dal momento angolare totale  $j$ . Gli stati  $2S_{1/2}$  e  $2P_{1/2}$ <sup>3</sup>, sono quindi degeneri.

Nel 1947 Willis Lamb e Robert Retherford osservarono sperimentalmente una differenza di energia tra questi stati, nota come *Lamb shift*, la cui interpretazione in termini di effetti di interazione tra gli elettroni atomici ed il campo di radiazione si può considerare la prima applicazione dell'elettrodinamica quantistica.

Poche settimane dopo la pubblicazione dei risultati sperimentali, Hans Bethe effettuò un calcolo perturbativo dell'autoenergia di un elettrone atomico utilizzando un semplice formalismo non relativistico [16]. Come abbiamo visto nel Capitolo ??, l'effetto dominante delle autointerazioni dell'elettrone è la rinormalizzazione della massa, che viene modificata dal suo valore in assenza di interazioni,  $m_0$ , al valore osservato  $m = m_0 + \delta m$ , mentre il termine  $\Sigma_c(p)$ , che in generale dà luogo a correzioni osservabili, non contribuisce ai processi come la diffusione Coulombiana (si veda [1], Capitolo 14), nei quali gli elettroni negli stati iniziale e finale sono descritti da soluzioni dell'equazione di Dirac libera<sup>4</sup>.

L'idea fondamentale del lavoro di Bethe è che per ottenere il Lamb shift si deve rimuovere dal risultato del calcolo perturbativo l'effetto della rinormalizzazione della massa, sottraendo all'autoenergia dell'elettrone atomico quella di un elettrone interagente con il campo di radiazione nel vuoto.

In modo esplicito, possiamo scrivere la rinormalizzazione della massa dell'elettrone nell'atomo come

$$m_{at} = m_0 + \delta m_{at} = m_0 + \delta m + (\delta m_{at} - \delta m) = m + (\delta m_{at} - \delta m). \quad (11.20)$$

L'effetto di rinormalizzazione che si ottiene in questo modo è finito ed in ottimo accordo con il dato sperimentale.

**Il calcolo di Bethe del Lamb shift.** Il punto di partenza è l'Hamiltoniana che descrive il sistema di un elettrone atomico in interazione con un campo elettromagnetico descritto dal potenziale vettore  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$

$$H = H_e + H_{rad} + H_{int}, \quad (11.21)$$

<sup>3</sup>Usiamo qui la notazione spettroscopica standard, nella quale gli stati  $2S_{1/2}$  e  $2P_{1/2}$  corrispondono a  $n = 1$ ,  $j = 1/2$  e momento angolare orbitale, rispettivamente,  $\ell = 0$  e  $1$ .

<sup>4</sup>Se  $u(p)$  è una soluzione dell'equazione di Dirac libera vale infatti la relazione  $\Sigma_c(p)u(p) = 0$  (si veda l'Eq. (10.19)).

con

$$\begin{aligned} H_e &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} + V(\mathbf{x}), \\ H_{\text{rad}} &= \frac{1}{2} \int d^3x |\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})|^2, \\ H_{\text{int}} &= -\frac{e}{m_0} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (11.22)$$

dove  $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla_0 \mathbf{A}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x})$ ,  $V(\mathbf{x})$  è il potenziale elettrostatico del nucleo atomico e il campo  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  soddisfa alla condizione di gauge di Coulomb,  $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0$ <sup>5</sup>.

Consideriamo le correzioni perturbative all'energia dello stato  $|n, 0\rangle$ ,  $E_n$ , che descrive un elettrone nello stato  $n$  in assenza di radiazione. Il termine del primo ordine in  $H_{\text{int}}$  è nullo, in quanto il campo  $\mathbf{A}$  è lineare negli operatori di creazione e distruzione dei fotoni. Il termine di ordine due assume una forma particolarmente semplice nell'approssimazione detta di dipolo, che consiste nel trascurare la dipendenza da  $x$  del campo di radiazione. L'espressione che si ottiene in questa approssimazione, che è lecita poichè i fotoni che danno contributo significativo alla somma hanno lunghezze d'onda grandi rispetto al raggio di Bohr, è

$$\Delta E_n = -\frac{e^2}{m_0^2} \sum_m \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{\langle n, 0 | \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda | m, \mathbf{k}, \lambda \rangle \langle m, \mathbf{k}, \lambda | \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda | n, 0 \rangle}{E_m - E_n + k}, \quad (11.23)$$

dove le somme includono tutti gli stati con un elettrone nello stato  $m$  e un fotone di vettore d'onda  $\mathbf{k}$  e polarizzazione  $\lambda$ , la cui energia è pari a  $E_m + k$  ( $k = |\mathbf{k}|$ ). Passando al limite del continuo e usando l'ortogonalità tra i vettori di polarizzazione del campo di radiazione  $\boldsymbol{\epsilon}_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2$ ) e  $\mathbf{k}$ , da cui segue che

$$\sum_{\lambda=1}^2 p^i p^j \epsilon^i \epsilon^j = \mathbf{p}^2 - \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})^2}{k^2}, \quad (11.24)$$

otteniamo

$$\Delta E_n = -\frac{e^2}{m_0^2} \frac{1}{6\pi^2} \int k dk \sum_m \frac{|\mathbf{p}_{mn}|^2}{E_m - E_n + k}, \quad (11.25)$$

con  $\mathbf{p}_{mn} = \langle m | \mathbf{p} | n \rangle$ .

Nel caso di elettroni liberi l'espressione che abbiamo ottenuto si semplifica drasticamente, poichè solo gli elementi di matrice diagonali dell'operatore  $\mathbf{p}$  sono diversi da zero. Di conseguenza, la (11.25) diventa

$$\Delta E_n = \Delta E_p = -\frac{e^2}{m_0} \frac{1}{3\pi^2} \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} \int dk, \quad (11.26)$$

da cui segue che, all'ordine  $e^2$ , possiamo scrivere

$$E_p = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} \left( 1 - \frac{\delta m}{m_0} \right) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (11.27)$$

<sup>5</sup>Nell'Hamiltoniana abbiamo ommesso il termine in  $\mathbf{A}^2$  che si ottiene dalla sostituzione minimale  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}$ . Il contributo di questo termine è indipendente dall'impulso dell'elettrone, e quindi irrilevante ai fini del calcolo che stiamo discutendo.

con

$$\delta m = \frac{4\alpha}{3\pi} \int dk, \quad (11.28)$$

dove  $\alpha = e^2/4\pi$  è la costante di struttura fina.

**Natura della divergenza di massa dell'elettrone** La relazione 11.28 mostra che l'autoenergia di un elettrone nel vuoto è linearmente divergente con il valore del cutoff ultravioletto. Questo risultato è consistente con la considerazione classica che l'autoenergia di una carica elettrica concentrata in un sfera di raggio  $R$  diverge come  $R^{-1}$  e, apparentemente, anche con la divergenza lineare ottenuta per  $\Sigma(p)$  nell' eq. (10.17). Tuttavia, nella QED la correzione all'autoenergia, cioè alla massa di riposo, diverge solo logicamente. Questo è dovuto ad una simmetria speciale che la QED raggiunge nel limite  $m_0 \rightarrow 0$  dell'elettrone, la simmetria *chirale*:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\psi(x). \quad (11.29)$$

Le correzioni di ordine superiore devono anch'esse annullarsi per  $m_0 \rightarrow 0$ , in modo che la massa rinormalizzata sia anch'essa nulla nel limite di simmetria chirale esatta. Di conseguenza, deve essere  $\delta m$  proporzionale ad  $m_0$  e quindi

$$\delta m = C \frac{\alpha}{\pi} m \log \frac{\Lambda}{m}, \quad (11.30)$$

dove  $\Lambda$  è il cutoff e  $C$  una costante che si calcola a partire dalla (10.17). La conclusione di questo argomento è che nella QED relativistica una sola sottrazione, come appunto nella 11.20, è sufficiente a rendere finita l'autoenergia dell'elettrone.

Nell'ambito della trattazione non relativistica di Bethe, l'integrale nella (11.25) viene regolarizzato introducendo come limite superiore all'integrazione il valore  $K = m$ , ovvero il limite dell'approssimazione relativistica, in linea con la necessità di una sola sottrazione nella QED relativistica.

La (11.26) si può generalizzare al caso di un elettrone nello stato  $n$  non interagente col campo  $\mathbf{A}$  sostituendo

$$\mathbf{p}^2 \rightarrow \langle n | \mathbf{p}^2 | n \rangle = \sum_m |\langle m | \mathbf{p} | n \rangle|^2 = \sum_m |\mathbf{p}_{mn}|^2.$$

Vogliamo ora sottrarre il contributo risultante, che indichiamo con  $\Delta E_n^0$  dalla (11.25). Otteniamo così, all'ordine  $e^2$

$$\Delta E_n - \Delta E_n^0 = \frac{e^2}{m^2} \frac{1}{6\pi^2} \sum_m |\mathbf{p}_{mn}|^2 \int dk \frac{E_m - E_n}{E_m - E_n + k}. \quad (11.31)$$

Per prima cosa effettuiamo l'integrale su  $k$ , tenendo presente che il limite superiore  $K$  è molto maggiore delle differenze  $E_m - E_n$ . Si trova così<sup>6</sup>

$$\int_0^K dk \frac{E_m - E_n}{E_m - E_n + k} = (E_m - E_n) \ln \frac{K}{|E_m - E_n|}. \quad (11.32)$$

Notiamo che, grazie alla sottrazione che abbiamo effettuato, il grado di divergenza del risultato ottenuto, nel limite  $K \rightarrow \infty$ , si è abbassato da lineare a logaritmico.

<sup>6</sup>Il risultato si ottiene immediatamente nel caso in cui  $E_m - E_n \geq 0$ . In caso contrario bisogna calcolare il valore principale dell'integrale.

Resta da calcolare la somma sugli stati intermedi, che si semplifica notevolmente se si elimina la dipendenza da  $m$  dell'argomento del logaritmo, sostituendo alla differenza  $|E_m - E_n|$  il suo valor medio  $\langle |E_m - E_n| \rangle$ . Possiamo così utilizzare la relazione

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_{mn}|^2 (E_m - E_n) &= \langle n | \mathbf{p} | m \rangle \langle m | \mathbf{p} | n \rangle (E_m - E_n) \\ &= \frac{1}{2} \langle n | [\mathbf{p}, H_e] | m \rangle \langle m | \mathbf{p} | m \rangle - \frac{1}{2} \langle n | \mathbf{p} | m \rangle \langle m | [\mathbf{p}, H_e] | m \rangle \end{aligned} \quad (11.33)$$

Usiamo la relazione

$$[\mathbf{p}, H_e] = [\mathbf{p}, V] = -i(\nabla V), \quad (11.34)$$

per ottenere:

$$\sum_m |\mathbf{p}_{mn}|^2 (E_m - E_n) = -\frac{i}{2} \langle n | [\nabla V, \mathbf{p}] | n \rangle = \frac{1}{2} \langle n | \nabla^2 V | n \rangle = \frac{1}{2} \int d^3x |\psi_n(x)|^2 \nabla^2 V, \quad (11.35)$$

dove  $\psi_n(x)$  è la funzione d'onda dello stato  $n$ . Dall'equazione di Poisson per una distribuzione di carica puntiforme

$$\nabla^2 V = -Ze^2 \delta(x), \quad (11.36)$$

dove  $Z$  è il numero atomico, segue quindi che

$$\sum_m |\mathbf{p}_{mn}|^2 (E_m - E_n) = Ze^2 |\psi_n(0)|^2. \quad (11.37)$$

Mettendo tutto insieme si arriva all'espressione del Lamb shift

$$\Delta E_{\text{Lamb}} = \Delta E_n - \Delta E_n^0 = Z\alpha^2 \frac{4}{3m^2} |\psi_n(0)|^2 \ln \frac{K}{\langle |E_m - E_n| \rangle}, \quad (11.38)$$

che mostra come il risultato sia zero per tutti gli stati con momento angolare orbitale diverso da zero, per i quali  $\psi_n(0) = 0$ . Per lo stato  $2S_{1/2}$ , usando i valori  $\langle |E_m - E_n| \rangle = 226.3$  eV e  $K = m$  Bethe ha ottenuto così una frequenza  $\nu_{\text{Lamb}} = 1040$  MHz, in ottimo accordo col valore misurato di 1000 MHz.

I calcoli relativistici effettuati successivamente hanno confermato la validità del metodo utilizzato da Bethe, mostrando che gli effetti relativistici, la polarizzazione del vuoto e la correzione del vertice danno contributi trascurabili. I risultati dei calcoli teorici del Lamb shift che includono questi effetti riproducono i risultati sperimentali con una precisione dello 0.0001%.

## 11.4 Tensore di Polarizzazione del vuoto

### 11.4.1 Integrazione in D dimensioni

Come prima cosa, dimostriamo un risultato che utilizzeremo per effettuare il calcolo di integrali che compaiono in teoria delle perturbazioni:

$$I(s, D, n) = \int \frac{d^D k}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} = i\pi^{D/2} (-1)^n \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}}. \quad (11.39)$$

Gli integrali (11.39) si estendono su uno spazio a  $D$  dimensioni,  $k = \{k_0, k_1, \dots, k_{D-1}\}$ , con metrica di Minkowski:  $k^2 = k_0^2 - k_1^2 - \dots - k_{D-1}^2$ . Assumeremo che  $s$  sia reale<sup>7</sup> e positivo.

La funzione  $\Gamma$  è definita dalle

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dy y^{x-1} e^{-y}, \quad \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1), \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad (11.40)$$

In realtà siamo interessati al caso  $D = 4$ , ma vogliamo anche considerare una continuazione analitica a valori arbitrari di  $D$  definita dal risultato nella (11.39), che è una funzione analitica di  $D$ , a parte poli in  $D/2 = n, n+1, \dots$

La funzione  $\Gamma(x)$  è infatti analitica per  $\Re(x) > 0$ , e può essere continuata a valori  $\Re(x) \leq 0$  usando la relazione  $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$ , con la quale si dimostra facilmente che  $\Gamma(x)$  è analitica in tutto il piano complesso con l'eccezione di poli per  $x = 0, x = -1, \dots$ . Ad esempio, partendo dallo sviluppo in serie di Taylor nei dintorni di  $x = 1$ , dove  $\Gamma(x)$  è analitica [13]

$$\Gamma(1 + \eta) = 1 + \gamma\eta + \mathcal{O}(\eta^2),$$

dove  $\gamma$  è la costante di Eulero,  $\gamma = 0.5772\dots$ , otteniamo, nei dintorni di  $x = 0$

$$\Gamma(\eta) = \frac{1}{\eta} + \gamma + \mathcal{O}(\eta).$$

Per ottenere il risultato in (11.39) conviene prima di tutto ruotare il cammino di integrazione nella variabile  $k_0$ , dalla posizione orizzontale a quella verticale. Se si ruota in senso antiorario non si incontrano singolarità, come mostrato dalla figura 11.4. Questa operazione è detta rotazione di Wick. Dopo la rotazione possiamo passare al limite  $\epsilon \rightarrow 0$  dato che le due singolarità in  $k_0 = \pm\omega = \pm\sqrt{s + k_1^2 + \dots + k_{D-1}^2}$  sono distanti dal nuovo cammino di integrazione. Possiamo quindi porre:  $k_0 = ik_D$  e  $dk_0 = i dk_D$ , e riscrivere l'integrale nella forma

$$I(s, D, n) = i(-1)^n \int \frac{d^D p}{(p^2 + s)^n}, \quad (11.41)$$

dove  $p = \{k_1, \dots, k_{D-1}, k_D\}$  è un vettore a  $D$  dimensioni con metrica euclidea,  $p^2 = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_D^2$ . Per calcolare l'integrale passiamo a coordinate polari nello spazio a  $D$  dimensioni. Dato che l'integrale non dipende dalle variabili angolari, queste possono essere integrate direttamente, e con il cambiamento di variabili  $x = p^2/s$ ,  $p dp = s dx/2$  otteniamo:

$$I(s, D, n) = i(-1)^n \int \frac{p^{D-1} dp d\Omega_D}{[p^2 + s]^n} = i(-1)^n \frac{\Omega_D}{2s^{n-D/2}} \int_0^\infty \frac{x^{(D-2)/2} dx}{(1+x)^n}. \quad (11.42)$$

L'integrale è convergente per  $x \rightarrow \infty$  se  $n > D/2$ . Come si dimostra facilmente considerando un integrale gaussiano, l'angolo solido in  $D$  dimensioni è dato dalla

$$\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}, \quad (11.43)$$

<sup>7</sup>Il valore di  $I(s, D, n)$  per valori complessi di  $s$  si può ottenere per continuazione analitica del risultato che deriveremo.

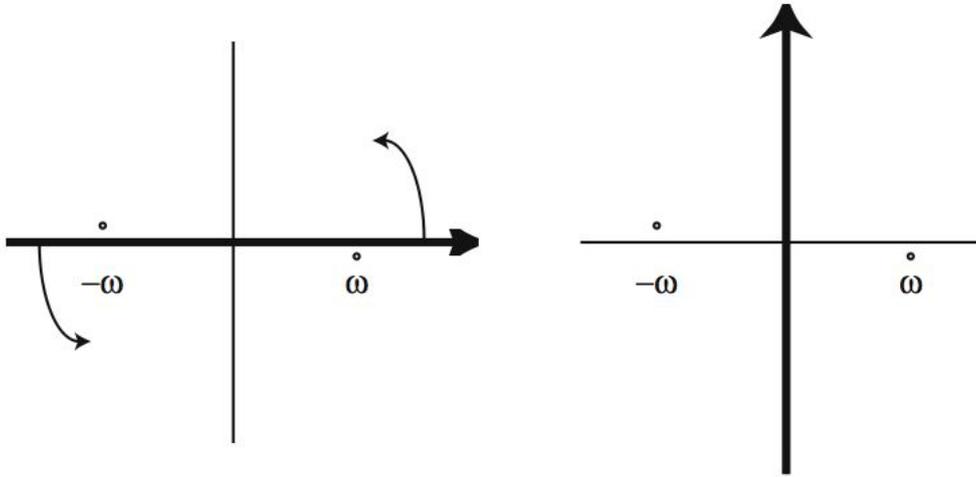


Figura 11.4: La rotazione di Wick

che riproduce i risultati ben noti  $\Omega_2 = 2\pi$  e, dato che  $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}/2$ ,  $\Omega_3 = 4\pi$ . In quattro dimensioni si ottiene  $\Omega_4 = 2\pi^2$ . L'integrale residuo si esprime mediante la funzione Beta (si veda [14], Cap. 15 per la dimostrazione, ma qui usiamo la notazione di [13]),

$$B(z, w) = \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1} dx}{(1+x)^{z+w}} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad (11.44)$$

e si ritrova così la (11.39).

## 11.4.2 Parametrizzazione di Feynman

L'integrale

$$I(p) = \int d^D k \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (11.45)$$

si può esprimere in termini di un'integrazione parametrica su una variabile reale  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) con un procedimento introdotto da R.P. Feynman.

Il punto di partenza è l'identità

$$\frac{1}{D_1 D_2} = \int_0^1 d\alpha \frac{1}{[\alpha D_1 + (1-\alpha) D_2]^2}, \quad (11.46)$$

che si dimostra semplicemente calcolando il secondo membro

$$\int_0^1 d\alpha \frac{1}{[\alpha D_1 + (1-\alpha) D_2]^2} = \int_0^1 d\alpha \frac{1}{[\alpha(D_1 - D_2) + D_2]^2} = \frac{1}{D_1 - D_2} \left( \frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1} \right) = \frac{1}{D_1 D_2}. \quad (11.47)$$

Applicando la (11.46) troviamo, ad esempio

$$\begin{aligned}
 I(p) &= \int_0^1 d\alpha \int d^D k \frac{1}{[\alpha(k-p)^2 + (1-\alpha)k^2 - m^2]^2} \\
 &= \int_0^1 d\alpha \int d^D k \frac{1}{[k^2 - 2\alpha k \cdot p + \alpha p^2 - m^2]^2} \\
 &= \int_0^1 d\alpha \int d^D k \frac{1}{[(k-\alpha p)^2 + \alpha(1-\alpha)p^2 - m^2]^2}.
 \end{aligned} \tag{11.48}$$

Dopo il cambiamento di variabile:  $k - \alpha p = k'$ , l'integrale (11.48) prende la forma (11.39) con

$$s = m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2, \quad n = 2, \tag{11.49}$$

da cui segue

$$I(p) = i\pi^{D/2} \Gamma(2-D/2) \int_0^1 d\alpha \frac{1}{[m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2]^{2-D/2}}. \tag{11.50}$$

Poniamo adesso  $D = 4 - \eta$ , con l'idea di passare poi al limite  $\eta \rightarrow 0^+$ . Otteniamo così

$$\begin{aligned}
 I(p) &= i\pi^{2-\eta/2} \Gamma(\eta/2) \int_0^1 d\alpha e^{-\frac{\eta}{2} \ln[m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2]} \\
 &= i\pi^2 \left\{ \frac{2}{\eta} - \ln \pi - \int_0^1 d\alpha \ln [m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2] + \mathcal{O}(\eta) \right\} \\
 &= I(0) - i\pi^2 \int_0^1 d\alpha \ln \left[ 1 - \alpha(1-\alpha) \frac{p^2}{m^2} \right],
 \end{aligned} \tag{11.51}$$

dove  $I(0)$  è una costante, divergente nel limite  $\eta \rightarrow 0^+$ .

### 11.4.3 Calcolo del tensore $\Pi^{\mu\nu}(k)$ a un loop

Partiamo dalla (10.4), che fornisce l'espressione del tensore di polarizzazione del vuoto nella regolarizzazione dimensionale:

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\nu(\not{p} + \not{k} + m)]}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)}. \tag{11.52}$$

Usando la parametrizzazione di Feynman, possiamo riscrivere la (11.52) nella forma

$$\begin{aligned}
 \Pi^{\mu\nu}(k) &= \int_0^1 d\alpha \left[ \frac{i}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\nu(\not{p} + \not{k} + m)]}{[(p + \alpha k)^2 - m^2 + \alpha(1-\alpha)k^2 + i\epsilon]^2} \right] \\
 &= \int_0^1 d\alpha \left[ \frac{i}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} - \alpha\not{k} + m)\gamma^\nu(\not{p} + (1-\alpha)\not{k} + m)]}{[p^2 - m^2 + \alpha(1-\alpha)k^2 + i\epsilon]^2} \right],
 \end{aligned} \tag{11.53}$$

dove abbiamo cambiato variabile di integrazione ponendo  $p + \alpha k = p'$ , che continuiamo, per semplicità di notazione, ad indicare con  $p$ .

La traccia al numeratore si calcola con le solite regole, visto che, in una generica dimensione  $D$ , valgono ancora le regole dell' algebra di Dirac

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g^{\mu\nu}, \quad (11.54)$$

con

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = D. \quad (11.55)$$

Poniamo inoltre, nello spazio degli indici delle matrici gamma

$$\text{Tr}(\mathbb{1}) = f(D), \quad f(4) = 4. \quad (11.56)$$

Come vedremo, della funzione  $f(D)$  non occorre sapere altro.

Con queste regole, la traccia al numeratore della (11.53) dà il risultato

$$\begin{aligned} & \text{Tr}[\gamma^\mu(p - \alpha k + m)\gamma^\nu(p + (1 - \alpha)k + m)] \\ &= f(D) \left[ 2p^\alpha p^\beta - g^{\alpha\beta} p^2 - 2\alpha(1 - \alpha)k^\alpha k^\beta + g^{\alpha\beta} [\alpha(1 - \alpha)k^2 + m^2] \right] \\ &+ (\text{termini lineari in } p). \end{aligned} \quad (11.57)$$

Inserendo il risultato della traccia nella (11.53), notiamo che i termini lineari in  $p$  danno contributo nullo all'integrale. Gli integrali non nulli si possono ricondurre alla formula (11.39) utilizzando le relazioni

$$I_2 = \int d^D p \frac{p^2}{(p^2 - s + i\epsilon)^2} = I(s, D, 1) + sI(s, D, 2), \quad (11.58)$$

$$I_2^{\alpha\beta} = \int d^D p \frac{p^\alpha p^\beta}{(p^2 - s + i\epsilon)^2} = \frac{g^{\alpha\beta}}{D} I_2. \quad (11.59)$$

L'ultimo risultato segue dal fatto che  $I_2^{\alpha\beta}$  deve essere proporzionale a  $g^{\alpha\beta}$  e dalla (11.55).

Mettendo tutto insieme, otteniamo

$$\begin{aligned} & \int d^D p \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(p - \alpha k + m)\gamma^\nu(p + (1 - \alpha)k + m)]}{[p^2 - m^2 + \alpha(1 - \alpha)k^2 + i\epsilon]^2} = f(D) \left\{ \frac{2 - D}{D} g^{\alpha\beta} [I(s, D, 1) + sI(s, D, 2)] \right. \\ & \left. + g^{\alpha\beta} [m^2 + \alpha(1 - \alpha)k^2] I(s, D, 2) - 2\alpha(1 - \alpha)k^\alpha k^\beta I(s, D, 2) \right\}, \end{aligned} \quad (11.60)$$

e usando la relazione

$$\frac{2 - D}{D} I(s, D, 1) = -\frac{2s}{D} I(s, D, 2), \quad (11.61)$$

arriviamo al risultato

$$\begin{aligned} \Pi^{\alpha\beta} &= \int_0^1 d\alpha \left[ \frac{i}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{\text{Tr}[\gamma^\alpha(p - \alpha k + m)\gamma^\beta(p + (1 - \alpha)k + m)]}{[p^2 - m^2 + \alpha(1 - \alpha)k^2 + i\epsilon]^2} \right] \\ &= \left[ -\frac{f(D)}{2^{D-1}\pi^{D/2}} \int_0^1 d\alpha \alpha(1 - \alpha) \frac{\Gamma(2 - D/2)}{s^{2-D/2}} \right] (g^{\alpha\beta} k^2 - k^\alpha k^\beta). \end{aligned} \quad (11.62)$$

con  $s = m^2 - \alpha(1 - \alpha)k^2$ . Notiamo che abbiamo ottenuto la struttura richiesta dalla (10.5), come conseguenza del fatto che la regolarizzazione dimensionale rispetta l'invarianza sotto trasformazioni di gauge.

Confrontando con le definizioni (10.6) e (10.7) ed usando le formule (11.51) otteniamo<sup>8</sup>

$$e_0^2 \Pi_c(k^2) = \frac{e_0^2}{2\pi^2} \int_0^1 d\alpha \alpha(1 - \alpha) \ln \left[ 1 - \alpha(1 - \alpha) \frac{k^2}{m^2} \right]. \quad (11.63)$$

In conclusione, ripartendo dalla (10.2)

$$iD_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} + \frac{-ig_{\mu\alpha}}{k^2 + i\epsilon} i e_0^2 \Pi^{\alpha\beta}(k) \frac{-ig_{\beta\nu}}{k^2 + i\epsilon}, \quad (11.64)$$

con

$$\Pi^{\alpha\beta}(k) = g^{\alpha\beta} A(k^2) + k^\alpha k^\beta B(k^2), \quad (11.65)$$

e

$$A(k^2) = k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2), \quad (11.66)$$

arriviamo alla

$$iD_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu} Z_3}{k^2 + i\epsilon} [1 + e^2 \Pi_c(k)], \quad (11.67)$$

con

$$e^2 \Pi_c = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z(1 - z) \ln \left[ 1 - z(1 - z) \frac{k^2}{m^2} \right]. \quad (11.68)$$

Notiamo che a questo ordine della teoria delle perturbazioni possiamo identificare la *carica nuda*,  $e_0$  con la *carica fisica* o rinormalizzata,  $e$ . Nella (11.63) abbiamo evidenziato, come si fa di solito, la costante di struttura fina  $\alpha$ , definita come

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}. \quad (11.69)$$

Per evitare una possibile confusione, la variabile di integrazione è stata denominata  $z$ .

## 11.5 Il momento magnetico anomalo

Il calcolo accurato del momento magnetico ell'elettrone è certamente uno dei grandi successi della QED. Secondo la teoria di Dirac, il fattore giromagnetico dell'elettrone, che ne determina il momento magnetico in unita di magnetoni di Borh, è esattamente pari a 2 [1]. Nel contesto della QED questo valore è modificato da effetti di ordine superiore nella costante di struttura fina. Eseguiamo interamente il calcolo, effettuato per la prima volta da Schwinger nel 1949, introducendo alcune semplificazioni che lo rendono particolarmente compatto. Assumeremo anche che il lettore abbia presente la discussione in [1], Sezione 14.2.

<sup>8</sup>La (11.51) mostra che il termine proporzionale a  $\eta$  nello sviluppo di termini come  $\pi^{D/2}$  contribuisce al risultato finale con un termine costante, che si ingloba nel valore a  $k = 0$  e non influenza il valore di  $\Pi_c(k)$ . Un argomento analogo vale per la funzione  $f(D)$ , della quale conta solo il valore per  $D = 4$ , come avevamo anticipato.

### 11.5.1 Preliminari

Cominciamo con una premessa. La forma più generale della funzione di vertice che descrive l'accoppiamento tra un fotone ed un elettrone *on-shell* si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\Lambda^\mu(p', p)u(p) = & \bar{u}(p') \left[ A_1(q^2)\gamma^\mu + A_2(q^2)p^\mu + A_3(q^2)p'^\mu \right. \\ & \left. + A_4(q^2)\sigma^{\mu\nu}p_\nu + A_5(q^2)\sigma^{\mu\nu}p'_\nu \right] u(p), \end{aligned} \quad (11.70)$$

con  $p^2 = p'^2 = m^2$  e  $q = p' - p$ . La conservazione della corrente, espressa dalla relazione

$$q_\mu \bar{u}(p')\Lambda^\mu(p', p)u(p) = 0,$$

implica che  $A_2(q^2) = A_3(q^2)$  e  $A_5(q^2) = -A_4(q^2)$ , cioè che

$$\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p', p)u(p) = \bar{u}(p') \left[ A_1(q^2)\gamma^\mu + A_2(q^2)(p + p')^\mu + A_4(q^2)\sigma^{\mu\nu}q_\nu \right] u(p). \quad (11.71)$$

Inoltre l'ermiticità richiede che le funzioni  $A_1(q^2)$  e  $A_2(q^2)$  siano reali e che  $A_4(q^2)$  sia immaginaria. Tenendo presente la identità di Gordon (si veda [1], Eq.(14.35))

$$2m \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[ (p + p')^\mu + i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \right] u(p), \quad (11.72)$$

possiamo quindi scrivere l'elemento di matrice  $\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p', p)u(p)$  nella forma

$$\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p', p)u(p) = \bar{u}(p') \left[ F_1(q^2)\gamma^\mu + F_2(q^2)\frac{1}{2m}i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \right] u(p), \quad (11.73)$$

con  $F_1(q^2)$  e  $F_2(q^2)$  reali. D'altra parte, sappiamo che (si veda l' Eq. (10.31)) ,

$$\Lambda^\mu(p', p) = L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p', p) \quad (11.74)$$

e, poichè  $p', p$  corrispondono a quadrimpulsi di particelle fisiche ( $p^2 = p'^2 = m^2$ ), possiamo usare la relazione (10.33), valida nel limite  $q \rightarrow 0, p \rightarrow p'$

$$\bar{u}(p)\Lambda_c^\mu(p, p)u(p) = 0, \quad (11.75)$$

Paragonando con la (11.73), dato che il termine in  $F_2$  è esplicitamente proporzionale a  $q$  si vede che  $F_1(0) = L$ . Se quindi calcoliamo l'espressione a secondo membro della (11.73) omettendo termini di ordine  $O(q^2)$  troviamo

$$\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p', p)u(p) = \bar{u}(p') \left[ L\gamma^\mu + F_2(0)\frac{1}{2m}i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \right] u(p) + O(q^2). \quad (11.76)$$

In virtù dell'identità di Ward, il termine  $L$  sarà esattamente cancellato dalla correzione alle linee esterne, per cui la funzione vertice, incluse *tutte* le correzioni del secondo ordine, diventa

$$ie_0 \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \rightarrow ie\bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu + \frac{e}{2m}F_2(0) i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \right] u(p) + O(q^2),$$

e, usando di nuovo l'identità di Gordon (11.72), troviamo

$$\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p', p)u(p) = ie\bar{u}(p')\left[\frac{p^\mu + p'^\mu}{2m} + \frac{e}{2m}(1 + F_2(0))i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\right]u(p) + O(q^2). \quad (11.77)$$

In questa espressione abbiamo incluso l'effetto delle correzioni del secondo ordine alla linea fotonica che rinormalizzano la carica,  $e_0 \rightarrow e$ . Il primo termine  $\propto (p + p')^\mu$  rappresenta l'interazione della carica elettrica (è lo stesso che avremmo per una particella di spin 0), il secondo descrive l'interazione del momento magnetico. Il risultato ottenuto mostra che il momento magnetico del leptone è pari a  $(1 + F_2(0))$  magnetoni di Bohr. Possiamo quindi scrivere il fattore giromagnetico nella forma

$$g = 2[1 + F_2(0)] = 2 + O(\alpha).$$

Per ottenere il valore di  $F_2(0)$  dobbiamo effettuare il calcolo tenendo conto dei termini lineari in  $q$  nell'Eq. (11.73). Il calcolo si semplifica notevolmente se seguiamo le seguenti regole:

1. Omettere i termini che sono esplicitamente di ordine  $q^2$ .
2. Omettere i termini che sono  $\propto \gamma^\mu$ . Come abbiamo visto, questi termini determinano la costante (divergente)  $L$  e sono eliminati dalla rinormalizzazione.

Notiamo che questa procedura ha due importanti vantaggi:

1. Con la prima regola l'integrale si semplifica notevolmente.
2. Con la seconda regola, non solo abbiamo ommesso i termini divergenti ultravioletti, ma abbiamo anche eliminato la divergenza infrarossa, che è prodotta da termini  $\propto \gamma^\mu$ .

Possiamo quindi eseguire il calcolo senza ricorrere a regolarizzazioni ultraviolette o infrarosse, ovvero più correttamente, ma in maniera del tutto equivalente, immaginare che si esegua la regolarizzazione e che si omettano i termini  $\propto \gamma^\mu$ , che nella teoria regolarizzata sono finiti. I termini che restano, cioè  $F_2(0)$ , rimangono finiti nel limite in cui si elimina la regolarizzazione.

### 11.5.2 Il calcolo

Possiamo scrivere la grandezza da calcolare nella forma

$$\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p', p)u(p) = \bar{u}(p')\left(\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{N^\mu(k, p, p')}{(k^2 + i\epsilon)((p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\epsilon)}\right)u(p), \quad (11.78)$$

con

$$N^\mu(k, p, p') = \gamma^\alpha(\not{p}' - \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma_\alpha. \quad (11.79)$$

Cominciamo con lo stabilire alcune relazioni utili tra le variabili

$$q^2 = (p' - p)^2 = 2m^2 - 2(pp') \quad , \quad (p' + p)^2 = 2m^2 + 2(pp') = 4m^2 - q^2. \quad (11.80)$$

Possiamo poi combinare i due ultimi fattori del denominatore scrivendo

$$Q = \frac{p + p'}{2} \quad , \quad p' = Q + \frac{q}{2} \quad , \quad p = Q - \frac{q}{2}. \quad (11.81)$$

Notiamo anche che  $Q^2 = m^2 + q^2/4$  che, dato che vogliamo omettere termini  $O(q^2)$ , possiamo riscrivere come  $Q^2 = m^2 + O(q^2)$ . Abbiamo allora

$$\begin{aligned} [(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon] &= (k^2 - 2(p'k) + i\epsilon)(k^2 - 2(pk) + i\epsilon) \\ &= [(k^2 - 2(Qk) + i\epsilon)^2 - (kq)^2] \\ &= (k^2 - 2(Qk) + i\epsilon)^2 + O(q^2). \end{aligned} \quad (11.82)$$

Quindi, trascurando termini  $O(q^2)$ , possiamo riscrivere la (11.78) nella forma

$$\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p', p)u(p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\bar{u}(p') N^\mu(k, p, p') u(p)}{(k^2 + i\epsilon)(k^2 - 2(Qk) + i\epsilon)^2} + O(q^2). \quad (11.83)$$

Il passo successivo consiste nel combinare i denominatori in uno singolo, usando un'altra parametrizzazione dovuta Feynman

$$\frac{1}{D_1^2 D_2} = 2 \int_0^1 dz \frac{z}{[D_2 + (D_1 - D_2)z]^3}. \quad (11.84)$$

Otteniamo così

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\Lambda^\mu(p', p)u(p) &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_0^1 2z dz \int d^4k \frac{\bar{u}(p') N^\mu(k, p, p') u(p)}{(k^2 - 2z(Qk) + i\epsilon)^3} + O(q^2) \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_0^1 2z dz \int d^4k \frac{\bar{u}(p') N^\mu(k, p, p') u(p)}{[(k - zQ)^2 - z^2 Q^2 + i\epsilon]^3} + O(q^2) \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_0^1 2z dz \int d^4k \frac{\bar{u}(p') N^\mu(k, p, p') u(p)}{[(k - zQ)^2 - z^2 m^2 + i\epsilon]^3} + O(q^2), \end{aligned} \quad (11.85)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che  $Q^2 = m^2 + O(q^2)$ . Possiamo ora eseguire il cambiamento di variabili<sup>9</sup>  $t = k - zQ$ ,  $k = t + z(p + p')/2$ , di modo che

$$\bar{u}\Lambda^\mu(p', p)u = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_0^1 2z dz \int d^4t \frac{\bar{u}(p') N^\mu(t + zQ, p, p') u(p)}{(t^2 - z^2 m^2 + i\epsilon)^3} + O(q^2). \quad (11.86)$$

A questo punto notiamo che in  $N^\mu(t + zQ, p, p')$ , definito dall'Eq. (11.79), sono presenti termini di ordine zero in  $t$ , oltre a termini lineari e quadratici in  $t$ . I termini lineari danno contributo nullo all'integrazione. I termini quadratici in  $t$  danno un contributo proporzionale a  $\gamma^\mu$  e possono essere omessi nello schema di approssimazione che stiamo utilizzando. Possiamo allora scrivere, indicando esplicitamente i termini omessi con  $(\propto \gamma^\mu)$

$$\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p', p)u(p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_0^1 2z dz \int d^4t \frac{\bar{u}(p') N^\mu(z(p + p')/2, p, p') u(p)}{(t^2 - z^2 m^2 + i\epsilon)^3} + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu). \quad (11.87)$$

Siccome il numeratore non dipende da  $t$ , possiamo eseguire immediatamente l'integrale in  $t$  col risultato (si veda la Sezione 11.4.1)

$$\int \frac{d^4t}{(t^2 - z^2 m^2 + i\epsilon)^3} = -i \frac{\pi^2}{2z^2 m^2}, \quad (11.88)$$

<sup>9</sup>Questa operazione è legittima solo se l'integrale è convergente; per questo immaginiamo di aver fatto una regolarizzazione e di passare al limite alla fine del calcolo.

da cui segue che

$$\bar{u}(p')\Lambda^\mu(p', p)u(p) = \frac{-1}{16\pi^2 m^2} \int_0^1 \frac{dz}{z} \bar{u}(p')N^\mu(z(p+p')/2, p, p')u(p) + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu). \quad (11.89)$$

Resta ora da calcolare la quantità (si veda vedi l'Eq. (11.79))

$$X = \bar{u}(p')N^\mu\left(\frac{z(p+p')}{2}, p, p'\right)u(p) = \bar{u}(p')\gamma^\alpha\left(p' - \frac{z(p+p')}{2} + m\right)\gamma^\mu\left(p' - \frac{z(p+p')}{2} + m\right)\gamma_\alpha u(p),$$

che si può riscrivere nella forma

$$X = \bar{u}(p')\left(-2\left(p' - \frac{z(p+p')}{2}\right)\gamma^\mu\left(p' - \frac{z(p+p')}{2}\right) + 4m(1-z)(p+p')^\mu - 2m^2\gamma^\mu\right)u(p),$$

dove l'ultimo termine è  $(\propto \gamma^\mu)$  e può quindi essere omissso. Nel primo termine utilizziamo l'equazione di Dirac, dalla quale segue che a sinistra  $p' = p' - q = m - q$ , mentre a destra  $p' = p' + q = m + q$ . Il risultato è

$$\begin{aligned} X &= \bar{u}(p')\left[-2\left(m(1-z) - q\left(1 - \frac{z}{2}\right)\right)\gamma^\mu\left(m(1-z) + q\left(1 - \frac{z}{2}\right)\right) + 4m(1-z)(p+p')^\mu\right]u(p) + (\propto \gamma^\mu) \\ &= \bar{u}(p')\left[4m(1-z)\left(1 - \frac{z}{2}\right)\frac{1}{2}[q, \gamma^\mu] + 4m(1-z)(p+p')^\mu\right]u(p) + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu), \end{aligned}$$

e usando la relazione  $[q, \gamma^\mu] = 2i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ , e l'identità di Gordon, otteniamo

$$\bar{u}(p')N^\mu\left(\frac{z(p+p')}{2}, p, p'\right)u(p) = -2mz(1-z)\bar{u}(p')i\sigma^{\mu\nu}q_\nu u(p) + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu). \quad (11.90)$$

Infine, sostituendo nella (11.89) ed eseguendo l'integrazione su  $z$  arriviamo al risultato

$$\bar{u}(p')e^2\Lambda^\mu(p', p)u(p) = \frac{e^2}{8\pi^2}\bar{u}(p')\frac{1}{2m}\sigma^{\mu\nu}q_\nu u(p) + O(q^2) + (\propto \gamma^\mu). \quad (11.91)$$

che, confrontato con l'Eq. (11.76) mostra che

$$e^2 F_2(0) = \frac{e^2}{8\pi^2} = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad (11.92)$$

cioè che all'ordine  $\alpha$  il momento magnetico di un leptone è pari a  $1 + \alpha/2\pi$  magnetoni di Bohr.



## Bibliografia

- [1] L. Maiani e O. Benhar, *Meccanica Quantistica Relativistica. Introduzione alla teoria quantistica dei campi*, (Editori Riuniti University Press, Roma, 2012).
- [2] L. Maiani, Interazioni Elettrodeboli, AA. 2009-2010
- [3] F. Mandl e G. Shaw, *Quantum Field Theory*, (Wiley, New York, 1984).
- [4] R. P. Feynman e A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, (McGraw-Hill, New York, 1965).
- [5] P. A. M. Dirac, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, Band 3, Heft 1 (1933), Ristampato in *Quantum Electrodynamics*, a cura di J. Schwinger (Dover, New York, 1958).
- [6] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley, Boston, 1994).
- [7] J.D. Bjorken e S.Drell, *Relativistic Quantum Fields*, (McGraw-Hill, New York, 1965).
- [8] C. Itzykson e J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [9] L. Landau e E. Lifchitz, *Mecanique Quantique, Theorie Non Relativiste*, (Mir, Mosca, 1967) Cap 1.
- [10] L. Maiani, Interazioni Elettrodeboli, AA. 2009-2010
- [11] H. Lehman, K. Symanzik e W. Zimmermann, *Nuovo Cimento* **1**, 205 (1955).
- [12] Michael E. Peskin e Daniel V. Schroeder *An Introduction to Quantum Field Theory*, (Perseus Books, Boulder, 1995).
- [13] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover, New York, 1972).
- [14] H. Jeffreys e M. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, (Cambridge University Press, 1972).
- [15] L Landau e E. Lifschitz, *Meccanica*, Editori Riuniti.
- [16] H.A. Bethe, *Phys. Rev.* **72**, 339 (1947).
- [17] P. A. M. Dirac, *Quantum Mechanics*, Cap. VI, Oxford University Press.
- [18] L Landau e E. Lifschitz, *Teoria Quantistica Relativistica*, Editori Riuniti.
- [19] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol.II, Cambridge University Press, 1995.

[20] V. N. Gribov, Nucl. Phys. **B 139** (1978) 1.

[21] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol.I, Cambridge University Press, 1995.

[22] G. Abbiendi *et al.* [OPAL Collaboration], Eur. Phys. J. C **45** (2006) 1.

## Appendice A

### Ampiezza di transizione in assenza di potenziale

Effettuiamo il calcolo dell'elemento di matrice  $\langle q_2 | e^{-i\frac{p^2}{2m}T} | q_1 \rangle$ . Assumiamo che gli autostati di  $q$  e  $p$  siano normalizzati in modo che

$$\langle q' | q \rangle = \delta(q' - q) \quad , \quad \int dq |q\rangle \langle q| = \mathbf{1} .$$

Se normalizziamo gli stati  $|p\rangle$  in modo che

$$\langle q | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipq} ,$$

troviamo che

$$\langle p' | p \rangle = \delta(p' - p) \quad , \quad \int dp |p\rangle \langle p| = \mathbf{1} .$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \langle q_2 | e^{-i\frac{p^2}{2m}T} | q_1 \rangle &= \int dk \langle q_2 | e^{-i\frac{p^2}{2m}T} | k \rangle \langle k | q_1 \rangle \\ &= \int dk e^{-i\frac{k^2}{2m}T} \langle q_2 | k \rangle \langle k | q_1 \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-i\frac{k^2}{2m}T} e^{i(q_2 - q_1)k} . \end{aligned}$$

L'integrazione si semplifica costruendo un quadrato perfetto all'esponente. Otteniamo così

$$\langle q_2 | e^{-i\frac{p^2}{2m}T} | q_1 \rangle = \frac{1}{2\pi} e^{i\frac{m(q_2 - q_1)^2}{2T}} \int dk e^{-i\frac{(k - k_{cl})^2}{2m}T} \quad , \quad k_{cl} = \frac{m(q_2 - q_1)}{T} ,$$

e converge per  $\text{Im } T < 0$ . Per valori reali di  $T$  possiamo definirlo, con il cambiamento di variabile  $Q = k - k_{cl}$

$$\int dQ e^{-i\frac{Q^2}{2m}T} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int dQ e^{-i\frac{Q^2}{2m}(T - i\eta)} = \sqrt{\frac{2\pi m}{iT}} ,$$

dove la notazione  $\eta \rightarrow 0^+$  indica che il limite va preso partendo da valori positivi di  $\eta$ . La necessità di passare al limite verso valori reali del tempo partendo da valori complessi nel semipiano inferiore si riflette, come vedremo, nella famosa "regola dell' $i\epsilon$ " nel calcolo dei propagatori e dei diagrammi di Feynman. Sostituendo nella espressione precedente si ottiene il risultato della eq. (2.3).



## Appendice B

### Funzionale generatore dei diagrammi connessi

Vogliamo dimostrare che il funzionale generatore  $Z[J]$  può essere scritto nella forma

$$Z[J] = \exp(W[J]) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} W[J]^k, \quad (\text{B.1})$$

dove  $W[J]$  è la somma di tutti i diagrammi connessi. La dimostrazione, che discuteremo per il caso della teoria  $\lambda\phi^4$ , si applica analogamente allo sviluppo perturbativo di qualsiasi teoria di campo.

Possiamo scrivere la  $Z[J]$  in termini dell'operatore "vertice",  $V$ , definito dalla

$$Z[J] = e^V Z^0[J] = \sum \frac{V^k}{k!} Z^0[J], \quad (\text{B.2})$$

dove l'operatore  $V$  si ottiene direttamente dalla lagrangiana di interazione

$$V = i \int d^4x \mathcal{L}^1 \left( i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \quad (\text{B.3})$$

e dipende dalla teoria. Nel caso che stiamo considerando questo operatore è (si veda l'Eq. (4.5))

$$V = \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x \left( i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4,$$

mentre in teorie diverse può prendere una forma più complessa, eventualmente con più funzioni  $J$  in corrispondenza dei diversi campi. Il funzionale generatore della teoria libera,  $Z^0[J]$ , può essere scritto nella forma

$$Z^0[J] = \exp W^0[J], \quad (\text{B.4})$$

dove  $W^0[J]$  è la somma dei diagrammi connessi privi di vertici. Nella teoria  $\lambda\phi^4$  l'unico diagramma di questo tipo è il diagramma (d) della Fig. 4.2, e troviamo (si veda l'Eq. 4.4)

$$W^0[J] = \frac{i}{2} \iint d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y). \quad (\text{B.5})$$

Ciascuna derivata funzionale della  $Z$  (vedi ad esempio le eq. (4.9), (4.10)) contiene un fattore  $Z^0[J]$ , quindi possiamo scrivere

$$Z[J] = \tilde{Z}[J] Z^0[J] = \tilde{Z}[J] \exp(W^0[J]), \quad (\text{B.6})$$

e notare che la  $\tilde{Z}[J]$  si può esprimere mediante la somma di tutti quei diagrammi  $G$ , connessi e non connessi, *in cui ciascuna componente connessa ha almeno un vertice*

$$\tilde{Z} = 1 + \sum G. \quad (\text{B.7})$$

Per dimostrare la (B.1) occorre quindi dimostrare che

$$\tilde{Z} = \exp(\tilde{W}[J]) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{W}[J]^n, \quad (\text{B.8})$$

dove  $\tilde{W}[J]$  è la somma di tutti i diagrammi *connessi, con uno o più vertici*, che immaginiamo ordinati in una serie  $\{D_1, D_2, \dots\}$

$$\tilde{W}[J] = \sum_{i=1}^{\infty} D_i[J]. \quad (\text{B.9})$$

Indicando i diagrammi con un vertice  $v_i = 1$ , quelli con due vertici  $v_i = 2$  e via di seguito, possiamo quindi scrivere

$$\exp(\tilde{W}[J]) = e^{D_1} e^{D_2} \dots e^{D_k} \dots = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots} \frac{D_1^{n_1}}{n_1!} \dots \frac{D_k^{n_k}}{n_k!} \dots. \quad (\text{B.10})$$

Il termine  $V^k/k!$  nella (B.2) produrrà i diagrammi connessi con  $k$  vertici (un sottoinsieme della lista  $\{D_1, D_2, \dots\}$ ) oltre a diagrammi non connessi che indicheremo con  $G$

$$\frac{V^k}{k!} Z^0[J] = \left[ \sum_i D_i \delta_{k v_i} + (\text{diagrammi } G \text{ non connessi}) \right] Z^0[J]. \quad (\text{B.11})$$

Consideriamo ora un diagramma non connesso, cioè di tipo  $G$ , che contiene  $n_1$  copie del diagramma connesso  $D_1$ ,  $n_2$  copie di  $D_2$ , e così via. Possiamo quindi scrivere il suo contributo nella forma

$$G = K_G (D_1)^{n_1} (D_2)^{n_2} \dots, \quad (\text{B.12})$$

dove  $K_G$  è un coefficiente combinatorio. Per dimostrare la (B.8) dobbiamo dimostrare che  $K_G$  è lo stesso coefficiente con cui questo termine compare nella (B.10), cioè che

$$K_G = \frac{1}{n_1!} \dots \frac{1}{n_k!} \dots. \quad (\text{B.13})$$

Per calcolare  $K_G$  dobbiamo partire dalla (B.2). Se  $v_i \geq 1$  è il numero dei vertici nel grafico  $D_i$ , il numero totale delle componenti e dei vertici in  $G$ ,  $n$  e  $v$ , saranno rispettivamente<sup>1</sup>

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \quad v = \sum_{i=1}^{\infty} n_i v_i.$$

<sup>1</sup>Notiamo che anche se le somme sono estese sino ad infinito, stiamo considerando diagrammi con un numero finito di componenti, per cui solo alcune  $n_k$  saranno differenti da zero.

Quindi,  $G$  sarà prodotto dal termine  $V^\nu / \nu!$  nella (B.2). In questo termine dovremo scegliere i  $\nu_1$  fattori  $V$  che producono ciascuna delle  $n_1$  copie di  $D_1$ , i  $\nu_2$  fattori che producono le copie di  $D_2$  e così via (si veda l'Eq. (B.11)). Questa scelta si può fare in

$$\frac{1}{\prod (n_i!)} \frac{\nu!}{\prod (\nu_i!)^{n_i}},$$

modi diversi, poichè ci sono  $\nu!$  permutazioni dei fattori  $V$ , ma questo numero va diviso per il numero di permutazioni delle  $V$  che contribuiscono a ciascuna componente connessa di  $G$ . Quindi dividiamo per  $\prod (\nu_i!)^{n_i}$ , e per il numero di permutazioni tra gli  $n_1$  gruppi che danno le  $n_1$  copie di  $D_1$  e così via. Infine, dividiamo per  $\prod n_i!$ . Il fattore  $\nu!$  si semplifica con il fattore  $1/\nu!$  che accompagna il termine  $V^\nu$  nello sviluppo della  $Z[J]$ , Eq. (B.2). Analogamente, ciascuno dei fattori  $\nu_i!$  a denominatore si combina (si veda l'Eq. (B.11)) con un  $V^{\nu_i}$  per generare le componenti  $D_i$ .

In conclusione il valore del diagramma  $G$ , composto da  $n_1$  copie di  $D_1$ ,  $n_2$  copie di  $D_2$ , e così via, è dato da

$$G[J] = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(D_i[J])^{n_i}}{n_i!}. \quad (\text{B.14})$$

Il coefficiente  $K_G$  è dunque quello della (B.13), e questo conchiude la dimostrazione.



## Appendice C

### Cancellazione dei diagrammi vuoto-vuoto

In questa Appendice illustriamo, attraverso un semplice esempio, la cancellazione dei diagrammi vuoto-vuoto che compaiono nell'espansione perturbativa del funzionale generatore della teoria  $\lambda\phi^4$ .

Includendo i contributi fino al primo ordine nella costante di accoppiamento  $\lambda$ , otteniamo per il funzionale generatore  $Z[J]$  discusso nel Capitolo 4 l'espressione

$$Z[J] = Z_0[J] \left\{ 1 + i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 v [3(a) + 6(b) + (c)] \right\}, \quad (\text{C.1})$$

dove con (a), (b) e (c) ci riferiamo in modo sintetico ai contributi dei diagrammi illustrati nella Fig. 4.2, dei quali ricordiamo le espressioni esplicite

$$\begin{aligned}
 (a) &= \text{diagramma vuoto-vuoto} = [i\Delta_F(0)]^2 \\
 (b) &= \text{diagramma vuoto-vuoto} = i\Delta_F(0) \int d^4 x \left[ \int d^4 x \Delta_F(v-x) J(x) \right]^2 \\
 (c) &= \text{diagramma vuoto-vuoto} = \int d^4 v \left[ \int d^4 x \Delta_F(v-x) J(x) \right]^4.
 \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Sviluppando anche  $1/Z[0]$  in serie di potenze di  $\lambda$  e continuando ad usare la notazione (C.2) per identificare i termini dell'espansione otteniamo la

$$\frac{1}{Z[0]} = 1 + i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 v 3(a) + \mathcal{O}(\lambda^2), \quad (\text{C.3})$$

che sostituita nella (C.1) dà

$$\begin{aligned} \frac{Z[J]}{Z[0]} &= Z_0[J] \left\{ 1 + \frac{i\lambda}{4!} \int d^4v [3(a) + 6(b) + (c)] \right\} \times \left\{ 1 + \frac{i\lambda}{4!} \int d^4v 3(a) \right\}^{-1} \\ &= Z_0[J] \left\{ 1 + \frac{i\lambda}{4!} \int d^4v [3(a) + 6(b) + (c)] \right\} \times \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4v 3(a) \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$= Z_0[J] \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4v [6(b) + (c)] \right\} + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (\text{C.5})$$

Questo semplice esempio mostra come il contributo dei grafici vuoto-vuoto a  $Z[J]$  venga eliminato, al primo ordine in  $\lambda$  dalla presenza del denominatore nel rapporto  $Z[J]/Z[0]$ . Ovviamente, lo stesso risultato si ottiene a ogni ordine della serie perturbativa. I diagrammi vuoto-vuoto nell'espansione del funzionale generatore sono infatti all'origine della comparsa di diagrammi disconnessi nell'espansione perturbativa delle funzioni di Green.

## Appendice D

### Invarianza di Lorentz e stati a una particella.

Nella Sezione 3.4 abbiamo visto che gli elementi di matrice di un campo scalare tra il vuoto e gli stati ad una particella sono dati, nella teoria senza interazioni, da espressioni del tipo della Eq. (3.79) in cui appare un caratteristico fattore  $1/\sqrt{2\omega}$ . In questa appendice vogliamo dimostrare che questo fattore è determinato dalla invarianza del campo  $\phi$  sotto trasformazioni di Lorentz, e dal fatto che abbiamo scelto per gli stati a una particella la normalizzazione

$$\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) . \quad (\text{D.1})$$

Anche in presenza di interazioni la forma dell'elemento di matrice tra vuoto e stati a una particella è interamente determinata, a meno di una costante moltiplicativa, detta *costante di rinormalizzazione*. Nel caso di un campo scalare reale, deve essere

$$\langle 0 | \phi(\vec{x}, t) | \vec{p} \rangle = \frac{\sqrt{Z}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_p}} e^{i(\vec{p}\vec{x} - \omega_p t)} . \quad (\text{D.2})$$

Abbiamo utilizzato questo risultato nella Sezione 4.4, per ottenere la forma generale della funzione di Green a due punti, e nella Sezione 5, per stabilire la relazione tra funzioni di Green ed elementi di matrice  $S$ . Notiamo che la dipendenza da  $\vec{x}, t$  è fissata dal valore dell'impulso e dell'energia della particella, quindi basterà verificare la (D.2) per  $\vec{x} = t = 0$ ,

$$\langle 0 | \phi(0) | \vec{p} \rangle = \frac{\sqrt{Z}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_p}} . \quad (\text{D.3})$$

Per  $\vec{p} = 0$  la (D.3) può essere considerata una definizione della *costante di rinormalizzazione*  $Z$ ,

$$\langle 0 | \phi(0) | \vec{p} = 0 \rangle = \frac{\sqrt{Z}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2m}} . \quad (\text{D.4})$$

Resta quindi solo da dimostrare che una trasformazione di Lorentz porta dalla (D.4) alla (D.3). Consideriamo una trasformazione di Lorentz di velocità  $v$  lungo l'asse  $x$  (un *boost*) applicata al quadrivettore  $q \equiv \{E, \vec{q}\}$ ,

$$q'_x = \frac{Ev + q_x}{\sqrt{1 - v^2}} , \quad q'_y = q_y , \quad q'_z = q_z , \quad E' = \frac{E + q_x v}{\sqrt{1 - v^2}} , \quad (\text{D.5})$$

che è rappresentata da una trasformazione unitaria  $\mathbf{B}_v$  sullo spazio di Hilbert. L'azione di  $\mathbf{B}_v$  sugli stati a una particella può essere rappresentata nella forma

$$\mathbf{B}_v|\vec{q}\rangle = h(\vec{q}, \vec{q}')|\vec{q}'\rangle, \quad (\text{D.6})$$

mentre lo stato vuoto  $|0\rangle$  deve restare invariato,

$$\mathbf{B}_v|0\rangle = |0\rangle. \quad (\text{D.7})$$

Partendo da un impulso nullo si otterrà un impulso  $p = \{\omega_p = m/\sqrt{1-v^2}, \vec{p}\}$ , cioè

$$\mathbf{B}_v|\vec{p} = 0\rangle = k(p)|\vec{p}\rangle, \quad (\text{D.8})$$

con ( $k(p) \equiv h(0, \vec{p})$ ). L'invarianza per rotazioni garantisce che  $k(p)$  dipenda solo dal modulo di  $\vec{p}$ , e possiamo scegliere la fase dello stato  $|\vec{p}\rangle$  in modo che  $k(p)$  sia reale e positivo.

Per determinare il valore di  $k(p)$  notiamo che (si veda l'Eq. D.1)

$$\delta^3(\vec{q}) = \langle \vec{q} | \vec{p} = 0 \rangle = \langle \vec{q} | \mathbf{B}_v^\dagger \mathbf{B}_v | \vec{p} = 0 \rangle = h^*(\vec{q}, \vec{q}') k(p) \langle \vec{q}' | \vec{p} \rangle = k^2(p) \delta^3(\vec{q}' - \vec{p}),$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la prima  $\delta^3(\vec{q})$ , che garantisce che  $\vec{q} = 0$ , e quindi abbiamo sostituito  $h(\vec{q}, \vec{q}')$  con  $h(0, \vec{p}) = k(p)$  che sappiamo essere una quantità reale. Il vettore  $\vec{q}'$  presente nell'argomento dell'ultima funzione  $\delta$  dipende da  $\vec{q}$  tramite la trasformazione di Lorentz. Abbiamo quindi

$$\delta^3(\vec{q}) = k^2(p) \delta^3(\vec{q}'(\vec{q}) - \vec{p}) = k^2(p) \left| \frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \right|_{\vec{q}=0}^{-1} \delta^3(\vec{q}),$$

e con un semplice calcolo dello jacobiano della trasformazione di Lorentz troviamo la

$$k^2(p) = \left| \frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \right|_{\vec{q}=0} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\omega_p}{m},$$

dalla quale segue che la (D.8) si può riscrivere

$$\mathbf{B}_v|\vec{p} = 0\rangle = \sqrt{\frac{\omega_p}{m}} |\vec{p}\rangle. \quad (\text{D.9})$$

Poichè  $\phi(x)$  è un campo scalare deve valere la

$$\mathbf{B}_v^\dagger \phi(0) \mathbf{B}_v = \phi(0), \quad (\text{D.10})$$

che implica

$$\langle 0 | \phi(0) | \vec{p} = 0 \rangle = \langle 0 | \mathbf{B}_v^\dagger \phi(0) \mathbf{B}_v | \vec{p} = 0 \rangle = \sqrt{\frac{\omega_p}{m}} \langle 0 | \phi(0) | \vec{p} \rangle.$$

Abbiamo così dimostrato che dalla (D.4) si ottengono la (D.3) e, per valori arbitrari di  $\vec{x}, t$ , la (D.2).

## Appendice E

### Derivazione dell'ampiezza di diffusione Compton dalle formule di riduzione

Come abbiamo visto nel Capitolo 9, il funzionale generatore che si ottiene al primo ordine dell'espansione perturbativa della QED si può scrivere nella forma<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} Z_1[J^\rho, \bar{J}, J] &= ie \int d^4u \frac{-i\delta}{\delta J(u)} \gamma^\mu \frac{i\delta}{\delta \bar{J}(u)} \frac{i\delta}{\delta J^\mu(u)} Z_0[J^\rho, \bar{J}, J] \\ &= ie \int d^4u C_{1\mu}[J^\rho] C_2^\mu[\bar{J}, J] Z_0[J^\rho, \bar{J}, J], \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

dove  $Z_0[J^\rho, \bar{J}, J] = Z_0[J^\rho] Z_0[\bar{J}, J]$  è il funzionale generatore della teoria libera, Eq. (9.9),

$$C_{1\mu}[J^\rho] = - \int d^4x J^\rho(x) \Delta_{\rho\mu}(x-u), \quad (\text{E.2})$$

$$C_2^\mu[\bar{J}, J] = -i\gamma^\mu S_F(u-u) - \int d^4y d^4z \bar{J}(y) S_F(y-u) \gamma^\mu S_F(u-z) J(z), \quad (\text{E.3})$$

e abbiamo introdotto la notazione  $\Delta_{\lambda\mu}(x-u) = g_{\lambda\mu} \Delta_F(x-u; 0)$ .

Per ottenere il funzionale generatore al secondo ordine dobbiamo calcolare l'espressione

$$\frac{1}{2} ie \int d^4v \frac{-i\delta}{\delta J(v)} \gamma^\nu \frac{i\delta}{\delta \bar{J}(v)} \frac{i\delta}{\delta J^\nu(v)} Z_1[J^\rho, \bar{J}, J]. \quad (\text{E.4})$$

Il risultato di questa operazione è la somma di un gran numero di termini, che corrispondono ai diversi processi fisici discussi nella Sezione 9.4. Ci limiteremo a considerare il contributo corrispondente al funzionale generatore dal quale si ottiene l'ampiezza di diffusione Compton, che indicheremo con  $Z_2^C[J^\rho, \bar{J}, J]$ .

In questo contesto, la derivata funzionale rispetto a  $J^\nu(v)$  può operare solo su  $Z_0[J^\rho]$ , col risultato

$$\frac{i\delta}{\delta J^\nu(v)} Z_0[J^\rho] = - \int d^4x' \Delta_{\sigma\nu}(v-x') J^\sigma(x') Z_0[J^\rho], \quad (\text{E.5})$$

<sup>1</sup>Il presenza del controtermine di massa nella Lagrangiana di interazione non è rilevante per il risultato che ci proponiamo di derivare, e verrà quindi trascurata.

mentre le derivate funzionali rispetto a  $\bar{J}(v)$  e  $J(v)$  possono operare, rispettivamente, su  $C_2[\bar{J}, J]$  e  $Z_0[\bar{J}, J]$ , o viceversa. Nel primo caso troviamo (per chiarezza, esplicitiamo gli indici di Dirac)

$$\gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{i\delta}{\delta \bar{J}_\beta(v)} C_2[\bar{J}, J] = -i \int d^4 z \gamma_{\alpha\beta}^\nu S_{F\beta\delta}(v-u) \gamma_{\delta\rho}^\mu S_{F\rho\sigma}(u-z) J_\sigma(z), \quad (\text{E.6})$$

e

$$\frac{-i\delta}{\delta J_\alpha(v)} Z_0[\bar{J}, J] = - \int d^4 y \bar{J}_\xi(y) S_{F\xi\alpha}(y-v) Z_0[\bar{J}, J]. \quad (\text{E.7})$$

Combinando le (E.6)-(E.7) con le espressioni analoghe che si ottengono derivando  $Z_0[\bar{J}, J]$  rispetto a  $\bar{J}(v)$  e  $C_2[\bar{J}, J]$  rispetto a  $J(v)$  otteniamo

$$Z_2^C = \frac{1}{2} (ie)^2 i \int d^4 u d^4 v d^4 x d^4 x' d^4 y d^4 z J^\lambda(x) \Delta_{\lambda\mu}(x-u) \Delta_{\sigma\nu}(v-x') J^\sigma(x') \times [\bar{J}(y) S_F(y-v) \gamma^\nu S_F(v-u) \gamma^\mu S_F(u-z) J(z) + (y \rightleftharpoons z, u \rightleftharpoons v, \mu \rightleftharpoons \nu)]. \quad (\text{E.8})$$

Si vede subito che i due termini della Eq. (E.8) danno contributi identici, che sommati insieme eliminano il fattore 1/2. Il risultato finale si può scrivere nella forma

$$Z_2^C = (ie)^2 \int d^4 u d^4 v D_{1\mu\nu}[J^\rho] D_2^{\mu\nu}[\bar{J}, J] Z_0[J^\rho, \bar{J}, J], \quad (\text{E.9})$$

con

$$D_{1\mu\nu}[J^\rho] = \int d^4 x d^4 x' J^\lambda(x) \Delta_{\lambda\mu}(x-u) \Delta_{\sigma\nu}(v-x') J^\sigma(x'), \quad (\text{E.10})$$

e

$$D_2^{\mu\nu}[\bar{J}, J] = i \int d^4 y d^4 z \bar{J}(y) S_F(y-v) \gamma^\nu S_F(v-u) \gamma^\mu S_F(u-z) J(z). \quad (\text{E.11})$$

L'ampiezza di diffusione Compton si ottiene, tramite le formule di riduzione LSZ, dalla funzione di Green a quattro punti

$$G_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x'_1, x'_2) = \langle 0 | T \{ A_\alpha(x_1) A_\beta(x'_1) \bar{\psi}(x_2) \psi(x'_2) \} | 0 \rangle, \quad (\text{E.12})$$

che nel formalismo degli integrali sui cammini si può riscrivere nella forma

$$G_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x'_1, x'_2) = \frac{1}{Z[0,0,0]} \left. \frac{-i\delta}{\delta J(x_2)} \frac{i\delta}{\delta \bar{J}(x'_2)} \frac{i\delta}{\delta J^\alpha(x_1)} \frac{i\delta}{\delta J^\beta(x'_1)} Z[J^\rho, \bar{J}, J] \right|_{J^\rho = \bar{J} = J = 0}. \quad (\text{E.13})$$

Utilizzando l'espressione del funzionale generatore al secondo ordine, data dalle Eq. (E.9)-(E.11), si vede subito che le due derivate funzionali rispetto a  $J^\alpha(x_1)$  e  $J^\beta(x'_1)$  devono operare su  $D_{1\mu\nu}[J^\rho]$ , col risultato

$$\frac{i\delta}{\delta J^\alpha(x_1)} \frac{i\delta}{\delta J^\beta(x'_1)} D_{1\mu\nu}[J^\rho] = - [\Delta_{\alpha\mu}(x_1-u) \Delta_{\beta\nu}(v-x'_1) + \Delta_{\beta\mu}(x'_1-u) \Delta_{\alpha\nu}(v-x_1)]. \quad (\text{E.14})$$

Effettuiamo ora le derivate funzionali rispetto a  $\bar{J}(x_2)$  e  $J(x'_2)$  che possono operare solamente su  $D_2[\bar{J}, J]$ . Il risultato che si ottiene è

$$\begin{aligned} \frac{-i\delta}{\delta J(x_2)} \frac{i\delta}{\delta \bar{J}(x'_2)} D_2[\bar{J}, J] &= \frac{i\delta}{\delta J(x_2)} \int d^4 z S_F(x'_2 - v) \gamma^\nu S_F(v - u) \gamma^\mu S_F(u - z) J(z) \\ &= i S_F(x'_2 - v) \gamma^\nu S_F(v - u) \gamma^\mu S_F(u - x_2) . \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Dalle equazioni (E.13)-(E.15) segue che

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x'_1, x'_2) &= -i(i\epsilon)^2 \int d^4 u d^4 v [\Delta_{\alpha\mu}(x_1 - u) \Delta_{\beta\nu}(v - x'_1) + \Delta_{\beta\mu}(x'_1 - u) \Delta_{\alpha\nu}(v - x_1)] \\ &\quad \times S_F(x'_2 - v) \gamma^\nu S_F(v - u) \gamma^\mu S_F(u - x_2) . \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Ora vogliamo utilizzare l'espressione della funzione di Green (E.16) per ottenere l'ampiezza di probabilità del processo.

$$\gamma(k, r) + e(p, s) \rightarrow \gamma(k', r') + e(p', s') , \quad (\text{E.17})$$

dove  $(k, r)$ ,  $(k', r')$ ,  $(p, s)$  e  $(p', s')$  sono i quadrimpulsi e le polarizzazioni del fotone e dell'elettrone negli stati iniziale e finale. Usando le formule di riduzione discusse nel Capitolo 9, possiamo scrivere l'elemento di matrice  $S$  nella forma

$$S_{if} = N \int dx_1 dx'_1 dx_2 dx'_2 e^{-i(kx_1 + px_2)} e^{i(k'x'_1 + p's'_2)} \quad (\text{E.18})$$

$$\times \epsilon^\beta(k', r') \overrightarrow{\square}_{x'_1} \bar{u}(p', s') \overrightarrow{(i\partial - m)}_{x_2} G_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x'_1, x'_2) \overleftarrow{(-i\partial - m)}_{x_2} u(p, s) \overleftarrow{\square}_{x_1} \epsilon^\alpha(k, r) , \quad (\text{E.19})$$

dove  $N$  è un fattore di normalizzazione che discuteremo più avanti. Gli integrali su  $x_1$ ,  $x'_1$ ,  $x_2$  e  $x'_2$  si effettuano utilizzando le relazioni

$$\square_x \Delta_F(x - y; 0) = -\delta^{(4)}(x - y) , \quad (i\partial - m)_x S_F(x - y) = \delta^{(4)}(x - y) , \quad (\text{E.20})$$

col risultato

$$\begin{aligned} S_{if} &= -i(i\epsilon)^2 N \int d^4 u d^4 v \left\{ e^{-i[(p+k)u - (p'+k')v]} \epsilon_\nu(k', r') \bar{u}(p', s') \gamma^\nu S_F(v - u) \gamma^\mu u(p, s) \epsilon_\mu(k, r) \right. \\ &\quad \left. + e^{-i[(p-k')u - (p'-k)v]} \epsilon_\mu(k', r') \bar{u}(p', s') \gamma^\nu S_F(v - u) \gamma^\mu u(p, s) \epsilon_\nu(k, r) \right\} . \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Per le ultime due integrazioni si usano le nuove variabili  $W = (v + u)/2$  e  $w = v - u$ . Integrando su  $W$  si ottiene la funzione  $\delta$  che esprime la conservazione del quadrimpulso e, utilizzando la notazione concisa

$$\epsilon_\mu(k, r) = \epsilon_\mu , \quad \epsilon_\nu(k', r') = \epsilon'_\nu , \quad u(p, s) = u , \quad \bar{u}(p', s') = \bar{u}' , \quad (\text{E.22})$$

possiamo scrivere l'elemento di matrice  $S$  nella forma

$$\begin{aligned} S_{if} &= N (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k + p - k' - p') i e^2 \int d^4 w \left[ e^{i(p+k)w} \bar{u}' \not{\epsilon}' S_F(w) \not{\epsilon} u + e^{i(p-k')w} \bar{u}' \not{\epsilon} S_F(w) \not{\epsilon}' u \right] \\ &= N (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k + p - k' - p') i e^2 \bar{u}' [\not{\epsilon}' S_F(p + k) \not{\epsilon} + \not{\epsilon} S_F(p - k') \not{\epsilon}'] u , \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

con

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} . \quad (\text{E.24})$$

Abbiamo così riottenuto le ampiezze di diffusione delle equazioni (14.80) e (14.114) di [1].

Il fattore di normalizzazione nella Eq.(E.21) ha la forma

$$N = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k Z_3}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p Z_2}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'} Z_3}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{p'} Z_2}}, \quad (\text{E.25})$$

nella quale compaiono le normalizzazioni degli stati che descrivono le particelle negli stati iniziale e finale e le costanti di rinormalizzazione  $Z_2$  e  $Z_3$ . Considerando insieme ai diagrammi di Feynman discussi in [1] tutti i diagrammi riducibili ad una particella sulle linee esterne (si veda il Capitolo 4) si ottiene un fattore  $Z_2^2 Z_3^2$ . Il risultato finale è quindi un fattore moltiplicativo  $(\sqrt{Z_2} \sqrt{Z_3})^2$ , che descrive la rinormalizzazione delle linee esterne, discussa nel Capitolo 10.

## Bibliografia

- [1] L. Maiani e O. Benhar, *Meccanica Quantistica Relativistica. Introduzione alla teoria quantistica dei campi*, (Editori Riuniti University Press, Roma, 2012).
- [2] L. Maiani, Interazioni Elettrodeboli, AA. 2009-2010
- [3] F. Mandl e G. Shaw, *Quantum Field Theory*, (Wiley, New York, 1984).
- [4] R. P. Feynman e A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, (McGraw-Hill, New York, 1965).
- [5] P. A. M. Dirac, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, Band 3, Heft 1 (1933), Ristampato in *Quantum Electrodynamics*, a cura di J. Schwinger (Dover, New York, 1958).
- [6] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley, Boston, 1994).
- [7] J.D. Bjorken e S.Drell, *Relativistic Quantum Fields*, (McGraw-Hill, New York, 1965).
- [8] C. Itzykson e J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [9] L. Landau e E. Lifchitz, *Mecanique Quantique, Theorie Non Relativiste*, (Mir, Mosca, 1967) Cap 1.
- [10] L. Maiani, Interazioni Elettrodeboli, AA. 2009-2010
- [11] H. Lehman, K. Symanzik e W. Zimmermann, *Nuovo Cimento* **1**, 205 (1955).
- [12] Michael E. Peskin e Daniel V. Schroeder *An Introduction to Quantum Field Theory*, (Perseus Books, Boulder, 1995).
- [13] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover, New York, 1972).
- [14] H. Jeffreys e M. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, (Cambridge University Press, 1972).
- [15] L Landau e E. Lifschitz, *Meccanica*, Editori Riuniti.
- [16] H.A. Bethe, *Phys. Rev.* **72**, 339 (1947).
- [17] P. A. M. Dirac, *Quantum Mechanics*, Cap. VI, Oxford University Press.
- [18] L Landau e E. Lifschitz, *Teoria Quantistica Relativistica*, Editori Riuniti.
- [19] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol.II, Cambridge University Press, 1995.

[20] V. N. Gribov, Nucl. Phys. **B 139** (1978) 1.

[21] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Vol.I, Cambridge University Press, 1995.

[22] G. Abbiendi *et al.* [OPAL Collaboration], Eur. Phys. J. C **45** (2006) 1.