Lo stesso risultato si ottiene notando che S commuta con tutte le costanti del moto, per cui

$$< f, q'; in|[Q,S]|i, q; in >= (q' - q) < f, q'; in|S|i, q; in >= 0 \ . \tag{5.22}$$

Quindi l'elemento di matrice deve essere nullo se $q \neq q'$. Per lo stesso motivo

$$U(R) S U(R)^{\dagger} = S \ , \tag{5.23}$$

dove $U(R)$ è l'operatore unitario associato ad una simmetria esatta che non coinvolga l'inversione temporale.

Per i sistemi invarianti sotto traslazioni, la matrice S deve essere diagonale nella base degli stati con quantitá di moto ed energia definiti. I suoi elementi di matrice hanno quindi la forma ($f \neq i$)

$$S_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \mathcal{M}_{fi} \ . \tag{5.24}$$

5.4 Proprietà dei campi "in" e "out"

Nella Sezione successiva ricaveremo le relazioni che legano la funzione di Green a q punti all'elemento di matrice S della reazione tra p particelle iniziali che produce q-p particelle finali (con p≤q-2). Queste relazioni sono state ottenute da H. Lehman, K. Szymanzik e W. Zimmermann [11] e sono note come *formule di riduzione LSZ*. Prima di dimostrare le formule di riduzione, tuttavia, dobbiamo introdurre la cosiddetta *ipotesi asintotica* per i campi nella rappresentazione di Heisenberg ed i corrispondenti campi asintotici, $\phi_{in}(x)$ e $\phi_{out}(x)$.

Fissare lo stato quantistico nella rappresentazione di Heisenberg corrisponde, in Meccanica Classica, a determinare la traiettoria nello spazio delle fasi del sistema dando le condizioni iniziali ad un dato tempo, t_0. Si comprende quindi perchè il vettore di stato, in questa rappresentazione, non cambi al variare del tempo.

Quelle che variano, al variare del tempo, sono le variabili dinamiche del sistema, cioè i campi, che sono funzioni del punto nello spazio e del tempo

$$\phi = \phi(\vec{x}, t) = \phi(x). \tag{5.25}$$

Nella teoria libera, il campo applicato al vuoto crea uno stato di singola particella per qualunque valore dl tempo. Questo non è più vero nel caso della teoria in interazione, in cui il campo ha elementi di matrice non nulli anche tra il vuoto e gli stati con due o più particelle, (si veda la discussione nella Sez. 4.4). Tuttavia, come discusso nelle Sezioni precedenti, ci aspettiamo che la situazione fiisca tenda a quella della teoria libera quando il tempo tende a $\pm T/2 \simeq\sim \infty$. Poichè lo stato è comunque fisso, la richiesta precedente, che si indica col termine di *condizione asintotica* deve significare che il campo, in questi limiti, deve tendere "in qualche senso" al campo libero.

Per fissare le idee, assumiamo di scegliere gli stati nella base "in", cioè $t_0 = -T/2$. In queste condizioni le particelle che partecipano al processo di diffusione non sono soggette ad interazioni reciproche, ma solo ad autointerazioni. Quindi gli operatori $\phi_{in}(x)$, creano stati con particelle che si propagano indipendentemente l'una dall'altra ma con la massa *fisica*, cioè modificata dalle autointerazioni.

Per semplicità, consideriamo per primo il caso di particelle descritte da un campo scalare neutro con interazione $\lambda\phi^4$. Come vedremo, la generalizzazione a casi più complessi è immediata. La densità lagrangiana è dunque la

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 + j(x)\phi(x) \,, \tag{5.26}$$

dove il termine di sorgente $j(x) = \lambda\phi(x)^3/4!$ descrive le autointerazioni delle particelle descritte dalla teoria. I campi ϕ e ϕ_{in} soddisfano, rispettivamente, alle equazioni

$$(\Box + m_0^2)\phi(x) = j(x) \,, \tag{5.27}$$

e

$$(\Box + m^2)\phi_{in}(x) = 0 \,, \tag{5.28}$$

dove m è la massa fisica.

Per verificare che operando sul vuoto il campo $\phi_{in}(x)$ crea solo stati con una particella consideriamo la quantità

$$-i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle n|\phi_{in}(x)|0\rangle \,, \tag{5.29}$$

dove $|n\rangle$ è un autostato del quadrimpulso con autovalore p_n, cioè

$$P^\mu|n\rangle = p_n^\mu|n\rangle \,. \tag{5.30}$$

Si vede subito che

$$-i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\langle n|\phi_{in}(x)|0\rangle = \langle n|[P^\mu,\phi_{in}(x)]|0\rangle = p_n^\mu\langle n|\phi_{in}(x)|0\rangle \tag{5.31}$$

e, derivando una seconda volta, otteniamo la

$$-\Box\langle n|\phi_{in}(x)|0\rangle = p_n^2\langle n|\phi_{in}(x)|0\rangle \tag{5.32}$$

che, in virtù della (5.28) implica

$$(p_n^2 - m^2)\langle n|\phi_{in}(x)|0\rangle = 0 \,, \tag{5.33}$$

cioè che gli unici stati che si ottengono operando sul vuoto con ϕ_{in} hanno quadrimpulso $p_n^2 = m^2$. Sono cioè stati ad una particella.

Dalla (5.28) segue anche che lo sviluppo in onde piane del campo ϕ_{in} è analogo a quello del campo libero:

$$\phi_{in}(x) = \int d^3k[a_{in}(\mathbf{k})f_{\mathbf{k}}(x) + a^\dagger(\mathbf{k})f_{\mathbf{k}}^\star(x)] \,, \tag{5.34}$$

con

$$f_{\mathbf{k}}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}e^{-ikx} \tag{5.35}$$

e $k_0 = \omega_k = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}$. La (5.34) si può facilmente invertire per ottenere l'espressione dell'operatore $a_{in}(\mathbf{k})$

$$a_{in}(\mathbf{k}) = i\int d^3x f_{\mathbf{k}}^\star(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\phi_{in}(x) \,. \tag{5.36}$$

La relazione tra il campo ϕ_{in} e il campo ϕ, soluzione della (5.27) si può rendere esplicita scrivendo la massa al quadrato delle particelle fisiche nella forma $m^2 = m_0^2 + \delta m^2$ e sostituendo questa espressione nella (5.27). Troviamo così

$$(\Box + m^2)\phi_{in}(x) = \tilde{j}(x) \tag{5.37}$$

con

$$\tilde{j}(x) = j(x) + \delta m^2 \phi(x) \ . \tag{5.38}$$

La soluzione della (5.37)

$$\phi(x) = \sqrt{Z_-}\phi_{in}(x) + \int d^4y G_{\text{rit}}(x-y)\tilde{j}(x) \ , \tag{5.39}$$

dove $\sqrt{Z_-}$ è una costante che specificheremo nel seguito e $G_{\text{rit}}(x-y)$ è la funzione di Green ritardata (che soddisfa cioè alla condizione $G_{\text{rit}}(x-y) = 0$ per $x_0 < y_0$), suggerisce di interpretare $\tilde{j}(x)$ come una sorgente di onde diffuse, in assenza delle quali la soluzione descrive la propagazione di particelle libere di massa m. Questa interpretazione delle (5.39) porterebbe a concludere che

$$\lim_{t\to-\infty} \phi(x) = \sqrt{Z_-}\phi_{in}(x) \ . \tag{5.40}$$

Dobbiamo però tenere presente che nel nostro caso la sorgente $\tilde{j}$ descrive anche le autointerazioni che generano δm^2. Di conseguenza, il campo ϕ non può essere completamente isolato da $\tilde{j}$

La condizione epressa dall'equazione operatoriale (5.40) si deve formulare richiedendo che siano gli elementi di matrice del campo a convergere ai corrispondenti elementi di matrice del campo ϕ_{in}, moltiplicati per una costante di proporzionalità, definita in modo tale che $\phi_{in}(x)$ risulti normalizzato come un campo canonico.

La relazione asintotica che si ottiene procedendo in questo modo, dovuta a Lehman, Simanzik e Zimmermann [11] è

$$\lim_{t\to-\infty} \langle\alpha|\phi^f(t)|\beta\rangle = \sqrt{Z_-}\langle\alpha|\phi^f_{in}(t)|\beta\rangle \ , \tag{5.41}$$

dove $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ sono stati dello spazio di Hilbert,

$$\phi^f(t) = i\int d^3x f^\star(\vec{x},t)\overleftrightarrow{\partial_0}\phi(\vec{x},t) \quad , \quad \phi^f_{in}(t) = i\int d^3x f^\star(\vec{x},t)\overleftrightarrow{\partial_0}\phi_{in}(\vec{x},t) \ , \tag{5.42}$$

e $f(\vec{x},t)$ è una soluzione normalizzabile (cioè localizzata) dell'equazione di Klein-Gordon. La funzione $f(\vec{x},t)$ soddisfa quindi alle

$$(\Box + m^2)f(\vec{x},t) = 0 \quad , \quad i\int d^3x f^\star(\vec{x},t)\overleftrightarrow{\partial_0} f(\vec{x},t) = 1 \ , \tag{5.43}$$

e si può scrivere, ad esempio, nella forma

$$f(\vec{x},t) = \left(\frac{1}{\pi\Gamma}\right)^{3/2} \int d^3k \, e^{-(\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}})^2/\Gamma} f_{\mathbf{k}}(\vec{x},t) \ , \tag{5.44}$$

che descrive un pacchetto d'onda di larghezza Γ distribuito intorno al valore $\tilde{\mathbf{k}}$.

Il limite $t\to+\infty$ si tratta in modo analogo, e porta ad introdurre il campo ϕ_{out}, che soddisfa alla condizione asintotica

$$\lim_{t\to+\infty} \langle\alpha|\phi^f(t)|\beta\rangle = \sqrt{Z_+}\langle\alpha|\phi^f_{out}(t)|\beta\rangle \ , \tag{5.45}$$

con $\phi^f(t)$ e $\phi^f_{out}(t)$ definiti come nella (5.42). Anche in questo caso posiamo sviluppare ϕ_{out} e ottenere l'espressione degli operatori che creano e distruggono particelle non interagenti con massa fisica al tempo $t = +\infty$. Per esempio (si confronti con la (5.36))

$$a_{out}(\mathbf{k}) = i \int d^3x\, f_{\mathbf{k}}(x)^\star \overleftrightarrow{\partial_0} \phi_{out}(x)\ . \tag{5.46}$$

Notiamo che gli operatori di distruzione definiti dalle (5.36) (5.46) sono indipendenti dal tempo, in virtù dell' equazione di Klein-Gordon.

Le condizioni asintotiche “deboli” (5.41) e (5.45) exprimono le condizioni iniziale e finale sui pacchetti d'onda localizzati che rappresentano le particelle, rispettivamente, entranti e uscenti.

Gli stati ad una particella in ed out coincidono. È facile dimostrare che, per lo stesso motivo, anche le costanti di normalizzazione nelle (5.45) e (5.41) sono uguali tra loro ed uguali alla costante introdotta nella trattazione della funzione a due punti della Sezione 4.4.

Per ottenere questo risultato, consideriamo l'elemento di matrice del campo $\phi(x)$ tra il vuoto e lo stato ad una particella. Utilizzando la (5.39) e la

$$\langle 0|\tilde{j}(x)|\mathbf{p}\rangle = \langle 0|(\Box + m^2)\phi(x)|\mathbf{p}\rangle = (\Box + m^2)e^{-ipx}\langle 0|\phi(0)|\mathbf{p}\rangle = (-p^2 + m^2)\langle 0|\phi(x)|\mathbf{p}\rangle = 0\ , \tag{5.47}$$

otteniamo, usando lo sviluppo del campo ϕ_{in}

$$\langle 0|\phi(x)|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{Z_-}\langle 0|\phi_{in}(x)|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{\frac{Z_-}{2\omega(\mathbf{p})(2\pi)^3}}\, e^{-ipx} \tag{5.48}$$

D'altro canto, come abbiamo visto nella Sezione 4.4, l'elemento di matrice del campo ϕ si può parametrizzare nella forma

$$\langle 0|\phi(x)|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{\frac{Z}{2\omega(\mathbf{p})(2\pi)^3}}\, e^{-ipx}\ . \tag{5.49}$$

Confrontando con la (5.48) otteniamo: $Z_- = Z$. Ripetendo l'argomento nel limite $t \to +\infty$ otteniamo anche $Z_+ = Z = Z_-$.

Ipotesi asintotica e correzioni di auto-energia. L'ipotesi asintotica, alla base della teoria della matrice S, richiede una qualificazione importante. Quello che è ragionevole attendersi, quando il tempo tende a $\pm\infty$, è che tenda a zero l'interazione tra *particelle diverse*. Non possiamo tuttavia isolare una particella dall'azione del campo da essa stessa generato. Questo è il problema dell'*auto-energia* della particella, già presente e noto in fisica classica.

Nel caso di una particella classica elettricamente carica, l'energia del campo coulombiano da essa stessa generato è facilmente calcolabile e dipende dall'inverso del raggio della particella stessa: è divergente per una carica esattamente puntiforme. In virtú della relazione di Einstein, il campo generato dalla particella contribuisce con un termine aggiuntivo alla massa inerziale della particella stessa, massa che, quindi, *non è la stessa* che la particella avrebbe in assenza di campo, ovvero nel limite in cui mandiamo a zero la sua carica elettrica.

Il problema si ripropone nella teoria quantistica dei campi, e si risolve con la procedura di rinormalizzazione, che discuteremo più avanti.

5.5 Le formule di riduzione LSZ

Vogliamo ora derivare le formule di riduzione LSZ. Per semplicità, consideriamo ancora il caso della teoria di campo scalare descritta dalla densità lagrangiana (5.26) e analizziamo un processo di diffusione caratterizzato dagli stati iniziale e finale

$$|k,p;in\rangle = a^\dagger_{in}(p)a^\dagger_{in}(k)|0\rangle \ \ , \ \ |k',p';out\rangle = a^\dagger_{out}(p')a^\dagger_{out}(k')|0\rangle \tag{5.50}$$

con

$$a^\dagger_{in}(\mathbf{k}) = -i\int d^3x f_{\mathbf{k}}(x)\overleftrightarrow{\partial}_0\phi_{in}(x) \ \ , \ \ a^\dagger_{out}(\mathbf{k}) = -i\int d^3x f_{\mathbf{k}}(x)\overleftrightarrow{\partial}_0\phi_{out}(x)\ , \tag{5.51}$$

dove $f_k(x)$ è una soluzione dell'equazione di Klein-Gordon.

Il nostro obiettivo è mettere in relazione l'ampiezza di diffusione, espressa dall'elemento di matrice S

$$S_{if} = \langle k',p';out|k,p;in\rangle\ , \tag{5.52}$$

e la funzione di Green a quattro punti $G(x_1,x_2,x'_1,x'_2)$. Cominciamo notando che si possono utilizzare la prima delle (5.51) e la (5.41) per riscrivere l'ampiezza nella forma[3]

$$\begin{aligned}\langle k',p';out|k,p;in\rangle &= \langle k',p';out|a^\dagger_{in}(\mathbf{k})|p;in\rangle \\ &= \lim_{t\to-\infty}\frac{-i}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(k)Z}}\int d^3x_1 e^{-ikx_1}\overleftrightarrow{\partial}_{t_1}\langle k',p';out|\phi(x_1)|p;in\rangle\ .\end{aligned} \tag{5.53}$$

Ora vogliamo riscrivere il secondo membro della (5.53) in forma esplicitamente covariante, usando la relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\,\frac{\partial}{\partial t}\int d^3x\,F(\vec{x},t) = (\lim_{t\to+\infty} - \lim_{t\to-\infty})\int d^3x\,F(\vec{x},t)\ , \tag{5.54}$$

con

$$F(\vec{x}_1,t_1) = \frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(k)Z}}\,e^{-ikx_1}\overleftrightarrow{\partial}_{t_1}\langle k',p';out|\phi(x)|p;in\rangle\ . \tag{5.55}$$

Poichè non vi sono paticelle con quadrimpulso k nello stato finale, otteniamo così

$$\begin{aligned}&(\lim_{t_1\to+\infty} - \lim_{t_1\to-\infty})\frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(k)Z}}\int d^3x_1 e^{-ikx_1}\overleftrightarrow{\partial}_{t_1}\langle k',p';out|\phi(x_1)|p;in\rangle \\ = \ &\langle k',p';out|[a^\dagger_{in}(k) - a^\dagger_{out}(k)]|p;in\rangle \\ = \ &\langle k',p';out|a^\dagger_{in}(k)|p;in\rangle \\ = \ &\frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(k)Z}}\int d^4x_1\partial_{t_1}[e^{-ikx_1}\overleftrightarrow{\partial}_{t_1}\langle k',p';out|\phi(x_1)|p;in\rangle]\ .\end{aligned} \tag{5.56}$$

[3] I lettori più attenti avranno notato che, nella (5.53) , si sarebbero dovuti utilizzare stati normalizzabili, il chè equivale a sostituire

$$a_{in}(\tilde{\mathbf{k}}) \to \tilde{a}_{in}(\tilde{\mathbf{k}}) = \left(\frac{1}{\pi\Gamma}\right)^{3/2}\int d^3k\; e^{-(\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}})/\Gamma^2}\; a_{in}(\mathbf{k})\ .$$

Per semplicità abbiamo invece usato la soluzione di onda piana. È chiaro che, per valori di Γ dell'ordine della risoluzione con la quale vengono misurati impulso ed energia delle particelle osservate, le due espressioni sono equivalenti dal punto di vista sperimentale.

Effettuando una intergazione per parti si trova la

$$
\begin{aligned}
&\int d^4x_1 \partial_{t_1}[e^{-ikx_1}\overleftrightarrow{\partial_{t_1}}\langle k',p';out|\phi(x_1)|p;in\rangle] \\
&= \int d^4x_1 \{e^{-ikx_1}(\partial^2_{t_1}\langle k',p';out|\phi(x_1)|p;in\rangle) - [(\nabla^2_1 - m^2)e^{-ikx_1}]\langle k',p';out|\phi(x_1)|p;in\rangle\} \\
&= \int d^4x_1 e^{-ikx_1}(\Box_1 + m^2)\langle k',p';out|\phi(x_1)|p;in\rangle] \,,
\end{aligned}
\tag{5.57}
$$

da cui segue che

$$
\begin{aligned}
S_{if} &= \langle k',p';out|k,p;in\rangle = \langle k',p';out|a^\dagger_{in}(k)|p;in\rangle \qquad (5.58)\\
&= \frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(k) Z}}\int d^4x_1 e^{-ikx_1}(\Box_1 + m^2)\langle k',p';out|\phi(x_1)|p;in\rangle \,.
\end{aligned}
$$

Utilizziamo ora lo stesso procedimento per rimuovere una particella dallo stato finale. Otteniamo così il risultato

$$
\begin{aligned}
S_{if} &= \langle k',p';out|k,p;in\rangle = \langle p';out|a_{out}(k')a^\dagger_{in}(k)|p;in\rangle \qquad (5.59)\\
&= \frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(k) Z}}\,\frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(k') Z}}\lim_{t'_1\to+\infty}\int d^4x_1 d^4x'_1 e^{-ikx_1}(\Box_1 + m^2) \\
&\times\ \partial_{t'_1}[e^{ik'x'_1}\overleftrightarrow{\partial_{t'_1}}\langle p';out|\phi(x'_1)\phi(x_1)|p;in\rangle] \,,
\end{aligned}
$$

nel quale, in virtù del limite $t'_1 \to +\infty$, possiamo operare la sostituzione

$$
\phi(x'_1)\phi(x_1) \to T\{\phi(x'_1)\phi(x_1)\} \,. \tag{5.60}
$$

La procedura che abbiamo descritto si può ripetere finchè tutte le particelle sono rimosse dagli stati iniziale e finale, e quello che resta è il valore di aspettazione nel vuoto del prodotto cronologico degli operatori di campo. Il risultato finale che si ottiene è

$$
\begin{aligned}
S_{if} &= \langle k',p';out|k,p;in\rangle = \left(\frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3 Z}}\right)^4 \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)2\omega(p)2\omega(k')2\omega(p')}} \qquad (5.61)\\
&\times \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x'_1 d^4x'_2\ e^{-i(kx_1+px_2)}e^{i(k'x'_1+p'x'_2)} \\
&\times \overrightarrow{(\Box_1 + m^2)}\overrightarrow{(\Box_2 + m^2)}\langle 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x'_1)\phi(x'_2)\}|0\rangle\overleftarrow{(\Box_{1'} + m^2)}\overleftarrow{(\Box_{2'} + m^2)} \,. \qquad (5.62)
\end{aligned}
$$

Ricordiamo che il valore di aspettazione nel vuoto che compare nella (5.62) è la funzione di Green a quattro punti *completa*, cioè data dalla somma di tutti i diagrammi di Feynman con quattro particelle create o distrutte in x_1, x_2, x'_1 e x'_2. I fattori $(\Box_i + m^2)$ rimuovono i propagatori corrispondenti alle gambe esterne, come si vede facilmente considerando che nello spazio degli impulsi questi fattori si trasformano in $(m^2 - p_i^2)$. Quindi la formula di riduzione (5.62) stabilisce che l'elemento di matrice S non è altro che la funzione di Green con le gambe esterne amputate e con i quadrimpulsi delle gambe esterne sul mass shell, cioè con $p^2 = p'^2 = k^2 = k'^2 = m^2$. Questa interpretazione emerge chiaramente riscrivendo la (5.62) nella forma

$$\begin{aligned} S_{if} &= \langle k', p'; out|k, p; in\rangle = \left(\frac{-i}{\sqrt{(2\pi)^3 Z}}\right)^4 \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)2\omega(p)2\omega(k')2\omega(p')}} \\ &\times \ (k^2 - m^2)(p^2 - m^2)(k'^2 - m^2)(p'^2 - m^2)\widehat{G}(k, p, k', p') , \end{aligned} \tag{5.63}$$

con

$$\begin{aligned} \widehat{G}(k, p, k', p') &= \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x'_1 d^4x'_2 \; e^{-i(kx_1+px_2)} e^{i(k'x'_1+p'x'_2)} \\ &\times \ \langle 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x'_1)\phi(x'_2)\}|0\rangle . \end{aligned} \tag{5.64}$$

Ovviamente la derivazione che abbiamo descritto è valida per ogni numero di particelle negli stati iniziale e finale.

Invarianza di Lorentz, sezione d' urto. La funzione di Green è Lorentz invariante ed è inoltre invariante per traslazioni. Quest'ultima affermazione vuol dire che G dipende solo dalle differenze x_1-x_2, etc... Per la trasformata di Fourier, questo signiifica che (si veda [1])

$$\widehat{G}(p_1, p_2, \ldots) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_{in} - \sum p_{fin})\mathscr{G}(p_1, p_2, \ldots) , \tag{5.65}$$

dove $\mathscr{G}$ è una funzione regolare e Lorentz-invariante dei momenti. Lo stesso argomento si applica evidentemente al residuo di G nei poli. Quindi, trascurando segni inessenziali, possiamo scrivere:

$$S_{fi} = \langle p_3, p_4, \ldots; out|p_1, p_2; in\rangle = \Pi \left[\frac{1}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}\right] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_{in} - \sum p_{fin})\mathscr{M}(p_1, p_2, \ldots) , \tag{5.66}$$

dove $\mathscr{M}$ è *l' ampiezza di Feynman*, una funzione Lorentz-invariante dei suoi argomenti. Dalla (5.66) si calcola la sezione d' urto del processo $p_1 + p_2 \to p_3 + \ldots$ a partire dalla formula generale [1]

$$(\rho v_{rel} N) \; d\sigma = \sum_{fin} \frac{|S_{fi}|^2}{T} . \tag{5.67}$$

I nostri stati *non* sono normalizzati a una particella nel volume V, di qui il fattore N a primo membro, che indica il numero di particelle bersaglio in V. Con la normalizzazione del continuo, $N = V/(2\pi)^3$ (si veda la l'Eq. (3.97), $\rho = 1/(2\pi)^3$ è la densitá delle particelle proiettile, e v_{rel} la velociá relativa.

Lasciamo al lettore la dimostrazione delle seguenti formule.

- sezione d' urto:

$$d\sigma = \frac{1}{4\omega(\mathbf{p_1})\omega(\mathbf{p_2})\mathbf{v_{rel}}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_{in} - \sum p_{fin}) \; \Pi_{i=3,\ldots} \left[\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{p_i})}\right] |\mathscr{M}|^2 , \tag{5.68}$$

  dove $v_{rel} = |v_1 - v_2|$ è la velocitá relativa delle particelle iniziali.

- spazio delle fasi invariante:

$$\frac{d^3 p}{2\omega(\mathbf{p}_i)} = d^4 p\, \theta(p^0)\delta(p^2 - m^2)\ . \tag{5.69}$$

- fattore invariante di flusso:

$$\omega(\mathbf{p_1})\omega(\mathbf{p_2})|v_1 - v_2| = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2}\ . \tag{5.70}$$

Le equazioni (5.69) e (5.70), sostituite nella (5.68), mostrano che $d\sigma$ è Lorentz-invariante.